

XI OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA TEORII MASZYN
I MECHANIZMÓW11th POLISH CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES
AND MECHANISMS

27—30. 04. 1987 ZAKOPANE

Stefan SAWIAK, Edmund WITTBRODT

Politechnika Gdańska

ANALIZA NUMERYCZNA KINEMATYKI MECHANIZMÓW

W UJĘCIU MACIERZOWYM

Streszczenie. W pracy przedstawiono pewien sposób analizy kinematycznej mechanizmów płaskich o dowolnej strukturze. Oparty jest on na równaniach opisujących zależności pomiędzy współrzędnymi określającymi położenie ogniw mechanizmów dla pary kinematycznej obrotowej i postępowej. Równania te po wprowadzeniu pewnych funkcji pozwalają na rozwiązanie zagadnienia położenia, prędkości i przyspieszeń przy wykorzystaniu zwykłych procedur rozwiązywania równań liniowych o stałych współczynnikach. Macierze układu równań obliczane są na drodze iteracyjnej. W pracy przedstawiono algorytm zagadnienia oraz prosty przykład obliczeniowy wykonany programem bazującym na przedstawionej metodzie. Uzyskano zbieżność wyników obliczeń do wyników uzyskanych na drodze analitycznej.

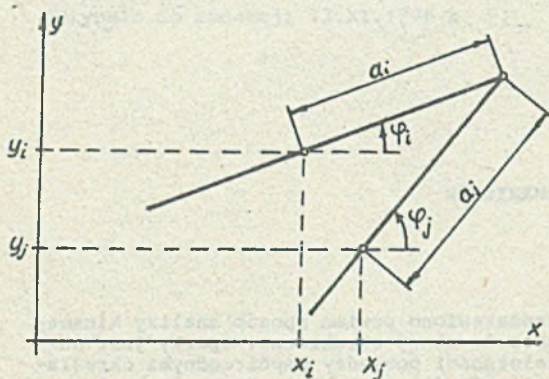
W pracy [1] przedstawiono pewne sposoby analizy dynamiki układów płaskich o zmiennej konfiguracji. Wśród tych układów istotne miejsce zajmują mechanizmy płaskie o dowolnej strukturze. Metody przedstawione w [1] pozwalają na analizę dynamiki mechanizmów płaskich o odkształcalnych ogniwach. Wśród metod tam omówionych jest metoda wymagająca znajomości przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń dowolnego ogniwa mechanizmu traktowanego jako mechanizm o nieodkształcalnych ogniwach.

W celu wykorzystania praktycznego wyżej wspomnianego sposobu analizy dynamiki mechanizmów pojawiła się konieczność opracowania algorytmu i programu analizy kinematyki tych mechanizmów w przypadku, gdy ich ogniwa traktowane są jako nieodkształcalne ciała połączone ze sobą w idealnych węzłach kinematycznych. Zadanie rozwiązania kinematyki tych mechanizmów sprowadza się do wyznaczenia przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń dowolnego punktu każdego nieodkształcalnego ogniwa mechanizmu.

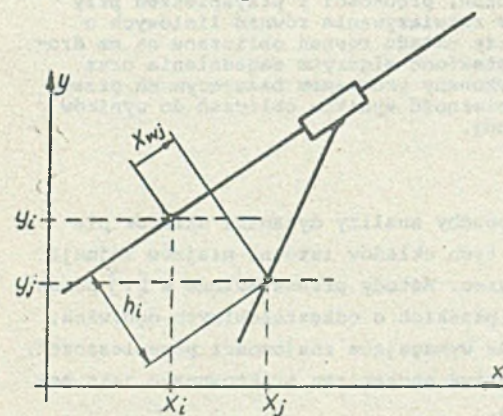
Nieodkształcalne ogniwo swobodne mechanizmu w układzie płaskim ma trzy stopnie swobody, które mogą być opisane przez trzy współrzędne: x_1 , y_1 -

przesunięcia dowolnego wybranego punktu ogniwa w kierunku osi x i y nieruchomego układu odniesienia oraz φ_1 - kąt ustawienia danego ogniwa mierzony względem osi x . Każde dwa ogniwa łączą się ze sobą za pomocą węzłów kinematycznych tworząc parę kinematyczną. Dla układu płaskiego są to pary kinematyczne obrotowe lub postępowe [2].

Znając przesunięcia x_1, y_1 wybranego punktu ogniwa o numerze 1 oraz jego kąt obrotu φ_1 można wyznaczyć przesunięcia dowolnego punktu tego ogniwa. Podobnie sprawa się przedstawia w przypadku prędkości i przyspieszeń dowolnego punktu ogniwa.



Rys. 1



Rys. 2

Para kinematyczna obrotowa (rys. 1) może być opisana wielkościami $x_1, y_1, \varphi_1, x_j, y_j, \varphi_j$. Między tymi wielkościami zachodzą zależności [3]:

$$x_1 + a_1 \cos \varphi_1 = x_j + a_j \cos \varphi_j, \quad (1)$$

$$y_1 + a_1 \sin \varphi_1 = y_j + a_j \sin \varphi_j. \quad (2)$$

Dla pary kinematycznej postępowej (rys. 2) zależności pomiędzy współrzędnymi opisującymi jej położenie są następujące:

$$x_j = x_1 + x_{wj} \cdot \cos \varphi_1 + h_j \sin \varphi_1, \quad (3)$$

$$y_j = y_1 + x_{wj} \cdot \sin \varphi_1 - h_j \cos \varphi_1, \quad (4)$$

$$\varphi_1 + \beta = \varphi_j. \quad (5)$$

Podczas ruchu mechanizmu wielkość h_j jest stała, natomiast zmienna jest wielkość x_{wj} oznaczająca przesunięcie względne ogniwa i względem j . Po wyrugowaniu wielkości x_{wj} ze wzorów (3) i (4) otrzymują one postać:

$$-x_1 \sin \varphi_1 + x_j \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1 - y_j \cos \varphi_1 = h_j. \quad (6)$$

W ten sposób uzyskano po dwa równania opisujące położenie ogniów mechanizmów płaskich. Mają one dla pary kinematycznej obrotowej postać:

$$x_i - x_j + a_i \cos \varphi_i - a_j \cos \varphi_j = 0, \quad (7)$$

$$y_i - y_j + a_i \sin \varphi_i - a_j \sin \varphi_j = 0, \quad (8)$$

a dla pary kinematycznej postępowej postać następująca:

$$-x_i \sin \varphi_i + x_j \sin \varphi_j + y_i \cos \varphi_i - y_j \cos \varphi_j = h_j, \quad (9)$$

$$\varphi_i - \varphi_j = \text{const.} \quad (10)$$

W każdym mechanizmie występują również ogniwa będące ostoją. W tym przypadku równania je opisujące mają postać:

$$\begin{aligned} x_i &= \text{const}, \\ y_i &= \text{const}, \\ \varphi_i &= \text{const}. \end{aligned} \quad (11)$$

W przypadku, gdy mechanizm płaski składa się z n ogniw nieodkształcalnych, liczba współrzędnych opisujących położenie mechanizmu jest równa $w = 3 \cdot n$. Liczba równań opisujących zależności pomiędzy tymi współrzędnymi jest równa:

$$r = 2(n_1 + n_2) + 3 \cdot n_3 \quad (12)$$

natomiast liczba stopni swobody mechanizmu jest równa:

$$s = w - r = 3n - 2n_1 - n_2, \quad (13)$$

gdzie:

- n_1 - liczba par obrotowych mechanizmu,
- n_2 - liczba par postępowych mechanizmu,
- n_3 - liczba ogniw stałych ostoi.

Równania (7-11), które można przedstawić w postaci:

$$f_k = f_k((x_i, y_i), \varphi_i) = 0; \quad i=1, \dots, n; \quad k=1, \dots, r \quad (14)$$

tworzą układ równań algebraicznych nieliniowych. W celu rozwiązywania równań nieliniowych (14) wprowadzono następujące funkcje:

$$\begin{aligned} c(\varphi) &= \frac{\cos \varphi}{\varphi}, \quad \neq 0 \\ s(\varphi) &= \frac{\sin \varphi}{\varphi}. \end{aligned} \quad (15)$$

Wówczas równania (7÷10) przyjmują postać:

$$\begin{aligned}x_i - x_j + a_i \cdot c(\varphi_i) \cdot \varphi_i - a_j \cdot c(\varphi_j) \cdot \varphi_j &= 0 \\y_i - y_j + a_i \cdot s(\varphi_i) \cdot \varphi_i - a_j \cdot s(\varphi_j) \cdot \varphi_j &= 0 \\-\sin\varphi_i \cdot x_i + \sin\varphi_i \cdot x_j + \cos\varphi_i \cdot y_i - \cos\varphi_i \cdot y_j - h_i &= 0 \\\varphi_i - \varphi_j - \beta_i &= 0\end{aligned}\tag{16}$$

W takim przypadku nieliniowy układ równań (14) można przedstawić w postaci macierzowej:

$$F \cdot x = 0,\tag{17}$$

gdzie:

F - macierz o wymiarach $r \times w$,

x - macierz kolumnowa zawierająca wszystkie współrzędne opisujące położenie ogniw mechanizmu,

$$x = \text{col}(x_i, y_i, \varphi_i), \quad i=1, \dots, n.$$

Macierz F jest macierzą prostokątną zawierającą elementy bądź zerowe, bądź równe +1 lub -1, bądź jedną z funkcji $c(\varphi_i)$, $s(\varphi_i)$, bądź też funkcją $\sin\varphi_i$ lub $\cos\varphi_i$. Wynika to z postaci równań (16).

Dokonyjąc podziału wektora x na

$$x^T = \left\{ x_z, x_n \right\}^T\tag{18}$$

gdzie:

x_n - wektor współrzędnych niezależnych,

x_z - wektor współrzędnych zależnych mechanizmu,

układ równań (17) uzyskuje postać:

$$[A \begin{matrix} \vdots \\ B \end{matrix}] \cdot \left\{ \begin{matrix} x_z \\ x_n \end{matrix} \right\} = 0\tag{19}$$

Wektor x_n współrzędnych niezależnych w przypadku mechanizmów ma wymiar równy liczbie stopni swobody s, który pokrywa się z ilością ogniw napędzających. Ruch tych ogniw jest zawsze znany, w związku z tym znany jest również wektor:

$$x_n = x_n(t).$$

Macierze A i B występujące w (19) uzyskuje się poprzez odpowiednie przedstawienie kolumn macierzy F.

Równanie (19) przekształca się do postaci:

$$A \cdot x_z = -B \cdot x_n \quad (20)$$

Obliczenia wektora x_z dokonuje się znając wartości elementów macierzy A i B. Dokonuje się tego w sposób iteracyjny. Wektor x_z dla czasu t_k oblicza się na podstawie znajomości elementów macierzy dla czasu t_{k-1} poprawionych poprzez zależności kinematyczne. Równanie (20) pozwala więc na obliczenie wektora współrzędnych x_z przy wykorzystaniu procedury rozwiązywania układu algebraicznych równań liniowych.

Różniczkując (20) względem czasu uzyskujemy układ równań:

$$A \cdot \dot{x}_z = -B \cdot \dot{x}_n - \dot{B} \cdot x - \dot{A} \cdot x_z, \quad (21)$$

w którym kropki oznaczają pochodne względem czasu.

Z układu równań (21) można wyznaczyć wektor x_z prędkości współrzędnych zależnych ogniw mechanizmu dla czasu t_k na drodze rozwiązywania układów algebraicznych równań liniowych.

Różniczkując względem czasu równanie (21) otrzymujemy:

$$A \cdot \ddot{x}_z = -B \cdot \ddot{x}_n - 2 \cdot \dot{B} \cdot \dot{x}_n - \ddot{B} \cdot x_n - 2 \cdot \dot{A} \cdot \dot{x}_z - \ddot{A} \cdot x_z, \quad (22)$$

z którego można wyznaczyć przyspieszenia \ddot{x}_z współrzędnych zależnych dla czasu t_k , również na drodze rozwiązywania układu algebraicznych równań liniowych.

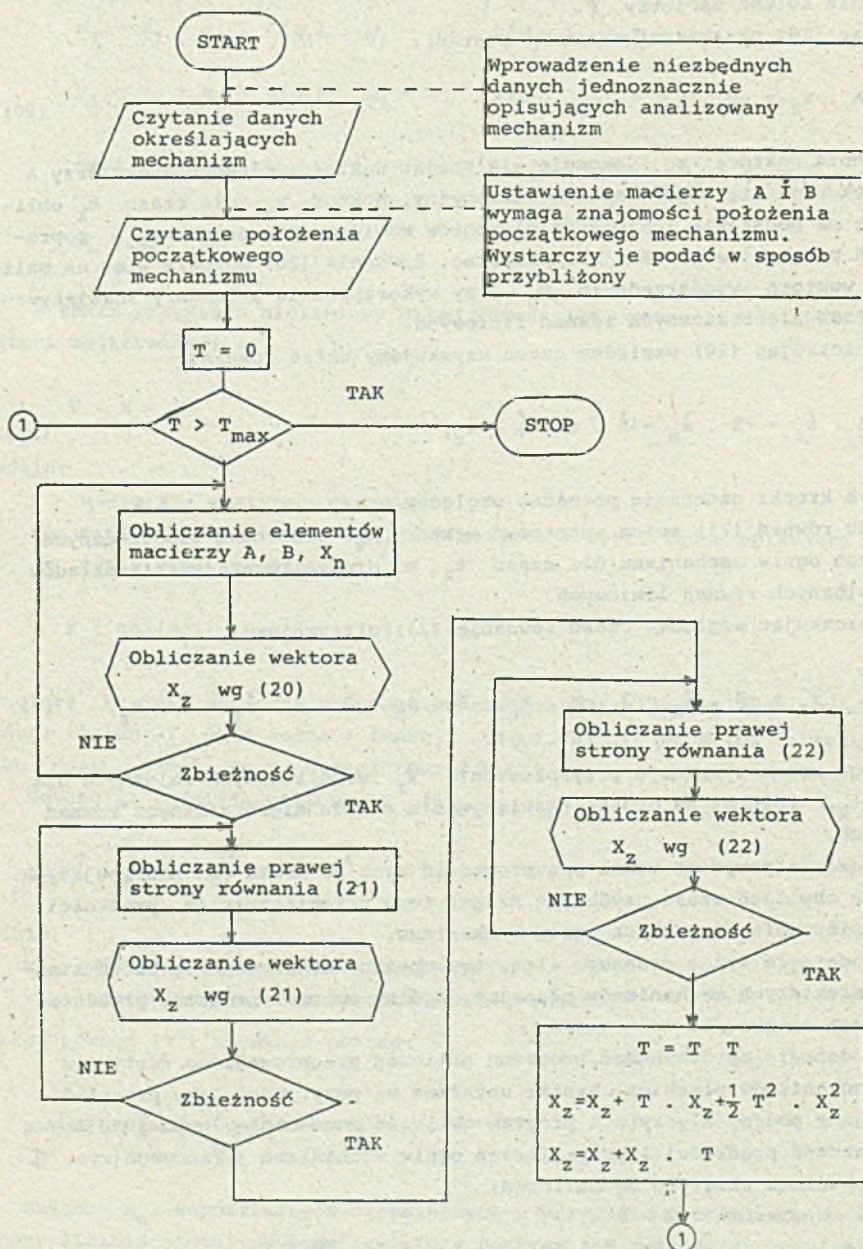
Obliczenia powyższe można przeprowadzić krok po kroku w następujących po sobie chwilach czasu, uzyskując dzięki temu przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia wszystkich ogniw mechanizmu.

Na podstawie wyżej podanego algorytmu opracowano program obliczeń kinematyki niektórych mechanizmów płaskich. Ogólny schemat programu przedstawiony jest na rys. 3.

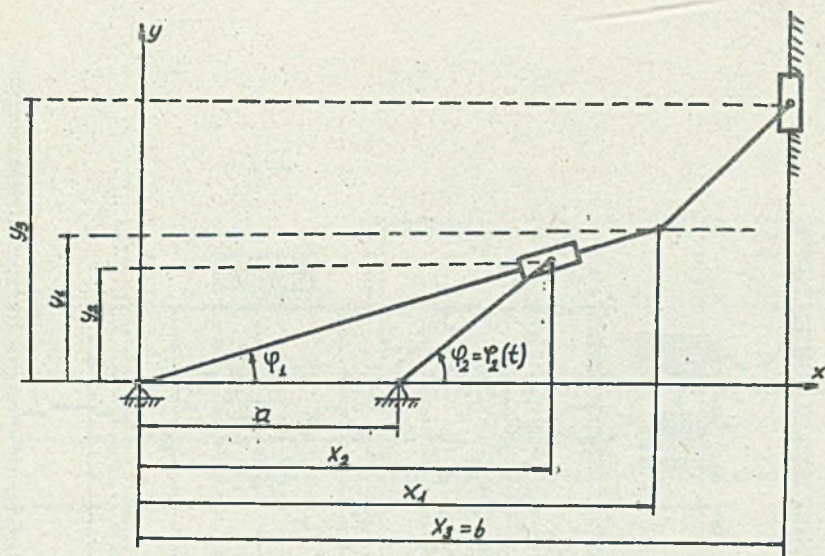
Na podstawie opracowanego programu obliczeń przeprowadzono testy dla kilku mechanizmów płaskich. Wyniki uzyskane są pozytywne. Jako przykład ilustrujący podany algorytm i program obliczeń przedstawiono poniżej obliczenia przemieszczeń prędkości i przyspieszeń ogniw mechanizmu jarzmowego (rys. 4). Dane mechanizmu wziętego do obliczeń:

$$r = 1 \text{ m}, \quad l_1 = 4 \text{ m}, \quad l_2 = 2 \text{ m}, \quad a = 2, \quad b = 5 \text{ m}.$$

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch przypadków zmiany kąta $\varphi_2 = \varphi_2(t)$.



Rys. 3



Rys. 4

Współrzędna φ_2 jest współrzędną niezależną, natomiast pozostałe współrzędne są od niej zależne.

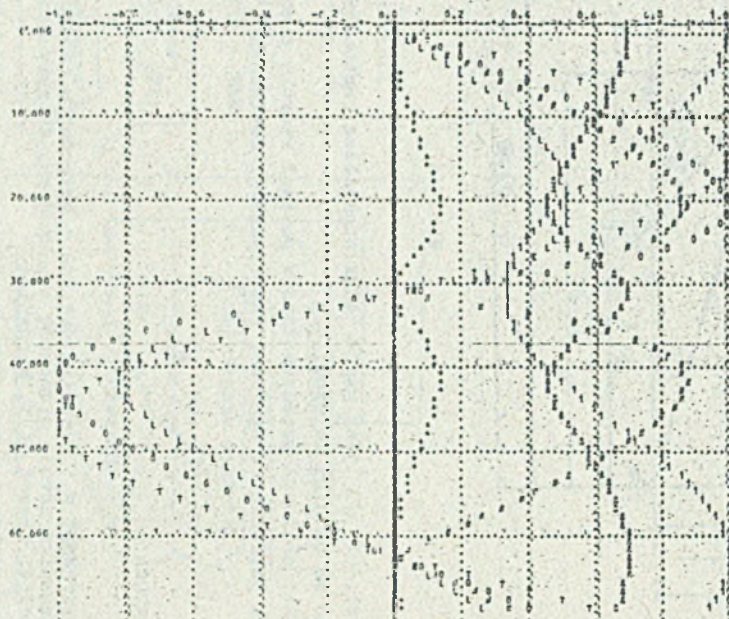
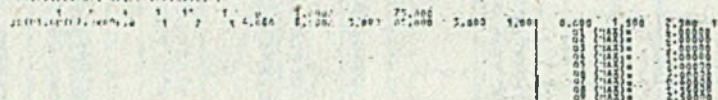
Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci wydruku z komputera na rys. 5. Wyniki porównano z wynikami analitycznymi dokładnymi. Uzyskano ich zgodność.

LITERATURA

- [1] WITTBRODT E.; Dynamika układów o zmiennej w czasie konfiguracji z zastosowaniem metody elementów skończonych, Zeszyty Naukowe PG, Gdańsk 1983, Nr 364, Zeszyt XLVI, Mechanika.
- [2] PARSZEWSKI Z.; Teoria Maszyn i Mechanizmów, WNT, Warszawa 1974.
- [3] SAWIAK S., WITTBRODT E.; Analiza numeryczna kinematyki mechanizmów płaskich, Materiały Sesji Naukowej PG, Gdańsk 1985.

.....
 01157000 01 1041000 51079431(1) 00001700 00 27000000 17 00000
 0010100 10 0000 001010000 1000000000 00000000 10 00000000 0010
 00000000 00000000

.....
 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000
 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000



Rys. 5a

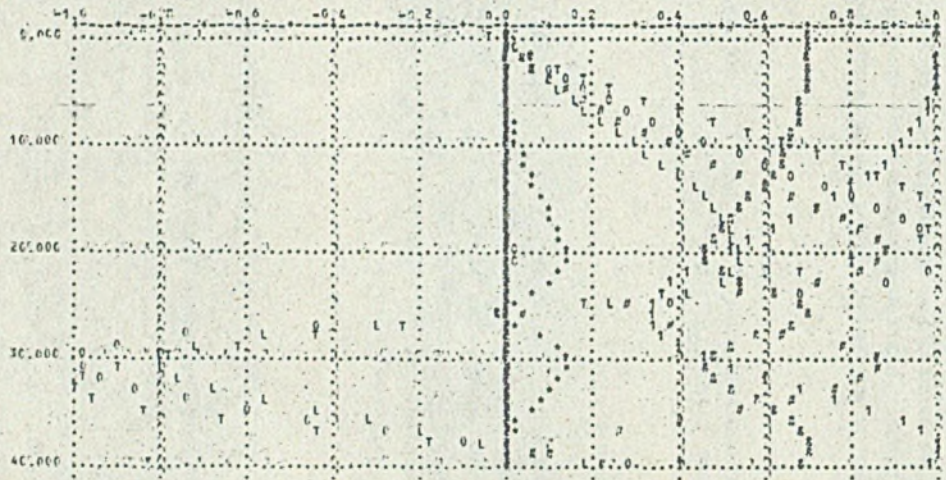
.....

PLISTING OF SAMPLE DATA(17) PRINTED ON 24JUNE AT 12.14.17
 OUTPUT BY ADRK JETPRINT:GP-SAMAX ON 030784 AT 17.10.25 USING 012
 DEQUIPNT S02Y02P

.....

KOMPLET DOLICZEN PR 1 TYTUŁ NECHARNIŁE IARZONOWE JJC
 WU, ZŁEC, WPF, NCF, KFP, L7, H, TLITIT W

JK(11),0:(1),	0,4000	1	11	2	-1	1	4,000	2,4000	3,2000	21,0000	5,5000	1,0000	0,6000	1	500	2,5000	1



.....

Rys. 5b

НОМЕРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КИНЕМАТИКИ МЕХАНИЗМОВ
В МАТРИЧНОМ ПОДХОДЕ

Р е з ю м е

В работе представлен метод кинематического анализа плоских механизмов производной структуры. Метод опирается на уравнениях связи координат положений звеньев для вращательной и поступательной кинематических пар. Представлен алгоритм компьютерной программы и расчётный пример решения реального механизма. Итоги компьютерных решений согласны с аналитическими.

NUMERICAL ANALYSIS OF KYNEMATICS OF MECHANISMUS BY MEANS
OF MATRIX FORMULA

S u m m a r y

There is shown some way of the kinematic analysis of planar mechanisms in this paper. The analysis is based on equations describing dependences between coordinates of links for the rotating and sliding kinematic pairs. The algorithm of the method is given, and the simple numerical example is calculated. The obtained results show a good accuracy in comparing with the analytical ones.

Recenzent: Prof. dr inż. Antoni Jakubowicz

Wpłynęło do redakcji 5.XI.1986 r.