

XI OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA TEORII MASZYN I MECHANIZMÓW

11th POLISH CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES AND MECHANISMS

27—30. 04. 1987 ZAKOPANE

Stanisław WIŚNIEWSKI
Politechnika Poznańska

DRGANIA GIĘTNE WAŁU Z WĄSKIMI TARCZAMI KOŁOWYMI

Streszczenie. W pracy podano i rozwiązano sprzężone równania różniczkowe drgań giętnych wału z utwierdzonymi centrycznie wąskimi tarczami kołowymi, obracającego się ze stałą prędkością kątową.

W równaniach pominięto wpływ odkształceń postaciowych jako nieznaczących dla przekrojów kołowych wału; wpływ momentów giroskopowych uwzględniono tylko od tarcz, które są traktowane jako sztywne i dyskretne.

W końcowej części pracy wyprowadzono wzory dla drgań giętnych wymuszonych siłami poprzecznymi skupionymi i rozłożonymi w sposób ciągły.

Zagadnienie rozwiązano za pomocą przekształceń całkowitych Laplace'a przy użyciu dystrybucji Diraca.

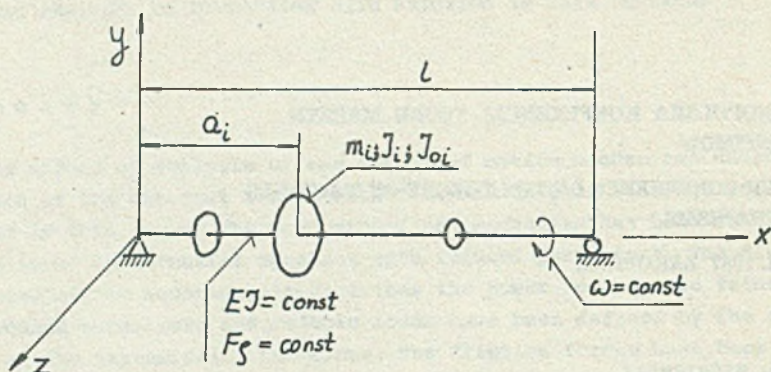
Referat stanowi streszczenie, w którym pominięto przykład liczbowy oraz szereg przekształceń i wyprowadzeń. Jednakże uważny Czytelnik na podstawie podanego algorytmu obliczania częstości drgań własnych oraz wzorów może przeprowadzić obliczenia.

1. Równania różniczkowe drgań giętnych własnych

Rozważmy drgania giętne wału jednoprzęsłowego o stałej sztywności z utwierdzonymi centrycznie - prostopadle do osi wału - cienkimi tarczami kołowymi, rys. 1.

Równania różniczkowe drgań giętnych wału, przy uwzględnieniu momentów giroskopowych tarcz oraz pominięciu wpływu odkształceń postaciowych - jako nieznaczących, mają postać:

$$EJ_y^{IV}(x;t) - Mg_z''(x;t) \equiv EJ_y^{IV}(x;t) + F_{p_y}(x;t) + \sum_1 \left\{ m_1 \ddot{y}(a_1;t) \delta(x-a_1) + \right. \\ \left. - [J_1 \ddot{y}'(a_1;t) + J_{O_1} \omega \dot{y}'(a_1;t)] \delta_{II} - (x-a_1) \right\} = 0$$



Rys. 1

m_i - masa i -tej tarczy, J_i - moment bezwładności i -tej tarczy względem głównej osi centralnej prostopadłej do osi wału, J_{oi} - moment bezwładności i -tej tarczy względem osi wału, $F_g = \text{const}$ - jednostkowa masa wału - bieżąca
 $EJ = \text{const}$ - sztywność zginania wału, $\omega = \text{const}$ - prędkość kątowa wału

oraz

$$EJz^{IV}(x;t) - Mg_y''(x;t) \equiv EJz^{IV}(x;t) + F_g \ddot{z}(x;t) + \sum_i \left\{ m_i \ddot{z}(a_i;t) \delta(x-a_i) + \right. \\ \left. - [J_i \ddot{z}'(a_i;t) - J_{oi} \omega \dot{y}'(a_i;t)] \delta_I(x-a_i) \right\} = 0$$

gdzie:

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} 1(x) \quad \text{- dystrybucja Diraca,} \quad \left. \begin{array}{l} \text{zgaszone dla} \\ \text{ujemnych argumentów} \end{array} \right\}$$

$$\delta_I(x) = \frac{d^2}{dx^2} 1(x) \quad \text{- dystrybucja Diraca I rzędu}$$

Ze względu na symetrię osiową, drgań własnych będziemy poszukiwali w postaci:

$$\begin{array}{l} y(x;t) = f(x) \cos pt \\ z(x;t) = f(x) \sin pt \end{array} \quad \left| \quad \text{dla drgań współbieżnych} \right.$$

oraz w postaci:

$$\begin{array}{l} y(x;t) = f(x) \cos pt \\ z(x;t) = -f(x) \sin pt \end{array} \quad \left| \quad \text{dla drgań przeciwbieżnych} \right.$$

Dla obracającego się ze stałą prędkością kątową ω wału, w którym tarcze są osadzone centrycznie i prostopadle do jego osi, jest oczywiste, że powstałe na skutek zachwiania stanu równowagi wygięcie jest linią płaską (moment skręcający od sił bezwładności nie istnieje) i pozostaje w płaszczyźnie wirującej względem osi x-ów ze stałą prędkością kątową "p" będącą prędkością precesji tarcz osadzonych sztywno na wale. Prędkość precesji "p" jest zarazem częstością drgań giętkich wału, swobodnych.

Jeżeli kierunek wirowania ugiętej osi wału jest zgodny z kierunkiem obrotu wału, to drgania takie będziemy nazywali drganiami giętymi współbieżnymi. Jeżeli natomiast nie będzie zgodności kierunków obrotów, drganiami giętymi przeciwbieżnymi.

W szczególnym przypadku, gdy prędkość kątową wału ω jest zgodnie skierowana z prędkością precesji "p" i jej równa, ruch drgający wału staje się aperiodyczny i ugięcie wału rośnie na skutek rezonansu (nie rozpatrywanego w pracy), jaki zachodzi wtedy między dostarczaną energią od ruchu obrotowego wału na jego zginanie, a częstością zginania w ruchu swobodnym; taki krytyczny ruch bywa nazywany kołowym.

Dysypacja energii, którą w pracy pominięto, przy "obrotach krytycznych" ($\omega_{kr} = p$) jest bardzo mała, wzrasta natomiast nieco, gdy iloraz $\frac{\omega}{p}$ maleje. Silniejszy wzrost dysypacji występuje przy drganiach przeciwbieżnych, gdyż na skutek tego, że ruch obrotowy ugiętej osi wału odbywa się w przeciwną stronę niż jego obrót, wzajemne przemieszczanie się cząsteczek wału jest znacznie intensywniejsze niż przy drganiach współbieżnych. Jest to powód, dla którego drgania giętkie przeciwbieżne bez udziału powstrzymujących ten rodzaj ruchu, okresowych sił zewnętrznych nie zachodzą.

Dwa równania cząstkowe redukują się zatem do jednego zwyczajnego (po rozdzieleniu zmiennych):

$$f_{(x)}^{IV} - \frac{P^2}{EJ} \left\{ F_0 f(x) + \sum_1 [m_1 f(a_1) \delta(x-a_1) - (J_1 \pm J_{01} \frac{\omega}{p}) f'(a_1) \delta_1(x-a_1)] \right\} = 0, \quad (1)$$

gdzie znak minus przy jednomianie $J_{01} \frac{\omega}{p}$ odnosi się do drgań współbieżnych, natomiast plus do drgań przeciwbieżnych ($\frac{\omega}{p} \geq 0$).

Stosując przekształcenie Laplace'a w dziedzinie zmiennej zespolonej, mamy dalej:

$$s^4 f(s) - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - s f''(0) - f'''(0) - \frac{P^2}{EJ} \left\{ F_0 f(s) + \sum_1 [m_1 f(a_1) + (J_1 \pm J_{01} \frac{\omega}{p}) f'(a_1) s] e^{-a_1 s} \right\} = 0.$$

W dziedzinie zmiennej zespolonej funkcja ugięcia ma zatem postać:

$$f(s) = \frac{s^3 f(0) + s^2 f'(0) + s f''(0) + f'''(0) + \alpha^4 \sum_1 [f(a_1) - B_1] l^2 (1 + \gamma_1 \frac{\omega}{p}) \cdot f'(a_1) s] A_1 l e^{-a_1 s}}{s^4 - \alpha^4}$$

gdzie oznaczono:

$$\alpha^4 = \frac{p^2 F p}{EJ}; \quad A_1 = \frac{m_1}{F p l}; \quad B_1 = \frac{J_1}{m_1 l^2} \quad \text{oraz} \quad \gamma_1 = \frac{J_0 l}{J_1}$$

Uwzględniając transformatory:

$$\frac{s^3}{s^4 - \alpha^4} \bullet \circ \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \alpha x + \operatorname{cos} \alpha x) = S(\alpha x),$$

$$\frac{s^2}{s^4 - \alpha^4} \bullet \circ \frac{1}{2\alpha} (\operatorname{sh} \alpha x + \operatorname{sin} \alpha x) = \frac{1}{\alpha} T(\alpha x),$$

$$\frac{s}{s^4 - \alpha^4} \bullet \circ \frac{1}{2\alpha^2} (\operatorname{ch} \alpha x - \operatorname{cos} \alpha x) = \frac{1}{\alpha^2} U(\alpha x),$$

$$\frac{1}{s^4 - \alpha^4} \bullet \circ \frac{1}{2\alpha^3} (\operatorname{sh} \alpha x - \operatorname{sin} \alpha x) = \frac{1}{\alpha^3} V(\alpha x)$$

po przejściu do dziedziny zmiennej rzeczywistej, mamy:

$$f(x) = D_1 S(\alpha x) + D_2 T(\alpha x) + D_3 U(\alpha x) + D_4 V(\alpha x) + \sum_1 \left\{ G(\alpha; a_1) V[\alpha(x-a_1)] + H(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) U[\alpha(x-a_1)] \right\}, \quad (2)$$

gdzie dla ujemnych argumentów funkcje są gaszone.

Stałe całkowania oznaczono:

$$D_1 = f(0); \quad D_2 = \frac{f'(0)}{\alpha}; \quad D_3 = \frac{f''(0)}{\alpha^2} \quad \text{oraz} \quad D_4 = \frac{f'''(0)}{\alpha^3}$$

przy tym oznaczono:

$$G(\alpha; a_1) = \alpha A_1 l f(a_1) \quad \text{oraz} \quad H(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) = \alpha^2 A_1 B_1 l^3 (1 - \alpha_1 \frac{\omega}{p}) f(a_1)$$

Korzystając z funkcji (2), dla wielkości $G(\alpha; a_1)$ oraz $H(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1)$ możemy napisać wzory rekurencyjne:

$$G(\alpha; a_1) = \left[\sum_{\nu=1}^{\nu=1-1} \left\{ G(\alpha; a_\nu) V[\alpha(a_1 - a_\nu)] - H(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_\nu) U[\alpha(a_1 - a_\nu)] \right\} + \right. \\ \left. + D_1 S(\alpha a_1) + D_2 T(\alpha a_1) + D_3 U(\alpha a_1) + D_4 V(\alpha a_1) \right] \alpha A_1 l$$

oraz

(3)

$$H(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) = \left[\sum_{\nu=1}^{\nu=1-1} \left\{ G(\alpha; a_\nu) U[\alpha(a_1 - a_\nu)] - H(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_\nu) T[\alpha(a_1 - a_\nu)] \right\} + \right. \\ \left. + D_1 V(\alpha a_1) + D_2 S(\alpha a_1) + D_3 T(\alpha a_1) + D_4 U(\alpha a_1) \right] \alpha^3 A_1 B_1 l^3 (1 - \gamma_1 \frac{\omega}{p})$$

gdzie dla $i = 1$, mamy oczywiście:

$$G(\alpha; a_1) = [D_1 S(\alpha a_1) + D_2 T(\alpha a_1) + D_3 U(\alpha a_1) + D_4 V(\alpha a_1)] \alpha A_1 l$$

oraz

$$H(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) = [D_1 V(\alpha a_1) + D_2 S(\alpha a_1) + D_3 T(\alpha a_1) + \\ + D_4 U(\alpha a_1)] \alpha^3 A_1 B_1 l^3 (1 - \gamma_1 \frac{\omega}{p})$$

gdzie $-\gamma_1 \frac{\omega}{p}$ dla drgań współbieżnych; $-\gamma_1 \frac{\omega}{p}$ dla drgań przeciwbieżnych (zawsze $\frac{\omega}{p} \geq 0$).

Rozpatrzmy najczęściej spotykany przypadek, a mianowicie swobodne podparcie końców wału, dla którego stałe:

$$D_1 = D_3 = 0, \quad \text{gdyż} \quad f(0) = f''(0)$$

Rozwiązując układ równań (3) dwukrotnie przy $D_2 = 1$; $D_4 = 0$ oraz $D_2 = 0$; $D_4 = 1$ przedstawimy jego pierwiastki w postaci:

$$G(\alpha; a_1) = D_2 G^*(\alpha; a_1) + D_4 G^{**}(\alpha; a_1)$$

oraz

$$H(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) = D_2 H^*(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) + D_4 H^{**}(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1)$$

Podstawiając powyższe wyrażenia w funkcję (2), możemy ją zapisać w postaci:

$$f(x) = D_2 \left\{ T(\alpha x) + \sum_1 G^*(\alpha; a_1) V[\alpha(x-a_1)] - \sum_1 H^*(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) U[\alpha(x-a_1)] \right\} + \\ + D_4 \left\{ V(\alpha x) + \sum_1 G^{**}(\alpha; a_1) Y[\alpha(x-a_1)] - \sum_1 H^{**}(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) U[\alpha(x-a_1)] \right\}$$

Z warunków swobodnego podparcia prawego końca wału, a zatem $f(1) = f''(1) = 0$, otrzymuje się układ dwóch liniowych jednorodnych równań względem stałych całkowania D_2 i D_4 :

$$f(1) = D_2 \left\{ T(\alpha 1) + \sum_1 G^*(\alpha; a_1) V[\alpha(1-a_1)] - \sum_1 H^*(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) U[\alpha(1-a_1)] \right\} + \\ + D_4 \left\{ V(\alpha 1) + \sum_1 G^{**}(\alpha; a_1) Y[\alpha(1-a_1)] - \sum_1 H^{**}(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) U[\alpha(1-a_1)] \right\} = 0$$

oraz

$$\frac{1}{\alpha^2} f''(1) = D_2 \left\{ V(\alpha 1) + \sum_1 G^*(\alpha; a_1) T[\alpha(1-a_1)] - \sum_1 H^*(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) S[\alpha(1-a_1)] \right\} + \\ + D_4 \left\{ T(\alpha 1) + \sum_1 G^{**}(\alpha; a_1) T[\alpha(1-a_1)] - \sum_1 H^{**}(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) S[\alpha(1-a_1)] \right\} = 0$$

Przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny powyższego układu otrzymuje się, dla danego stosunku $\frac{\omega}{p}$, następujące równanie częstości drgań giętych:

$$\left\{ T(\alpha 1) + \sum_1 G^*(\alpha; a_1) V[\alpha(1-a_1)] - \sum_1 H^*(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) U[\alpha(1-a_1)] \right\} \cdot \\ \cdot \left\{ T(\alpha 1) + \sum_1 G^{**}(\alpha; a_1) T[\alpha(1-a_1)] - \sum_1 H^{**}(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) S[\alpha(1-a_1)] \right\} + \\ - \left\{ V(\alpha 1) + \sum_1 G^*(\alpha; a_1) T[\alpha(1-a_1)] - \sum_1 H^*(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) S[\alpha(1-a_1)] \right\} \cdot \\ \cdot \left\{ V(\alpha 1) + \sum_1 G^{**}(\alpha; a_1) V[\alpha(1-a_1)] - \sum_1 H^{**}(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1) U[\alpha(1-a_1)] \right\} = 0. \quad (4)$$

gdzie $G^*(\alpha; a_1)$; $G^{**}(\alpha; a_1)$; $H^*(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1)$ oraz $H^{**}(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1)$ określa układ równań (3).

Częstość drgań wyraża się wzorem $p = (\alpha 1)^2 \sqrt{\frac{EJ}{Ml^3}}$ - przy czym $M = Fg l$ - masa wału bez tarcz.

Znając parametry wału i jego prędkość kątową ω , częstość drgań p można wyliczyć metodą kolejnych prób, gdyż α szukamy z równania (4) dla nieznanego ilorazu $\frac{\omega}{p}$.

Obliczenia numeryczne wartości własnych α_1 przeprowadza się dla warunków podparcia $D_1 = D_3 = 0$ według następującego algorytmu:

Dla zadanego stosunku $\frac{\omega}{p}$ z układu równań rekurencyjnych (3) przy stałych całkowania $D_1 = D_3 = D_4 = 0$ i $D_2 = 1$ wyznacza się wielkości $G^*(\alpha; a_1)$ oraz $H^*(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1)$ dla przewidywanej wartości α_1 . Następnie również z układu równań rekurencyjnych (3) przy stałych całkowania $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ i $D_4 = 1$ wyznacza się wielkości $G^{**}(\alpha; a_1)$ oraz $H^{**}(\alpha; \frac{\omega}{p}; a_1)$ również dla tej samej przewidywanej wartości α_1 . Wyznaczone i założone wartości wstawiamy w równanie częstości drgań giętkich (4). Powyższy sposób powtarza minikomputer dotąd, aż poszukiwana wielkość α_1 , metodą przeszukiwania i bisekcji, spełni równanie (4).

2. Drgania giętkie wymuszone

Zakładając wymuszenie w postaci sił poprzecznych skupionych $P_1(t)$ przyłożonych w punktach odległych od lewej podpory o "b₁" oraz obciążenia ciągłego $q(x;t)$, równania różniczkowe drgań wymuszonych można przedstawić w postaci (przy pominięciu dysypacji energii):

$$EJY^{IV}(x;t) + f_0 \dot{Y}(x;t) + \sum_1 \{ m_1 \dot{Y}(a_1;t) \delta(x-a_1) - [J_1 \dot{Y}'(a_1;t) + J_{01} \omega \dot{Z}'(a_1;t)] \delta_1(x-a_1) \} = \sum_1 P_{1Y}(t) \delta(x-b_1) + q_Y(x;t) \quad (5)$$

oraz

$$EJZ^{IV}(x;t) + F_0 \dot{Z}(x;t) + \sum_1 \{ m_1 \dot{Z}(a_1;t) \delta(x-a_1) - [J_1 \dot{Z}'(a_1;t) - J_{01} \omega \dot{Y}'(a_1;t)] \delta_1(x-a_1) \} = \sum_1 P_{1Z}(t) \delta(x-b_1) + q_Z(x;t) \quad (6)$$

Całek szczególnych powyższego układu równań poszukiwać będziemy w postaci:

$$y(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cdot g_n(t) \quad \text{oraz} \quad z(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) h_n(t) \quad (7)$$

gdzie $f_n(x)$ jest funkcją własną spełniającą równanie różniczkowe zwyczajne (1) rozpisane dla n-tej częstości.

Podstawiając szeregi (7) w równaniu (5) przy wykorzystaniu równania (1), rozpisanego dla n-tej częstości, mamy:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [\ddot{g}_n(t) + p_n^2 g_n(t)] [F_p f_n(x) + \sum_1 m_1 f_n(a_1) \delta(x-a_1) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_1 J_1 f_n'(a_1) \delta_I(x-a_1)] + [-\dot{h}_n(t) \mp p_n g_n(t)] \omega \sum_1 J_{01} f_n'(a_1) \delta_I(x-a_1) \right\} = \\
& = \sum_1 P_{iy}(t) \delta(x-b_1) + q_y(x;t) \tag{8}
\end{aligned}$$

Ortogonalizując równanie (8) z funkcją $f_k(x)$ na całej długości wału, mamy:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [\ddot{g}_n(t) - p_n^2 g_n(t)] [F_p \int_0^1 f_n(x) f_k(x) dx + \sum_1 m_1 f_n(a_1) \int_0^1 f_k(x) \delta(x-a_1) dx + \right. \\
& \quad \left. - \sum_1 J_1 f_n'(a_1) \int_0^1 f_k(x) \delta_I(x-a_1) dx] - \right. \\
& \quad \left. - [\dot{h}_n(t) \mp p_n g_n(t)] \omega \sum_1 J_{01} f_n'(a_1) \int_0^1 f_k(x) \delta_I(x-a_1) dx \right\} = \\
& = \sum_1 P_{iy}(t) \int_0^1 f_k(x) \delta(x-b_1) dx + \int_0^1 q_y(x;t) f_k(x) dx \tag{9}
\end{aligned}$$

Uwzględniając, że całki

$$\int_0^1 f_k(x) \delta(x-a_1) dx = f_k(a_1) \quad \text{oraz} \quad \int_0^1 f_k(x) \delta_I(x-a_1) dx = -f_k'(a_1)$$

równanie (9) przybiera postać:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [\ddot{g}_n(t) + p_n^2 g_n(t)] [F_p \int_0^1 f_n(x) f_k(x) dx + \sum_1 m_1 f_n(a_1) f_k(a_1) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_1 J_1 f_n'(a_1) f_k'(a_1)] + [\dot{h}_n(t) \mp p_n g_n(t)] \omega \sum_1 J_{01} f_n'(a_1) f_k'(a_1) \right\} = \\
& = \sum_1 P_{iy}(t) f_k(b_1) + \int_0^1 q_y(x;t) f_k(x) dx \tag{10}
\end{aligned}$$

Postępując analogicznie z równaniem (6), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [\ddot{h}_n(t) + p_n^2 h_n(t)] \left[F_p \int_0^1 f_n(x) f_k(x) dx + \sum_1 m_1 f_n(a_1) f_k(a_1) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_1 J_1 f_n'(a_1) f_k'(a_1) \right] - [\dot{g}_n(t) + p_n h_n(t)] \omega \sum_1 J_{01} f_n'(a_1) f_k'(a_1) \right\} = \\ & = \sum_1 P_{1z}(t) f_k(b_1) + \int_0^1 q_z(x;t) f_k(x) dx \end{aligned} \quad (11)$$

W równaniach (10) i (11) górne znaki odnoszą się do drgań współbieżnych, natomiast dolne do przeciwbieżnych.

Równania (10) i (11) ze względu na warunek ortogonalności przybierają postać¹⁾:

$$\begin{aligned} \ddot{g}_k(t) + p_k^2 (1 \mp \frac{\omega}{p}) g(t) + \dot{h}_k \varepsilon_k \omega &= F_{yk}(t) = \\ &= \frac{\sum_1 P_{1y}(t) f_k(b_1) + \int_0^1 q_y(x;t) f_k(x) dx}{F_p \int_0^1 f_k^2(x) dx + \sum_1 m_1 f_k^2(a_1) + \sum_1 |J_1 f_k'|^2(a_1)} \end{aligned} \quad (12)$$

$$- \dot{g}_k(t) \varepsilon_k \omega + \ddot{h}_k(t) + p_k^2 (1 \mp \varepsilon_k \frac{\omega}{p_k}) h_k(t) = F_{zk}(t) =$$

$$\frac{\sum_1 P_{1z}(t) f_k(b_1) + \int_0^1 q_z(x;t) f_k(x) dx}{F_p \int_0^1 f_k^2(x) dx + \sum_1 m_1 f_k^2(a_1) + \sum_1 J_1 f_k'^2(a_1)}$$

gdzie

$$\varepsilon_k = \frac{\sum_1 J_{01} f_k'^2(a_1)}{F_p \int_0^1 f_k^2(x) dx + \sum_1 m_1 f_k^2(a_1) + \sum_1 J_1 f_k'^2(a_1)}, \quad (0 \leq \varepsilon_k < 1)$$

¹⁾ Dla $n=k$ otrzymuje się nieskończony układ jednorodnych równań różniczkowych sprzężonych parami, które są spełnione przez drgania własne. Warunek ortogonalności funkcji własnych:

$$F_p \int_0^1 f_n(x) f_k(x) dx + \sum_1 m_1 f_n(a_1) f_k(a_1) + \sum_1 J_1 f_n'(a_1) f_k'(a_1) \mp \frac{\omega}{p_n + p_k} J_{01} f_n'(a_1) f_k'(a_1) = 0,$$

dla $n \neq k$.

Przechodząc, przy jednorodnych warunkach początkowych, z układem równań (12) do dziedziiny zmiennej zespolonej mamy:

$$(s^2 + A)g_k(s) + \varepsilon_k \omega s h_k(s) = F_{yk}(s) \quad (13)$$

oraz

$$-\varepsilon_k \omega s g_k(s) + (s^2 + A)h_k(s) = F_{zk}(s)$$

gdzie $A = p_k^2 \mp \varepsilon_k \omega p_k$, znak + odnosi się do drgań przeciwbieżnych. Stąd rozwiązując układ równań (13), mamy:

$$g_k(s) = F_{yk}(s) \frac{s^2 + A}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2} + F_{zk}(s) \frac{k s}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2}$$

oraz

$$h_k(s) = F_{yk}(s) \frac{\varepsilon_k \omega s}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2} + F_{zk}(s) \frac{s^2 + A}{s^4 + s^2(2A + \varepsilon_k^2 \omega^2) + A^2} \quad (14)$$

Ostatecznie zgodnie z równaniami (14) drgania wymuszone przy jednorodnych warunkach początkowych, wyrażają się następującymi splotami funkcji:

$$y(x;t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{P_k \left(\mp 0,5 \varepsilon_k \frac{\omega}{P_k} \right)} \int_0^t \sin p_k \left[\left(\mp 0,5 \varepsilon_k \frac{\omega}{P_k} \right) (t-\tau) \right] \left\{ F_{yk}(\tau) \cos \left[0,5 \varepsilon_k \frac{\omega}{P_k} (t-\tau) \right] + F_{zk}(\tau) \sin \left[0,5 \varepsilon_k \frac{\omega}{P_k} (t-\tau) \right] \right\} d\tau$$

oraz

$$z(x;t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{P_k \left(+0,5 \varepsilon_k \frac{\omega}{P_k} \right)} \int_0^t \sin p_k \left[\left(+0,5 \varepsilon_k \frac{\omega}{P_k} \right) (t-\tau) \right] \left\{ F_{yk}(\tau) \sin \left[0,5 \varepsilon_k \frac{\omega}{P_k} (t-\tau) \right] + F_{zk}(\tau) \cos \left[0,5 \varepsilon_k \frac{\omega}{P_k} (t-\tau) \right] \right\} d\tau$$

Przy wyrazach z dwoma znakami znak minus odnosi się do drgań współbieżnych.

Przy drganiach przeciwbieżnych częstości drgań p_k są częstościami drgań swobodnych przeciwbieżnych, czego we wzorach (15) nie wyróżniono z braku oznaczeń.

Ze wzorów (15) wynika, że oprócz prędkości krytycznych $\omega_{kr.,k} = p_k$ z chwilą wystąpienia sił zewnętrznych (mogą to być siły ciężkości dla wału o osi poziomej) pojawiają się nowe prędkości krytyczne $\omega_{kr.,k} = \frac{p_k}{0,5 \varepsilon_k}$, jednak są one tak duże, że przekraczają stosowane prędkości kątowe wałów.

3. Uwagi końcowe

Przedstawione rozważania przeprowadzono przy założeniu, że rozpatrywany wał (o stałej sztywności i podparty na końcach) jest wykonany z dużą dokładnością - co jest zwykle spełnione przy tego typu konstrukcjach (np. wały wielowirnikowe pomp, turbin, przekładni transmisyjnych). Drugim założeniem jest pominięcie dysypacji energii zarówno w samym wale, jak i jego konstrukcji wsporczej.

Uproszczenie to może mieć ujemny wpływ na użyteczność wyprowadzonych wzorów dla drgań wymuszonych przeciwbieżnych.

Przy bardziej dokładnej analizie może zachodzić również, ze względu na przenoszenie się drgań, konieczność uwzględnienia sprzężenia sprężystego między podporami łożysk.

LITERATURA

- [1] Praca zbiorowa, Drgania i fale w ciałach stałych, PWN, Warszawa 1966.
- [2] Praca zbiorowa, Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn, PWN, 1957.
- [3] J. KOŹEŚNIK, Dynamika maszyn, WNT, 1963.
- [4] Z. PARSZEWSKI, Drgania i dynamika maszyn, WNT, 1982.
- [5] S. WIŚNIEWSKI, Drgania giętkie belki z dyskretnymi masami, Arch. Bud. Maszyn, PAN, 1986, z. 2.

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛА С УЗКИМИ ДИСКАМИ

Резюме

В работе приведены и решены сопряженные дифференциальные уравнения изгибных колебаний вала, с жестко центрично закрепленными узкими дисками, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

В уравнениях не учтено влияние деформации сдвига как незначительного для кривых сечений вала; влияние жирокопных моментов учтено только для дисков, которые трактуются как жесткие и дискретные.

В заключительной части работы выведены формулы для колебаний, вызванных поперечными сосредоточенными и линейно распределенными силами.

Проблема решена при помощи интегральных преобразований Лапласа с использованием обобщенных функций Дирака.

В настоящем изложении не приводится численный пример и ряд преобразований и выводов. Однако внимательный читатель на основании представленного алгоритма вычисления частот собственных колебаний, а также формул может проводить расчёты.

BENDING VIBRATIONS OF A SHAFT WITH THIN CIRCULAR DISCS

S u m m a r y

The paper presents derivation and solution of coupled differential equations describing bending vibrations of the shaft with centrically-mounted thin circular discs, rotating with constant angular velocity.

The influence of shear strains in the equations is neglected, because the strains are small in a circular section of the shaft. The influence of gyroscope moment from the discs only is taken into consideration; the discs are assumed to be rigid and discrete.

At the end of the paper the relations are derived for bending vibrations forced by transverse concentrated and uniformly distributed forces.

The report is an abstract where numerical example and some transformations and derivations are omitted, although an attentive reader may perform the calculations based on the presented algorithm of self-vibrations calculations, and relations.

Recenzent: Doc. dr inż. Stanisław Wojciech

Wpłynęło do redakcji 5.XI.1986 r.