ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1987

Seria: MECHANIKA z. 85 Nr kol. 1010

XI OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA TEORII MASZYN I MECHANIZMÓW

11th POLISH CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES AND MECHANISMS

27—30. 04. 1987 ZAKOPANE

Józef WOJNAROWSKI

Instytut Mechaniki i PKM
Politechnika Śląska Gliwice

Stanisław WOJCIECH, Jerzy PŁOSA, Witold PŁOSKI

Instytut Mechaniczno-Konstrukcyjny
Politechnika Łódzka Filia w Bielsku-Białej

WYZNACZANIE REAKCJI DYNAMICZNYCH W WĘZŁACH WOZU WIERTNICZEGO PRZY UWZGLĘDNIENIU PODATNOŚCI OGNIW

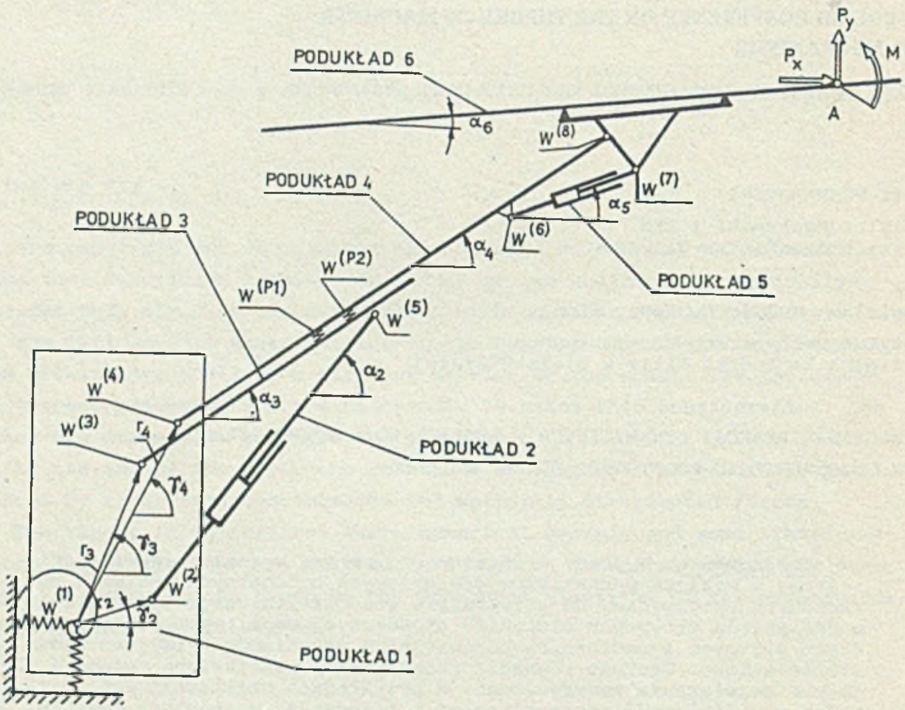
Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę wyznaczania wartości reakcji w węzłach mechanizmów dźwigniowych o podatnych ogniwach połączonych sprężyście, na przykładzie wozu wiertniczego. Sformułowany model metodą sztywnych elementów skończonych umożliwia uwzględnienie drgań giętnych i wzdłużnych odpowiednich podukładów. Przyjęto wymuszenie siłowe. Ułożono równania ruchu oraz przedstawiono metodę i algorytm rozwiązania numerycznego. W przykładach obliczeniowych, przy założeniu liniowości geometrycznej i fizycznej, wyznaczono reakcje dynamiczne w wybranych węzłach. Tak przyjęty model pozwala na mało czasochłonną analizę komputerową drgań swobodnych i wymuszonych. Zamieszczone w pracy modele podukładów i metody są opracowane w aspekcie zastosowania do opisu dowolnych płaskich mechanizmów, w szczególności manipulatorów.

1. Wstęp

W pracy przedstawiono modele umożliwiające wyznaczanie reakcji w węzłach mechanizmów dźwigniowych o podatnych ogniwach. Jako obiekt analizy przyjęto wóz wiertniczy zamodelowany w postaci mechanizmu tworzącego płaski kinematycznie zmienny układ prętowy (rys. 1). Do dyskretyzacji podukładów zastosowano metodę sztywnych elementów skończonych [1], [2]. Ze względów praktycznych przy tworzeniu modelu obliczeniowego istotne jest rozdzielenie węzłów łączących podukłady na dwa typy: obrotowe $W^{(1)} - W^{(8)}$ i postępowe

$W^{(P1)}$ i $W^{(P2)}$. Takie ujęcie pozwala na łatwe numeryczne analizowanie wpływu połączeń podukładów na zjawiska dynamiczne [3].

Układ podzielono na sześć podukładów. Siłowniki oznaczone jako podukłady 2 i 5 mają podatność wzdłużną, natomiast podukłady 3, 4, 6 mają podatność giętną z uwzględnieniem ścinania. Podwozie zamodelowano jako płazę podatnie połączoną z ostoją.



Rys. 1

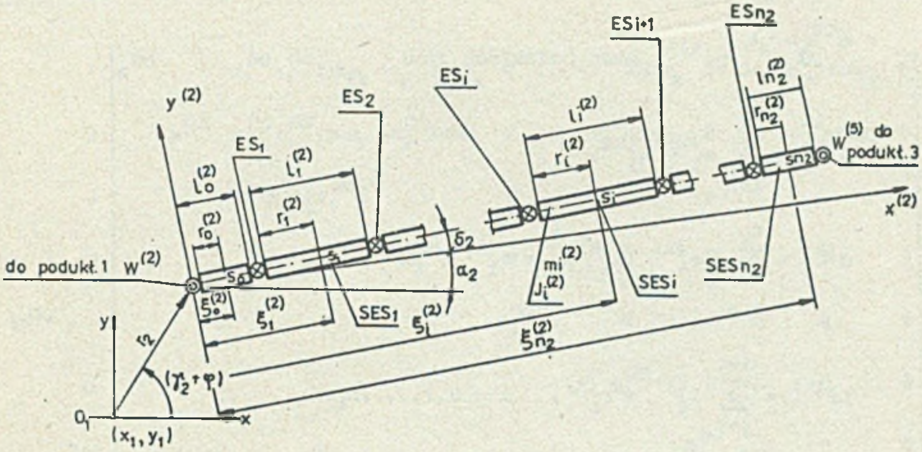
Większość oznaczeń stosowanych w tekście i rysunkach jest zgodna z opracowaniem [4]. Ponadto założono, że dopuszczalne jest przyjęcie liniowości fizycznej i geometrycznej, tłumienia ruchu są pomijalnie małe, a obciążenie zewnętrzne można zredukować do siły $\bar{P}$ i pary sił o momencie $\bar{M}$ działających na wysięgnik w płaszczyźnie ruchu.

2. Energia kinetyczna układu

Energia kinetyczna układu określona jest wzorem:

$$T = \sum_{k=1}^{k=6} T^{(k)}, \tag{1}$$

gdzie $T^{(k)}$ - energia kinetyczna podukładu k.



Rys. 2

Energia kinetyczna podukładów o podatności wzdłużnej (rys. 2) określona jest zależnością:

$$T^{(k)} = \frac{1}{2}\,\dot{\underset{\sim}{q}}_k^T\; M^{(k)}\dot{\underset{\sim}{q}}_k, \quad k = 2,5, \tag{2}$$

gdzie:

$$M^{(k)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & 3+i & & 3+n_k \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3+i \\ 3+n_k \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} m^{(k)} & 0 & -S^{(k)}\sin\alpha_k & m_1^{(k)}\cos\alpha_k & \ldots & m_i^{(k)}\cos\alpha_k & \ldots & m_{n_k}^{(k)}\cos\alpha_k \\ & m^{(k)} & S^{(k)}\cos\alpha_k & m_1^{(k)}\sin\alpha_k & \ldots & m_i^{(k)}\sin\alpha_k & \ldots & m_{n_k}^{(k)}\sin\alpha_k \\ & & g^{(k)} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ & & & m_1^{(k)} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \text{sym.} & & & & & m_i^{(k)} & \ldots & 0 \\ & & & & & & & m_{n_k}^{(k)} \end{array}\right] \end{array},$$

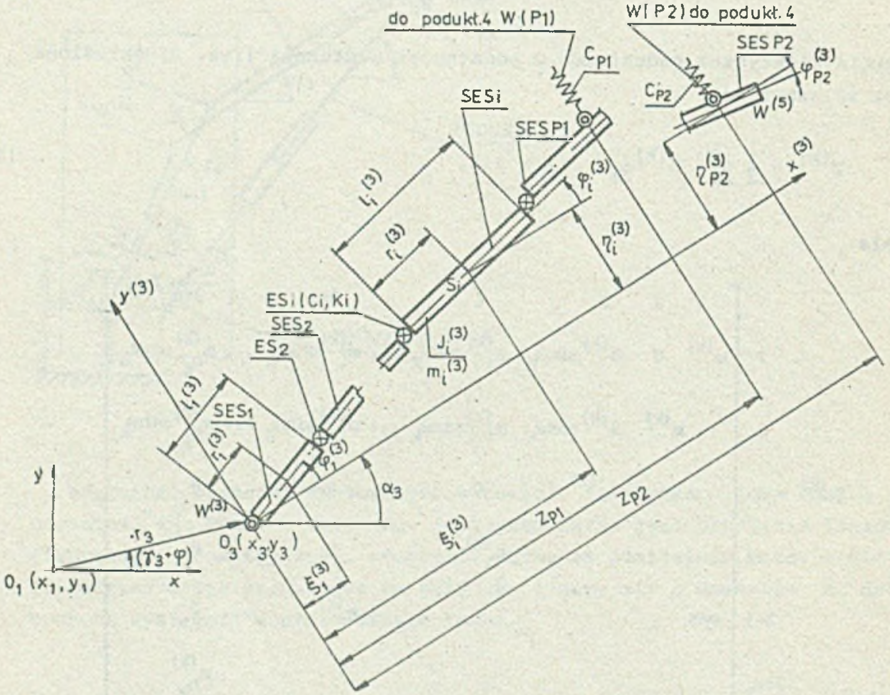
$\underset{\sim}{q}_k = [x_k, y_k, \delta_k, \xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_i^{(k)}, \ldots, \xi_{nk}^{(k)}]^T$ - wektor współrzędnych uogólnionych

$$m^{(k)} = \sum_{i=0}^{n_k} m_i^{(k)} \quad \text{- masa podukładu (k),}$$

$$S^{(k)} = \sum_{i=0}^{n_k} m_i^{(k)} L_i^{(k)},$$

$$J^{(k)} = \sum_{i=0}^{n_k} \left[m_i^{(k)} \left(L_i^{(k)}\right)^2 + J_i^{(k)} \right],$$

$$Li^{(k)} = \sum_{j=0}^{i-1} l_j^{(k)} + r_i^{(k)}, \quad i = 0,1,\dots,n_k.$$



Rys. 3

Energię kinetyczną podukładów o podatności giętnej (rys. 3) można zapisać:

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} \dot{\underset{\sim}{q}}_k^T \; M^{(k)} \; \dot{\underset{\sim}{q}}_k, \quad k = 3,4,6,$$

gdzie:

$$
M^{(k)} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \\ 2i \\ 2+i \\ 2n_k \\ 2n_k+1 \end{array}
\begin{bmatrix}
m^{(k)} & & -m_1^{(k)} r_1^{(k)} \sin\alpha_k & -m_2^{(k)} \sin\alpha_k & 0 \; \ldots & -m_i^{(k)} \sin\alpha_k & 0 \; \ldots & -m_{nk}^{(k)} \sin\alpha_k & 0 \\
 & m^{(k)} & m_1^{(k)} r_1^{(k)} \cos\alpha_k & m_2^{(k)} \cos\alpha_k & 0 \; \ldots & m_i^{(k)} \cos\alpha_k & 0 \; \ldots & m_{nk}^{(k)} \cos\alpha_n & 0 \\
 & & J_1^{(k)} + m_1^{(k)} \left[r_1^{(k)} \right]^2 & 0 & 0 \; \ldots & 0 & 0 \; \ldots & 0 & 0 \\
 & & & m_2^{(k)} & 0 \; \ldots & 0 & 0 \; \ldots & 0 & 0 \\
 & & & & J_2^{(k)} \ldots & 0 & 0 \; \ldots & 0 & 0 \\
 & & & & & m_i^{(k)} & 0 \; \ldots & 0 & 0 \\
 & & & & & & J_i^{(k)} \ldots & 0 & 0 \\
\text{sym.} & & & & & & & m_{nk}^{(k)} & 0 \\
 & & & & & & & & J_{nk}^{(k)}
\end{bmatrix},
$$

$$
\underline{q}_k = \left[x_k, y_k, \varphi_1^{(k)}, \eta_1^{(k)}, \ldots, \eta_i^{(k)}, \varphi_i^{(k)}, \ldots, \eta_{nk}^{(k)}, \varphi_{nk}^{(k)} \right]^T,
$$

$$
m^{(k)} = \sum_{i=1}^{n_k} m_i^{(k)}.
$$

Energię kinetyczną podukładu pierwszego można wyznaczyć ze wzoru (3) wstawiając $n_k = 1$ (podwozie potraktowano jako jeden sztywny element skończony).

3. Energia potencjalna układu

Energia potencjalna określona jest wzorem:

$$
V = \sum_{k=2}^{k=6} V_s^{(k)} + \sum_{i=1}^{i=8} V_w(i) + \sum_{j=1}^{j=2} V_w(p_j) + \sum_{k=1}^{k=6} V_g^{(k)}, \tag{4}
$$

gdzie:

$V_s^{(k)}$ - energia odkształcenia sprężystego podukładu k,

$V'_{w(i)}$ – energia odkształcenia sprężystego węzłów obrotowych,

$V_w(p_j)$ – energia odkształcenia sprężystego węzłów postępowych,

$V_g^{(k)}$ – energia potencjalna sił ciężkości podukładów.

Dla podukładów o podatności wzdłużnej energia odkształcenia sprężystego wyraża się wzorem:

$$V_s^{(k)} = \frac{1}{2}\, \underset{\sim}{q}_K^T\, K_K \underset{\sim}{q}_K + \underset{\sim}{q}_K^T\, \underset{\sim}{H}^{(k)}, \quad k = 2,5 \,, \tag{5}$$

gdzie:

q_k – określone jak we wzorze (3),

$$K_k = \begin{array}{|cccccccccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & i+2 & i+3 & i+4 & & n_k+2 & n_k+3 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \\
 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 3 \\
 & & & c_1^{(k)}+c_2^{(k)} & -c_2^{(k)} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 4 \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & -c_i^{(k)} & c_i^{(k)}+c_{i+1}^{(k)} & -c_{i+1}^{(k)} & \dots & 0 & 0 & i+3 \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots \\
\text{sym.} & & & & & & & & & & -c_{nk}^{(k)} & c_{nk}^{(k)} & n_k+3
\end{array},$$

$$\underset{\sim}{H}^{(k)} = \begin{array}{|c|c}
0 & 1 \\
0 & 2 \\
0 & 3 \\
-c_1^{(k)}\left[r_1^{(k)} + l_o^{(k)}\right] + c_2^{(k)}\left[r_2^{(k)} + d_1^{(k)}\right] & 4 \\
 & \vdots \\
-c_i^{(k)}\left[r_i^{(k)} + d_{i-1}^{(k)}\right] + c_{i+1}^{(k)}\left[r_{i+1}^{(k)} + d_i^{(k)}\right] & i+3 \\
 & \vdots \\
-c_{nk}^{(k)}\left[r_{nk}^{(k)} + d_{nk-1}^{(k)}\right] & n_k+3
\end{array}.$$

We wzorze (5) przez $c_i^{(k)}$ oznaczono współczynnik sztywności translacyjnej (rozciągania) podukładu k.

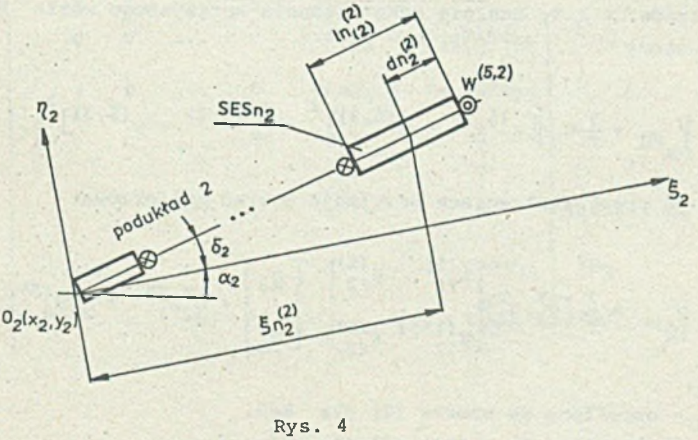
Dla podukładów o podatności giętnej energię odkształcenia sprężystego ujęto w postaci formy kwadratowej:

$$V_s^{(k)} = \frac{1}{2}\, \underset{\sim}{q}_k^T\, K_k \underset{\sim}{q}_k, \qquad k = 3,4,6, \tag{6}$$

gdzie:

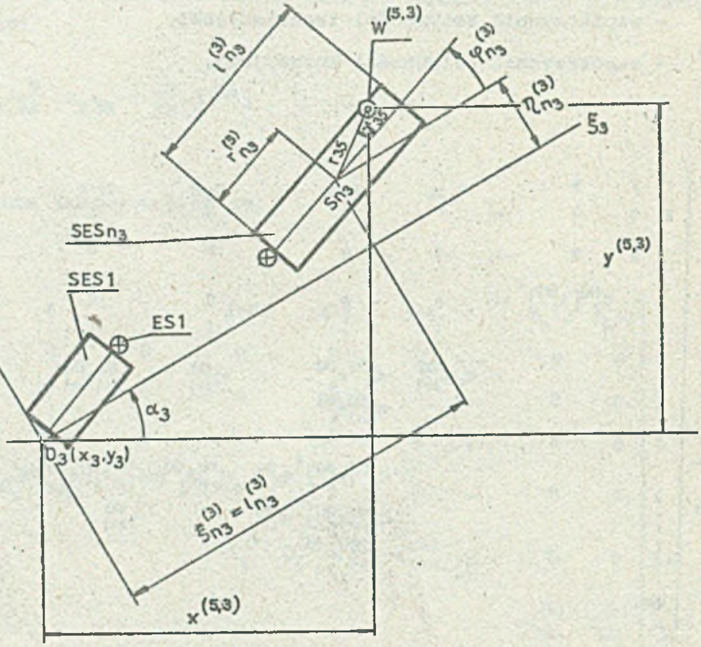
- $\underset{\sim}{q}_k$ - określone we wzorze (3),
- K_k - macierz sztywności podukładu,
- $c_i^{(k)}$ - współczynnik sztywności translacyjnej,
- $k_i^{(k)}$ - współczynnik sztywności rotacyjnej,

$$K_k = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 2i \\ 2i+1 \\ \\ 2n_k \\ 2n_k+1 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & & 2i & 2i+1 & 2i+2 & 2i+3 & & 2n_k & 2n_k+1 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
 & & c_2^{(k)}[l_1^{(k)}]^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
 & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & c_i+c_{i+1}^{(k)} & -c_i^{(k)}r_i^{(k)}+c_{i+1}^{(k)}d_i^{(k)} & -c_{i+1}^{(k)} & c_{i+1}^{(k)}r_{i+1}^{(k)} & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & & & c_i^{(k)}[r_i^{(k)}]^2+k_i^{(k)}+c_{i+1}^{(k)}[d_i^{(k)}]^2+k_{i+1}^{(k)} & -c_{i+1}^{(k)}d_i^{(k)} & c_{i+1}^{(k)}r_{i+1}^{(k)}d_i^{(k)}-k_{i+1}^{(k)} & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
 & \text{sym.} & & & & & & & & c_{nk}^{(k)} & -c_{nk}^{(k)}r_{nk}^{(k)} \\
 & & & & & & & & & & c_{nk}^{(k)}[r_{nk}^{(k)}]^2+k_{nk}^{(k)}
\end{array}\right] \end{array}$$



Rys. 4

Wyznaczając energię odkształcenia sprężystego węzłów obrotowych $V_{w}(i)$ podzielono je na dwa typy, tj. węzły łączące podukłady o podatności giętnej ($W^{(i)}$ dla i=1,3,4,8) oraz węzły łączące podukład o podatności wzdłużnej z podukładem o podatności giętnej ($W^{(i)}$ dla i=2,5,6,7).



Rys. 5

Na rys. 4 i rys. 5 pokazano przykładowo węzeł $W^{(5)}$ jako połączenie podukładów 2 i 3. Energię odkształcenia sprężystego węzła $W^{(5)}$ opisano wyrażeniem:

$$V_{W^{(5)}} = \frac{1}{2} C_5 \left\{ \left[x^{(5,2)} - x^{(5,3)} \right]^2 + \left[y^{(5,2)} - y^{(5,3)} \right]^2 \right\}, \tag{7}$$

które po przekształceniach przyjmuje postać macierzową:

$$V_{W^{(5)}} = \frac{1}{2} \left[\underset{\sim}{q}_2^T, \underset{\sim}{q}_3^T \right] \begin{bmatrix} K_{11}^{(5)} & K_{12}^{(5)} \\ K_{12}^{(15)T} & K_{22}^{(5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{q}_2 \\ \underset{\sim}{q}_3 \end{bmatrix} + \underset{\sim}{q}_2^T H_1^{(5)} + \underset{\sim}{q}_3^T \underset{\sim}{H}_2^{(5)}, \tag{8}$$

gdzie:

$\underset{\sim}{q}_2$ - określone we wzorze (2) dla k=2,
$\underset{\sim}{q}_3$ - określone we wzorze (3) dla k=3,
· sztywność węzła $W^{(5)}$,

$$K_{11}^{(5)} = C_5 \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & n_2+2 & n_2+3 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & -l_2\sin\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & \cos\alpha_2 \\ & 1 & l_2\cos\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & \sin\alpha_2 \\ & & l_2^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & & & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \\ n_2+2 \\ n_2+3 \end{array} \end{array}$$

$$K_{12}^{(5)} = C_5 \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & & 2n_3-1 & 2n_3 & 2n_3+1 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccccc} -1 & 0 & 0 & & 0 & \sin\alpha_3 & r_{35}\sin\varepsilon_{53} \\ 0 & -1 & 0 & & 0 & -\cos\alpha_3 & -r_{35}\cos\varepsilon_{53} \\ l_2\sin\alpha_2 & -l_2\cos\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & -l_2\cos(\alpha_3-\alpha_2) & l_2r_{35}\cos(\varepsilon_{53}-\alpha_2) \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & \sin(\alpha_3-\alpha_2) & r_{35}\sin(\varepsilon_{53}-\alpha_2) \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \\ 2n_2+2 \\ 2n_2+3 \end{array} \end{array},$$

$$K_{22}^{(5)} = C_5 \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & & 2n_3-1 & 2n_3 & 2n_3+1 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sin\alpha_3 & -r_{35}\sin\varepsilon_{53} \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cos\alpha_3 & r_{35}\cos\varepsilon_{53} \\ & & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & & 1 & r_{35}\cos\gamma_{35} \\ & & & & & & r_{35}^2 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ 2n_3-1 \\ 2n_3 \\ 2n_3+1 \end{array} \end{array}$$

$$
\underset{\sim}{H}_1^{(5)} = C_5 \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} A_5 \\ B_5 \\ l_2(-A_5\sin\alpha_2+B_5\cos\alpha_2) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_5\cos\alpha_2 + B_5\sin\alpha_2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \\ n_2+2 \\ n_2+3 \end{array}
\qquad
\underset{\sim}{H}_2^{(5)} = C_5 \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} -A_5 \\ -B_5 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_5\sin\alpha_3-B_5\cos\alpha_3 \\ r_{35}(A_5\sin\varepsilon_{53}-B_5\cos\alpha_5 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \\ 2n_3 \\ 2n_3+1 \end{array},
$$

$$
0
$$

$$
A_5 = d_{n2}^{(2)}\cos\alpha_2 - L_{n3}^{(3)}\cos\alpha_3 - r_{35}\cos\varepsilon_{53},
$$

$$
B_5 = d_{n2}^{(2)}\sin\alpha_2 - L_{n3}^{(3)}\sin\alpha_3 - r_{35}\sin\varepsilon_{53}.
$$

Energię oskształcenia sprężystego węzłów postępowych $V_w(p_j)$ pokazano na przykładzie węzła $W^{(P1)}$. Jeśli przyjąć, że węzeł $W^{(P1)}$ leży na SES P_{31} podukładu 3 i P_{41} podukładu 4, to energię potencjalną odkształcenia sprężystego węzła określa wzór:

$$
V_{W(P1)} = \frac{1}{2} C_{P1}\left[y^{(P31)} - y^{(P41)}\right]^2, \tag{9}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
y^{(P31)} &= \eta_{P31}^{(3)} + r_{P31}\sin\gamma_{P31} + \varphi_{P31}^{(3)} r_{P31}\cos\gamma_{P31}, \\
y^{(P41)} &= \eta_{P41}^{(4)} + r_{P41}\sin\gamma_{P41} + \varphi_{P41}^{(4)} r_{P41}\cos\gamma_{P41}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

W postaci macierzowej można napisać:

$$
V_{W(P1)} = \frac{1}{2}\left[\underset{\sim}{q}_3^T, \underset{\sim}{q}_4^T\right]\begin{bmatrix} K_{11}^{(P1)} & K_{12}^{(P1)} \\ K_{12}^{(P1)T} & K_{22}^{(P1)} \end{bmatrix} + \underset{\sim}{q}_3^T \underset{\sim}{H}_1^{(P1)} + \underset{\sim}{q}_4^T \underset{\sim}{H}_2^{(P1)}, \tag{11}
$$

gdzie: $\underset{\sim}{q}_3, \underset{\sim}{q}_4$ - określone jak w (3) dla k=3,4 ,

$$
K_{11}^{(P1)} = C_{P1}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & \ldots & 2_{P31} & 2_{P31}+1 & & 2n_3+1 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & & \vdots & \vdots & & \\
 & & 1 & r_{P31}\cos\gamma_{P31} & \ldots & 0 \\
 & & & r_{P31}^2\cos^2\gamma_{P31} & \ldots & 0 \\
 & & & & & \vdots \\
 & \text{sym.} & & & & 0
\end{array}\right]
\end{array},
$$

$$
K_{12}^{(P1)} = C_{P1}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} 1 & \ldots & 2_{P41}-2 & 2_{P41}-1 & \ldots 2n_4-1 \end{array} & \\
\left[\begin{array}{cccccc}
0 & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & -1 & -r_{P41}\cos\gamma_{P41} & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & -r_{P31}\cos\gamma_{P31} & -r_{P31}r_{P41}\cos\gamma_{P31}\cos\gamma_{P41} & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & & 0 & 0 & & 0
\end{array}\right]
&
\begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ 2_{P31} \\ 2_{P31}+1 \\ \\ \\ 2n_3+1 \end{array}
\end{array},
$$

$$
K_{22}^{(P1)} = C_{P1}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & & 2_{P41}-2 & 2_{P41}-1 & 2n_4-1 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
0 & \ldots & 0 & 0 & & 0 \\
 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & 1 & r_{P41}\cos\gamma_{P41} & \ldots & 0 \\
 & & & r_{P41}^2\cos^2\gamma_{P41} & \ldots & 0 \\
 & & & & & \vdots \\
 & & \text{sym.} & & & 0
\end{array}\right]
\end{array},
$$

$$
H_1^{(P1)} = C_{P1}
\begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{c}
0 \\ \vdots \\ -A_{P1} \\ -A_{P1}r_{P31}\cos\gamma_{P31} \\ \vdots \\ 0
\end{array}\right]
&
\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 2_{P31} \\ 2_{P31}+1 \\ \vdots \\ 2n_3+1 \end{array}
\end{array},
\quad
\underset{\sim}{H}_2^{(P1)} = C_{P1}
\begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{c}
0 \\ \vdots \\ A_{P1} \\ A_{P1}r_{P41}\cos\gamma_{P41} \\ \vdots \\ 0
\end{array}\right]
&
\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 2_{P41}-2 \\ 2_{P41}-1 \\ \vdots \\ 2n_4-1 \end{array}
\end{array},
$$

$$A_{P1} = r_{P41}\sin\gamma_{P41} - r_{P31}\sin\gamma_{P31}.$$

We wzorze (9) przyjęto oznaczenia stosowane w pracy [4]. Energia potencjalna sił ciężkości podukładu k jest określona:

$$V_g^{(k)} = g\sum_{i=0}^{n_k} m_i^{(k)} y_i^{(k)}, \tag{12}$$

gdzie: $y_i^{(k)}$ – współrzędna środka masy i-tego SES podukładu k.

4. Równania równowagi dynamicznej

Równania ruchu układu wyprowadzono z równań Lagrange'a II rodzaju. Wykorzystując dokonany wcześniej zapis macierzowy wyrażeń na energię kinetyczną i potencjalną odkształcenia sprężystego podukładów oraz energię odkształcenia węzłów, po uwzględnieniu, że macierze mas i sztywności są macierzami o stałych współczynnikach, uzyskano następującą postać równań ruchu:

$$M\ddot{\underset{\sim}{q}} + K\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{H} + \underset{\sim}{G} + \underset{\sim}{Q} \tag{13}$$

gdzie:

$\underset{\sim}{q} = \mathrm{col}\{\underset{\sim}{q}_i\}$, $i=1,2,\dots,6$,

$M = \mathrm{diag}\,[M_i]$, $i=1,2,\dots,6$,

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & \text{sym.} & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix},$$

$\underset{\sim}{H} = \mathrm{col}\{\underset{\sim}{H}_i\}$, $i=1,2,\dots,6$,

$\underset{\sim}{G} = \mathrm{col}\{\underset{\sim}{G}_i\}$, $i=1,2,\dots,6$,

$\underset{\sim}{Q} = \mathrm{col}\{\underset{\sim}{0},\underset{\sim}{0},\dots,\underset{\sim}{0},\underset{\sim}{Q}_6\}$.

Założono, że ruch wywołany jest siłą $\overline{P}$ i parą sił o momencie $\overline{M}$ działającymi w punkcie A (SES k podukładu 6) wysięgnika (rys. 1). Wektor sił uogólnionych ma postać;

$$\underset{\sim}{Q}_6 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} P_x'\cos\alpha_6 - P_y'\sin\alpha_6 \\ P_x'\sin\alpha_6 + P_y'\cos\alpha_6 \\ 0 \\ \vdots \\ P_y' \\ -r_{6k}(P_k'\sin\gamma_{6k} - P_y'\cos\gamma_{6k}) + M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \\ \\ 2k \\ 2k+1 \\ 2k+2 \\ \\ 2n_6+1 \end{array} .$$

Analiza układu równań (13) upraszcza się, jeżeli można przyjąć, że obciążenie zewnętrzne zawiera składowe stałe i harmoniczne o równej częstości, czyli:

$$\begin{aligned} P_x' &= A_x' + a_x'\sin(kt), \\ P_y' &= A_y' + a_y'\sin(kt), \\ M &= A_M + a_M\sin(kt), \end{aligned} \tag{14}$$

tak jak to przyjęto w prezentowanych dalej przykładach liczbowych. Elementy macierzy sztywności K leżące poza główną przekątną określone są wyłącznie przez sztywności węzłów i geometrię układu, natomiast elementy na głównej przekątnej zawierają dodatkowo wyrażenia pochodzące od energii odkształcenia sprężystego elementów belkowych i siłowników.

Przy założeniach (14) wektor sił uogólnionych Q można przedstawić w postaci:

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}_A + \underset{\sim}{Q}_a\sin(kt). \tag{15}$$

Uwzględniając zależności (14) i (15) we wzorze (13) otrzymano:

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{Q}_s + \underset{\sim}{Q}_a\sin(kt), \tag{16}$$

gdzie:

$$\underset{\sim}{Q}_s = \underset{\sim}{H} + \underset{\sim}{G} + \underset{\sim}{Q}_A. \tag{17}$$

Jeśli oznaczyć przez $\underset{\sim}{q}_s$ rozwiązanie zagadnienia statycznego:

$$K\,\underset{\sim}{q}_s = \underset{\sim}{Q}_s, \tag{18}$$

to przy założeniu, że

$$\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{q}_s + \underset{\sim}{q}_d \tag{19}$$

z równania (16) do wyznaczenia składowej dynamicznej wektora przemieszczeń otrzymuje się wyrażenie:

$$M\,\underset{\sim}{\ddot{q}}_d + K\,\underset{\sim}{q}_d = \underset{\sim}{Q}_a \sin(kt). \tag{20}$$

5. Reakcje dynamiczne w węzłach

Wartości reakcji w węzłach wyznaczono ze wzoru:

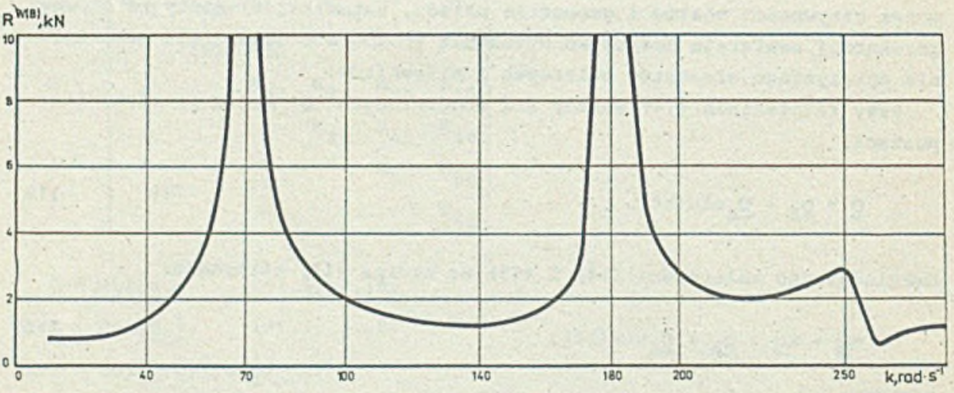
$$R^{W^{(i)}} = C_i\sqrt{\left[x^{(i,k)} - x^{(i,t)}\right]^2 + \left[y^{(i,k)} - y^{(i,t)}\right]^2}, \tag{21}$$

gdzie:

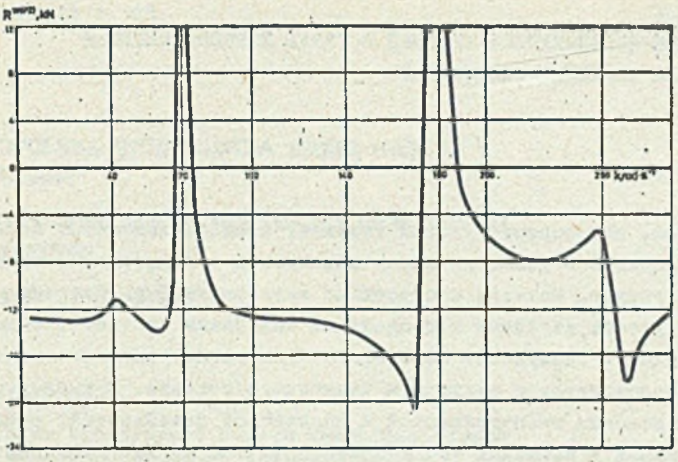
C_i - sztywność węzła o numerze i

$x^{(i,k)}, y^{(i,k)}, x^{(i,f)}, y^{(i,f)}$ - współrzędne węzła numer "i" jako elementu podukładów "k" lub "f".

Na rys. 6 i rys. 7 podano uzyskane w wyniku obliczeń (wg podanych wyżej wykresów) wykresy reackji w węzłach $W^{(8)}$ i $W^{(P2)}$ dla danych testowych.



Rys. 6



Rys. 7

6. Uwagi końcowe

Podział mechanizmu na podukłady pozwala uzyskać proste wyrażenia określające macierze mas i sztywności układu. Przyjęcie modelu węzłów podatnych powoduje pojawienie się pozadiagonalnych podmacierzy w macierzy sztywności układu.

Aktualnie prowadzone są prace umożliwiające wykorzystanie przedstawionych modeli przy analizie dynamicznej mechanizmów dźwigniowych uwzględniającej duże ruchy unoszenia, jak to ma miejsce w manipulatorach.

LITERATURA

[1] KRUSZEWSKI J. i inni: Metoda sztywnych elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1975.

[2] WOJCIECH S.: Dynamika płaskich mechanizmów dźwigniowych z uwzględnieniem podatności ogniw oraz tarcia i luzów w węzłach. ZN Politechniki Łódzkiej, z. 66, 1984.

[3] WOJCIECH S., WOJNAROWSKI J.: Modelowanie płaskich mechanizmów o podatnych ogniwach i węzłach na przykładzie wozu wiertniczego. ZN Politechniki Rzeszowskiej. Mechanika z. 12, 1986.

[4] WOJNAROWSKI J. i inni: Analityczne i doświadczalne badania uniwersalnego wysięgnika do maszyn górniczych w aspekcie zwiększenia ich niezawodności i trwałości. Praca naukowo-badawcza NB-237/RMT4/85 Instytutu Mechaniki i PKM Politechniki Śląskiej.

Praca związana jest z realizacją podtematu problemu CPBR 02.13 prowadzonego przez IPPT PAN

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ В УЗЛАХ БУРОВОЙ ТЕЛЕЖКИ ПРИ УЧТЕНИИ ПОДАТЛИВОСТИ ЗВЕНЬЕВ

Р е з ю м е

В статье, на примере буровой тележки, представлен метод определения значений реакций в узлах рычажных механизмов с податливыми звеньями, соединенными упруго. Модель, построенная методом жестких конечных элементов, позволяет учесть изгибные и продольные колебания соответственных подсистем. Принято силовое возмущение колебаний. Составлены уравнения движения, а также представлен метод и аллгоритм численного решения. В численных примерах, при предположении геометрической и физической линейностей, найдены динамические реакции в изгибных точках. Так принятая модель позволяет провести компьютерный анализ свободных и вынужденных колебаний в очень короткие сроки.
Представленные в статье модели подсистем и методы разработаны с точки зрения применения для описания произвольных плоских механизмов, особенно манипуляторов.

THE METHOD OF EVALUATING THE DYNAMIC REACTIONS IN KINEMATIC PAIRS ON THE BASIS OF A DRILL TRUCK WITH THE FLEXIBLE LINKS

S u m m a r y

The method of evaluating the dynamic reactions in kinematic pairs of linkage mechanisms with the flexible links and pairs on the basis of a drill truck has been considered in this paper. A model built by means of the finite rigid elements enables the transverse and longitudinal vibrations of subsystems taking into consideration. The equations of movement have been arranged and the numerical solution method has been presented. Dynamic reactions of the pairs have been considered and computed with geometrical and physical linearity. The free and forsed vibrations have been evaluated in this model. The models of subsystems and the methods presented in this paper could be applied into optional plane linkage mechanisms and manipulators.

Recenzent: Doc. dr inż. Tadeusz Młynarski

Wpłynęło do redakcji 23.XII.1986 r.