

Grażyna SYPNIEWSKA-KAMIŃSKA

Akademia Wychowania Fizycznego  
w Poznaniu

Krzysztof GRYSA

Politechnika Poznańska

UWAGI O STABILNOŚCI ROZWIĄZAŃ DWUWYMIAROWYCH  
ZAGADNIENIŃ ODWROTNYCH PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO.

CZĘŚĆ II: ANALIZA NUMERYCZNA

**Streszczenie.** Przeprowadzono badania numeryczne stabilności rozwiązań zagadnień odwrotnych dla różnych kształtów konturów. Otrzymane wyniki są potwierdzeniem przydatności sformułowanego w pracy [1] kryterium stabilności. Kryterium to jest ważne dla przypadku, gdy ilość punktów na konturze wewnętrznym może różnić się od ilości punktów na brzegu rozważanego obszaru.

## 1. OGRANICZENIA DLA DANYCH WEJŚCIOWYCH

W części I tej pracy określono i sformułowano w postaci nierówności kryterium stabilności rozwiązań dwuwymiarowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepłego (ZO). Kryterium to sformułowano dla przypadku, gdy ilość punktów na konturze wewnętrznym,  $\partial Q^*$ , może różnić się od ilości punktów na brzegu rozważanego obszaru,  $\partial Q$ , spełnia swoją rolę tylko wtedy, gdy ilość funkcji, wykorzystanych do przybliżonego przedstawienia temperatury w obszarze za pomocą szeregu skończonego [1] nie przekracza ilości punktów na konturze wewnętrznym. Gdy sumowanie szeregu odbywa się od 1 do  $N$ , tzn. gdy tych funkcji jest  $2N+1$  (por. [1], wzór (31)), wówczas ilość punktów na konturze wewnętrznym,  $\partial Q^*$ , określona liczbą  $M$ , musi spełniać nierówność

$$M \geq 2N+1, \quad (1)$$

warunkującą rozwiązanie równań typu (41) z pracy [1]. Gdy  $M < 2N+1$ , wówczas macierz  $A_w$ , określona wzorem (54) w pracy [1], nie istnieje, gdyż macierz  $(H_w^0)^T H_w^0$  jest osobliwa.

Badanie stabilności przybliżonych rozwiązań ZO, przedstawionych w [1] prowadzone jest głównie na podstawie nierówności (56) z [1], ale pewnymi wskaźnikami uwarunkowania wspomnianych układów równań typu (41) z [1] są: rząd wielkości norm, porównywanych w nierówności (56) oraz norma kwadratuwa pewnej macierzy, określona jako "sprawdzenie operacji odwracania macierzy" (w skrócie: SOOM). Ta ostatnia wielkość związana jest z tym, że w nierówności (56) występuje macierz  $[(H_W^0)^T H_W^0]^{-1}$  i jest ona określona następująco:

$$\text{SOOM} = \| [(H_W^0)^T H_W^0]^{-1} [(H_W^0)^T H_W^0] - 1 \| \quad (2)$$

gdzie  $1$  jest macierzą jednostkową o wymiarach  $(2N+1) \times (2N+1)$ , zawierającą jedynki na głównej przekątnej i zera poza nią. Przy źle uwarunkowanym układzie równań typu (41) z [1] SOOM staje się większe od 1, a powinno być - przy dobrym uwarunkowaniu wspomnianego układu równań - bliskie zeru. Teoretycznie powinno być nawet  $\text{SOOM} = 0$ , lecz numerycznie wartość 0 jest nie do osiągnięcia.

Obliczenia dla różnych wartości kroku czasowego oraz kilku typów konturów wewnętrznych,  $\partial \Omega^*$ , i zewnętrznych,  $\partial \Omega$ , gdzie  $\partial \Omega^* \subset \Omega$  przeprowadzono za pomocą programu o nazwie STAB.

Normy macierzy, porównywanych w nierówności (56), obliczane są na dwa sposoby: raz jako norma kwadratowa, a drugi raz jako norma maksimum (por. [1], wzory (50) i (51)). Norma kwadratowa jest pewnym miernikiem "średniej" wartości liczby, przez którą mnożone są błędy danych (błędy wewnętrznych odpowiedzi temperaturowych); norma maksimum (w skrócie: norma max) wskazuje największą taką liczbę.

## 2. ANALIZA NUMERYCZNA STABILNOŚCI

Analizę numeryczną stabilności przybliżonych rozwiązań dwuwymiarowych ZO przeprowadzono dla dwóch obszarów  $\Omega$ : dla koła i dla kwadratu. Rozważano następujące warianty konturów  $\partial \Omega$  i  $\partial \Omega^*$ :

- 1<sup>o</sup>  $\partial \Omega$  - okrąg,  $\partial \Omega^*$  - okrąg współśrodkowy z  $\partial \Omega$  (rys. 1);
- 2<sup>o</sup>  $\partial \Omega$  - okrąg,  $\partial \Omega^*$  - brzeg koła, współśrodkowego z  $\partial \Omega$ , z wyciętym odcinkiem koła (rys. 2);
- 3<sup>o</sup>  $\partial \Omega$  - brzeg kwadratu,  $\partial \Omega^*$  - okrąg o środku w środku kwadratu, na przecięciu jego przekątnych (rys. 3);
- 4<sup>o</sup>  $\partial \Omega$  - brzeg kwadratu,  $\partial \Omega^*$  - brzeg kwadratu o bokach równo oddalonych od boków kwadratu  $\Omega$  (rys. 4).

Dla każdego konturu  $\partial \Omega$  badano stabilność obliczeń dla różnych wielkości obszaru  $\partial \Omega^*$  i dla czterech kroków czasowych: dla  $\tau = 0,04$ , tzn.

dla  $p = 5$ , dla  $\tau = 0.02$  ( $p = 7$ ), dla  $\tau = 0.01$  ( $p = 10$ ) i dla  $\tau = 0.005$  ( $p = 14$ ).

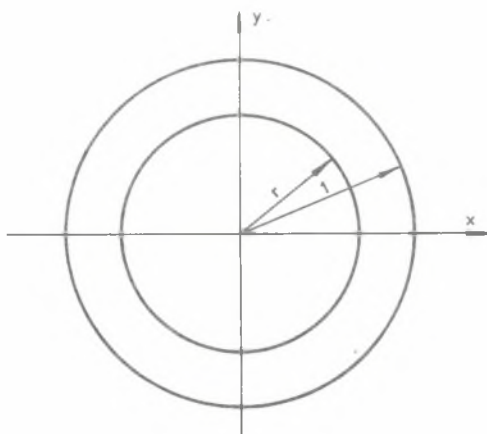
Ponieważ do stwierdzenia, czy obliczenia dotyczące temperatury brzegu  $\partial\Omega$  obszaru  $\Omega$  w kolejnych chwilach czasu będą stabilne czy nie, nie jest potrzebna znajomość wewnętrznych odpowiedzi, więc ograniczymy się tylko do stwierdzenia, że na konturze  $\partial\Omega^*$  zadane mogą być wewnętrzne odpowiedzi temperaturowe.

Poniżej podano i omówiono wyniki obliczeń dla poszczególnych zagadnień.

### 2.1. Koło w kole

Jako  $\partial\Omega$  przyjęto okrąg o promieniu jednostkowym. Jako  $\partial\Omega^*$  - okręgi współśrodkowe z  $\partial\Omega$  o promieniach od 0.95 do 0.2. Obliczenia prowadzono dla  $p = 5, 7, 10$  i  $14$ . Liczba punktów na obu konturach była przyjmowana taka sama i równa 20. Ilość funkcji, wykorzystywanych w szeregu opisującym w sposób przybliżony temperaturę w obszarze  $\Omega$ , była równa 19 (tzn. szereg sumowano do  $N = 9$ ) lub 17 ( $N = 8$ ). Zbadano też sytuację, gdy  $N = 10$ , tzn. gdy ilość funkcji była równa 21, a układ typu (41) z [1] - nadokreślony.

Wyniki obliczeń przedstawiono w tablicach 1-4.



Rys. 1

Fig. 1

Tablica 1

Koło w kole. Wyniki obliczeń dla  $p = 5$  ( $\tau = 0.04$ ). Promień koła będącego obszarem  $\Omega$  jest równy 1

r	N	SOOM	Wartości norm macierzy współczynników			
			przy $\epsilon_w^k$       <sub>2</sub>	przy $\epsilon_w^{k-1}$       <sub>2</sub>	przy $\epsilon_w^k$       <sub>M</sub>	przy $\epsilon_w^{k-1}$       <sub>M</sub>
0.95	8	$0.14 \cdot 10^{-16}$	0.289	0.026	1.187	0.105
0.90	8	$0.22 \cdot 10^{-29}$	0.416	0.07	1.686	0.288
0.85	8	$0.65 \cdot 10^{-17}$	0.616	0.146	2.444	0.601
0.80	8	$0.95 \cdot 10^{-17}$	0.947	0.279	3.629	1.139
0.75	8	$0.65 \cdot 10^{-17}$	1.516	0.518	5.549	2.075
0.70	8	$0.92 \cdot 10^{-17}$	2.542	0.971	8.786	3.741
0.65	8	$0.13 \cdot 10^{-16}$	4.482	1.868	14.508	6.814
0.60	8	$0.13 \cdot 10^{-16}$	8.354	3.745	25.183	12.742
0.55	8	$0.92 \cdot 10^{-17}$	16.568	7.920	46.392	24.855
0.50	9	$0.83 \cdot 10^{-14}$	67.003	30.713	172.31	86.738
0.46	9	$0.82 \cdot 10^{-17}$	141.28	67.566	342.96	177.75
0.40	9	$0.14 \cdot 10^{-16}$	495.13	250.29	1107.3	595.78
0.36	9	$10^{-17}$	1276.5	666.1	2710.9	1490.2
0.30	9	$0.19 \cdot 10^{-25}$	6583.2	3576.5	12985	7337.2
0.25	9	$0.12 \cdot 10^{-16}$	33977	18970	63191	36378
0.20	9	$10^{-17}$	253303	144553	445042	259858
0.95	10	$0.18 \cdot 10^{16}$	0.328	0.043	1.6	0.19
0.90	10	$0.34 \cdot 10^{17}$	0.5	0.104	2.54	0.619
0.85	10	$0.27 \cdot 10^{17}$	0.781	0.211	3.3	0.951
0.80	10	$0.28 \cdot 10^{17}$	1.54	0.608	10.36	3.636
0.70	10	$0.21 \cdot 10^{18}$	6.214	2.182	23.544	11.751
0.60	10	$0.92 \cdot 10^{19}$	439.91	1730	2451.6	7484.6
0.50	10	$0.22 \cdot 10^{19}$	187.86	77.22	612.41	233.54

Widoczne jest, że dla kroków czasowych  $\tau = 0.04$  i  $\tau = 0.02$  kryterium stabilności jest spełnione nawet dla małych promieni konturów  $\partial\Omega^*$ . Jednakże wtedy czynnikiem decydującym o stabilności obliczeń jest wielkość normy max. Przy  $\tau = 0.04$  norma max przekracza wartość 100 dla  $r < 0.5$ , co oznacza, że błąd danych wejściowych będzie zwielokrotniony w każdym kroku czasowym ponad 100 razy. Nawet niewielki błąd danych, rzędu 1% wartości dokładnej, może w takim przypadku po kilkunastu krokach czasowych zniekształcić obliczane na brzegu wartości temperatury tak, że mogą się one znacznie różnić od temperatur dokładnych.

Tablica 2

Koło w kole. Wyniki obliczeń dla  $p = 7$  ( $\mathcal{Z} = 0,02$ ). Promień koła będącego obszarem  $\mathcal{Q}$  jest równy 1

r	N	SOOM	Wartości norm macierzy współzynnisków			
			przy $\epsilon_w^k$	przy $\epsilon_w^{k-1}$	przy $\epsilon_w^k$	przy $\epsilon_w^{k-1}$
			$\  \cdot \ _2$	$\  \cdot \ _2$	$\  \cdot \ _M$	$\  \cdot \ _M$
0.95	8	$0,32 \cdot 10^{-30}$	0.311	0.044	1,281	0.18
0.90	8	$0,92 \cdot 10^{-17}$	00.479	0.131	1,955	0.539
0.85	8	$0,92 \cdot 10^{-17}$	0.755	0.297	3.03	1.222
0.80	8	$0,66 \cdot 10^{-17}$	1.224	0.613	4.786	2.501
0.75	8	$0,15 \cdot 10^{-16}$	2.052	1.221	7.737	4.895
0.70	8	$0,92 \cdot 10^{-17}$	3.58	2.427	12.874	9.425
0.65	8	$0,65 \cdot 10^{-17}$	6.539	4.906	22.19	18.204
0.60	8	$0,92 \cdot 10^{-17}$	12.583	10.257	39.948	35.829
0.55	8	$0,65 \cdot 10^{-17}$	25.211	22.475	75.865	72.829
0.50	9	$0,58 \cdot 10^{-17}$	102.61	87.159	275.18	254.97
0.45	9	$0,14 \cdot 10^{-16}$	269.85	242.04	669.89	646.89
0.40	9	$0,83 \cdot 10^{-17}$	793.74	746.51	1830.44	1829.1
0.35	9	$0,83 \cdot 10^{-17}$	2688.3	2633.5	5781.7	5946.0
0.95	10	$0,17 \cdot 10^{16}$	0.347	0.098	1.686	0.51
0.90	10	$0,46 \cdot 10^{16}$	0.599	0.286	2.89	1.593
0.80	10	$0,55 \cdot 10^{16}$	2.343	2.035	12.801	13.053
0.70	10	$0,28 \cdot 10^{18}$	14.022	17.879	110.94	84.207

Tablica 3

Koło w kole. Wyniki obliczeń dla  $p = 10$  ( $\mathcal{Z} = 0,01$ ). Promień koła będącego obszarem  $\mathcal{Q}$  jest równy 1

r	N	SOOM	Wartości norm macierzy współzynnisków			
			przy $\epsilon_w^k$	przy $\epsilon_w^{k-1}$	przy $\epsilon_w^k$	przy $\epsilon_w^{k-1}$
			$\  \cdot \ _2$	$\  \cdot \ _2$	$\  \cdot \ _M$	$\  \cdot \ _M$
0.95	8	$0,11 \cdot 10^{-16}$	0.353	0.078	1.455	0.322
0.90	8	$10^{-31}$	0.613	0.267	2.512	1.099
0.85	8	$0,14 \cdot 10^{-30}$	1.081	0.69	4.384	2.838
0.80	8	$0,65 \cdot 10^{-17}$	1.942	1.613	7.752	6.582
0.78	9	$0,12 \cdot 10^{-16}$	2.912	2.507	11.956	10.689
0.76	9	$10^{-17}$	3.784	3.502	15.319	14.8
0.75	8	$0,11 \cdot 10^{-16}$	3.577	3.61	13.936	14.538
0.70	8	$0,90 \cdot 10^{-17}$	6.796	7.967	25.582	31.346
0.65	8	$0,13 \cdot 10^{-16}$	27.622	40.157	94.049	145.73
0.60	8	$0,55 \cdot 10^{-30}$	60.093	94.627	191.53	323.25

Tablica 4

Koło w kole. Wyniki obliczeń dla  $p = 14$  ( $\zeta = 0.005$ ). Promień koła będącego obszarem  $\Omega$  jest równy 1

r	N	SOOM	Wartości norm macierzy współczynników			
			przy $\epsilon_w^k$       <sub>2</sub>	przy $\epsilon_w^{k-1}$       <sub>2</sub>	przy $\epsilon_w^k$       <sub>M</sub>	przy $\epsilon_w^{k-1}$       <sub>M</sub>
0.95	8	$0.11 \cdot 10^{-16}$	0.424	0.139	1.747	0.572
0.90	8	$0.66 \cdot 10^{-31}$	0.879	0.571	3.610	2.352
0.85	8	$0.11 \cdot 10^{-16}$	1.839	1.773	7.513	7.288
0.84	9	$0.82 \cdot 10^{-17}$	2.370	2.376	10.163	10.303
0.80	8	$0.65 \cdot 10^{-17}$	3.9	4.846	15.768	20.234
0.75	8	$0.14 \cdot 10^{-16}$	8.39	13.119	33.459	53.159
0.70	8	$0.65 \cdot 10^{-17}$	18.444	34.015	72.006	135.74
0.65	8	$0.11 \cdot 10^{-16}$	41.641	87.809	157.82	342.4

Dla  $r = 0.3$  norma maksimum jest równa 12895 dla macierzy stojącej przy  $\epsilon_w^k$  i 7337.2 dla macierzy stojącej przy  $\epsilon_w^{k-1}$ , a dla  $r = 0.2$  jest już ona rzędu  $10^6$ . Mimo więc spełnienia nierówności (56) z pracy [1] przy niedokładnych danych należy spodziewać się tego, że na brzegu wartości temperatur będą oscylować wokół zera ze wzrastającą amplitudą.

Tak więc najmniejszą wartość promienia  $r$ , przy której należy jeszcze spodziewać się stabilnych wyników obliczeń przy niedokładnych danych, można oszacować na  $r_g = 0.6$ .

Zauważmy, że zwiększenie wartości  $N$  (przy spełnionej nierówności (1)) powoduje nieznaczny wzrost wartości obliczanych norm, jakkolwiek nie ma wpływu na spełnienie bądź niespełnienie warunku (56) z [1] (por. tabl.3). Ten wzrost wartości obliczanych norm związany jest ze zwiększeniem się rozmiarów macierzy, dla których te normy są obliczane.

Gdy nierówność (1) nie jest spełniona, SOOM natychmiast staje się wielkością bardzo dużą, a wyniki obliczeń norm macierzy przestają być wiarygodne (por. np. wyniki dla  $r = 0.6$  przy  $N = 8$  i przy  $N = 10$  w tabelicy 1).

Analizując wyniki zawarte w tabelicy 2 dla  $\zeta = 0.02$ , dochodzi się do podobnych wniosków jak w przypadku  $\zeta = 0.04$ . Granicę stabilności obliczeń można ustalić także na  $r_g = 0.6$ , przy czym ponownie nie decyduje o tym nierówność (56), lecz wielkość współczynników, stojących przy błędach z chwil  $t_k$  i  $t_{k-1}$ .

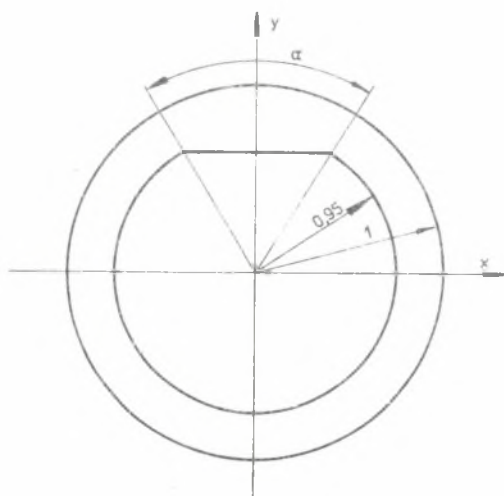
W przypadku gdy  $\zeta = 0.01$ , granica stabilności obliczeń jest dobrze widoczna i jest ona osiągnięta przy  $r_g = 0.75$ , a decyduje o niej nierówność (56). Podobnie gdy  $\zeta = 0.005$ , otrzymujemy granicę stabilności

obliczeń równą  $r_g = 0,84$ . Jednakże w obu tych przypadkach wartości normy  $\max$  nie były zbyt wysokie przy  $r = r_g$ , co pozwala spodziewać się stabilnych obliczeń nawet wtedy, gdy  $r$  jest mniejsze od  $r_g$  (np. dla  $r = 0,7$  przy  $\zeta = 0,001$  lub dla  $r = 0,8$  przy  $\zeta = 0,005$ ), jeśli tylko błąd danych wejściowych jest niewielki, np. równy ok. 2-3% wartości dokładnej.

Podobne wnioski otrzymano w przypadku badania stabilności przybliżonych rozwiązań jednowymiarowych Z0, [2,3]. Na przykład dla warstwy płaskiej otrzymano warunek na długość bazy Z0 (odpowiednik średnicy koła  $\Omega^*$ ) w postaci  $u > (p-2)/p$ , [2,3]. Oznacza to, że dla  $\zeta = 0,04$  będzie  $u > 0,6$ , dla  $\zeta = 0,02$   $u > 0,71$ , dla  $\zeta = 0,01$   $u > 0,8$ , dla  $\zeta = 0,005$   $u > 0,85$ . Wyniki te są porównywalne z otrzymanymi dla tu rozważanego Z0.

## 2.2. "Obcięte" koło w kole

Jako  $\partial\Omega$  przyjęto tutaj także okrąg o promieniu jednostkowym, a jako  $\partial\Omega^*$  - brzeg koła o promieniu równym 0,95 z wyciętym odcinkiem kołowym (rys. 2). Poszczególne przypadki, dla których badano stabilność, różnią się kątem, na którym wycięto odcinek koła. Rozważano dwa typy zagadnień.



Rys. 2

Fig. 2

W pierwszym przyjmowano, że ilość punktów na obu konturach,  $\partial\Omega$  i  $\partial\Omega^*$ , wynosi 20, a kąt  $\alpha$ , wyznaczający odcinek koła, zmienia się od  $36^\circ$  co  $36^\circ$  do  $144^\circ$ . W drugim typie zagadnień przyjmowano, że ilość punktów na obu konturach wynosi 40, a kąt  $\alpha$ , wyznaczający odcinek koła, zmienia się od  $18^\circ$  co  $36^\circ$  do  $162^\circ$ . Obliczenia prowadzono dla  $p = 5, 7, 10$  i  $14$ . Ilość funkcji w szeregu opisującym temperaturę wynosiła 19 dla przypadku  $M = 20$  punktów (co oznacza  $N = 9$ ) i 39 dla przypadku  $M = 40$  punktów (co oznacza  $N = 19$ ). Wyniki obliczeń przedstawiono w tablicach 5 - 8, w których podano także najmniej-

szą odległość od konturu  $\partial\Omega^*$  do środka koła  $\Omega$ , będącego także środkiem "obciętego" koła  $\Omega^*$ .

Tablica 5

"Obcięte" koło w koła. Wyniki obliczeń dla  $p = 5$  ( $\tau = 0.04$ ). Promień koła  $\odot$  jest równy 1

$\alpha$	$r_{\min}$	N	SOOM	Wartości norm macierzy współczynników			
				przy $\varepsilon_w^k$       <sub>2</sub>	przy $\varepsilon_w^{k-1}$       <sub>2</sub>	przy $\varepsilon_w^k$       <sub>2</sub>	przy $\varepsilon_w^{k-1}$       <sub>2</sub>
18°	0.9383	19	$0.29 \cdot 10^{-7}$	0.296	0.016	2.025	0.141
36°	0.9035	9	$0.25 \cdot 10^{-14}$	0.32	0.03	1.8	0.283
54°	0.8465	19	$0.15 \cdot 10^{-6}$	0.4	0.037	4.216	0.607
72°	0.7686	9	$0.95 \cdot 10^{-14}$	0.429	0.1	2.963	0.942
90°	0.6718	19	$0.13 \cdot 10^{-3}$	6.909	1.401	71.927	15.589
108°	0.5871	9	$0.45 \cdot 10^{-12}$	2.077	1.122	16.99	10.273
126°	0.4313	19	$0.18 \cdot 10^5$	10692	2993.3	85818	24216
144°	0.3087	9	$0.22 \cdot 10^{-7}$	211.4	133.8	1295.5	840.75
162°	0.1486	19	$0.34 \cdot 10^{12}$	$0.4 \cdot 10^7$	$0.2 \cdot 10^8$	$0.3 \cdot 10^8$	$0.2 \cdot 10^9$

Jak wynika z tablicy 5, gdy  $\tau = 0.04$ , utrata stabilności obliczeń nastąpi raczej z powodu zbyt dużych współczynników przy błędach danych wejściowych niż z powodu niespełnienia nierówności (56). Krytyczny kąt, dla którego współczynniki przy błędach nie są jeszcze zbyt duże, to kąt  $\alpha_g = 108^\circ$ . Co prawda dla kąta  $\alpha = 126^\circ$  wartość SOOM wskazuje na to, że układ równań typu (41) z [1] jest źle uwarunkowany, ale obliczone wartości współczynników dla kąta  $\alpha = 144^\circ$ , przy którym wspomniany układ równań jest dobrze uwarunkowany (mniejsza jest przy tym wartość N), są już tak duże, że można się spodziewać także dużych wartości dla  $\alpha = 126^\circ$  przy dobrym uwarunkowaniu układu (41), co miałoby miejsce dla  $N = 9$ .

Dla  $\tau = 0.02$   $\alpha_g = 90^\circ$ , gdyż dla  $\alpha > \alpha_g$  normy max nie spełniają nierówności (56). W przypadku  $\tau = 0.01$  będzie także  $\alpha_g = 90^\circ$ , gdyż dla  $\alpha > 90^\circ$  oba typy norm nie spełniają nierówności (56). Można w tym jednak przypadku przy niedokładnych danych spodziewać się dla  $\tau = 90^\circ$  oscylujących rozwiązań na brzegu, gdyż normy max są rzędu  $10^2$ . Wreszcie dla  $\tau = 0,005$  będzie  $\alpha_g = 54^\circ$ .

Obliczenia prowadzone przy  $N = 19$  cechowała szybko rosnąca wartość SOOM ze wzrostem kąta  $\alpha$  i to dla wszystkich rozważanych wartości  $p$ . Bardziej stabilne obliczenia dla  $N = 9$  potwierdzały jednak wskazania dotyczące stabilności, a wynikające z obliczeń dokonanych przy  $N = 19$ . Dla małych kątów ( $18^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $54^\circ$ ) SOOM jest bardzo małe dla obu przypadków, a wartości norm są porównywalne; dla dużych kątów i  $N = 19$  wartości SOOM



są tak duże (układ równań (41) z [1] jest tak źle uwarunkowany), że wartości norm są mało wiarygodne. Tak więc okazuje się, że większa ilość punktów na obu konturach i większa ilość funkcji opisujących rozwiązanie nie musi oznaczać, że obliczenia będą bardziej stabilne.

Tablica 6

"Obcięte" koło w kole. Wyniki obliczeń dla  $p = 7$  ( $\varepsilon = 0.02$ ). Promień koła  $\Omega$  jest równy 1

$\alpha$	$r_{\min}$	N	SOOM	Wartości norm macierzy współczynników			
				przy $\varepsilon_w^k$ $\  \cdot \ _2$	przy $\varepsilon_w^{k-1}$ $\  \cdot \ _2$	przy $\varepsilon_w^k$ $\  \cdot \ _2$	przy $\varepsilon_w^{k-1}$ $\  \cdot \ _2$
$18^\circ$	0.9383	19	$0.28 \cdot 10^{-9}$	0.31	0.03	2.155	0.258
$36^\circ$	0.9035	9	$0.58 \cdot 10^{-15}$	0.35	0.052	2.047	0.513
$54^\circ$	0.8465	19	$0.16 \cdot 10^{-8}$	0.43	0.073	4.773	1.227
$72^\circ$	0.7686	9	$0.23 \cdot 10^{-14}$	0.51	0.213	3.873	2.026
$90^\circ$	0.6718	19	$0.14 \cdot 10^{-5}$	8.354	3.235	88.264	36.720
$108^\circ$	0.5873	9	$0.44 \cdot 10^{-12}$	3.358	3.219	29.177	30.177
$126^\circ$	0.4313	19	$0.31 \cdot 10^3$	13947	7502	112218	60810
$144^\circ$	0.3087	9	$0.79 \cdot 10^{-7}$	386.56	461.21	2364.6	2804.1
$162^\circ$	0.1486	19	$10^{10}$	$0.5 \cdot 10^7$	$10^8$	$0.5 \cdot 10^8$	$10^9$

Tablica 7

"Obcięte" koło w kole. Wyniki obliczeń dla  $p = 10$  ( $\varepsilon = 0.01$ ). Promień koła  $\Omega$  jest równy 1

$\alpha$	$r_{\min}$	N	SOOM	Wartości norm macierzy współczynników			
				przy $\varepsilon_w^k$ $\  \cdot \ _2$	przy $\varepsilon_w^{k-1}$ $\  \cdot \ _2$	przy $\varepsilon_w^k$ $\  \cdot \ _2$	przy $\varepsilon_w^{k-1}$ $\  \cdot \ _2$
$18^\circ$	0.9383	19	$0.26 \cdot 10^{-11}$	0.338	0.056	2.413	0.5
$36^\circ$	0.9035	9	$0.16 \cdot 10^{-15}$	0.395	0.097	2.532	0.993
$54^\circ$	0.8465	19	$0.14 \cdot 10^{-10}$	0.498	0.162	6.045	2.777
$72^\circ$	0.7686	9	$0.14 \cdot 10^{-14}$	0.728	0.55	6.219	5.283
$90^\circ$	0.6718	19	$0.50 \cdot 10^{-7}$	12.317	9.245	133.37	110.78
$108^\circ$	0.5873	9	$0.50 \cdot 10^{-12}$	8.275	13.7	76.811	132.16
$126^\circ$	0.4313	19	6.13	24134	25474	195034	207052
$144^\circ$	0.3087	9	$0.34 \cdot 10^{-6}$	1241.8	2689.6	7547.6	16813
$162^\circ$	0.1486	19	$10^9$	$0.7 \cdot 10^8$	$0.1 \cdot 10^{11}$	$0.6 \cdot 10^2$	$0.2 \cdot 10^{12}$

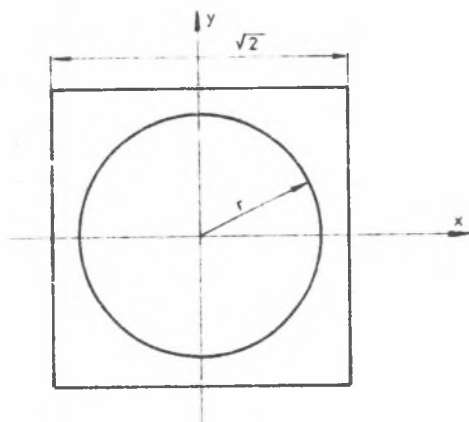
Tablica 8

"Obcięte" koło w kole. Wyniki obliczeń dla  $p = 14$  ( $\tau = 0,005$ ). Promień koła  $\Omega$  jest równy 1

$\alpha$	$r_{\min}$	N	SOOM	Wartości norm macierzy współczynników			
				przy $\mathcal{E}_w^k$       <sub>2</sub>	przy $\mathcal{E}_w^{k-1}$       <sub>2</sub>	przy $\mathcal{E}_w^k$       <sub>2</sub>	przy $\mathcal{E}_w^{k-1}$       <sub>2</sub>
18°	0.9383	19	$0.14 \cdot 10^{-12}$	0.388	0.104	2.882	0.958
36°	0.9035	9	$0.11 \cdot 10^{-15}$	0.482	0.130	3.408	1.949
54°	0.8465	19	$0.65 \cdot 10^{-12}$	0.649	0.386	8.9	6.791
72°	0.7586	9	$0.19 \cdot 10^{-14}$	1.349	1.677	12.691	16.292
90°	0.6718	19	$0.16 \cdot 10^{-7}$	24.4	32.975	277.95	428.0
108°	0.5873	9	$0.63 \cdot 10^{-11}$	33.753	87.843	328.7	866.3
126°	0.4313	19	4.755	64255	124499	522116	$10^7$

### 2.3. Koło w kwadracie

Jako  $\partial\Omega$  przyjęto tutaj brzeg kwadratu o boku równym  $\sqrt{2}$ , a jako  $\partial\Omega^*$  - okrąg o środku w punkcie przecięcia przekątnych kwadratu. Promień okręgu  $\partial\Omega^*$  przyjmowano kolejno 0.707 i od 0.65 coraz mniejszy. Obliczenia przeprowadzono dla  $p = 5, 7, 10$  i 14. Ilość punktów na obu konturach,  $\partial\Omega$  i  $\partial\Omega^*$ , przyjęto równą 24. Ilość funkcji w szeregu opisującym temperaturę wynosiła 21 ( $N = 10$ ) lub 23 ( $N = 11$ ). Wyniki obliczeń przedstawiono w tablicach 9 - 12.



Rys. 3

fig. 3

niz niespełnienie nierówności (56), gdyż ta ostatnia była spełniona dla wszystkich badanych konturów  $\partial\Omega^*$ . Dla  $\tau = 0.04$  będzie zatem  $r_g = 0.55$ , a dla  $\tau = 0.02$  będzie  $r_g = 0.60$ . Gdy  $\tau = 0.01$ , wówczas  $r_g \approx 0.707$ , a dla  $\tau = 0.005$  żaden kontur  $\partial\Omega^*$  nie gwarantuje stabilnych obliczeń. Tak duże wartości  $r_g$  dla poszczególnych kroków czasowych wynikają z kształtu obu konturów.

W przypadku  $p = 5$  ( $\tau = 0.04$ ) i  $p = 7$  ( $\tau = 0.02$ ) o utracie stabilności mogą zdecydować raczej zbyt duże współczynniki przy błędach

Tabela 9

Koło w kwadracie. Wyniki obliczeń dla  $p = 5$  ( $\alpha = 0,04$ ). Bok kwadratu jest równy  $\sqrt{2}$

r	N	SOOM	Wartości norm macierzy współczynników			
			przy $\epsilon_w^k$ $\  \cdot \ _2$	przy $\epsilon_w^{k-1}$ $\  \cdot \ _2$	przy $\epsilon_w^k$ $\  \cdot \ _M$	przy $\epsilon_w^{k-1}$ $\  \cdot \ _M$
0.707	10	$0.53 \cdot 10^{-17}$	1.531	0.459	12.916	4.541
0.65	10	$0.53 \cdot 10^{-17}$	3.4	1.137	26.29	10.204
0.60	10	$1.06 \cdot 10^{-15}$	7.384	2.676	52.754	21.856
0.55	10	$0.75 \cdot 10^{-17}$	17.325	6.742	114.56	50.9
0.50	10	$0.92 \cdot 10^{-17}$	44.412	18.397	272.72	124.32
0.45	10	$0.75 \cdot 10^{-17}$	126.36	55.275	723.53	324.4
0.40	10	$0.11 \cdot 10^{-16}$	408.19	187.15	2167.9	1070.0
0.35	10	$6.20 \cdot 10^{-24}$	1346.4	738.6	7785.7	3916.9

Tabela 10

Koło w kwadracie. Wyniki obliczeń dla  $p = 7$  ( $\alpha = 0,02$ ). Bok kwadratu jest równy  $\sqrt{2}$

r	N	SOOM	Wartości norm macierzy współczynników			
			przy $\epsilon_w^k$ $\  \cdot \ _2$	przy $\epsilon_w^{k-1}$ $\  \cdot \ _2$	przy $\epsilon_w^k$ $\  \cdot \ _M$	przy $\epsilon_w^{k-1}$ $\  \cdot \ _M$
0.707	10	$0.75 \cdot 10^{-17}$	2.009	1.112	17.808	11.15
0.65	10	$0.12 \cdot 10^{-16}$	4.623	2.874	37.605	26.442
0.60	10	$0.53 \cdot 10^{-17}$	10.328	6.986	77.489	58.859
0.55	10	$0.11 \cdot 10^{-16}$	24.885	18.113	172.1	138.94
0.50	10	$0.53 \cdot 10^{-17}$	65.376	50.745	417.69	354.28
0.45	10	$0.53 \cdot 10^{-17}$	190.25	156.19	1127.2	996.3
0.40	10	$0.12 \cdot 10^{-16}$	8825.1	7420.5	44763	39218

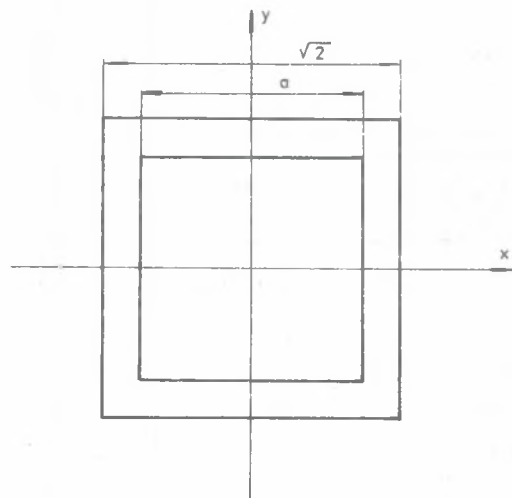
Tablica 11

Koło w kwadracie. Wyniki obliczeń dla  $p = 10$  ( $\tau = 0.01$ ) i dla  $p = 14$  ( $\tau = 0.005$ ). Bok kwadratu jest równy  $\sqrt{2}$

p	r	N	SOOM	Wartości norm macierzy współczynników			
				przy $\epsilon_w^k$       <sub>2</sub>	przy $\epsilon_w^{k-1}$       <sub>2</sub>	przy $\epsilon_w^k$       <sub>M</sub>	przy $\epsilon_w^{k-1}$       <sub>M</sub>
10	0.707	11	$0.68 \cdot 10^{-17}$	4.427	4.205	42.14	43.74
10	0.65	11	$0.11 \cdot 10^{-16}$	11.806	12.702	102.71	121.34
10	0.60	11	$0.84 \cdot 10^{-17}$	30.083	35.434	240.19	309.8
14	0.707	11	$0.48 \cdot 10^{-17}$	10.214	16.335	103.98	175.23
14	0.65	11	$0.96 \cdot 10^{-17}$	30.718	56.431	290.12	566.65

#### 2.4. Kwadrat w kwadracie

Jako  $\partial\Omega$  przyjęto również i w tym przypadku brzeg kwadratu o boku równym  $\sqrt{2}$ , a jako  $\partial\Omega^*$  - brzeg kwadratu leżącego wewnątrz  $\partial\Omega$ , o bokach równo odległych od boków kwadratu  $\Omega$ .



Rys. 4

Fig. 4

Obliczenia przeprowadzono dla  $p = 5, 7, 10$  i  $14$ . Ilość punktów na obu konturach przyjęto równą 24. Ilość funkcji w szeregu opisującym temperaturę wynosiła 21 ( $N = 10$ ) lub 23 ( $N = 11$ ). Wyniki obliczeń przedstawiono w tablicach 12 - 15, w których literą  $a$  oznaczono bok kwadratu  $\Omega^*$ .

W przypadku  $p = 5$  ( $\tau = 0.04$ ) o utracie stabilności obliczeń decyduje rząd wielkości normy  $\max$ , bo nierówność (56) jest spełniona dla wszystkich wartości  $a$ . Ponieważ dla  $a = 0.8$ , norma  $\max$  współczynników przy błędach jest większa od 100, więc przyjmujemy  $a_g = 0.9$ . Stosując to samo kryterium do przypadku  $p = 7$  ( $\tau = 0.02$ ),

znajdujemy  $a_g = 1.0$ . Dla  $p = 10$  ( $\tau = 0.01$ ) o utracie stabilności obliczeń decyduje nierówność (56), która nie jest spełniona dla  $a = 1.16$  (dla normy  $\max$ ). Stąd  $a_g = 1.18$ .

Tablica 12

Kwadrat w kwadracie. Wyniki obliczeń dla  $p = 5$  ( $\gamma = 0.04$ ). Bok kwadratu  $\Omega$  jest równy  $\sqrt{2}$

a	N	SOOM	Wartości norm macierzy współczynników			
			przy $\epsilon_w^k$ $\  \ _2$	przy $\epsilon_w^{k-1}$ $\  \ _2$	przy $\epsilon_w^k$ $\  \ _M$	przy $\epsilon_w^{k-1}$ $\  \ _M$
1.4	10	$0.55 \cdot 10^{-12}$	0.205	0.0035	1.091	0.015
1.3	10	$0.22 \cdot 10^{-12}$	0.387	0.047	2.077	0.211
1.2	10	$0.66 \cdot 10^{-12}$	0.922	0.2	4.206	1.028
1.1	10	$0.98 \cdot 10^{-12}$	2.482	0.719	11.393	3.767
1.0	10	$0.16 \cdot 10^{-11}$	7.171	2.479	32.987	12.638
0.9	10	$0.12 \cdot 10^{-10}$	22.3	8.704	99.0	42.233
0.8	10	$0.73 \cdot 10^{-11}$	76.526	32.632	322.62	148.97
0.7	10	$0.14 \cdot 10^{-10}$	301.03	137.06	1242	595.4
0.6	11	$0.35 \cdot 10^{-8}$	7948	3521	31745	14473
0.5	11	$0.29 \cdot 10^{-7}$	62514	28785	247123	114613

Tablica 13

Kwadrat w kwadracie. Wyniki obliczeń dla  $p = 7$  ( $\gamma = 0.02$ ). Bok kwadratu  $\Omega$  jest równy  $\sqrt{2}$

a	N	SOOM	Wartości norm macierzy współczynników			
			przy $\epsilon_w^k$ $\  \ _2$	przy $\epsilon_w^{k-1}$ $\  \ _2$	przy $\epsilon_w^k$ $\  \ _M$	przy $\epsilon_w^{k-1}$ $\  \ _M$
1.4	10	$0.95 \cdot 10^{-13}$	0.207	0.0063	1.104	0.025
1.3	10	$0.18 \cdot 10^{-12}$	0.429	0.099	2.271	0.466
1.2	10	$0.46 \cdot 10^{-13}$	1.12	0.459	4.928	2.391
1.1	10	$0.12 \cdot 10^{-12}$	3.235	1.173	15.479	9.277
1.0	10	$0.25 \cdot 10^{-12}$	9.869	6.412	47.067	32.858
0.9	10	$10^{-10}$	32.042	23.537	147.22	115.27
0.8	10	$0.16 \cdot 10^{-11}$	113.88	91.581	496.36	423.61
0.7	10	$0.69 \cdot 10^{-12}$	460.72	396.63	1948.5	1746.7
0.6	11	$0.30 \cdot 10^{-9}$	12064	10120	48777	41984
0.5	11	$0.13 \cdot 10^{-8}$	96488	84192	382681	335787

Tablica 14

Kwadrat w kwadracie. Wyniki obliczeń dla  $p = 10$  ( $Z = 0,01$ ). Bok kwadratu  $\Omega$  jest równy  $\sqrt{2}$

a	N	SMM	Wartości norm macierzy współczynników			
			przy $\epsilon_w^k$ $\  \cdot \ _2$	przy $\epsilon_w^{k-1}$ $\  \cdot \ _2$	przy $\epsilon_M^k$ $\  \cdot \ _M$	przy $\epsilon_M^{k-1}$ $\  \cdot \ _M$
1,1	10	$0,32 \cdot 10^{-13}$	0,211	0,012	1,128	0,456
1,3	10	$0,15 \cdot 10^{-13}$	0,529	0,248	2,685	1,229
1,4	10	$2,69 \cdot 10^{-13}$	1,060	1,33	7,923	0,97
1,15	11	$0,96 \cdot 10^{-12}$	4,119	1,716	18,852	15,371
1,16	11	$0,15 \cdot 10^{-11}$	5,419	5,088	24,99	25,103
1,17	11	$2,50 \cdot 10^{-11}$	5,525	5,718	27,845	30,033
1,19	11	$0,70 \cdot 10^{-13}$	18,745	22,943	93,32	117,73
0,9	10	$0,25 \cdot 10^{-12}$	66,358	91,779	317,96	453,3

Tablica 15

Kwadrat w kwadracie. Wyniki obliczeń dla  $p = 14$  ( $Z = 0,005$ ). Bok kwadratu  $\Omega$  jest równy  $\sqrt{2}$

a	N	SMM	Wartości norm macierzy współczynników			
			przy $\epsilon_w^k$ $\  \cdot \ _2$	przy $\epsilon_w^{k-1}$ $\  \cdot \ _2$	przy $\epsilon_M^k$ $\  \cdot \ _M$	przy $\epsilon_M^{k-1}$ $\  \cdot \ _M$
1,1	10	$0,74 \cdot 10^{-13}$	0,218	0,029	1,167	0,139
1,3	10	$0,11 \cdot 10^{-12}$	0,735	0,778	3,49	3,795
1,2	10	$0,79 \cdot 10^{-13}$	3,41	5,01	17,297	25,374
1,1	10	$0,17 \cdot 10^{-13}$	13,96	23,4	72,22	129,29
1,0	10	$0,57 \cdot 10^{-13}$	56,02	118,66	284,44	596,41

Ponieważ jednak współczynniki przy błędach są stosunkowo niewielkie jeszcze dla  $a = 1,1$ , więc można się spodziewać stabilnych wyników obliczeń nawet dla takiej wartości  $a$ , o ile dane wejściowe nie będą obciążone zbyt dużym błędem. Wreszcie dla  $p = 14$  ( $Z = 0,005$ ) nierówność (56) nie jest spełniona już dla  $a = 1,3$ , lecz ponieważ dopiero dla  $a = 1,2$  różnica między normami jest znaczna, więc przyjmujemy  $a = 1,3$ , tym bardziej że wartości norm  $\max$  dla  $a = 1,3$  są małe.

Podobne wyniki otrzymano w przypadku badania stabilności przybliżonych przekształceń jednowymiarowych  $20$  w warstwie płaskiej [2,3], cytowanych już

w części 2.1 pracy. Odnosząc obliczone wartości boku a kwadratu  $\Omega^*$  do jedności otrzymamy bowiem: dla  $\tau = 0.04$  a  $> 0.57$ , dla  $\tau = 0.02$  a  $> 0.71$ , dla  $\tau = 0.1$  a  $> 0.84$ , a dla  $\tau = 0.005$  a  $> 0.93$ . Wyniki otrzymane dla  $\tau = 0.04$  i  $0.02$  są bardzo bliskie otrzymanym dla wspomnianego jednowymiarowego ZO. Wyniki dla  $\tau = 0.01$  i  $0.005$  są nieco wyższe od otrzymanych dla zagadnienia jednowymiarowego (por. część 2.1 pracy).

### 3. UWAGI KOŃCOWE

Otrzymane wyniki pozwoliły ocenić, przy jakich wzajemnych położeniach obszarów  $\Omega$  i  $\Omega^*$  można spodziewać się utraty stabilności obliczeń przy numerycznym wyznaczaniu przybliżonego rozwiązania dwuwymiarowego ZO. Na utratę stabilności obliczeń mają wpływ następujące wielkości:

- krok czasowy  $\tau$ ,
- wzajemne położenie obszarów  $\Omega$  i  $\Omega^*$ ,
- uwarunkowanie zagadnienia, którego wskaźnikiem jest  $SOOM$ ,
- wielkość normy max macierzy, stojących przy macierzach błędów.

Wyniki umieszczone w tablicach dość dobrze ilustrują, kiedy przy rozważanym ZO można spodziewać się utraty stabilności obliczeń. Co prawda przy danych dokładnych lub obciążonych bardzo niewielkim błędem może się zdarzyć, że nawet gdy z badania stabilności obliczeń wynika możliwość jej utraty, to obliczenia mogą być stabilne. Podobna sytuacja miała miejsce i w przypadku jednowymiarowych ZO [2]. Tym niemniej, w przypadkach gdy nierówność (56) nie będzie spełniona, a normy macierzy będą duże, prawdopodobieństwo utraty stabilności obliczeń jest znacznie większe niż wtedy, gdy nierówność ta jest spełniona, a normy macierzy małe.

Warto podkreślić, że badanie stabilności obliczeń zrealizowano na komputerze IBM XT, a czas obliczeń był rzędu 1 minuty na jeden zestaw danych.

### LITERATURA

- [1] Sypniewska-Kamińska G. i Kamiński H.: Uwagi o stabilności rozwiązań dwuwymiarowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. Część I: Kryterium stabilności. ZN Pol.Śl. Energetyka z.111.
- [2] Grysa K.: O ścisłych i przybliżonych metodach rozwiązywania zagadnień odwrotnych pól temperatur. Politechnika Poznańska, Rozprawy, Poznań 1988.
- [3] Grysa K. i Kamiński H.: O przybliżonym rozwiązywaniu jednowymiarowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. MTiS, 24, 1/2, 1986.

ЗАМЕТКИ О УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДВУХМЕРНЫХ  
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

ЧАСТЬ II: ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Р е з ю м е

Проведены численные исследования устойчивости решений обратных задач теплопроводности для различных форм контура. Полученные результаты подтверждают пригодность сформулированного в работе [1] критерия устойчивости. Этот критерий сформулирован для случая, когда количество точек на внутреннем контуре может отличаться от количества точек на крае рассматриваемой области.

REMARKS ON THE STABILITY OF SOLUTIONS FOR 2D  
INVERSE HEAT TRANSFER PROBLEMS.

PART II: NUMERICAL ANALYSIS

S u m m a r y

Numerical analysis of stability of solutions for inverse problems for different shapes of contour is performed. Results obtained confirm applicability of the criterion formulated in the first part. This criterion is obligatory if the number of points in the internal contour differs from the number of points on the boundary of the area.