ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: ENERGETYKA z.111 Nr kol. 1092

Kazimierz KURPISZ

Instytut Techniki Cieplnej
Politechnika Śląska, Gliwice

UPROSZCZONA METODA ROZWIĄZYWANIA DWUWYMIAROWYCH ODWROTNYCH ZADAŃ PRZEWODZENIA CIEPŁA

Streszczenie. W pracy przedstawiono analityczną i numeryczną metodę rozwiązywania dwuwymiarowych odwrotnych zadań przewodzenia ciepła. Metoda ta wykorzystuje iloczynową postać rozwiązania i może być zastosowana w pewnych przypadkach, gdy znane są niektóre warunki brzegowe. Pozwala ona na zmniejszenie niezbędnej liczby punktów pomiarowych.

1. WSTĘP

Numeryczne rozwiązywanie wielowymiarowych odwrotnych zadań przewodzenia ciepła metodą szeregów pochodnych [1,2] jest utrudnione m.in. wskutek niezbędności informacji o przebiegu temperatury w wielu punktach ciała. Przy nieznanym warunku początkowym liczba tych punktów powinna być zgodna z liczbą elementów różnicowych, kontaktujących się z powierzchnią zewnętrzną ciała. W praktyce oznaczałoby to konieczność dokonywania znacznej liczby pomiarów, a w przypadku umieszczania punktów pomiarowych wewnątrz ciała, mogłoby to doprowadzić do zaburzeń pola temperatury. Oczywiście istnieje możliwość aproksymacji danych pomiarowych dla mniejszej liczby punktów i na tej podstawie oszacowanie przebiegu temperatury w pozostałych punktach. Takie postępowanie może jednak wprowadzać istotne niedokładności danych, które w przypadku zadań źle uwarunkowanych (a takimi są zadania odwrotne) mogą prowadzić do znacznych błędów wyników.

Istnieje inna możliwość ograniczenia liczby punktów pomiarowych, wspomniana już w [1]. Możliwość taka występuje wtedy, gdy na pewnych powierzchniach zewnętrznych ciała znany jest warunek brzegowy. W takim przypadku rozwiązanie często może być przedstawione w postaci iloczynowej. Zastosowanie metod numerycznych znacznie poszerza zakres zagadnień, które mogą być w ten sposób rozwiązywane.

[1] Praca wykonana w ramach CPBP nr 02.18, kierunek 2, zadanie 2.2.1.1

2. ANALITYCZNE UPROSZCZONE ROZWIĄZANIE DWUWYMIAROWEGO ZADANIA ODWROTNEGO

Rozwiązanie klasycznego zagadnienia początkowo-brzegowego może być przedstawione w postaci iloczynowej w przypadku, gdy wszystkie warunki brzegowe są jednorodne [3].

Niech zatem:

$$T(X,Y,Fo) = T_X(X,Fo)\ T_Y(Y,Fo), \tag{1}$$

gdzie:

X,Y - bezwymiarowe współrzędne,

Fo - liczba Fouriera (bezwymiarowy czas).

Postać (1) jest dopuszczalna dla przykładowego zbioru warunków brzegowych:

$$\frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad \text{dla} \quad X = 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial X} + Bi_X\, T = 0 \quad \text{dla} \quad X = 1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial Y} = 0 \quad \text{dla} \quad Y = 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial Y} + Bi_Y\, T = 0 \quad \text{dla} \quad Y = B, \tag{3}$$

gdzie Bi_X i Bi_Y oznaczają liczby Biota dla odpowiednich powierzchni. Warunki (2) - (3) dotyczą symetrycznej płyty o wymiarach zredukowanych 1xB, z warunkami brzegowymi III rodzaju.

Rozwiązanie w postaci (1) może być wykorzystane w zagadnieniach odwrotnych, jeżeli znane są warunki brzegowe dla jednej ze zmiennych, tzn. (2) lub (3).

Funkcja $T_X(X,Fo)$ dana jest wzorem

$$T_X(X,Fo) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{w_i}{\|w_i\|^2} \left(\int_0^1 T_X(X,0) w_i dX \right) e^{-\nu_i^2 Fo} \tag{4}$$

gdzie funkcje własne w_i i wartości własne ν_i wynikają z równań

$$w_i = \cos \nu_i X, \qquad \nu_i \operatorname{tg} \nu_i = Bi_X, \tag{5}$$

a

$$T_Y(Y,Fo) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i}{\|v_i\|^2} \left(\int_0^B T_Y(Y,0)\, v_i dY \right) e^{-\mu_i^2 Fo}, \tag{6}$$

gdzie

$$v_i = \cos \mu_i Y, \qquad \mu_i \operatorname{tg} \mu_i B = Bi_Y. \tag{7}$$

Symbol $\|.\|^2$ oznacza kwadrat normy funkcji własnych.
Niech znany jest początkowy rozkład temperatury dla $X = X_1$ oraz warunki brzegowe na powierzchniach $Y = 0$ i $Y = B$. Wtedy

$$T_Y(Y,0) = \frac{1}{\gamma} T(X_1,Y,0), \tag{8}$$

gdzie

$$\gamma = T_X(X_1,0) \tag{9}$$

jest nieznaną liczbą.

Równanie (6) można teraz przedstawić w postaci:

$$T_Y(Y,Fo) = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i}{\|v_i\|^2} \left(\int_0^B T(X_1,Y,0)\, v_i dY \right) e^{-\mu_i^2 Fo} = \frac{1}{\gamma} F_Y(Y,Fo). \tag{10}$$

Gdyby funkcja $T_Y(Y,Fo)$ była znana, to problem sprowadziłby się do rozwiązania jednowymiarowego zadania odwrotnego. Z uwagi na to, że rozpatrywane pole jest polem symetrycznym, wystarczałaby informacja o przebiegu funkcji $T_X(X,Fo)$ dla jednego dowolnie wybranego punktu o współrzędnych X_1Y_1. Ogólna postać tego rozwiązania przedstawia się następująco [1]:

$$T_X(X,Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(X,X_1)\, T_{AX}^{(k)}(X_1,Fo), \tag{11}$$

gdzie $\phi_k(X,X_1)$ są znanymi funkcjami zależnymi od współrzędnych geometrycznych, a $T_{AX}(X_1,Fo)$ stanowi tzw. termiczną odpowiedź układu, tj. funkcję przedstawiającą przebieg temperatury $T_X(X,Fo)$ w punkcie o współrzędnej $X = X_1$. Symbol $(.)^{(k)}$ oznacza różniczkowanie według czasu.

Termiczna odpowiedź układu $T_{AX}(X_1,Fo)$ wynika z równania

$$T_{AX}(X_1,Fo) = \frac{T(X_1,Y_1,Fo)}{T_Y(Y_1,Fo)} = \frac{\gamma\, T(X_1,Y_1,Fo)}{F_Y(Y_1,Fo)} = \gamma\, F_X(X_1,Fo). \tag{12}$$

Podstawiając (12) do (11) otrzymuje się

$$T_X(X,Fo) = \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(X,X_1)\, F_X^{(k)}(X_1,Fo) = F_X(X,Fo), \tag{13}$$

a podstawiając (10), (13) do (1) otrzymuje się

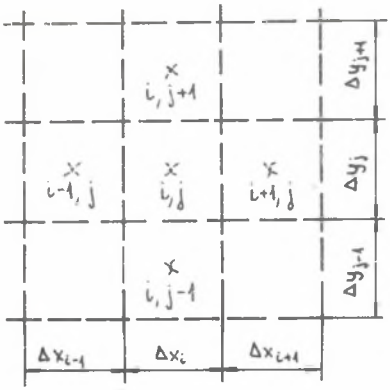
$$T(X,Y,Fo) = T_X(X,Fo)\, T_Y(Y,Fo) = F_Y(Y,Fo)\, F_X(X,Fo). \tag{14}$$

W rozwiązaniu (14) uprościła się nieznana liczba γ. Rozwiązanie to wymaga zatem informacji o początkowym rozkładzie temperatury wzdłuż dowolnie przyjętej współrzędnej $X = X_1$ (tzn. funkcji $T(X_1,Y,0)$), o jednorodnych warunkach brzegowych dla $Y = 0$ i $Y = B$ oraz informacji o przebiegu temperatury dla punktu o współrzędnych X_1, Y_1 (tzn. funkcji $T(X_1,Y_1,Fo)$). Na podstawie tych informacji wyznacza się funkcję $F_Y(Y,Fo)$ (równanie (10)), a następnie $F_X(X_1,Fo)$ (równanie (13)) i wreszcie temperaturę $T(X,Y,Fo)$, określoną równaniem (14).

Ten sposób rozwiązywania zagadnień dwuwymiarowych był prezentowany w [1] i dlatego nie będzie przedmiotem dalszych rozważań w niniejszej pracy.

3. NUMERYCZNE ROZWIĄZYWANIE DWUWYMIAROWYCH ZAGADNIEŃ ODWROTNYCH

Ta sama technika rozwiązywania zadań odwrotnych może być zastosowana do zagadnień sformułowanych numerycznie. W tym przypadku możliwości jej wykorzystania są większe niż dla zadań sformułowanych analitycznie.



Rys. 1. Podział różnicowy płyty dwuwymiarowej

Fig. 1. Net of mesh for a two-dimensional plate

Wykorzystanie iloczynowej postaci rozwiązania zilustrowano prostym przykładem płyty symetrycznej. Do sformułowania równań różnicowych użyto metody bilansów elementarnych.

Równanie bilansu energii dla dowolnego elementu różnicowego o indeksie (i,j), otrzymanego w wyniku dyskretyzacji płyty dwuwymiarowej (rys. 1) przedstawia równanie

$$c_{ij}\,\varrho_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\frac{dT_{i,j}}{dt} = \Delta y_j\,\frac{\Delta T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\dfrac{\Delta x_{i-1}}{2\lambda_{i-1,j}} + \dfrac{\Delta x_i}{2\lambda_{i,j}}} + \Delta y_j\,\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\dfrac{\Delta x_i}{2\lambda_{i,j}} + \dfrac{\Delta x_{i+1}}{2\lambda_{i+1,j}}} + \Delta x_i\,\frac{\Delta T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\dfrac{\Delta y_{j+1}}{2\lambda_{i,j+1}} + \dfrac{\Delta y_j}{2\lambda_{i,j}}} + \Delta x_i\,\frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\dfrac{\Delta y_{j-1}}{2\lambda_{i,j-1}} + \dfrac{\Delta y_j}{2\lambda_{i,j}}}. \tag{15}$$

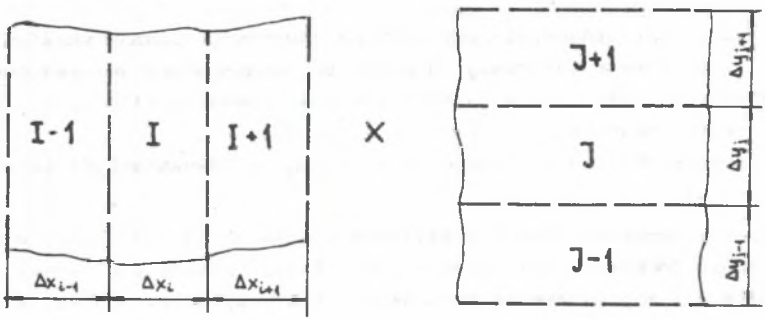
W równaniu tym c_{ij}, ϱ_{ij}, λ_{ij} oznaczają odpowiednio pojemność cieplną właściwą, gęstość i współczynnik przewodzenia ciepła dla materiału wypełniającego element różnicowy (i,j).

Rozpatrzmy teraz dwa problemy jednowymiarowe. Elementy różnicowe dla tych problemów są warstwami o szerokościach odpowiednio Δx_i i Δy_j (por. rys. 2). Równanie bilansu energii dla elementów Δx_i ma postać:

$$c_I \varrho_I \Delta x_i \frac{dT_I}{dt} = \frac{T_{I-1} - T_I}{\frac{\Delta x_{i-1}}{2\lambda_{I-1}} + \frac{\Delta x_i}{2\lambda_I}} + \frac{T_{I+1} - T_I}{\frac{\Delta x_{i+1}}{2\lambda_{I+1}} + \frac{\Delta x_i}{2\lambda_I}}, \tag{16}$$

a dla elementów Δy_j:

$$c_J \varrho_J \Delta y_j \frac{dT_J}{dt} = \frac{T_{J-1} - T_J}{\frac{\Delta y_{j-1}}{2\lambda_{J-1}} + \frac{\Delta y_j}{2\lambda_J}} + \frac{T_{J+1} - T_J}{\frac{\Delta y_{j+1}}{2\lambda_{J+1}} + \frac{\Delta y_j}{2\lambda_J}}. \tag{17}$$



Rys. 2. Zadania jednowymiarowe odpowiadające problemowi dwuwymiarowemu
Fig. 2. One-dimensional problems referring to the two-dimensional

Łatwo zauważyć, że temperaturę $T_{i,j}$ można przedstawić w postaci iloczynu

$$T_{i,j} = T_I T_J, \tag{18}$$

jeśli tylko

$$c_I \varrho_I = c_J \varrho_J = c_{i,j} \varrho_{i,j} \tag{19}$$

oraz stałe są wartości współczynnika prowadzenia ciepła.

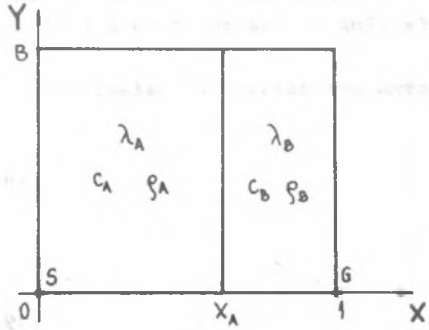
Rozwiązanie to natomiast nie wymaga jednorodności warunków brzegowych. Jeżeli liczbę podziałów różnicowych w kierunku osi X oznaczymy przez n, a w kierunku osi Y przez m, to klasyczne ujęcie metody szeregów pochodnych wymagałoby informacji o przebiegu temperatury w m + n punktach. Znajomość warunku brzegowego na jednej z powierzchni (np. Y = B) ogranicza liczbę niezbędnych danych do informacji o temperaturze w chwili początkowej w m punktach, a następnie o przebiegu temperatury tylko w jednym punkcie. Jeżeli istnieje możliwość dalszej obserwacji temperatury w (m - 1) punktach, to informacja ta może zostać wykorzystana do poprawy dokładności wyników, np. za pomocą rachunku wyrównawczego (por. [1]). Algorytm postępowania mógłby przebiegać następująco:

- wyznacza się przebieg temperatury T_J $(J = 1,\ldots,m)$ przez rozwiązanie układu równań różnicowych (17) przy znanej temperaturze w chwili początkowej w m punktach, odpowiadających kolejnym warstwom Δy_j,
- wyznacza się termiczną odpowiedź układu T_{XI} dla warstwy I z równania

$$T_{XI} = T_{i,j}/T_J, \tag{20}$$

- rozwiązuje się jednowymiarowy problem odwrotny, opisany układem równań (16) na podstawie informacji o przebiegu temperatury w warstwie I (postać tego rozwiązania jest zbliżona do równania (11) (por. [2])), wyznaczając temperaturę T_I $(I = 1,\ldots,n)$,
- ostatecznie oblicza się temperaturę $T_{i,j}$ z równania (18) (dla $i = 1,\ldots,n$; $j = 1,\ldots,m$).

Znacznym ograniczeniem dla możliwości stosowania tej metody wydaje się być żądanie jednorodności materiałowej ciała. Okazuje się jednak, że metoda może być z powodzeniem stosowana w tym przypadku, chociaż ze wzrostem złożoności struktury materiałowej maleje efektywność metody. Możliwości te zostaną zilustrowane prostym przykładem płyty, zbudowanej z dwóch materiałów o pojedynczej granicy między materiałami (por. rys. 3).



Rys. 3. Płyta dwuwymiarowa zbudowana z dwóch materiałów

Fig. 3. Two-dimensional plate consisted of two materials

Przy takiej strukturze materiałowej żadnych trudności nie przedstawia wyznaczenie temperatury T_I $(I = 1,\ldots,n)$, gdyby tylko znana była odpowiedź temperaturowa T_{XI}. Określenie odpowiedzi temperaturowej możliwe jest natomiast dopiero po obliczeniu temperatury T_J $(J = 1,\ldots,m)$. Z uwagi na układ warstw materiałowych trudno jest spełnić warunki (19),

zdefiniować ϱ_J, c_J, λ_J i zbudować układ równań (17). Można jednak postąpić w sposób następujący:

- wyznacza się dwukrotnie temperatury T_J, tzn. zarówno dla danych λ_A, c_A, ϱ_A otrzymując T_{JA} $(J = 1,\ldots,m)$ oraz dla λ_B, c_B, ϱ_B otrzymując T_{JB} $(J = 1,\ldots,m)$,
- dwukrotnie też wyznacza się odpowiedź temperaturową, tzn.

$$T_{XIA} = T_{i,j}/T_{JA}, \qquad T_{XIB} = T_{i,j}/T_{JB},$$

- wyznacza się dwukrotnie temperaturę T_I, tzn. dla odpowiedzi temperaturowych T_{XIA} i T_{XIB},
- temperaturę $T_{i,j}$ $(i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,m)$ wyznacza się odpowiednio ze wzorów

$T_{i,j} = T_{IA}\,T_{JA}$ dla tych elementów różnicowych, dla których $\lambda = \lambda_A$, $\varrho = \varrho_A$, $c = c_A$, oraz

$T_{i,j} = T_{IB}\,T_{JB}$ dla pozostałych elementów.

W ten sposób zostaje zachowany warunek (19). Liczba możliwych kombinacji wzrasta ze wzrostem stopnia złożoności struktury materiałowej, a tym samym maleje efektywność metody z uwagi na wzrost niezbędnej liczby obliczeń. Tym niemniej metoda ta może być stosowana także przy bardziej skomplikowanym układzie warstw materiałowych.

4. WYNIKI PRZYKŁADOWYCH OBLICZEŃ I WNIOSKI

Celem sprawdzenia efektywności metody przeprowadzono obliczenia oparte na tzw. eksperymencie numerycznym. W niniejszej pracy zamieszczono fragment tych obliczeń dla płyty o strukturze materiałowej jak na rys. 3. Na podstawie danych o warunkach brzegowych na powierzchniach $Y = 0$ i $Y = B$ oraz danych o warunku początkowym na powierzchni $X = 1$ wyznaczano przebieg temperatury w środku płyty (punkt S na rys. 3). Wszystkie dane zaburzano losowo błędem pomiarowym o wartości maksymalnej $\delta = 0{,}005$. Przyjęto następujące warunki brzegowe:

- na powierzchniach $X = 0$ i $Y = 0$ - warunek izolacji cieplnej,
- na powierzchniach $X = 1$ i $Y = B$ - warunek brzegowy III rodzaju przy liczbie Biota $Bi = 0{,}5$.

Obliczenia prowadzono dla kroku czasu zdefiniowanego w postaci bezwymiarowej

$$\Delta Fo = \frac{\lambda_A\,\Delta t}{c_A\,\varrho_A\,L_0^2} = 0{,}1 \tag{21}$$

gdzie $L_0 = 1$, przy czym obserwację rozpoczęto od $Fo = 0{,}4$.

W tablicy 1 przedstawiono wyniki obliczeń temperatury w punkcie B w przypadku, gdy:

- $\Lambda = \lambda_B / \lambda_A = 1{,}25$,
- $C = c_B \varrho_B / c_A \varrho_A = 0{,}75$,
- granica warstw materiałowych przebiega dla $X = 0{,}25$.

W tablicy 2 przedstawiono z kolei wyniki obliczeń dla punktu B w przypadku, gdy granica warstw materiałowych przebiega dla $X = 0{,}75$.

Tablica 1

Wyniki obliczeń dwuwymiarowego problemu odwrotnego dla $X_A = 0{,}25$

Temperatura zadana	0,737	0,664	0,597	0,536	0,482
Temperatura obliczona	0,739	0,666	0,594	0,532	0,480
Temperatura zadana	0,433	0,389	0,350	0,310	0,281
Temperatura obliczona	0,425	0,381	0,339	0,307	0,278

Tablica 2

Wyniki obliczeń dwuwymiarowego problemu odwrotnego dla $X_A = 0{,}75$

Temperatura zadana	0,794	0,728	0,668	0,611	0,559
Temperatura obliczona	0,782	0,715	0,650	0,598	0,544
Temperatura zadana	0,510	0,458	0,421	0,382	0,350
Temperatura obliczona	0,489	0,449	0,409	0,376	0,344

Z tablic tych wynika dobra zgodność uzyskanych wyników z zadanymi przebiegami temperatury. Obliczenia te wykazały jednak istnienie innych ograniczeń w stosowaniu metody. Dotyczą one umiarkowanych wartości stosunków Λ i C.

Z teorii metod różnicowych wiadomo, że różnicowe liczby Fouriera (21) powinny przyjmować wartości takie, które zapewniają pożądaną dokładność obliczeń (w szczególnych przypadkach stabilność). Ze stosunku $\Delta Fo_A / \Delta Fo_B = \Lambda / C$ wynika odpowiednio krok czasowy, np. ΔFo_B dla ustalonego ΔFo_A. Istnieje zatem możliwość odpowiedniego doboru ΔFo_A i ΔFo_B. W zagadnieniach odwrotnych występuje dodatkowo ograniczenie kroku czasu od dołu, tzn. występuje wartość $(\Delta Fo)_{min}$. Może się zatem okazać, że odpowiedni dobór kroku czasu spełniający obydwa te wymagania jest niemożliwy. Z orientacyjnych obliczeń wynika, że stosunek Λ / C nie powinien przekraczać wartości 3 - 5.

Zaletą metody jest natomiast możliwość wystąpienia nadmiaru danych, jeżeli kontynuowana byłaby obserwacja temperatury w punktach, w których dany jest warunek początkowy. Nadmiar danych umożliwia znaczną poprawę jakościową uzyskiwanych rezultatów.

LITERATURA

[1] Kurpisz K.: Wyznaczanie pola temperatury w ciałach stałych na podstawie obserwacji temperatury lub gęstości strumienia ciepła w wybranych punktach ciała. ZN Pol.Śl., s. Energetyka, z.84, 1984.

[2] Kurpisz K., Skorek J.: Numeryczna metoda rozwiązywania pewnej klasy odwrotnych zadań przewodzenia ciepła. ZN Pol.Śl., s.Energetyka (w druku).

[3] Galicyn A.S., Żukowski A.N.: Integralnyje prieobrazowanija i specjalnyje funkcji w zadaczach tiepłoprowodnosti. Naukowa Dumka, Kijev 1976.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Eugeniusz Kalinowski

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВИХМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Р е з ю м е

В работе представлены аналитический и численный методы решения двухмерных обратных задач теплопроводности. Метод использует решение прямой задачи в виде произведения. Его можно применить в тех случаях, когда известные граничные условия. Метод допускает уменьшение числа точек, в которых надо измерять температуру.

SIMPLIFIED METHOD FOR SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS

S u m m a r y

An analytical and numerical method for solution of two-dimensional inverse heat conduction problems is presented. The method employs a product form of the solution of direct problems and can be applied to cases when some boundary conditions are known. It enables decreasing of the number of points at which temperature histories should be recorded.