

Krzysztof GRYSA,
Henryk KAMIŃSKI

Instytut Mechaniki Stosowanej
Politechnika Poznańska

O ROZWIĄZANIACH PODSTAWOWYCH RÓWNIANIA PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO
I RÓWNIANIA HELMHOLTZA I ICH ZNACZENIU W ROZWIĄZYWANIU PROSTYCH
I ODWROTNYCH ZAGADNIEŃ PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO*

Streszczenie. Przedstawiono podstawowe rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego i równania Helmholtza. Na tej podstawie można uzyskać ściśle lub przybliżone rozwiązanie zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła. W pracy rozpatrywano przybliżone rozwiązanie zagadnień odwrotnych cechujących się symetrią względem osi.

1. WSTĘP

Jedną z metod stosowanych przy rozwiązywaniu prostych i odwrotnych zagadnień przewodnictwa cieplnego jest metoda potencjałów cieplnych (por. np. [1,2,3]). Pozwala ona zbudować dla rozważanego zagadnienia równanie całkowe, w którym funkcją poszukiwaną jest tzw. gęstość potencjału. Wyznaczając tę funkcję, można następnie za jej pomocą opisać pole temperatury lub gęstość strumienia ciepła w rozważanym obszarze, a także na jego brzegu, co przy tzw. granicznych zagadnieniach odwrotnych [3] jest najczęściej celem rozważań. Główną rolę przy budowaniu wspomnianego równania całkowego odgrywa funkcja, nazywana rozwiązaniem podstawowym równania przewodnictwa cieplnego. Dla zagadnienia rozważanego w m -wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej (gdzie $m = 1,2,3$) w prostokątnym układzie współrzędnych jest ona znana; jej postać będzie podana w dalszej części pracy. Gdy zagadnienie rozważane jest w układzie współrzędnych biegunowym, walcowym czy sferycznym, postaci rozwiązania podstawowego otrzymuje się przez dokonanie stosunkowo nieskomplikowanych operacji; przytoczymy je także w tej pracy.

Otrzymane za pomocą potencjałów cieplnych równania całkowe mają tę wadę, że nawet w przypadkach jednowymiarowych trudno jest na ich podsta-

*) Praca wykonana w ramach CPBP nr 02.18, kierunek 2, zadanie 2.2.1.2

wie dokonać obliczeń na komputerze. Szczególnie w przypadku zagadnień odwrotnych jest to złożony problem z uwagi na ich niestabilność w sensie Hadamarda [4].

W związku z trudnościami w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych w ścisły sposób stosowano wiele różnych metod przybliżonych. Jedną z nich, polegającą na zdyskretyzowaniu zagadnienia po czasie już na etapie równania różniczkowego, prowadziła do zastąpienia równania przewodnictwa ciepłego przez układ równań Helmholtza. Zastosowanie metod teorii potencjałów ponownie prowadziło w tym przypadku do równań całkowych [5], które - w odróżnieniu od równań całkowych uzyskanych dla równania przewodnictwa ciepłego - w wielu przypadkach jednowymiarowych można rozwiązywać analitycznie [6]. W pewnym dwuwymiarowym przypadku pozwoliły one otrzymać rozwiązanie numerycznie [7], i to przy zastosowaniu nieskomplikowanego programu.

Oczywiście przy budowaniu równań całkowych dla zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepłego, rozwiązywanych tą metodą, najistotniejsza jest znajomość rozwiązania podstawowego równania Helmholtza w różnych układach współrzędnych.

W pracy tej oprócz związków pomiędzy rozwiązaniami podstawowymi równania przewodnictwa ciepłego i równania Helmholtza przedstawione zostaną rozważania dotyczące przybliżonego rozwiązywania zagadnień odwrotnych cechujących się symetrią względem osi. Przypadek ten zasługuje na uwagę ze względu na trudności w uzyskaniu zamkniętej postaci rozwiązania podstawowego dla równania Helmholtza.

2. REPREZENTACJE CAŁKOWE

Gdy rozważane jest równanie przewodnictwa ciepłego o postaci

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t}\right) T(\underline{x}, t) = F(\underline{x}, t), \quad (1)$$

gdzie a jest współczynnikiem dyfuzyjności temperaturowej, T - temperaturą, F - funkcją źródła ciepła [3], \underline{x} - punktem w obszarze Ω , zajmowanym przez ciało przewodzące ciepło, t - chwilą czasu), wówczas - niezależnie od tego, czy zadane są warunki na brzegu obszaru Ω , czy też na pewnej powierzchni wewnątrz tego obszaru - rozważane zagadnienie można sformułować w postaci równania całkowego. Gdy jest np. rozważane zagadnienie odwrotne, w którym na powierzchni $\partial\Omega^*$ obszaru Ω^* zawartego w Ω zadana jest temperatura $T^*(\underline{x}^*, t)$, $(\underline{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times (0, t_K)$, wówczas zamiast równania (1) z warunkiem zadany na powierzchni $\partial\Omega^*$ i z warunkiem początkowym postaci

$$T(\underline{x}, 0) = T_0(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega \quad (2)$$

można rozważać równanie całkowe o postaci [3]:

$$\int_{\partial\Omega} G(\underline{x}^* - \underline{\xi}, t) * h(\underline{\xi}, t) dS(\underline{\xi}) = T^*(\underline{x}^*, t) + \int_{\Omega} G(\underline{x}^* - \underline{y}, t) * F(\underline{y}, t) dV(\underline{y}) - \frac{1}{a} \int_{\Omega} G(\underline{x}^* - \underline{y}, t) T_0(\underline{y}) dV(\underline{y}), \quad (3)$$

gdzie symbol * oznacza splot, a $G(\underline{x}^* - \underline{\xi}, t)$ jest rozwiązaniem podstawowym równania (1). W równaniu całkowym (3) funkcją poszukiwaną jest $h(\underline{\xi}, t)$, $(\underline{\xi}, t) \in \partial\Omega \times (0, t_k)$, nazywana gęstością potencjału cieplnego warstwy pojedynczej. Gdy funkcja ta jest znaleziona, wówczas temperaturę w obszarze Ω i na jego brzegu wyznacza się ze związku

$$T(\underline{x}, t) = \int_{\partial\Omega} G(\underline{x} - \underline{\xi}, t) * h(\underline{\xi}, t) dS(\underline{\xi}) - \int_{\Omega} G(\underline{x} - \underline{y}, t) * F(\underline{y}, t) dV(\underline{y}) + \frac{1}{a} \int_{\Omega} G(\underline{x} - \underline{y}, t) T_0(\underline{y}) dV(\underline{y}). \quad (4)$$

Równanie (3) jest bardzo trudne do rozwiązania nawet w przypadkach jednowymiarowych; pewne uwagi dotyczące jego rozwiązań podane są w opracowaniu [8].

Przy rozwiązywaniu przybliżonym zagadnień odwrotnych z wykorzystaniem równania Helmholtza równanie (1) zastępuje się układem równań Helmholtza postaci

$$(\nabla^2 - p^2)\theta_k(\underline{x}) = f_k(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega \quad (5)$$

przy czym $p = (a \Delta t)^{-1/2}$, gdzie Δt jest krokiem czasowym, a prawa strona równania (5) ma postać:

$$f_k(\underline{x}) = -p^2 \theta_{k-1}(\underline{x}) + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\underline{x}, t) dt. \quad (6)$$

Tutaj $t_k = k \Delta t$, $k = 1, \dots, K$ oraz $\theta_k(\underline{x}) \approx T(\underline{x}, t_k)$ [5].

Przy rozwiązywaniu zagadnienia odwrotnego, w którym na powierzchni $\partial\Omega^*$ zadana jest temperatura $T^*(\underline{x}^*, t)$, w miejsce równania (5) rozważa się w chwili t_k równanie całkowe o postaci [5]:

$$\int_{\partial\Omega^*} G^H(\underline{x}^* - \underline{\xi}, p) h_k^H(\underline{\xi}) dS(\underline{\xi}) = T^*(\underline{x}^*, t_k) + \int_{\Omega} G^H(\underline{x}^* - \underline{y}, p) f_k(\underline{y}) dV(\underline{y}), \quad k = 1, \dots, K, \quad (7)$$

gdzie $G^H(\underline{x} - \underline{\xi}, p)$ jest rozwiązaniem podstawowym równania (5).

W równaniu (7) funkcją poszukiwaną jest $h_k^H(\underline{\xi}, t)$, $(\underline{\xi}, t) \in \partial\Omega \times (0, t_k)$. Gdy funkcja ta jest znaleziona, wówczas funkcję $\theta_k(\underline{x})$, opisującą w sposób przybliżony temperaturę w obszarze Ω w funkcji t_k wyznacza się ze związku

$$\theta_k(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} G^H(\underline{x} - \underline{\xi}, p) h_k^H(\underline{\xi}) dS(\underline{\xi}) - \int_{\Omega} G^H(\underline{x} - \underline{y}, p) f_k(\underline{y}) dV(\underline{y}) \quad (8)$$

Równanie (7) można w wielu jednowymiarowych przypadkach rozwiązać. Przykłady takich rozwiązań wraz z analizą ich stabilności w zależności od wielkości kroku czasowego oraz wielkości obszaru Ω^* i jego położenia wewnątrz Ω podano w pracy [6].

Porównując równania (1) i (5) natychmiast można zauważyć, że jeśli położymy się $p^2 = s/a$, gdzie s - parametr transformacji Laplace'a, to lewa strona równania (5) staje się transformatą Laplace'a lewej strony równania (1). Wynika stąd następujący związek pomiędzy rozwiązaniami podstawowymi równań (1) i (5):

$$\bar{G}(\underline{x} - \underline{\xi}, s) = G^H(\underline{x} - \underline{\xi}, \sqrt{\frac{s}{a}}), \quad (9)$$

gdzie nadkreślenie oznacza transformatę Laplace'a.

3. ROZWIĄZANIA PODSTAWOWE

Rozwiązanie podstawowe równania (1) w przestrzeni trójwymiarowej ma postać [1]:

$$G_3(x-\xi, y-\eta, z-\zeta, t) = \frac{a}{(4a\pi t)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4at}\right]. \quad (10)$$

Scałkowanie tego równania po ζ w przedziale od $-\infty$ do $+\infty$ przy $z = 0$ prowadzi do postaci tej funkcji na płaszczyźnie:

$$G_2(x-\xi, y-\eta, t) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4at}\right] \quad (11)$$

Ponowne scałkowanie, tym razem po η od $-\infty$ do $+\infty$ przy $y = 0$ pozwala wyznaczyć rozwiązanie podstawowe w przestrzeni jednowymiarowej:

$$G_1(x-\xi, t) = \sqrt{\frac{a}{4\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] \quad (12)$$

W walcowym układzie współrzędnych r, φ, z , rozwiązanie podstawowe można przedstawić następującym wzorem:

$$G_w(r, \varphi, z, \vartheta, \xi, t) = \frac{a}{(4a\pi t)^{3/2}} \exp \left[- \frac{r^2 + \vartheta^2 - 2r\vartheta \cos(\varphi - \vartheta) + (z - \xi)^2}{4at} \right] \quad (13)$$

wynikającym bezpośrednio z (10). Dla przypadku symetrii osiowej postać rozwiązania podstawowego wyznacza się wykorzystując wzór

$$\int_0^\pi e^{k \cos \varphi} d\varphi = \pi I_0(k), \quad (14)$$

(por. [9], s.281, wzór 175), gdzie $I_\nu(\cdot)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu ν . Postać tego rozwiązania jest następująca:

$$G_{wa}(r, z, \vartheta, \xi, t) = \frac{\vartheta}{4t \sqrt{a\pi t}} I_0 \left(\frac{\vartheta r}{2at} \right) \exp \left[- \frac{\vartheta^2 + r^2 + (z - \xi)^2}{4at} \right] \quad (15)$$

Rozwiązanie podstawowe w układzie biegunowym otrzymuje się bezpośrednio ze wzoru (11):

$$G_b(r, \varphi, \vartheta, \nu, t) = \frac{1}{4\pi t} \exp \left[- \frac{r^2 + \vartheta^2 - 2r\vartheta \cos(\varphi - \nu)}{4at} \right] \quad (16)$$

Całkując wzór (16) po ν od $-\pi$ do π przy $\varphi = 0$ lub całkując wzór (15) po ξ od $-\infty$ do $+\infty$ przy $z = 0$ otrzymuje się rozwiązanie podstawowe na płaszczyźnie przy symetrii względem punktu:

$$G_{bs}(r, \vartheta, t) = \frac{\vartheta}{2t} I_0 \left(\frac{\vartheta r}{2at} \right) \exp \left[- \frac{\vartheta^2 + r^2}{4at} \right] \quad (17)$$

Przejdziemy teraz do odpowiednich wzorów dla równania (5). Do wyznaczenia rozwiązań podstawowych wykorzystamy tu m.in. związek (9), co pozwoli jako efekt uboczny otrzymać pewne wzory całkowe. I tak - wykorzystując wzór

$$\alpha \left[t^{-3/2} \exp \left(- \frac{b^2}{4t} \right) \right] (s) = \frac{2\sqrt{\pi}}{b} \exp(-b\sqrt{s}), \quad (18)$$

(por. 10, tabl. B2, wzór 102), gdzie α oznacza operator transformacji Laplace'a, znajdujemy - po przetransformowaniu wzoru (10) - rozwiązanie podstawowe równania (5) w przestrzeni trójwymiarowej:

$$G_3^H(x-\xi, y-\eta, z-\zeta, p) = \frac{\exp[-\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}]}{4\pi \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}. \quad (19)$$

Podobna operacja wykonana na związku (11) i wykorzystanie wzoru ([11], wzór 9.191)

$$\alpha \left[t^{-1} \exp\left(-\frac{a}{4t}\right) \right] (s) = 2 K_0(\sqrt{as}), \quad (20)$$

(gdzie $K_\nu(\cdot)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju rzędu ν) prowadzi do wzoru

$$G_2^H(x-\xi, y-\eta, p) = \frac{1}{2\pi} K_0(p \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}). \quad (21)$$

Ponieważ scałkowanie wzoru (19) po ζ od $-\infty$ do $+\infty$ przy $z=0$ powinno także doprowadzić do wzoru (21), więc stąd otrzymujemy wzór całkowy na funkcję $K_0(\cdot)$:

$$K_0(pb) = \int_0^\infty \frac{\exp\left[-p \sqrt{b^2 + z^2}\right]}{\sqrt{b^2 + z^2}} dz \quad (22)$$

Wykonanie transformacji Laplace'a na wzorze (12) i wykorzystanie wzoru 9.190 z monografii [11] prowadzi do następującego przedstawienia funkcji G^H w przestrzeni jednowymiarowej:

$$G_1^H(x-\xi, p) = \frac{1}{2p} \exp(-p|x-\xi|). \quad (23)$$

W walcowym układzie współrzędnych r, φ, z funkcję G^H można przedstawić następującym wzorem, wynikającym z (19):

$$G_W^H(r, \varphi, z, \vartheta, \zeta, p) = \frac{\exp[-p \sqrt{r^2 + \varrho^2 + (z-\zeta)^2 - 2r\varrho \cos(\vartheta - \varphi)}]}{4\pi \sqrt{r^2 + \varrho^2 + (z-\zeta)^2 - 2r\varrho \cos(\vartheta - \varphi)}}. \quad (24)$$

Podobnie rozwiązanie w układzie biegunowym otrzymuje się bezpośrednio ze wzoru (21):

$$G_D^H(r, \varphi, \varrho, \vartheta, p) = \frac{1}{\pi} K_0(p \sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\varphi - \vartheta)}) \quad (25)$$

Wykonując transformację Laplace'a na wzorze (17) i wykorzystując wzór 9.351 z monografii [11], otrzymuje się rozwiązanie podstawowe na płaszczyźnie przy symetrii względem punktu:

$$G_{bs}^H(r, \varphi, p) = \varphi K_0(p\varphi) I_0(pr) \eta(\varphi - r) + r K_0(pr) I_0(p\varphi) \eta(r - \varphi), \quad (26)$$

gdzie $\eta(\cdot)$ jest funkcją Heaviside'a.

Ponieważ scałkowanie wzoru (25) po ψ od $-\pi$ do π przy $\varphi = 0$ powinno także prowadzić do wzoru (26), więc stąd otrzymujemy następujący związek:

$$\int_0^\pi K_0(p \sqrt{r^2 + \varphi^2 - 2r\varphi \cos\psi}) d\psi = \pi [\varphi K_0(p\varphi) I_0(pr) \eta(\varphi - r) + r K_0(pr) I_0(p\varphi) \eta(r - \varphi)] \quad (27)$$

Naszym celem będzie teraz znalezienie rozwiązania podstawowego równania Helmholtza w układzie walcowym przy symetrii osiowej, tzn. w układzie r, z .

4. POSTACIE CAŁKOWE FUNKCJI G_{ws}^H

Jedną z postaci całkowych funkcji G_{ws}^H można bez trudu uzyskać, całkując wzór (24) po ψ od $-\pi$ do π przy $\varphi = 0$. Otrzymujemy

$$G_{ws}^H(r, z, \varphi, \xi, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\exp[-p \sqrt{r^2 + \varphi^2 + (z - \xi)^2 - 2r\varphi \cos\psi}]}{\sqrt{r^2 + \varphi^2 + (z - \xi)^2 - 2r\varphi \cos\psi}} d\psi \quad (28)$$

Całki tego typu nie ma w dostępnych tablicach całek (por. np. [12]). Rozwiązanie podstawowe w tej postaci nadaje się do obliczeń numerycznych przy konkretnych wartościach zmiennych r, z, φ i ξ .

Inną postać całkową funkcji G_{ws}^H można wyznaczyć przekształcając wzór (15). Przedstawimy go najpierw w postaci

$$G_{ws}(r, z, \varphi, \xi, t) = \frac{\varphi}{4\sqrt{s\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{t} I_0\left(\frac{\varphi r}{2at}\right) \exp\left[-\frac{\varphi^2 + r^2 + (z - \xi)^2}{4at}\right] \quad (29)$$

Wykorzystamy teraz dwa wzory na transformaty Laplace'a: wzór 9.75 z monografii [11]:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad (30)$$

oraz wzór 9.351 z tejże monografii:

$$\alpha \left[\frac{1}{t} \exp\left(-\frac{A+B}{2t}\right) I_0\left(\frac{A-B}{2t}\right) \right] (s) = 2K_0(\sqrt{As} + \sqrt{Bs}) I_0(\sqrt{As} - \sqrt{Bs}), \quad (31)$$

gdzie A i B przyjmujemy w postaci:

$$A = \frac{1}{4a} [(\varphi+r)^2 + (z-\zeta)^2] \quad (32)$$

$$B = \frac{1}{4a} [(\varphi-r)^2 + (z-\zeta)^2]$$

Ponieważ transformata iloczynu dwóch funkcji jest równa splotowi transformat tych funkcji ([13], s.163), więc otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \alpha [G_{ws}(r, z, \varphi, \zeta, t)] (s) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\varphi}{2a} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} K_0(\alpha\sqrt{\frac{\sigma}{a}}) I_0(\beta\sqrt{\frac{\sigma}{a}}) \frac{d\sigma}{\sqrt{\frac{\sigma}{a} - \frac{\sigma}{a}}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\varphi}{2} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} K_0(\alpha\sqrt{q}) I_0(\beta\sqrt{q}) \frac{dq}{\sqrt{p^2-q}} = G_{ws}^H(r, z, \varphi, \zeta, p), \end{aligned} \quad (33)$$

gdzie

$$q = \frac{\sigma}{a}, \quad p^2 = \frac{\sigma}{a}, \quad c_1 = \frac{\sigma}{a} \quad (34)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} [\sqrt{A} + \sqrt{B}], \quad \beta = \frac{1}{2} [\sqrt{A} - \sqrt{B}]$$

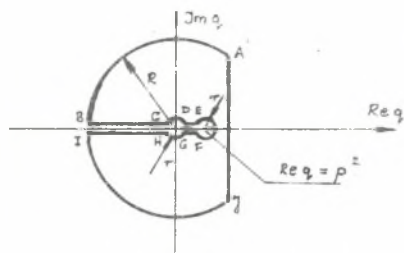
Parametr σ jest wspólną odciętą zbieżności [13] dla obu transformowanych funkcji (wzory (30) i (31)); jest to liczba rzeczywista większa od zera.

Całkowanie przeprowadza się po konturze przedstawionym na rys. 1. Ponieważ wewnątrz tego konturu funkcja podcałkowa nie ma osobliwości, więc

$$\int_{AB\dots J} K_0(\alpha\sqrt{q}) I_0(\beta\sqrt{q}) \frac{dq}{\sqrt{p^2-q}} = 0 \quad (35)$$

Oznacza to, że

$$G_{ws}^H(r, z, \varphi, \zeta, p) = -\frac{\varphi}{4\pi i} \left(\int_{\overline{AB}\cup\overline{IJ}} \dots + \int_{\overline{CD}\cup\overline{GH}} \dots + \int_{\overline{EF}} \dots + \int_{\overline{BC}\cup\overline{HI}} \dots + \int_{\overline{DE}\cup\overline{FG}} \dots \right) \quad (36)$$



Rys. 1. Kontur całkowania

Całki po łukach \widehat{AB} i \widehat{IJ} dążą do zera, gdy $R \rightarrow \infty$; podobnie do zera dążą całki po łukach \widehat{CD} , \widehat{GH} i \widehat{EF} , gdy $r \rightarrow 0$. Pozostają zatem do obliczenia całki po odcinkach BC, HI, DE i FG.

Najpierw obliczymy całki po odcinkach BC i HI. Na odcinku BC mamy $q = r' \exp(i\pi) = -r'$, a na odcinku HI $q = r' \exp(-i\pi) = -r'$, gdzie $r' \in (r, R)$. Ponadto $dq = -dr'$ oraz na DC będzie

$$K_0(\alpha \sqrt{q}) = K_0(\alpha \sqrt{r'} e^{i \frac{\pi}{2}}) = -\frac{1}{2} \pi i \{ J_0(\alpha \sqrt{r'}) - i Y_0(\alpha \sqrt{r'}) \},$$

$$I_0(\beta \sqrt{q}) = I_0(\beta \sqrt{r'} e^{i \frac{\pi}{2}}) = J_0(\beta \sqrt{r'}),$$
(37)

a na HI

$$K_0(\alpha \sqrt{q}) = K_0(\alpha \sqrt{r'} e^{-i \frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{2} \pi i \{ J_0(\alpha \sqrt{r'}) + i Y_0(\alpha \sqrt{r'}) \},$$

$$I_0(\beta \sqrt{q}) = I_0(\beta \sqrt{r'} e^{-i \frac{\pi}{2}}) = J_0(\beta \sqrt{r'}),$$
(38)

gdzie $J_\nu(\cdot)$ i $Y_\nu(\cdot)$ są to funkcje Bessela I i II rodzaju rzędu ν , [9]. Obliczając wspomniane całki, otrzymujemy

$$\int_{BC} \dots + \int_{HI} \dots = -\pi i \int_r^R J_0(\alpha \sqrt{r'}) J_0(\beta \sqrt{r'}) \frac{dr'}{\sqrt{p^2 + r'}} \quad \begin{matrix} R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}]{} -\pi i \int_0^\infty J_0(\alpha \sqrt{r'}) J_0(\beta \sqrt{r'}) \frac{dr'}{\sqrt{p^2 + r'}}$$
(39)

Podobnie oblicza się całki po odcinkach DE i FG. Na odcinku DE $q = r'$, a na odcinku FG $q = r' \exp(2\pi i) = r'$, gdzie $r' \in (r, p^2 - r)$. Na odcinku FG mamy ponadto

$$K_0(\alpha \sqrt{q}) = K_0(\alpha \sqrt{r'} e^{\pi i}) = -i \pi I_0(\alpha \sqrt{r'}) + K_0(\alpha \sqrt{r'}),$$

$$I_0(\beta \sqrt{q}) = I_0(\beta \sqrt{r'}).$$
(40)

Stąd

$$\int_{DE} \dots + \int_{FG} \dots = \pi \int_r^{p^2-r} I_0(\alpha \sqrt{r'}) I_0(\beta \sqrt{r'}) \frac{dr'}{\sqrt{p^2-r'}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \pi \int_0^{p^2} I_0(\alpha \sqrt{r'}) I_0(\beta \sqrt{r'}) \frac{dr'}{\sqrt{p^2-r'}} \quad (41)$$

Ostatecznie więc wzór (36) przyjmuje następującą postać:

$$G_{ws}^H(r, z, \varrho, \xi, p) = \frac{\varrho}{2} \left\{ \int_0^\infty J_0(\alpha x) J_0(\beta x) \frac{x dx}{\sqrt{p^2+x^2}} - \int_0^p I_0(\alpha x) I_0(\beta x) \frac{x dx}{\sqrt{p^2-x^2}} \right\}, \quad (42)$$

gdzie wielkości α i β określone są wzorami (34) i (32).

5. FUNKCJA G_{ws}^H NA OSI SYMETRII

Uzyskane postacie całkowe funkcji G_{ws}^H nie mają zbyt dużej wartości praktycznej. Funkcję tę można także wyznaczać bezpośrednio z równania różniczkowego (5); przyjmuje ono wtedy postać

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - p^2 \right] G_{ws}^H(r, z, \varrho, \xi, p) = - \frac{\delta(r-\varrho) \delta(z-\xi)}{r}. \quad (43)$$

Stosując transformację Hankela względem zmiennej r i transformację Fouriera względem zmiennej z , otrzymuje się przetransformowane równanie w postaci:

$$(r_0^2 + \omega^2 + p^2) \mathcal{H}_0 \left[\mathcal{F}(G_{ws}^H) \right] (r_0, \omega, \varrho, \xi, p) = \frac{e^{-i\omega \xi}}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{J}_0(r_0 \varrho), \quad (44)$$

gdzie wspomniane transformacje określone są wzorami:

$$\mathcal{H}_0 \left[u(r) \right] (r_0) = \int_0^\infty r u(r) \mathcal{J}_0(r r_0) dr \equiv u_H(r_0), \quad (45)$$

$$\mathcal{F} \left[v(z) \right] (\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty v(z) e^{-i\omega z} dz \equiv v_F(\omega), \quad (46)$$

a transformacje odwrotne wzorami:

$$\mathcal{H}_0^{-1} \left[u_H(r_0) \right] (r) = \int_0^\infty r_0 u_H(r_0) \mathcal{J}_0(r r_0) dr_0 \equiv u(r), \quad (47)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left[v_F(\omega) \right] (z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_F(\omega) e^{i\omega z} d\omega \equiv v(z), \quad (48)$$

(por. [11, 14]). Rozwiązanie równania (44) ma postać:

$$\mathcal{H}_0 \left[\mathcal{F}(G_{ws}^H) \right] (r_0, \omega, \varphi, \zeta, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\int_0^{\zeta} (r_0 \varrho) e^{-i\omega \zeta}}{r_0^2 + \omega^2 + p^2}. \quad (49)$$

Próba odwrócenia transformaty danej wzorem (49) prowadzi do kolejnego całkowego przedstawienia funkcji G_{ws}^H . Wykorzystuje się przy tym wzór 6.541 z tablic [12]. Tutaj rozważymy pewien przypadek szczególny, a mianowicie gdy $\varphi = 0$. Wówczas w miejsce wzoru (49) mamy

$$\mathcal{H}_0 \left[\mathcal{F}(G_{ws}^H) \right] (r_0, \omega, 0, \zeta, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega \zeta}}{r_0^2 + \omega^2 + p^2} \quad (50)$$

Odwracamy najpierw transformatę Hankela przy wykorzystaniu wzoru (por. [9], s.287, wzór 232)

$$\int_0^{\infty} K_0(Ar) J_0(r_0 r) r dr = \frac{1}{A^2 + r_0^2}, \quad A^2 \neq -r_0^2 \quad (51)$$

Ze wzoru tego wynika, że

$$\mathcal{F} \left[G_{ws}^H \right] (r, \omega, 0, \zeta, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_0(r \sqrt{\omega^2 + p^2}) e^{-i\omega \zeta} \quad (52)$$

Wykorzystując następnie wzór 7.59 z monografii [11], z którego wynika, że

$$K_0(r \sqrt{\omega^2 + p^2}) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-p \sqrt{r^2 + z^2}]}{\sqrt{r^2 + z^2}} e^{-i\omega z} dz, \quad (53)$$

otrzymujemy

$$G_{ws}^H(r, z, 0, \zeta, p) = \frac{\exp[-p \sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}]}{2 \sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}}. \quad (54)$$

Przy okazji warto zaznaczyć, że wzór całkowity (22) jest szczególnym przypadkiem wzoru (53). Wzór (54) można także otrzymać bezpośrednio z (28), kładąc w tym ostatnim $\varphi = 0$.

6. PRZYBLIŻONE ROZWIĄZYWANIE ZAGADNIENÍ ODWROTNYCH
W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH r, z

Rozwiązując równanie (7) w układzie r, z , nie możemy wykorzystać go w postaci opisanej tym równaniem, gdyż funkcja G_{ws}^H znana jest tylko dla przypadku, gdy $\varphi = 0$.

W równaniu (7) zapisanym w układzie r, z , będzie $\underline{x} = (r, z)$, $\underline{\xi} = (\varphi, \xi)$, $\underline{y} = (r', z')$. Jeśli wprowadzimy nowe zmienne, a mianowicie

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{x}^* - \underline{\xi}, \\ \underline{v} &= \underline{x}^* - \underline{y}, \end{aligned} \quad (55)$$

wówczas równanie (7) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} G^H(\underline{u}, p) h_k^H(\underline{x}^* - \underline{u}) dS(\underline{x}^* - \underline{u}) &= T^*(\underline{x}^*, t_k) + \\ + \int_{\Omega} G^H(\underline{v}, p) f_k(\underline{x}^* - \underline{v}) dN(\underline{x}^* - \underline{v}), \quad k &= 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (56)$$

przy czym zarówno powierzchnia $\partial\Omega$, jak i obszar Ω muszą zostać opisane w nowych zmiennych. Zaletą tej postaci równania (7) jest to, że można w niej wykorzystać funkcję G_{ws}^H i to nawet dla $\xi = 0$; wadą jest konieczność opisanie $\partial\Omega$ i Ω w nowych zmiennych. Dla przykładu - jeśli Ω jest walcem kołowym o długości $2z_0$ i promieniu R , to równanie (7) można wówczas zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \pi R \int_{-z_0}^{z_0} \frac{\exp[-p\sqrt{u^2 + (z - \xi)^2}]}{\sqrt{u^2 + (z - \xi)^2}} h_k(r^* - u, \xi) d\xi &= T^*(r^*, z^*, t_k) + \\ + \pi \int_{-z_0}^{z_0} \int_{r^*-R}^{r^*} \frac{\exp[-p\sqrt{v^2 + (z - z')^2}]}{\sqrt{v^2 + (z - z')^2}} f_k(r^* - v, z')(r^* - v) dv dz' & \end{aligned} \quad (57)$$

gdzie $u = r^* - R$. Związek (8) przyjmuje postać zbliżoną do (57), a mianowicie

$$\begin{aligned} \theta_k(r, z) &= \pi R \int_{-z_0}^{z_0} \frac{\exp[-p\sqrt{u^2 + (z - \xi)^2}]}{\sqrt{u^2 + (z - \xi)^2}} h_k(r - u, \xi) d\xi - \\ - \pi \int_{-z_0}^{z_0} \int_{r-R}^r \frac{\exp[-p\sqrt{v^2 + (z - z')^2}]}{\sqrt{v^2 + (z - z')^2}} f_k(r - v, z')(r - v) dv dz & \end{aligned} \quad (58)$$

7. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione rozwiązania podstawowe równania przewodnictwa cieplnego i równania Helmholtza stanowią bazę do budowania równań całkowych, na podstawie których można wyznaczyć numerycznie czy analitycznie ściśle i przybliżone rozwiązania zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. Trudności związane z wyznaczeniem jednego z takich rozwiązań podstawowych posłużyły tu jako ilustracja metod, jakimi można próbować takie rozwiązania wyznaczać.

LITERATURA

- [1] Piskorek A.: Równania całkowe. WNT, Warszawa 1971.
- [2] Grysa K.: O metodach teorii potencjałów w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych wymiany ciepła. MTiS, 20, 3/4, 1982.
- [3] Grysa K.: Zagadnienia odwrotne przewodnictwa cieplnego. Część I: Równania oalkowe. ZNPP s. Mechanika, 31, 1986.
- [4] Tichonov A.N. i Arsenin V.Ja.: Metody rešenija nekorrektnych zadac. Izd. Nauka, Moskwa 1979.
- [5] Grysa K.: Stowarzyszone równania oalkowe dla równania Helmholtza i ich zastosowania do rozwiązań zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. ZNPP s. Mechanika, 31, 1986.
- [6] Grysa K., Kamiński H.: O przybliżonym rozwiązywaniu jednowymiarowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. MTiS, 24, 1/2, 1986.
- [7] Grysa K., Kamiński H., Frąckowiak A.: Numeryczne rozwiązanie pewnego dwuwymiarowego zagadnienia odwrotnego przewodnictwa cieplnego. Praca złożona do druku w ZN Pol.Śl. w marcu 1988 r.
- [8] Grysa K.: Metody rozwiązywania wielowymiarowych prostych i odwrotnych zagadnień przewodnictwa cieplnego i teorii naprężeń cieplnych oparte na teorii potencjałów. Opracowanie U.6.4.9.07 problemu PR-8, etap c1, umowa IMP PAN-PR-8-6/83, Poznań, lipiec 1983.
- [9] McLachlan M.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. PWN, Warszawa 1964.
- [10] Zemanian A.H.: Teoria dystrybucji i analiza transformat. PWN, Warszawa 1969.
- [11] Ditkin W.A., Prudnikow A.P.: Przekształcenia oalkowe i analiza transformat. PWN, Warszawa 1964.
- [12] Gradštejn I.S., Ryżik I.M.: Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij. Izd. Nauka, Moskwa 1971
- [13] Osłowski J.: Zarys rachunku operatorowego. WNT, Warszawa 1972.
- [14] Sneddon I.: Preobrazowanija Furie. Izd. Inastr. Lit., Moskwa 1955.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Kazimierz Kurpiusz

О ОСНОВНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
И УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА И О ИХ РОЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Р е з ю м е

В статье представлены основные решения уравнений теплопроводности и Гельмгольца. На их основании можно получить точное или приближенное решение обратных задач теплопроводности. В работе рассматривается приближенное решение тех обратных задач, которые отличаются осевой симметрией.

ON FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF HEAT TRANSFER EQUATION
AND HELMHOLTZ EQUATION AND THEIR MEANING FOR SOLVING
DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF HEAT TRANSFER

S u m m a r y

Fundamental solutions of heat transfer and Helmholtz equations are presented. Exact and approximated solutions for inverse heat transfer problems may be found on their bases. Approximated solutions for the inverse problems symmetric with respect to their axes.