ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990
Seria: ENERGETYKA z.111 Nr kol. 1092

Grażyna SYPNIEWSKA-KAMIŃSKA
Akademia Wychowania Fizycznego w Poznaniu
Henryk KAMIŃSKI
Politechnika Poznańska

UWAGI O STABILNOŚCI ROZWIĄZAŃ DWUWYMIAROWYCH ZAGADNIEŃ ODWROTNYCH PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO. CZEŚĆ I: KRYTERIUM STABILNOŚCI*

Streszczenie. Określono i sformułowano w postaci nierówności kryterium stabilności rozwiązań dwuwymiarowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. Kryterium to sformułowane dla przypadku, gdy ilość punktów na konturze wewnętrznym może różnić się od ilości punktów na brzegu rozważanego obszaru, spełnia swoją rolę tylko wtedy, gdy ilość funkcji wykorzystanych do przybliżonego przedstawienia temperatury w obszarze za pomocą szeregu skończonego nie przekracza ilości punktów na konturze wewnętrznym.

WSTĘP

Jednym z podstawowych problemów wyłaniających się przy rozwiązywaniu granicznych zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego (w skrócie: ZO) jest problem stabilności rozwiązania w sensie Hadamarda [1]. Problem ten ujawnia się zwłaszcza wtedy, gdy zagadnienie formułuje się w postaci całkowej czy to w sposób ścisły [2], czy przybliżony [3,4]. W przypadku zagadnień jednowymiarowych ich przybliżona postać całkowa umożliwia dość obszerną analizę stabilności rozwiązań [4,5,6,7]. Stabilność rozumiano przy tym jako małą wrażliwość wyników otrzymanych w chwili t_k na błąd danych z chwil poprzedzających chwilę t_k. Dla zagadnień jednowymiarowych otrzymano cały szereg konkretnych ograniczeń na dobór kroku czasowego w zależności od bazy zagadnienia odwrotnego i vice versa. Przez bazę ZO rozumie się tutaj wymiar charakterystyczny obszaru jednowymiarowego, na brzegu którego zadane są wewnętrzne odpowiedzi, odniesiony do wymiaru charakterystycznego obszaru, w którym rozważa się ZO.

*) Praca wykonana w ramach CPBP nr 02.18, kierunek 2, zadanie 2.2.1.2

W przypadku zagadnień dwuwymiarowych przeprowadzenie analizy stabilności przy wykorzystaniu wzorów całkowych jest znacznie bardziej złożone niż w przypadku zagadnień jednowymiarowych. Z tego powodu w tej pracy analiza stabilności rozwiązań ZO prowadzona jest przy wykorzystaniu równań różniczkowych typu Helmholtza [3,4], za pomocą których zbudowano przybliżone rozwiązanie dowolnego dwuwymiarowego ZO w układzie współrzędnych biegunowych. Następnie, przyjmując warunek stabilności w postaci podobnej jak w pracach [4,5,6,7], tzn. żądając, aby błędy danych z chwil poprzednich miały mniejszy wpływ na błąd obliczeń w chwili bieżącej niż błędy danych w chwili bieżącej, sformułowano kryterium stabilności.

1. RÓWNANIA PODSTAWOWE

Zagadnienie rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego w pewnym obszarze $\Omega \times (0,\ t_K)$, gdzie $\Omega \subset E^m$, $m = 1,2,3$, a $(0,\ t_K)$ jest pewnym przedziałem czasowym, można sprowadzić do rozwiązywania rekurencyjnego układu równań Helmholtza w obszarze Ω. Rozważmy jednorodne równanie przewodnictwa cieplnego w postaci

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\right) T(\underline{x},\ t) = 0, \qquad (\underline{x},\ t) \in \Omega \times (0,\ t_K) \tag{1}$$

(gdzie T - temperatura, a - współczynnik dyfuzyjności temperaturowej, a = const, $\underline{x}$ - zmienna przestrzenna, t - czas) z warunkami

$$\lim_{t \to \infty} T(\underline{x},\ t) = T_o(\underline{x}), \qquad \underline{x} \in \Omega \tag{2}$$

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^*} T(\underline{x},\ t) = T^*(\underline{x}^*,\ t), \qquad \underline{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega^* \tag{3}$$

gdzie $\underline{x} \in \partial\Omega^*$, $\Omega \subset \Omega$. Funkcja T^* nazywana jest wewnętrzną odpowiedzią temperaturową (w skrócie WO). Gdy $\partial\Omega^* = \partial\Omega$, wówczas funkcja T^* opisuje warunek brzegowy I rodzaju.

Zagadnienie opisane równaniem (1) i warunkami (2) i (3) nosi nazwę zagadnienia odwrotnego (ZO). W miejsce warunku (3) można sformułować odpowiedni warunek dla gradientu temperatury lub dla strumienia ciepła, lecz ponieważ nie będziemy się tego typu ZO w tej pracy zajmować, więc warunku takiego nie formułujemy, a zainteresowanych odsyłamy do prac [3,4].

Rozważane ZO chcemy rozwiązać w sposób przybliżony w układzie biegunowym, (R, φ). Oznacza to, że

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\ . \tag{4}$$

Aby przejść do układu równań Helmholtza, zastąpimy w równaniu (1) pochodną temperatury po czasie przez pierwszą różnicę wsteczną:

$$\left.\frac{\partial T(\underline{x},\ t)}{\partial\ t}\right|_{t_k} \approx \frac{T(x,\ t_k) - T(x,\ t_k - \tau)}{\tau}, \tag{5}$$

gdzie τ - krok czasowy. Przyjmiemy τ = const oraz $t_K = K\tau$, gdzie K - liczba naturalna. Kładąc

$$p^2 = \frac{1}{a\tau} \tag{6}$$

i wykorzystując (5) otrzymujemy w miejsce równania (1) następujący rekurencyjny układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} (\nabla^2 - p^2)\ \tilde{u}^1(\underline{x}) = -\ p^2\ T_0(\underline{x})\ , \\ (\nabla^2 - p^2)\ \tilde{u}^k(\underline{x}) = -\ p^2\ \tilde{u}^{k-1}(\underline{x}), \qquad k = 2,\dots,K, \end{cases} \tag{7}$$

gdzie

$$\tilde{u}^k(\underline{x}) \approx T(\underline{x}, t_k), \qquad k = 1,\dots,K. \tag{8}$$

Kładąc $\tilde{u}^0(\underline{x}) = T_0(\underline{x})$ i uwzględniając postać (4) operatora Laplace'a możemy układ równań (7) zapisać w postaci

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\varphi^2} - p^2\right)\tilde{u}^k(R,\varphi) = -\ p^2\tilde{u}^{k-1}(R,\varphi), \tag{9}$$

$k=1,\dots,K$, $(R,\varphi)\in\Omega\in E^2$. Dla $(R^*,\varphi^*)\in\partial\Omega^*\in\Omega$ mamy

$$\lim_{(R,\varphi)\to(R^*,\varphi^*)} \tilde{u}^k(R,\varphi) = T^*(R^*,\varphi^*,t_k), \quad (R,\varphi)\in\Omega\setminus\partial\Omega^* \tag{10}$$

$$\tilde{u}^k(R,\varphi+2\pi) = \tilde{u}^k(R,\varphi)<\infty\ ; \quad R,\varphi)\in\Omega\ , \quad k=1,\dots,K$$

Ze względu na okresowość zagadnienia (9-10) względem zmiennej φ zakłada się następującą postać rozwiązania w chwili t_k:

$$\tilde{u}^k(R,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{y}_n^{\ k}(R)\ e^{in\varphi}\ , \qquad k=1,\dots,K. \tag{11}$$

Wstawiając postać (11) funkcji $\tilde{u}^k$ do równania (9), otrzymuje się następujący układ równań na funkcje $\tilde{y}_n^{\ k}(R)$:

$$\left[\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{d}{dR} - \left(p^2 + \frac{n^2}{R^2}\right)\right] \tilde{y}_n^{\,k}(R) = - p^2 \tilde{y}_n^{\,k-1}(R), \tag{12}$$

$k=1,\dots,K$, $n \in C$. Po wprowadzeniu zmiennej bezwymiarowej $r = pR$ i oznaczeniu $y_n^k(r) = \tilde{y}_n^{\,k}(R)$ układ równań (12) możemy zapisać w postaci:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \left(1 + \frac{n^2}{r^2}\right)\right] y_n^k(r) = - y_n^{k-1}(r), \tag{13}$$

$k=1,\dots,K$, $n \in C$. Jeśli w tym miejscu ograniczymy się do zagadnienia z jednorodnym warunkiem początkowym, tzn. jeśli przyjmiemy, że

$$u^o(R, \varphi) = 0, \tag{14}$$

to otrzymamy także

$$\tilde{y}_n^o(R) = 0 \quad \text{dla} \quad n \in C. \tag{15}$$

W takim przypadku układ równań (13) można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr} - \left(1 + \dfrac{n^2}{r^2}\right)\right] y_n^1(r) = 0, \\ \left[\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr} - \left(1 + \dfrac{n^2}{r^2}\right)\right] y_n^k(r) = - y_n^{k-1}(r). \end{cases} \tag{16}$$

Rozwiązanie każdego z równań układu (16) ma postać:

$$y_n^k(r) = A_n^k I_n(r) + B_n^k K_n(r) + S_n^k(r), \tag{17}$$

$k=1,\dots,K$, $n \in C$, gdzie $I_n(r)$ i $K_n(r)$ są to zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu n [8], a $S_n^k(r)$ jest rozwiązaniem szczególnym każdego z równań (14), przy czym $S_n^1(r) = 0$ dla $n \in C$.

Ponieważ rozwiązanie układu równań (9) musi być ograniczone w Ω $(0, t_k)$, więc wynika stąd, że $B_n^k = 0$ dla $k=1,\dots,K$ i $n \in C$. Tak więc rozwiązanie każdego z równań układu (16) ma postać:

$$y_n^k(r) = A_n^k I_n(r) + S_n^k(r), \quad k=1,\dots,K, \quad n \in C. \tag{18}$$

Po podstawieniu postaci (18) rozwiązań do układu (16) otrzymujemy:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \left(1 + \frac{n^2}{r^2}\right)\right] y_n^k(r) = -A_n^{k-1} I_n(r) - S_n^{k-1}(r), \qquad (19)$$

gdzie $k=1,\dots,K$, $n \in C$. Oczywiście $A_n^0 = 0$, $S_n^0(r) = 0$.

Rozważając układ (19) od punktu startowego (jednorodny warunek początkowy), otrzymujemy dla kilku początkowych kroków czasowych rozwiązania w następującej postaci:

- dla $k=1$, tzn. dla chwili t_1:

$$y_n^1(r) = A_n^1\, I_n(r), \qquad n \in C, \qquad (20)$$

- dla $k=2$, tzn. dla chwili t_2:

$$y_{\pm n}^2(r) = A_{\pm n}^2\, I_{\pm n}(r) - A_{\pm n}^1 \frac{r}{2} I_{\pm(n+1)}(r), \qquad (21)$$

- dla $k=3$, tzn. dla chwili t_3:

$$y_{\pm n}^3(r) = A_{\pm n}^3\, I_{\pm n}(r) - A_{\pm n}^2 \frac{r}{2} I_{\pm(n+1)}(r) + A_{\pm n}^1 \frac{r^2}{8} I_{\pm(n+2)}(r), \qquad (22)$$

$n=0,1,2,\dots$ itd. Rozwiązanie dla dowlnej chwili t_k, $k=1,\dots,K$ ma zatem postać:

$$y_{\pm n}^k(r) = A_{\pm n}^k I_{\pm n}(r) + \sum_{\nu=1}^{k-1}\left[A_{\pm n}^{k-\nu}\frac{(-r)^\nu}{2^\nu\,\nu!} I_{\pm(n+\nu)}(r)\right]\eta\left(k-\frac{3}{2}\right), \qquad (23)$$

$n=0,1,2,\dots$, gdzie $\eta(\cdot)$ jest funkcją Heaviside'a. Pierwszy składnik we wzorze (23) jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego, drugi zaś - rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego.

Podstawiając prawe strony związków (23) do (11) i pamiętając, że $\bar{y}_n^k(R) = y_n^k(r)$, otrzymujemy

$$u^k(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi}\left[A_n^k I_n(r) + \sum_{\nu=1}^{k-1} A^{k-\nu}\frac{(-r)^\nu}{2^\nu\,\nu!} I_{n+\nu}(r)\eta\left(k-\frac{3}{2}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi}\left[A_{-n}^k I_{-n}(r) + \sum_{\nu=1}^{k-1} A^{k-\nu}\frac{(-r)^\nu}{2^\nu\,\nu!} I_{-(n+\nu)}(r)\eta\left(k-\frac{3}{2}\right)\right] \qquad (24)$$

$k=1,\dots,K$. Wobec (8) możemy napisać:

$$T(r,\varphi,t_k) \approx u_k^k(r,\varphi). \qquad (25)$$

2. PRZEDSTAWIENIE PRZYBLIŻONEGO ROZWIĄZANIA ZO W POSTACI ILOCZYNU MACIERZY

Rozwiązanie w postaci (24) jest bardzo niewygodne do analizy ze względu na górną granicę sumowania po n. Aby umożliwić przeprowadzenie analizy numerycznej, obetniemy szereg sumowany po n do $2N+1$ wyrazów, gdzie N jest liczbą naturalną. Ponadto wyrazy tego szeregu przekształcimy następująco:

$$e^{in\varphi}\Big[A_n^k\, I_n(r) - \sum_{\nu=1}^{k-1} (A^{k-\nu}\frac{(-r)^\nu}{2^\nu\, \nu!} I_{n+\nu}(r)\,\eta\,(k-\tfrac{3}{2})\Big] +$$

$$+\, e^{-in\varphi}\Big[A_{-n}^k\, I_{-n}(r) - \sum_{\nu=1}^{k-1} A^{k-\nu}\frac{(-r)^\nu}{2^\nu\, \nu!} I_{-(n+\nu)}(r)\,\eta\,(k-\tfrac{3}{2})\Big] =$$

$$= \Big[(A_n^k + A_{-n}^k)\cos(n\varphi) + i\,(A_n^k - A_{-n}^k)\sin(n\varphi)\Big]\, I_n(r)\; - \tag{26}$$

$$-\Big\{\sum_{\nu=1}^{k-1} (A_n^{k-\nu} + A_{-n}^{k-\nu})\cos(n\varphi) + i(A_n^{k-\nu} - A_{-n}^{k-\nu})\sin(n\varphi)\Big] \cdot$$

$$\cdot\, \frac{(-r)^\nu}{2^\nu\, \nu!}\, I_{n+\nu}(r)\Big\}\,\eta\,(k-\tfrac{3}{2}) .$$

Aby funkcja u^k, a tym samym i temperatura, była funkcją rzeczywistą zmiennych r, φ, współczynniki A_n^k muszą spełniać następujące warunki:

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(A_n^k) = -\,\mathrm{Im}(A_{-n}^k)\,, \\ \mathrm{Re}(A_n^k) = \mathrm{Re}(A_{-n}^k), \qquad k=1,\dots,K. \end{cases} \tag{27}$$

Oznacza to, że $A_{-n}^k = \overline{A_n^k}$, gdzie nadkreślenie oznacza sprzężenie. Wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{cases} C_n^k = A_n^k + A_{-n}^k = 2\,\mathrm{Re}(A^k)\,, \\ D_n^k = i(A_n^k - A_{-n}^k) = -\,2\,\mathrm{Im}(A_n^k), \qquad k=1,\dots,K, \end{cases} \tag{28}$$

gdzie C_n^k i D_n^k są liczbami rzeczywistymi. Otrzymujemy stąd następującą postać temperatury:

$$T(r,\varphi,t_k) \approx C_o^k I_o(r) + \sum_{\nu=1}^{k-1} \left[C_o^{k-\nu} \frac{(-r)^\nu}{2^\nu \nu!} I_\nu(r)\right] \eta \left(k - \frac{3}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \left\{ \left[C_n^k \cos(n\varphi) + D_n^k \sin(n\varphi)\right] I_n(r) + \right. \tag{29}$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{k-1} \left[(C^{k-\nu} \cos(n\varphi) + D^{k-\nu} \sin(n\varphi) \frac{(-r)^\nu}{2^\nu \nu!} I\ (r)\right] \eta \left(k - \frac{3}{2}\right) \right\}.$$

Ponieważ w dalszej analizie zajmiemy się głównie wyrażeniami o górnych indeksach równych k i $k-1$, więc rozważać będziemy temperaturę o postaci:

$$T(r, \varphi,t_k) \approx C_o^k I_o(r) - C_o^{k-1} \frac{r}{2} I_1(r) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \left\{ \left[C_n^k I_n(r) - C_n^{k-1} \frac{r}{2} I_{n+1}(r)\right] \cos(n\varphi) + \right. \tag{30}$$

$$\left. + \left[D_n^k I_n(r) - D_n^{k-1} \frac{r}{2} I_{n+1}(r)\right] \sin(n\varphi) \right\} + u_e^k (r, \varphi),$$

gdzie funkcja $u_e^k(r,\varphi)$ zawiera wszystkie pozostałe wyrażenia z postaci (29) funkcji $T(r, \varphi ,t_k)$.

Gdy zachodzi potrzeba numerycznego wyznaczenia wartości funkcji T w chwili t_k w pewnych punktach obszaru Ω lub na jego brzegu, wówczas punkty te numeruje się np. od $j=1$ do $j=M$ i poszukuje się M wartości temperatury w punktach (r_j, φ_j) w chwili t_k. Jeśli wartości te oznaczymy T_j^k, tzn. $T_j^k = T(r_j, \varphi_j, t_k)$, to możemy opisać je wzorem, wynikającym z (30), a mianowicie:

$$T_j^k \approx C_o^k I_o(r_j) - C_o^{k-1} I_1(r_j) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \left[C_n^k I_n(r_j)\cos(n\ \varphi_j) + D_n^k I_n(r_j) \sin(n\ \varphi_j) + \right. \tag{31}$$

$$\left. - C_n^{k-1} \frac{r_j}{2} I_{n\ 1}(r_j)\cos(n\ \varphi_j) - D_n^{k-1} \frac{r_j}{2} I_{n+1}(r_j)\sin(n\ \varphi_j)\right] +$$

$$+ u_e^k (r_j, \varphi_j), \qquad j=1,\dots,M.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{cases} F^{o}_{jn} = I_n(r_j)\cos(n\,\varphi_j), & n=0,1,\dots,N; \quad j=1,\dots,M, \\ G^{o}_{jn} = I_n(r_j)\sin(n\,\varphi_j), & n=1,2,\dots,N; \quad j=1,\dots,M, \\ F^{1}_{jn} = \frac{r_j}{2} I_{n+1}(r_j)\cos(n\,\varphi_j), & n=0,1,\dots,N; \quad j=1,\dots,M, \\ G^{1}_{jn} = \frac{r_j}{2} I_{n+1}(r_j)\sin(n\,\varphi_j), & n=1,2,\dots,N; \quad j=1,\dots,M. \end{cases} \tag{32}$$

Związek (31) możemy teraz zapisać w zwartej postaci macierzowej:

$$\mathbf{T}^k \approx \mathbf{F}^o\,\mathbf{C}^k + \mathbf{F}^1\,\mathbf{C}^{k-1} + \mathbf{G}^o\,\mathbf{D}^k + \mathbf{G}^1\,\mathbf{D}^{k-1} + \mathbf{U}^k_e \tag{33}$$

lub wskaźnikowej:

$$T^k_j \approx F^o_{jn}C^k_n + F^1_{jn}C^{k-1}_n + G_{jn}D^{k-1}_n + U^k_{ej}\,, \tag{34}$$

gdzie

$$U^k_{ej} = u^k_e(r_j,\,\varphi_j). \tag{35}$$

Macierze wykorzystane w związku (33) są następujące:

$\mathbf{T}^k$ i $\mathbf{U}^k_e$ są to macierze o wymiarach $M \times 1$;

$\mathbf{C}^k$ i $\mathbf{C}^{k-1}$ są macierzami o wymiarach $(N+1) \times 1$;

$\mathbf{D}^k$ i $\mathbf{D}^{k-1}$ są macierzami o wymiarach $N \times 1$;

$\mathbf{F}^o$ i $\mathbf{F}^1$ są macierzami o wymiarach $M\times (N+1)$;

$\mathbf{G}^o$ i $\mathbf{G}^1$ są macierzami o wymiarach $M \times N$.

Oznaczając jeszcze

$$H^{\alpha}_{jn} = \begin{cases} F^{\alpha}_{j,n-1} & \text{dla} \quad n=1,\dots,N+1\,, \\ G^{\alpha}_{j,n-(N+1)} & \text{dla} \quad n=N+2,\dots,2N+1, \end{cases}$$

$$X_n^k = \begin{cases} C_{n-1}^k & \text{dla} \quad n=1,\dots,N+1, \\ D_{n-1(N+1)}^k & \text{dla} \quad n=N+2,\dots,2N+1 , \end{cases} \tag{36}$$

gdzie $\alpha = 0,1$ oraz $j=1,\dots,M$, możemy związek (33) zapisać w bardziej zwartej postaci, a mianowicie

$$T^k \approx H^o X^k + H^1 X^{k-1} + U_e^k . \tag{37}$$

Macierz H^α ma wymiar $M \times (2N+1)$ dla $\alpha = 0,1$, a macierz X^k ma wymiar $(2N+1) \times 1$.

Wybierzmy teraz M punktów na konturze $\partial\Omega^*$ i oznaczmy

$$T_{wj}^k = T^*(R_j^*, \varphi_j^*, t_k). \tag{38}$$

Wyznaczając w tych samych punktach wyrazy macierzy H^α (macierze te oznaczymy H_w^α), możemy dla każdej chwili t_k napisać następujące związki:

- dla t_1:

$$T_w^1 = H_w^o X^1 , \tag{39}$$

- dla t_2:

$$T_w^2 = H_w^o X^2 + H_w^1 X^1 , \tag{40}$$

- dla t_k, $k=3,\dots,K$:

$$T^k = H_w^o X^k + H_w X_w^{k-1} + U_w^k , \tag{41}$$

gdzie U_w^k oznacza, że wyrazy macierzy U_e^k obliczone są dla punktów leżących na $\partial\Omega^*$. Gdy $M = 2N+1$, wówczas z równań (39),(40) i (41) można wyznaczyć macierze X^k dla $k=1,\dots,K$, o ile tylko macierz H_w^o nie jest osobliwa. Ponieważ jednak macierz H_w^o jest osobliwa tylko na konturach zdegenerowanych do jednego wymiaru (gdy $\partial\Omega^* = \Omega^*$), więc gdy kontur $\partial\Omega^*$ jest krzywą zamkniętą nie przecinającą samej siebie i $\mathrm{Int}\,\Omega^* \neq \emptyset$, wówczas poszczególne macierze X^k, $k=1,\dots,K$ można bez trudu wyznaczyć.

Znając macierz X^k, $k=1,\dots,K$, można wyznaczyć wektor T^k dla każdego układu M punktów z wnętrza i brzegu obszaru Ω, tzn. można opisać w sposób przybliżony pole temperatury w obszarze Ω.

3. KRYTERIUM STABILNOŚCI

Badając stabilność przybliżonego rozwiązania ZO danego wzorem (37), postawimy wymaganie podobne jak dla zagadnień jednowymiarowych. Jest to mianowicie żądanie, aby błąd wprowadzony do obliczeń przez dane z chwili t_{k-1} miał mniejszy wpływ na wynik obliczeń w chwili t_k niż błąd wprowadzony w chwili t_k. Chodzi oczywiście o błędy danych [4,5,6,7].

Ponieważ największego błędu należy się spodziewać w punktach leżących na $\partial\Omega$ (są to punkty najbardziej oddalone od Ω^*), więc - podobnie jak w przypadku zagadnień jednowymiarowych - nasze rozważania ograniczymy tylko do wyników obliczeń temperatury w punktach leżących na $\partial\Omega$.

Załóżmy, że

$$T^k_{wj} = \hat{T}^k_{wj} + \varepsilon^k_{wj}, \qquad j=1,\dots,2N+1; \quad k=1,\dots,K, \tag{42}$$

gdzie $\hat{T}^k_{wj}$ opisuje rzeczywistą temperaturę panującą w chwili t_k w punkcie $(r^*_j, \varphi^*_j) \in \Omega^*$, a ε^k_{wj} - błąd pomiaru tej temperatury. Obliczone przy wykorzystaniu macierzy T^k_w, k=1,...,K, macierze współczynników, X^k, k=1,...,K, "przeniosą" ten błąd na wyniki obliczeń dla temperatury, T^k. W szczególności gdy obliczana jest temperatura w punktach $(r_l, \varphi_l) \in \partial\Omega$, l=1,...,2N+1, wówczas wyniki tych obliczeń, oznaczone jako T^k_{zl}, można zapisać w postaci:

$$T^k_{zl} = \hat{T}^k_{zl} + \varepsilon^k_{zl}, \qquad l=1,\dots,2N+1; \quad k=1,\dots,K, \tag{43}$$

gdzie $\hat{T}^k_{zl}$ opisuje wyniki obliczeń w przypadku, gdy $T^k_{wj} = \hat{T}^k_{wj}$, a ε^k_{zl} jest błędem obliczeń.

Aby sformułować w języku matematyki podane wyżej żądanie, dotyczące wpływu błędów danych na błędy obliczeń, trzeba napisać bezpośredni związek pomiędzy tymi błędami. Oznacza to konieczność wyeliminowania macierzy X^k ze związków opisujących T^k_z w taki sposób, aby pojawiły się w ich miejsce macierze T^k_w, oczywiście z odpowiednimi współczynnikami.

Pomnóżmy związek (41) lewostronnie przez $(H^o_w)^{-1}$. Otrzymamy wówczas

$$X^k = (H^o_w)^{-1} (T^k_w - H^1_w X^{k-1} - U^k). \tag{44}$$

Dla punktów leżących na $\partial\Omega$ możemy - wykorzystując postać (37) przybliżonego rozwiązania dla temperatury - napisać

$$T^k_z = H^o_z X^k + H^1_z X^{k-1} + U^k_z, \tag{45}$$

gdzie dolny indeks "z" oznacza, że poszczególne macierze obliczane były dla punktów leżących na $\partial\Omega$. Wstawiając następnie prawą stronę związku (44) za X^k do związku (45) otrzymujemy:

$$T_z^k = H_z^o(H_w^o)^{-1} T_w^k - H_z^o(H_w^o)^{-1} H_w^1 X^{k-1} - H_z^o(H_w^o)^{-1} U_w^k + \\ + H_z^1 X^{k-1} + U_z^k. \tag{46}$$

Związek (44) można zapisać także dla chwili t_{k-1}. Wstawiając tak otrzymaną macierz X^{k-1} do (46), otrzymujemy:

$$T_z^k = H_z^o(H_w^o)^{-1} T_w^k + \\ + [(H_z^1 - H_z^o(H_w^o)^{-1} H_w^1)(H_w^o)^{-1}] T_w^{k-1} + R^k , \tag{47}$$

gdzie macierz R^k opisuje pozostałe człony otrzymane w wyniku tego podstawienia. Wykorzystując teraz związki (42) i (43) oraz pamiętając, że wielkości z daszkiem, przeniesione wraz ze swoimi współczynnikami na jedną stronę, daje w wyniku zero, otrzymujemy następujący związek pomiędzy błędami ε_{zl}^k, ε_{wj}^k i ε_{wj}^{k-1}, reprezentowanymi w poniższym związku przez wektory kolumnowe

ε_z^k, ε_w^k i ε_w^{k-1} :

$$\varepsilon_z^k = H_z^o(H_w^o)^{-1} \varepsilon_w^k + \\ + [(H_z^1 - H_z^o(H_w^o)^{-1}(H_w^o)^{-1}] \varepsilon_w^{k-1} + \varepsilon_R^k , \tag{48}$$

gdzie ε_{Rl}^k oznacza sumaryczny błąd obliczeń wynikający z błędów danych w chwilach $t_{k-2}, t_{k-3}, \ldots, t_1$; $l=1,\ldots,2N+1$.

Z rozważań przeprowadzonych dla zagadnień jednowymiarowych [9] wynika, że gdy wpływ błędu danych z chwili t_{k-1} na wynik obliczeń dla punktu brzegowego jest mniejszy niż wpływ błędu danych z chwili t_k, to także wpływy błędów danych z chwil $t_{k-2}, t_{k-3}, \ldots, t_1$ są mniejsze od wpływu błędu danych z chwili t_k. Fakt ten jest w zasadzie konsekwencją żądania sformułowanego na początku tej części pracy, dlatego przyjmujemy, że i w rozważanym przypadku ma on miejsce. W dalszych rozważaniach pominiemy zatem błąd ε_R^k i skupimy uwagę tylko na współczynnikach przy ε_w^k i ε_w^{k-1}. Żądanie, aby wpływ błędu danych z chwili t_{k-1} na wynik obliczeń w chwili t_k był mniejszy od wpływu błędu danych z chwili t_k, sformułujemy następująco:

$$\left\| (H_z^1 - H_z^o (H_w^o)^{-1} H_w^1) (H_w^o)^{-1} \right\| < \left\| H_z^o (H_w^o)^{-1} \right\| , \tag{49}$$

przy czym $\| \cdot \|$ oznacza tu normę kwadratową, zdefiniowaną wzorem

$$\|A\|_2 = \frac{1}{\sqrt{P \cdot Q}} \left(\sum_{i=1}^{P} \sum_{k=1}^{Q} |A_{ik}|^2 \right)^{1/2} \tag{50}$$

lub normę maksimum, zdefiniowaną wzorem

$$\|A\|_M = \max_{i,k} |A_{ik}| \tag{51}$$

Powyższe rozważania prowadzone były dla przypadku, gdy macierze H_w^{α} i H_z^{α}, $\alpha = 0,1$ były kwadratowe o wymiarach $(2N+1) \times (2N+1)$. Rozważania te można jednak rozszerzyć także na przypadek, gdy są to macierze prostokątne oraz gdy ilość punktów na konturze zewnętrznym $\partial\Omega$ różni się od ilości punktów na konturze wewnętrznym $\partial\Omega^*$

Przyjmijmy, że na konturze wewnętrznym jest M punktów, w których znane są WO, a na konturze zewnętrznym chcemy obliczyć temperaturę w L punktach. Wówczas macierze, występujące po prawych stronach związków (41) i (45) mają następujące wymiary:

H_w^o i H_w^1 - $M \times (2N+1)$,

H_z^o i H_z^1 - $L \times (2N+1)$.

Układ równań algebraicznych na współczynniki zwarte w macierzy $\bar{X}^k$, tzn. układ opisany równaniem (41), staje się niedookreślony, gdy $M < (2N+1)$ lub nadokreślony, gdy $M > (2N+1)$.

Mnożąc lewostronnie równanie (41) przez $(H_w^o)^T$, otrzymujemy

$$[(H_w^o)^T H_w^o]X^k = (H_w^o)^T (T_w^k - H_w^1 X^{k-1} - U_w^k). \tag{52}$$

W ten sposób przy X^k stoi macierz o wymiarach $(2N+1) \times (2N+1)$, a prawa strona równania (52) jest macierzą o wymiarach $(2N+1) \times 1$. Jeśli więc macierz $(H_w^o)^T H_w^o$ jest nieosobliwa, wówczas istnieje rozwiązanie równania (52) i ma postać:

$$X^k = A_w(T_w^k - H_w^1 X^{k-1} - U_w^k), \tag{53}$$

gdzie

$$A_w = [(H_w^o)^T H_w^o]^{-1} (H_w^o)^T \tag{54}$$

$k = 1,\dots,K$, przy czym dla $k = 1,2$ $U_w^k = 0$, a dla $k=1$ także $X^{k-1} = 0$. Podobny związek można także napisać dla X^{k-1}, $k = 2,\dots,K$. Po wstawieniu X^k i X^{k-1} określonych poprzez związek (53) do równania (45) i po przekształceniach otrzymuje się następujący związek pomiędzy T_z^k oraz T_w^k i T_w^{k-1}:

$$T_z^k = H_z^o A_w T_w^k + \left\{ H_z^1 - H_z^o A_w H_w^1 \right\} A_w T^{k-1} + R^k . \tag{55}$$

Związek pomiędzy błędami ε_z^k, ε_w^k i ε_w^{k-1} będzie miał teraz postać analogiczną do związku (55), a kryterium stabilności obliczeń przyjmie postać

$$\left\| (H_z^1 - H_z^o A_w H_w^1) A_w \right\| < \left\| H_z^o A_w \right\| \tag{56}$$

UWAGI KOŃCOWE

Sformułowanie przybliżonego rozwiązania ZO w języku macierzy pozwoliło w dość prosty sposób otrzymać taką jego postać, która umożliwiła przeprowadzenie analizy wpływu błędu danych na błąd obliczeń. Otrzymane kryterium stabilności zostało otrzymane w sposób zbliżony do zastosowanego przy zagadnieniach jednowymiarowych. Istotne wydaje się to, że podany wzorem (56) warunek stabilności obliczeń temperatury w obszarze Ω dopuszcza różne ilości punktów na konturach $\partial\Omega$ i $\partial\Omega^* \subset \Omega$.

LITERATURA

[1] Tichonov A.N. i Arsenin V.Ja.: Metody rešenija nekorrektnych zadač. Nauka, Moskwa, 1979.

[2] Grysa K.: Zagadnienia odwrotne przewodnictwa cieplnego. Część I. Równania całkowe. ZNPP, s. Mechanika, 31, 1986.

[3] Grysa K.: Stowarzyszone równania całkowe dla równania Helmholtza i ich zastosowania do rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. ZNPP, s. Mechanika, 31, 1986.

[4] Grysa K.: O ścisłych i przybliżonych metodach rozwiązywania zagadnień odwrotnych pól temperatur. Politechnika Poznańska, Rozprawy, w druku (1988).

[5] Grysa K. i Kamiński H.: O przybliżonym rozwiązywaniu jednowymiarowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. MTiS, 24, 1/2, 1986.

[6] Grysa K.: Uwagi o stabilności rozwiązań pewnych jednowymiarowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. PNPL 167, Mechanika 39,

[7] Temat 2.2.1.2 w problemie CPBP 02.18, kierunek 2. W tym temacie § 4 pt. "O stabilności rozwiązań jednowymiarowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego". Poznań, listopad 1987.

[8] McLachlan N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. PWN Warszawa 1964.

[9] Kamiński H.: Wyznaczanie współczynników materiałowych w procesach wymiany ciepła i masy. Praca doktorska. Politechnika Poznańska, 1984.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Kazimierz Kurpisz

ЗАМЕТКИ О УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДВУХМЕРНЫХ
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.
ЧАСТЬ I: КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Р е з ю м е

Определяется и формулируется в виде неравенства критерий устойчивости решений обратных задач теплопроводности. Этот критерий сформулирован для случая, когда количество точек на внутренном контуре может отличаться от количества точек на крае рассматриваемой области. Критерий выполняет свою роль только тогда, когда количество функций используемых для приближенного представления температуры в области с помощью конечного ряда не превышает количества точек на внутренном контуре.

REMARKS ON THE STABILITY OF SOLUTIONS FOR 2D
INVERSE HEAT TRANSFER PROBLEMS.
PART I: STABILITY CRITERION

S u m m a r y

Inequality stability criterion for 2D inverse heat transfer problem are defined and formulated. The criterion is formulated for the case when number of points in the internal contour may differ from number of points at the boundary of the area. It plays its role only if a number of functions used to approximate definition of temperature in the area by the finite series is less than the number of points in the internal contour.