

XI OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA TEORII MASZYN
I MECHANIZMÓW11th POLISH CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES
AND MECHANISMS

27—30. 04. 1987 ZAKOPANE

Stanisław SUWAJ, Andrzej GÓRAL
Instytut Mechaniczno-Konstrukcyjny
Bielsko-BiałaZASTOSOWANIE FUNKCJI PRZENOSZENIA DÓ ANALIZY DYNAMICZNEJ
MECHANIZMÓW Z UWZGLĘDNIENIEM TARCIA W WĘZŁACH

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę analizy ruchu mechanizmów o jednym stopniu swobody pod wpływem sił zewnętrznych z uwzględnieniem tarcia w węzłach. Ruch mechanizmu opisano jednym nieliniowym równaniem różniczkowym o parametrach zredukowanych, w którym człon dysypacyjny opisuje moc traconą na tarcie. Parametry zredukowane i obciążenia zredukowane wyznaczono wykorzystując funkcje przenoszenia. Siły tarcia wyznaczono iteracyjnie z warunków równowagi kinetostaticznej. Podano przykład liczbowy ilustrujący zastosowanie metody do analizy mechanizmu korbowo-suwowego.

1. Wstęp

Zagadnienie analizy ruchu mechanizmów pod wpływem sił zewnętrznych z uwzględnieniem tarcia w węzłach ma bogatą literaturę [1], [2]. Większość przedstawionych metod analizy rozpatruje warunki równowagi dynamicznej poszczególnych ogniw z uwzględnieniem więzów geometrycznych, co prowadzi do konieczności rozwiązywania układów równań różniczkowych, przy czym siły tarcia wyznaczone są iteracyjnie w każdym kroku całkowania równań ruchu. W niniejszej pracy przedstawiono sposób analizy ruchu mechanizmów płaskich o jednym stopniu swobody pod wpływem sił zewnętrznych przy uwzględnieniu oporów tarcia suchego w węzłach. Ruch mechanizmu opisany jest jednym nieliniowym równaniem różniczkowym o parametrach zredukowanych, a tarcie uwzględnia się przez odejmowanie w każdym kroku całkowania członu dysypacyjnego. Moc traconą na tarcie wyznacza się analizując warunki równowagi kinetostaticznej mechanizmu w każdym kroku całkowania, a siły tarcia wyznacza się iteracyjnie. Do wyznaczenia parametrów zredukowanych, jak i redukcji sił łącznie z siłami tarcia wykorzystano funkcje przenoszenia.

2. Równanie ruchu

Dokonując bilansu pracy sił działających na mechanizm oraz wyznaczając pochodną energii kinetycznej względem czasu [3] otrzymuje się zależność:

$$\frac{dU}{dt} = N_S + N_G + N_U - N_T, \quad (1)$$

gdzie:

- U - energia kinetyczna mechanizmu,
- N_S - moc sił napędowych,
- N_G - moc sił ciężkości,
- N_U - moc oporów użytecznych,
- N_T - moc rozpraszana przez siły tarcia.

Traktując moc rozwijaną przez siły napędowe, siły ciężkości, siły oporów użytecznych jako moc sił zewnętrznych N_Z można równanie (1) zapisać w postaci:

$$\frac{dU}{dt} = N_Z - N_T. \quad (2)$$

Zakładając, że mechanizm posiada jeden stopień swobody, można analizować jego ruch pod wpływem sił zewnętrznych jako ruch jednego ogniwa posiadającego masę zredukowaną B_Z , redukując do tego ogniwa wszystkie siły zewnętrzne oraz siły tarcia:

$$B_Z \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{dB_Z}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = M_Z - M_T, \quad (3)$$

gdzie:

- φ - współrzędna określająca położenie ogniwa napędowego,
- B_Z - zredukowana masa mechanizmu,
- M_Z - zredukowane siły zewnętrzne,
- M_T - zredukowane siły tarcia.

Oczywiście parametry zredukowane należy rozumieć w sensie uogólnionym, zależnie od tego, czy ogniwo redukcji wykonuje ruch postępowy czy obrotowy. Stosując do określania parametrów zredukowanych metodę pokazaną przez Dranga i Manolescu [5] można napisać:

$$B_Z = S^T M S,$$

$$\frac{dB_Z}{d\varphi} = 2 S^T M R, \quad (4)$$

$$M_Z = S^T Q,$$

gdzie:

 S - wektor funkcji przenoszenia I rodzaju, R - wektor funkcji przenoszenia II rodzaju, M - macierz mas, P - wektor sił zewnętrznych łącznie z siłami ciężkości działających na poszczególne ogniwa zredukowany do środków mas ogniw,

przy czym:

$$S = \text{col} [s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{21}, \dots, s_{n1}, s_{n2}, s_{n3}],$$

$$R = \text{col} [r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{21}, \dots, r_{n1}, r_{n2}, r_{n3}],$$

$$M = \text{diag} [m_1, m_1, J_1, m_2, \dots, m_n, m_n, J_n],$$

$$P = \text{col} [F_1^x, F_1^y, M_1, F_2^y, \dots, F_n^x, F_n^y, M_n],$$

 n - liczba ogniw ruchomych mechanizmu.

Moc traconą na tarcie N_T wyznacza się jako sumę mocy traconych w węzłach obrotowych i postępowych. Moc traconą na tarcie w węźle obrotowym "k" łączącym ogniwa "i" oraz "j" wyznacza się z zależności:

$$N_k^T = M_k^T \omega_k = F_k \mu_k \frac{d_k}{2} |\omega_i - \omega_j| = F_k \mu_k \frac{d_k}{2} |s_{i3} - s_{j3}| \omega_1, \quad (5)$$

gdzie:

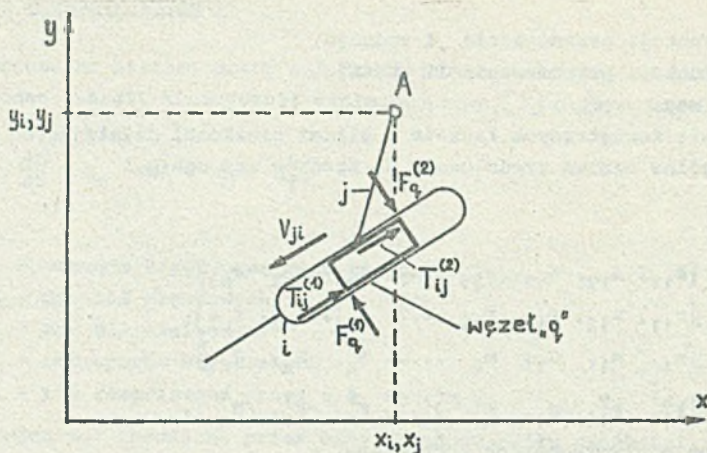
 F_k - reakcja w węźle obrotowym nr "k", M_k^T - moment tarcia w węźle "k", ω_k - względna prędkość katowa ogniw połączonych węzłem "k", d_k - średnica czopa w węźle "k".

W przypadku gdy ogniwo redukcji porusza się ruchem postępowym ω_1 , należy zastąpić przez v_1 , a funkcje przenoszenia s_{i3} i s_{j3} mają inne wymiary.

Węzeł postępowy zamodelowano umieszczając składowe reakcje w narożach suwaka, co zilustrowano na rysunku 1. Kierunki reakcji $F_q^{(1)}$ i $F_q^{(2)}$ pozwalające ustalić naroża suwaka, w których działają siły tarcia, można określić z warunków równowagi kinetostatycznej [5] lub stosując funkcje sterujące [2]. Wartość prędkości względnej ogniw i oraz j wyznacza się wykorzystując funkcje przenoszenia dla punktów A_i i A_j pokrywających się w danej chwili z sobą. Moc traconą w węźle postępowym określa zależność:

$$N_q^T = (|F_q^{(1)}| + |F_q^{(2)}|) \mu_q |v_i - v_j| =$$

$$= (|F_q^{(1)}| + |F_q^{(2)}|) \mu_q \sqrt{s_{i1}^2 + s_{i2}^2} - \sqrt{s_{j1}^2 + s_{j2}^2} |\omega_1|. \quad (6)$$



Rys. 1.

Całkowita moc tracona na tarcie będzie równa sumie mocy traconej w węzłach postępowych i obrotowych:

$$N^T = \sum_{k=1}^{k=r} N_k^T + \sum_{q=1}^{q=p} N_q^T,$$

gdzie:

r - liczba węzłów obrotowych mechanizmu,

p - liczba węzłów postępowych w mechanizmie.

Wyrażenie określające zredukowane siły tarcia M^T (3) otrzymuje się dzieląc moc tarcia N^T (2) przez prędkość ogniwa redukcji:

$$M^T = \sum_{k=1}^{k=r} F_k \mu_k \frac{d_k}{2} |s_{i3} - s_{j3}| + \sum_{q=1}^{q=p} (|F_q^{(1)}| + |F_q^{(2)}|) \mu_q \sqrt{s_{i1}^2 + s_{i2}^2} + \\ - \sqrt{s_{j1}^2 + s_{j2}^2}.$$

Reakcje F_k , F_q należy wyznaczać w każdym kroku całkowania.

3. Wyznaczanie reakcji w węzłach

Reakcje w węzłach wyznacza się z warunków równowagi kinetostatycznej poszczególnych ogniwa. Do określenia składowych przyspieszenia wykorzystuje się funkcje przenoszenia. Dla każdego z ogniwa z wyjątkiem ogniwa redukcji

układa się trzy warunki równowagi w kierunku osi x , y oraz warunek równowagi momentów. Dla ogniwa redukcji układu się dwa warunki równowagi, spełnienie trzeciego zapewnia równanie różniczkowe (3).

Uwzględniając, że siły wzajemnego oddziaływania ogniw są równe i przeciwnie skierowane, można warunki równowagi kinetostatycznej zapisać w postaci macierzowej:

$$WF = B + P + T, \quad (9)$$

gdzie:

W - macierz współczynników składowych reakcji,

F - wektor niewiadomych reakcji,

B - wektor sił bezwładności,

P - wektor sił zewnętrznych,

T - wektor sił tarcia.

Równanie (9) można rozwiązać tylko iteracyjnie, bowiem siły tarcia zależą od wektora reakcji F . Reakcje w węzłach obrotowych wyznacza się mając składowe wektora F :

$$F_k = \sqrt{(F_k^x)^2 + (F_k^y)^2}. \quad (10)$$

Siły tarcia $T_q^{(1)}$, $T_q^{(2)}$ i momenty tarcia M_k^T wyznacza się analogicznie jak we wzorach (5), (6), (7). Współczynniki tarcia mogą być funkcją prędkości względnie innych parametrów ruchu. W większości prostych mechanizmów równanie (9) da się rozwickłać analitycznie, co znacznie skraca czas obliczeń numerycznych.

4. Rozwiązanie równań ruchu

Rozwiązanie równania (3) wymaga wyznaczenia w każdym kroku całkowania członu dysypacyjnego M_T . Przyjęto następujący schemat postępowania iteracyjnego:

$$B_z \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{dB_z}{d\varphi_i} \left(\frac{d\varphi_i}{dt} \right)^2 = M_z(\varphi_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_i) - M_{T(i-1)}. \quad (11)$$

Na podstawie φ_i , $\dot{\varphi}_i$, $\ddot{\varphi}_i$ wyznacza się:

$$F = W_i^{-1} (B_i + P_i + T_{i-1}),$$

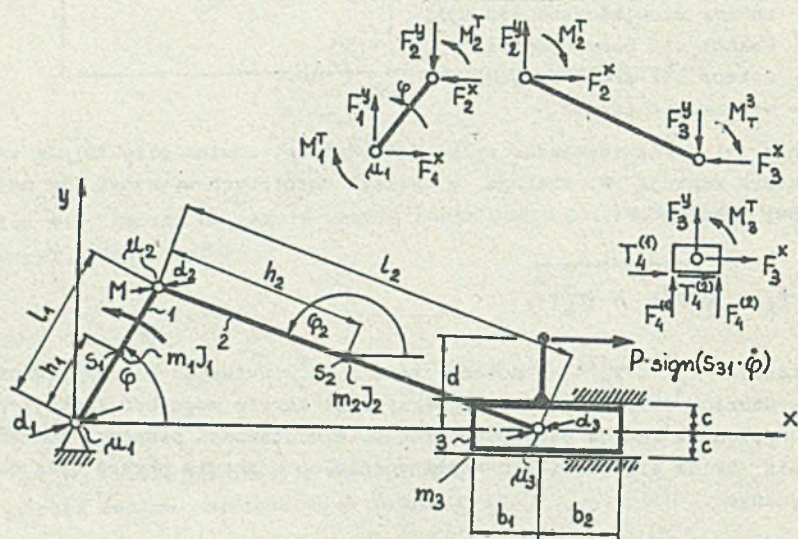
a następnie M_{T_i} z równania (7), którą to wartość wstawia się do równania (11) i powtarza obliczenia.

Proces iteracji prowadzi się aż do spełnienia warunku

$$\frac{\|F_i\| - \|F_{i-1}\|}{\|F_i\|} < \varepsilon.$$

5. Przykład obliczeniowy

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla mechanizmu korbowo-suwowego przedstawionego na rysunku 2. Mechanizm napędzany jest momentem $M = M_0 - a\varphi$ i obciążony siłą: $P = P(t) = P \cdot \text{sign}(s_{31} \cdot \dot{\varphi})$.



Rys. 2

Odpowiednie funkcje przenoszenia wyrażają się wzorami:

$$\lambda = \frac{l_1}{l_2}$$

$$s_{11} = -h_1 \sin \varphi_1; \quad s_{12} = h_1 \cos \varphi_1; \quad s_{13} = 1,$$

$$\varphi_2 = \arcsin \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_1}; \quad \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{\lambda \sin \varphi_1}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_1}},$$

$$s_{21} = -l_1 \sin \varphi_1 + h_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 \cdot \cos \varphi_2 + h_2 \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} \sin \varphi_2,$$

$$s_{22} = -l_1 \sin \varphi_1 + h_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 \cdot \sin \varphi_2 - h_2 \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} \cos \varphi_2,$$

$$s_{23} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}; \quad \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} = \frac{\lambda(\lambda^2 - 1) \sin \varphi_1}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_1)^{3/2}},$$

$$s_{32} = -l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \sin \varphi_2; \quad s_{32} = 0; \quad s_{33} = 0,$$

$$r_{11} = -h_1 \cos \varphi_1; \quad r_{12} = -h_1 \sin \varphi_1,$$

$$r_{21} = -l_1 \cos \varphi_1 + h_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 \cos \varphi_2 + h_2 \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} \sin \varphi_2,$$

$$r_{22} = -h_1 \sin \varphi_1 + h_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 \sin \varphi_2 - h_2 \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} \cos \varphi_2,$$

$$r_{23} = \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2},$$

$$r_{31} = -l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 \cos \varphi_2 + l_2 \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} \sin \varphi_2.$$

Parametry zredukowane mechanizmu zgodnie ze wzorem (4) określają zależności:

$$B_{Zr} = m_1 (s_{11}^2 + s_{12}^2) + m_2 (s_{21}^2 + s_{22}^2) + m_3 s_{32}^2 + J_1 s_{13}^2 + J_2 s_{23}^2 + m_3 s_{31}^2,$$

$$\frac{dB_{Zr}}{d\varphi_1} = m_1 (s_{11} r_{11} + s_{12} r_{12}) + m_2,$$

$$\frac{dB_{Zr}}{d\varphi_1} = m_1 (r_{11} s_{11} + r_{12} s_{12}) + m_2 (r_{21} s_{21} + r_{22} s_{22}) +$$

$$+ m_3 s_{31} r_{31} + J_2 r_{13} s_{23},$$

$$s^T P = M_{SN} G_1 s_{12} - G_2 s_{22} + P s_{31}.$$

Warunki równowagi kinetostatycznej mechanizmu z rys. 3 mają postać:

$$F_1^X - F_2^X = m_1 (s_{11} \ddot{\varphi} + r_{11} \dot{\varphi}^2),$$

$$F_1^Y - F_2^Y = m_1 (s_{12} \ddot{\varphi} + r_{12} \dot{\varphi}^2) + m_1 g,$$

$$F_2^X - F_3^X = m_2 (s_{21} \ddot{\varphi} + r_{21} \dot{\varphi}^2),$$

$$F_2^Y - F_3^Y = m_2 (s_{22} \ddot{\varphi} + r_{22} \dot{\varphi}^2) + m_2 g,$$

$$\begin{aligned} -F_2^X h_2 \sin \varphi_2 + F_2^Y h_2 \cos \varphi_2 - (l_1 - h_2) F_3^X \sin \varphi_2 + (l_2 - h_2) F_3^Y \cos \varphi_2 = \\ = J_2 (s_{23} \ddot{\varphi} + r_{23} \dot{\varphi}^2) + M_{21}^T - M_{32}^T, \end{aligned}$$

$$F_3^X = m_3 (s_{31} \ddot{\varphi} + r_{31} \dot{\varphi}^2) - T_4^{(1)} - T_4^{(2)},$$

$$F_3^Y + F_4^{(1)} + F_4^{(2)} = m_3 g,$$

$$-F_4^{(1)} b_1 + F_4^{(2)} b_2 = M_{32}^T - T_4^{(1)} \operatorname{sign} F_4^{(1)} - T_4^{(2)} \operatorname{sign} F_4^{(2)}.$$

Powyższy układ równań łatwo rozwiązać analitycznie i wyznaczyć składowe reakcji. Reakcje w węzłach wynoszą:

$$F_1 = \sqrt{(F_1^X)^2 + (F_1^Y)^2},$$

$$F_2 = \sqrt{(F_2^X)^2 + (F_2^Y)^2},$$

$$F_3 = \sqrt{(F_3^X)^2 + (F_3^Y)^2},$$

Siły tarcia i momenty tarcia określają zależności:

$$T_4^{(1)} = \mu_4 F_4^{(1)} \operatorname{sign}(s_{31} \dot{\varphi}); \quad T_4^{(2)} = \mu_4 F_4^{(2)} \operatorname{sign}(s_{31} \dot{\varphi}),$$

$$M_{01}^T = F_1 d_{1/2} \mu_1 \operatorname{sign} \dot{\varphi},$$

$$M_{21}^T = F_2 d_2 / 2 \mu_2 \operatorname{sign}(\dot{\varphi} - s_{23} \dot{\varphi}),$$

$$M_{32}^T = F_3 d_3 / 2 \mu_3 \operatorname{sign}(s_{23} \dot{\varphi}),$$

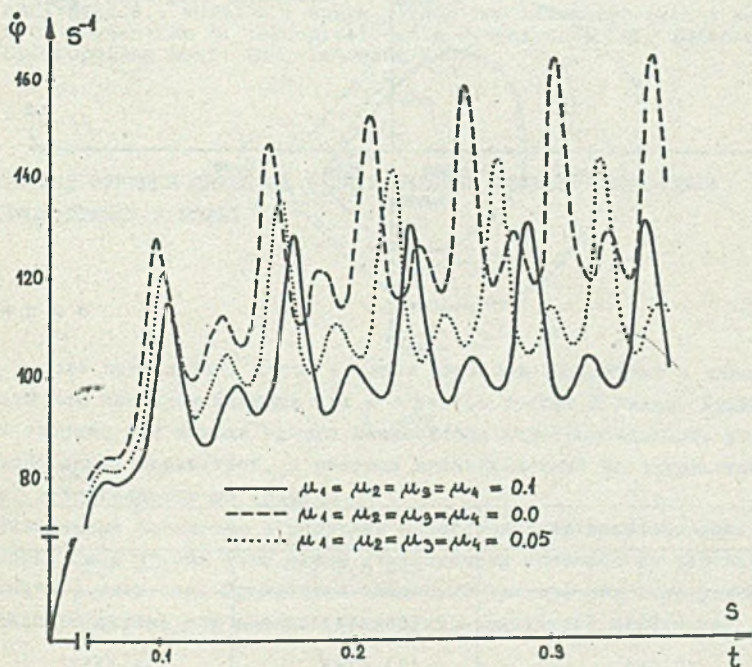
a funkcja dysypacji ma postać:

$$M_T = |M_{01}^T| + |M_{21}^T| |1 - s_{23}| + |M_{32}^T| |s_{23}| + (|T_4^{(1)}| + |T_4^{(2)}|) |s_{31}|.$$

Obliczenia numeryczne przeprowadzono na mikrokomputerze IBM PC dla danych:

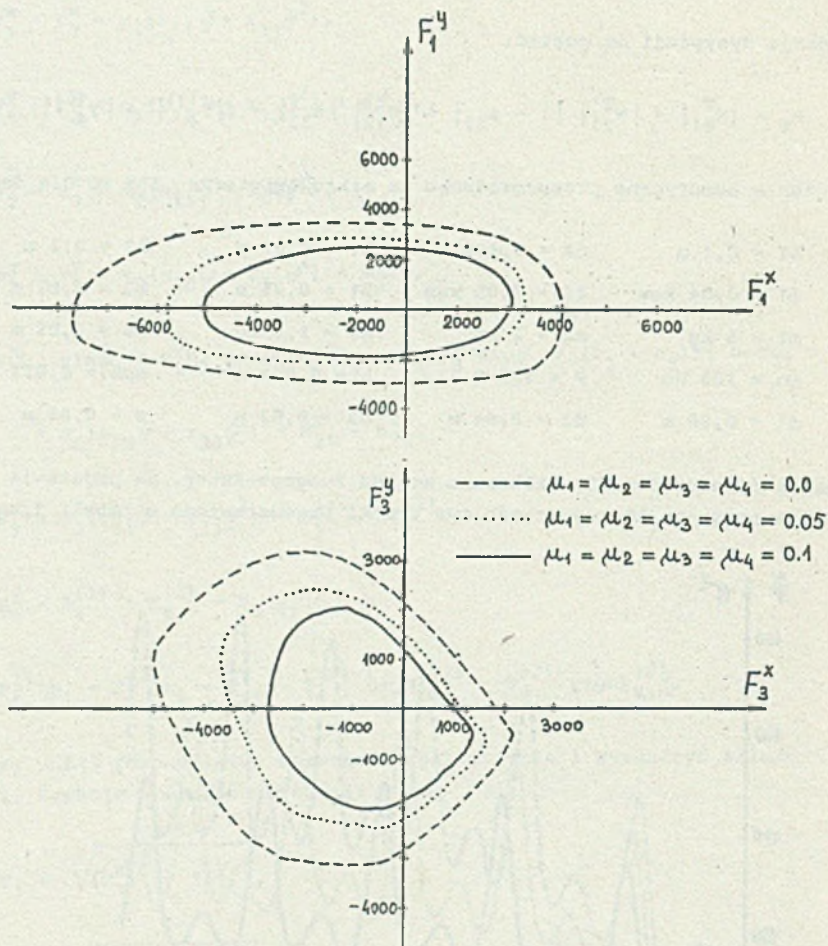
L1 = 0,1 m	L2 = 0,4 m	h1 = 0,02 m	h2 = 0,2 m
I1 = 0,04 kgm	I2 = 0,05 kgm	b1 = 0,05 m	b2 = 0,03 m
m1 = 5 kg	m2 = 2 kg	m3 = 1,5 kg	ds = 0,05 m
Mo = 100 Nm	P = 500 N	h = 0,001 s	eps = 0,01
d1 = 0,06 m	d2 = 0,04 m	d3 = 0,03 m	c = 0,03 m

Równania różniczkowe (3) całkowano metodą Rungego-Kutty. Na podstawie testowania programu, którego częściowe wyniki przedstawiono w tabeli 1, usta-



Rys. 3

lono krok całkowania $h = 0,001$ s. Przebieg prędkości kątowej w czasie dla różnych współczynników tarcia przedstawiono na rys. 3, a wartości reakcji F w węzłach w ruchu ustalonym obrazuje rys. 4.



Rys. 4

Tabela 1

Krok całkowania h [s]	$\dot{\varphi}$	
	$t = 0,5$ s	$t = 1,0$ s
0,01	139,1663	140,7359
0,001	153,0763	129,5863
0,0001	153,0582	129,5782

6. Uwagi i wnioski końcowe

Przedstawiona metoda pozwala na łatwą analizę dynamiczną mechanizmów płaskich z uwzględnieniem tarcia w węzłach oraz wyznaczanie wartości reakcji w węzłach w trakcie ruchu przy dowolnym obciążeniu mechanizmu $P = P(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ i dowolnych siłach napędowych $M_{SN} = M_{SN}(\varphi, \dot{\varphi}, t)$, co czyni ją szczególnie przydatną dla konstruktorów. Czas analizy numerycznej ruchu mechanizmu do chwili $t = 3s$ wynosi 5 min. Warunek zbieżności dla $\varepsilon = 0,01$ wymagał średnio 2 kroków iteracji.

LITERATURA

- [1] SCHIEHLEN W., SCHRAMM D.: Dynamics of machines and mechanism with Coulomb's friction, Proceeding of Sixth World Congress of Theory of Machines and Mechanism, New Delhi, India XII 1983.
- [2] WOJCIECH S.: Dynamika płaskich mechanizmów dźwigniowych z uwzględnieniem podatności ogniw oraz tarcia i luzów w węzłach. ZN Politechniki Łódzkiej, Mechanika, z. 66, 1984.
- [3] PARSZEWSKI Z.: Teoria maszyn i mechanizmów. WNT Warszawa 1974.
- [4] DRANGA M.M., MANOLESCU N.I.: Matrix Equation for the Motion of Planar Mechanism with one degree of Mobility Using Transmission Functions, Mechanism and Machine Theory, Vol 12, 1977.
- [5] MACZYŃSKI K., SUWAJ S.: Wpływ parametrów kinematycznych i konstrukcyjnych mechanizmu na jego przełożenie dynamiczne, Ref. zgłoszony na XI Ogólnopolską konf. TMM, Zakopane 1987.

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ПЕРЕНОСА В ДИНАМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ МЕХАНИЗМОВ С УЧЁТОМ ТРЕНИЯ В УЗЛАХ

Резюме

В работе представлен метод анализа движения механизмов с одной степенью свободы под влиянием внешних сил и с учётом трения в узлах. Движение механизма описано при помощи одного нелинейного дифференциального уравнения редуцированных параметров, в котором диссипационный член представляет мощность, затрагиваемую на трение.

Приведенные параметры и нагрузки определены при использовании функции переноса. Силы трения определены итерационным способом из условий кинематического равновесия. Приводится численный пример, иллюстрирующий применение данного метода для анализа кривошипно-ползунного механизма.

THE APPLICATION OF THE TRANSMISSION FUNCTIONS TO THE
DYNAMIC ANALYSIS OF MECHANISMS WITH FRICTION IN PAIR BEARINGS

S u m m a r y

The method of analysis of one degree of motion mechanisms under the influence of the external forces with friction in pair bearings has been presented in this paper. The movement of the mechanism has been described by a nonlinear differential equation with reduced parameters. The dissipational term of the equation circumscribes the power lost due to friction.

Reduced parameters and reduced loads have been defined by the application of the transmission functions. The friction forces have been calculated iteratively out of the conditions of the dynamic equilibrium. A numerical example which illustrates the application of the method to the analysis of the slidercrank mechanism has also been presented.

Recenzent: Doc. dr inż. Tadeusz Młynarski

Wpłynęło do redakcji 17.XII.1986 r.