ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: ENERGETYKA z.111 Nr kol. 1092

Janusz SKOREK

Instytut Techniki Cieplnej

Politechnika Śląska, Gliwice

UOGÓLNIONA METODA BILANSÓW ELEMENTARNYCH ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ BRZEGOWYCH PRZEWODZENIA CIEPŁA*

Streszczenie. W artykule przedstawiono założenia nowej koncepcji sformułowania metody bilansów elementarnych.

W proponowanym ujęciu możliwe jest w stosunkowo prosty sposób stosowanie elementów różnicowych o dowolnych kształtach. Przedstawiono przykład obliczeniowy.

1. WPROWADZENIE

Do najczęściej stosowanych dyskretnych metod rozwiązywania zagadnień brzegowych przewodzenia ciepła zalicza się metodę różnicową (Finite Difference Method FDM) oraz metodę elementu skończonego (Finite Element Method FEM). Teoria tych metod jest obecnie szczegółowo poznana i opisana w licznych monografiach.

Mimo wielu zalet metody te nie mają przejrzystej interpretacji fizykalnej, co znacznie komplikuje ich stosowanie w problemach złożonej wymiany ciepła.

Metoda bilansów elementarnych MBE (Control Volume Method) jest uniwersalną metodą dyskretną tworzenia równań różnicowych na podstawie bilansu energii elementów różnicowych. Dzięki jasnej interpretacji fizykalnej może być łatwo używana do rozwiązywania zadań, w których występują różnorodne struktury materiałowe, przemiany fazowe, promieniowane, reakcje chemiczne itp. Zaletą MBE jest również jej prostota matematyczna.

Wadą metody jest ograniczenie zastosowań jedynie do obszarów dających się podzielić na regularne elementy różnicowe (np. prostokąty, prostopadłościany itp.), co być może jest przyczyną niezbyt dużej popularności metody pomimo wielu istotnych zalet.

W dalszej części przedstawiono koncepcję uogólnienia MBE na siatki różnicowe o nieregularnym kształcie (np. trójkątne).

*) Praca wykonana w ramach CPBP nr 02.18, kierunek 2, zadanie 2.2.1.1

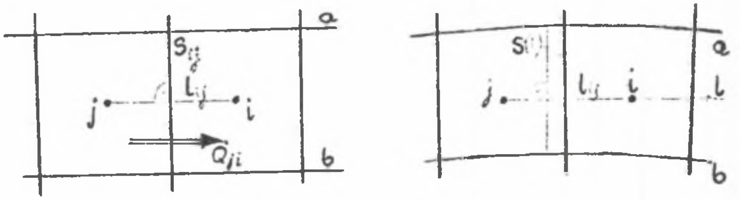
2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA METODY BILANSÓW ELEMENTARNYCH

W metodzie bilansów elementarnych równania różnicowe pola temperatury wynikają z równań bilansu energii elementów różnicowych. Węzły elementów umieszcza się zazwyczaj w środkach ciężkości elementów. Zasadniczym pojęciem metody jest opór przewodzenia R_{ij} pomiędzy węzłami i,j [1], [2] (rysunek 1):

$$R_{ij} = \frac{l_{ij}}{\lambda_{ij} S_{ij}} \tag{1}$$

gdzie:

l_{ij} - odległość pomiędzy węzłami i,j,
λ_{ij} - współczynnik przewodzenia ciepła,
S_j - pole powierzchni przepływu ciepła prostopadłej do odcinka l_{ij}.



Rys. 1. Elementy różnicowe
Fig. 1. Difference elements

Zakłada się przy tym, że powierzchnie a i b (rysunek 1) są adiabatyczne, co jest równoznaczne z przyjęciem jednowymiarowego przepływu ciepła wzdłuż kierunku l_{ij}. Strumień ciepła $\dot{Q}_{ji}$ płynącego od węzła i do węzła j przez powierzchnię S_{ij} określa wzór:

$$\dot{Q}_{j,i} = \frac{T_j - T_i}{R_{ij}}, \tag{2}$$

gdzie:

T_i, T_j - temperatury w węzłach elementów.

Zgodnie z teorią MBE [1], [2], [3] przyjmuje się, że elementy różnicowe mogą mieć kształty regularne w sensie przyjętego układu współrzędnych (prostokąty, pierścienie cylindryczne itp.). Elementy te są bowiem zgodne z założeniami przyjętymi przy definiowaniu oporu przewodzenia ciepła R_{ij}.

Teoretycznie istnieje możliwość wyznaczenia oporu pomiędzy elementami o dowolnym kształcie ze wzoru [1], [2]:

$$R_{ij} = \int_{l_i}^{l_j} \frac{dl}{\lambda_{ij} S(l)} , \qquad (3)$$

gdzie:

$S(l)$ - pole przekroju prostopadłego w kierunku l.

Praktycznie obliczenie całki występującej we wzorze (3) jest jednak możliwe jedynie dla elementów geometrycznie regularnych.

3. UOGÓLNIONA KONCEPCJA METODY BILANSÓW ELEMENTARNYCH

Z rozważań przedstawionych w rozdziale 2 wynika, że zasadniczą przeszkodą stosowania MBE dla elementów nieregularnych jest sposób wyznaczania strumieni ciepła $\dot{Q}_{ij}$ na podstawie definicji oporu danej wzorem (3). Proponowana koncepcja uogólnienia MBE polega na wyznaczaniu $\dot{Q}_{ij}$ wprost ze znanego wzoru określającego strumień ciepła przepływającego przez dowolną powierzchnię S:

$$\dot{Q}_S = \int_S \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)\Bigg|_S dS , \qquad (4)$$

gdzie:

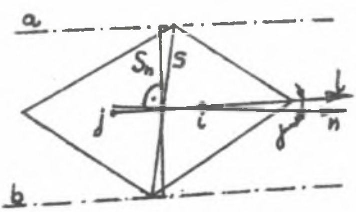
$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)\Big|_S$ - pochodna normalna temperatury na powierzchni S.

Metodę wykorzystania wzoru (4) do obliczenia strumienia ciepła pomiędzy węzłami i,j przedstawiono na przykładzie dwóch elementów trójkątnych (rysunek 2).

Gęstość strumienia ciepła $\dot{q}_{ji}$ przepływającego od węzła i do j zależy tylko od położenia węzłów i może być obliczona z przybliżonej zależności:

$$\dot{q}_{ji} \approx \lambda \frac{T_j - T_i}{l_{ij}} \qquad (5)$$

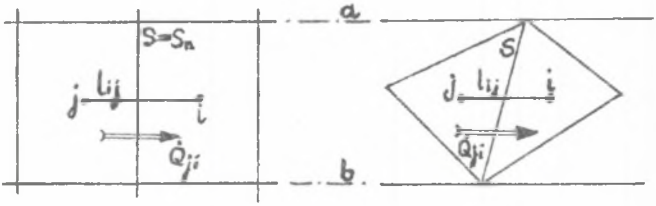
Tak jak i poprzednio przyjmuje się, że w kierunku l prostej łączącej węzły i,j ma miejsce jednowymiarowy przepływ ciepła wewnątrz "wstęgi" ograniczonej adiabatycznymi powierzchniami a,b. Szerokość "wstęgi" S_n określa rzut S na płaszczyznę normalną do l.



Rys. 2. Trójkątne elementy różnicowe

Fig. 2. Triangular difference elements

Z przyjętych założeń oraz ze wzoru (5) wynika, że strumień ciepła $\dot{Q}_{ji}$ pomiędzy elementami i,j zależy od wielkości l_{ij} oraz S_n, nie zależy natomiast od wielkości S (rysunek 3).



Rys. 3. Strumienie ciepła pomiędzy elementami
Fig. 3. Heat flures between the elements

Wartość strumienia ciepła $\dot{Q}_{ji}$ wynika więc z następującego wzoru:

$$\dot{Q}_{ji} = S_n \frac{T_j - T_i}{R_{ij}}, \tag{6}$$

gdzie:

S_n - rzut powierzchni styku elementów S na płaszczyznę normalną do prostej l przechodzącej przez węzły i,j.

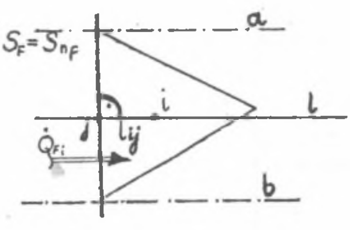
Wartość S_n oblicza się ze wzoru (rysunek 2):

$$S_n = S\cos\gamma \tag{7}$$

Wartość oporu R_{ij} wynika z ogólnej zależności:

$$R_{ij} = \int_{l_i}^{l_j} \frac{dl}{\lambda(l)} = \frac{l_{ij}}{\lambda}\Bigg|_{\lambda = const} \tag{8}$$

Jeżeli element styka się z zewnętrzną powierzchnią ciała F, to położenie węzła brzegowego wynika z przecięcia się prostej prostopadłej do powierzchni F wychodzącej z węzła elementu z powierzchnią F (rysunek 4).



Rys. 4. Brzegowy element różnicowy
Fig. 4. Boundary difference element

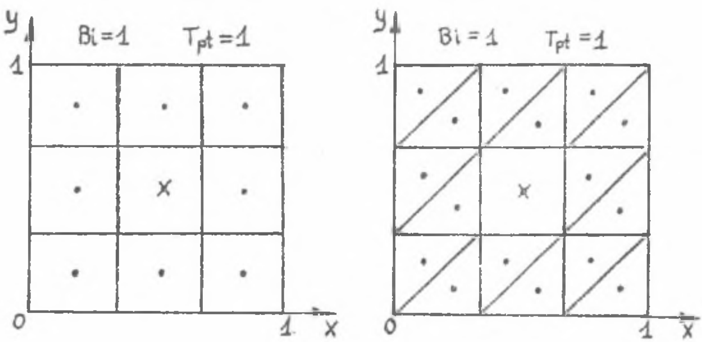
4. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przedstawiono wyniki obliczeń nieustalonego pola temperatury w dwuwymiarowej płycie symetrycznej z warunkami brzegowymi 3 rodzaju. Płytę podzielono na elementy kwadratowe i trójkątne.

Przyjęto liczbę Biota Bi=1, temperaturę płynu równą 1, a temperaturę początkową równą 0. W tablicy 1 podano wyniki obliczeń temperatury w punkcie x=0, y=0,5 wraz z rozwiązaniem dokładnym (błędy względne odniesione są do rozwiązania dokładnego).

Uzyskane wyniki dowodzą, że zastosowanie siatki elementów trójkątnych daje zadowalające rezultaty. Błędy względne są mniejsze aniżeli w przypadku stosowania siatki kwadratowej, co wynika zapewne z faktu, że w przypadku podziału trójkątnego zastosowano większą liczbę elementów różnicowych. Z tej też przyczyny przedstawionych wyników nie należy porównywać w sposób ilościowy a jakościowy. Dowodzą one, że zastosowanie elementów trójkątnych nie wprowadza dodatkowych błędów do metody.

Inne przeprowadzone obliczenia potwierdzają również prawdziwość tej tezy.



Rys. 5. Podział różnicowy płyty
Fig. 5. Net of mesh for a plate

Tablica 1

Przebieg temperatury w płycie

Czas Fo	Rozwiązanie dokładne	Siatka kwadratowa		Siatka trójkątna	
		temp.	błąd %	temp.	błąd %
0.1	0.0945	0.1008	6.667	0.0954	0.952
0.3	0.3353	0.3314	1.163	0.3320	0.984
0.5	0.5063	0.5010	1.047	0.5068	0.098
0.7	0.6329	0.6269	0.632	0.6355	0.411
0.9	0.7270	0.7210	0.550	0.7307	0.510

5. WNIOSKI

Uogólniona wersja MBE umożliwia obliczanie pól temperatury w ciałach o dowolnych kształtach. Przeprowadzone obliczenia wykazują, że metoda daje zadowalające rezultaty. W praktyce elementy nieregularne np. trójkątne wystarczy stosować tylko dla wypełnienia krzywoliniowych obszarów w sąsiedztwie brzegu ciała.

Przy podziale obszaru rozwiązania należy również unikać sytuacji, w której linia łącząca węzły sąsiadujących elementów przebiegałyby poza powierzchnią styku tych elementów. W takim bowiem przypadku należy się liczyć z możliwością wystąpienia istotnych błędów przy obliczaniu strumienia ciepła przepływającego pomiędzy elementami.

Jeżeli w rozpatrywanym obszarze występują materiały o różnych właściwościach termofizycznych, celowy jest taki podział na elementy, w którym płaszczyzny styku elementów pokrywają się z granicami materiałowymi. Uwaga ta dotyczy również obszarów, w których występują liniowe bądź powierzchniowe źródła ciepła.

LITERATURA

[1] Jaluria Y., Torrance K.E.: Computation Heat Transfer. Springer-Verlag 1986.

[2] Przewodzenie ciepła. Praca zbiorowa pod red. Gduli S.J.: PWN, Warszawa 1984.

[3] Szargut J.: Metody numeryczne w obliczeniach cieplnych pieców przemysłowych. "Śląsk", Katowice 1977.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Eugeniusz Kalinowski

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ЭЛЕМЕНТАРНЫХ БАЛАНСОВ РЕШАЮЩИЙ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Р е з ю м е

В статье представлены предпосылки новой идеи формулировки метода элементарных балансов. В представляемом подходе существует возможность применения разностных элементов произвольной формы. Дан расчетный пример.

GENERAL CONTROL VOLUME APPROACH TO SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS OF HEAT TRANSFER

S u m m a r y

In a classical formulation of Control Volume Method the energy balance can be worked out only for elements of regular shape.

New formula of calculation of heat flux between difference elements has been evaluated. This way the elements of any shape e.g. the most common triangular can be taken into consideration that enables dealing with boundary problems within bodies of complex geometry.