

Jerzy BŁAŻEJOWSKI

Institut Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów
Politechnika Wrocławska

CYFROWY ALGORYTM STEROWANIA OPTYMALNO-CZASOWEGO ROZRUCHEM TURBINY*

Streszczenia. Przedstawiono cyfrowy algorytm sterowania optymalno-czasowego rozruchem turbiny z uwzględnieniem naprężeń termicznych wirnika. Algorytm ten, pracując w układzie zamkniętym, wykorzystuje informację pomiarową z sondy temperaturowej oraz matematyczny model procesu nagrzewania. Opracowano i sprawdzono metodę korekcji własności dynamicznych czujników i układów wykonawczych. Potwierdzono poprawność działania algorytmu na drodze obliczeniowej.

1. WSTĘP

Ze względów ekonomicznych przejściowe stany pracy turbozespołu powinny być jak najkrótsze. Zbyt raptowne zmiany parametrów pary przed turbiną są jednak niewskazane, gdyż mogłyby spowodować przekroczenie dopuszczalnych wartości naprężeń termicznych w elementach grubościennych. Przy sterowaniu ręcznym operator bloku godzi te sprzeczne cele przez zachowanie dopuszczalnych szybkości wzrostu (obniżenia) mocy lub przy rozruchu, przestrzegając grafiki rozruchowe. Przy bardziej zaawansowanych układach kontroli operator ma do dyspozycji układy diagnozujące stan termiczny elementów, a także wizualizujące aktualne naprężenia termiczne lub ich zapasy. Na przykład układ TURBOSTER [2] (dla turbiny 18K360) pracuje w systemie zamkniętym i realizuje po akceptacji operatora programy: nabór obrotów, nabór obciążenia itd. Układ ten wykorzystuje w sprzężeniu zwrotnym sygnały uzyskane z dwupunktowych sond temperaturowych produkowanych na licencji firmy BBC. Układ ten należy do najbardziej nowoczesnych w krajowej energetyce.

W ostatnich latach następuje gwałtowny rozwój komputerowych układów sterowania. Układy te w porównaniu z układami analogowymi mają większe możliwości realizacji skomplikowanych algorytmów sterowania. Prezentowana praca zawiera algorytm, który może być stosowany przez komputer rozruchowy oraz wyniki symulacji jego działania.

*) Praca wykonana w ramach CPBP nr 02.18, kierunek 2, zadanie 2.3.4.6

Komputer rozruchowy korzystając z sygnałów mierzalnych wielkości fizycznych, jak np.: parametry pary, moc, prędkość obrotowa itp. oddziałuje na istniejące układy regulacji przez generowanie sygnałów wartości zadanych lub bezpośrednio na organy wykonawcze. Układ sterowania powinien ponadto działać w sprzężeniu zwrotnym, aby niwelować wpływ zakłóceń w torach pomiarowych i zmniejszyć wpływ niedoskonałości modelu na wyniki sterowania.

W przypadku kontroli naprężeń w elementach nieruchomych, jak korpus turbiny czy korpusy zaworów odcinających możliwość bezpośredniego pomiaru temperatury metalu i zamknięcie sprzężenia zwrotnego nie nastroją trudności. Kontrola naprężeń w wirniku zmusza natomiast do stosowania sterowania z modelem. Jest to przedmiotem niniejszej pracy. Stosowane są dwa rozwiązania: z modelem fizycznym (sonda temperaturowa) lub matematycznym (analogowym lub cyfrowym). Na model fizyczny oddziałują wymuszenia rzeczywiste, natomiast wejściami modelu matematycznego są sygnały od wielkości mierzonych. Informację uzyskaną z modelu uważa się za odwzorowanie stanu obiektu. Strukturę układu sterowania pokazano na rys. 1. Opracowany algorytm sterowania optymalnego wykorzystuje rozkład temperatury wzdłuż promienia wybranego przekroju wirnika. Konieczne jest więc odtworzenie tego rozkładu obliczeniami numerycznymi, jeśli model dostarczy niepełnej informacji.

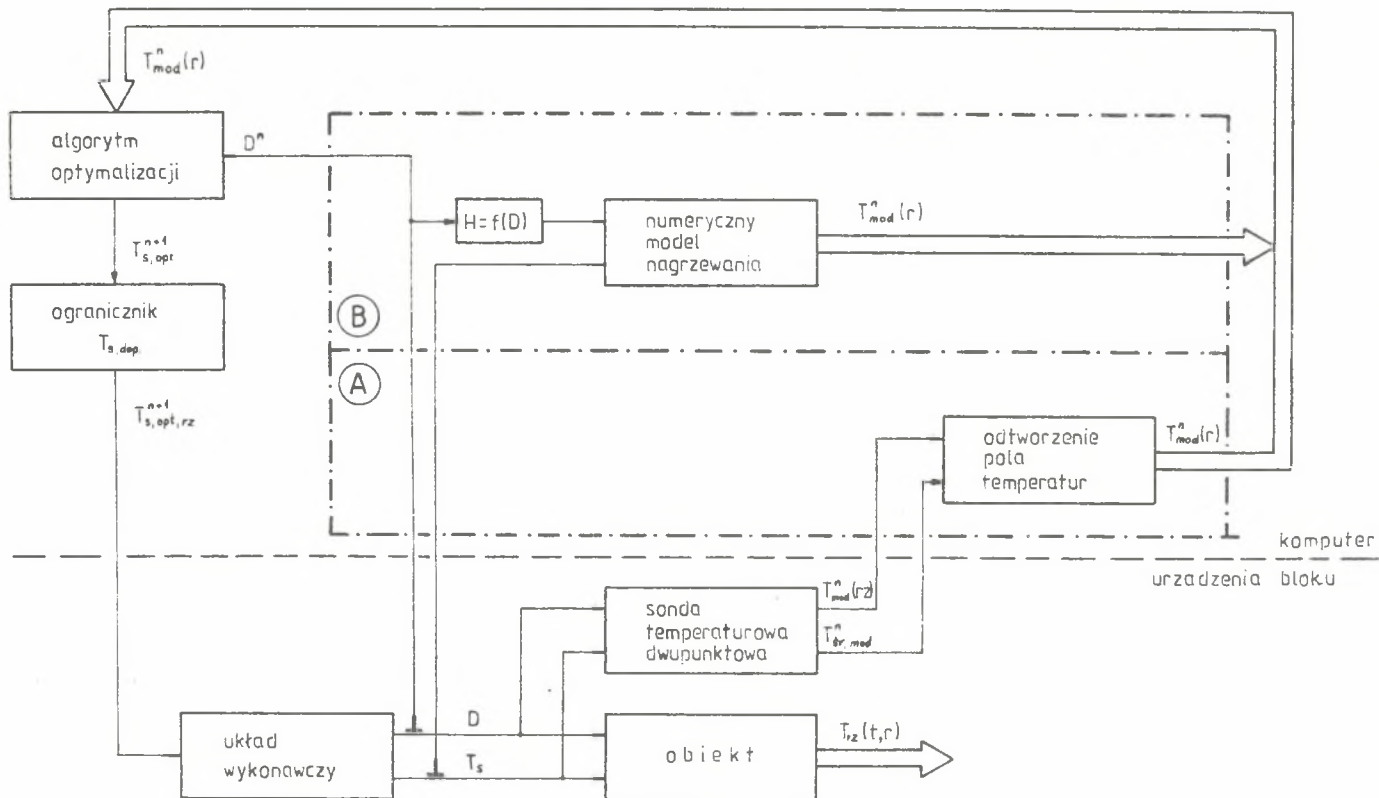
2. ALGORYTM STEROWANIA OPTYMALNO-CZASOWEGO

Algorytm pracujący w czasie rzeczywistym musi bazować na modelu nie zbyt skomplikowanym. Ze względu na zbyt małą szybkość działania współczesnych komputerów nie wchodzi w rachubę stosowanie rozbudowanego modelu uwzględniającego geometrię elementu używającego np. metodę elementów skończonych.

Założono ponadto:

- znajomość położenia poprzecznego przekroju wirnika, w którym występują niebezpieczne naprężenia,
- znajomość parametrów geometrycznych i własności termofizycznych materiału,
- znajomość uproszczonej formuły uzależniającej średni współczynnik wnikania ciepła od pary do metalu wirnika dla przekroju, którego temperatur są modelowane. W pracy zakłada się stosowanie formuły $H=f(D)$, lecz możliwe jest wykorzystanie zależności $H=f(p, T_g)$ lub podobnych,
- znajomość zależności dopuszczalnych wartości naprężeń od temperatury metalu.

Klasyczne sterowanie optymalno-czasowe [4] bazujące na pojęciu przestrzeni stanu, sterowań oraz całkowym (mającym globalny charakter) kryterium



Rys. 1. Schemat ideowy układu sterowania optymalno-czasowego ze sprzężeniem zwrotnym

Fig. 1. Block diagram of time-optimal control system with feedback

jakości regulacji w przypadku turbiny parowej nastęrcza znacznych trudności [1]. Z tych względów użyto kryterium równoważonego, a mianowicie maksymalizacji strumienia ciepła doprowadzanego w każdej chwili do wirnika [6].

Ostatecznie zadanie sterowania sformułowano następująco:

Należy wyznaczyć optymalny strumień ciepła $q_{opt}(t)$ przekazywany od pary do wirnika oraz odpowiadającą mu trajektorię obiektu $T(t,r)$ opisanego równaniami (1) - (4), tak aby spełnione były ograniczenia sterowania (5) oraz trajektorii (6).

$$C [T(t,r)] \quad q \quad \frac{\partial T(t,r)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (1)$$

$$q(t) = \lambda(T) \left. \frac{\partial T(t,r)}{\partial r} \right|_{r=r_z} \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T(t,r)}{\partial r} \right|_{r=r_w} = 0 \quad (3)$$

$$T(0,r) = T_o(r) \quad (4)$$

$$q(t) \leq q_{max}(t) \quad (5)$$

$$\frac{E(T) \alpha(T)}{1-\nu} \left[T_{sr}(t) - T(t,r_z) \right] \leq \sigma_{t,dop} [T(t,r_z)] \quad (6)$$

gdzie:

$$T_{sr}(t) = \frac{2}{r_z^2 - r_w^2} \int_{r_w}^{r_z} rT(r)dr$$

Ograniczenie (5) wynika z zależności (7) i (8) strumienia ciepła od temperatury i strumienia pary oraz istnienia ograniczeń wartości tych wielkości.

$$q = H [T_s(t) - T(t,r_z)] \quad (7)$$

$$H = f(D) \quad (8)$$

Sterowanie strumieniem ciepła może się więc odbywać poprzez zmiany temperatury pary lub strumienia pary. W pracy przyjęto, że strumień D zmienia się w sposób niezależny od sterowania temperaturą.

Rozwiązanie wyżej postawionego problemu uzyskano w kilku etapach.

I. Z równań (1), (3) i (6) po aproksymacji różnicowej pochodnych czasowych uzyskuje się (9) - (11).

$$\frac{c [T^n(r)] q}{\Delta t} = T^{n+1}(r) = \frac{1}{1} \frac{d}{dr} \left[\lambda \left\{ T^n(r) \right\} r \frac{dT^{n+1}(r)}{dr} \right] + \frac{cq}{\Delta T} T^n(r) \quad (9)$$

$$\frac{dT^{n+1}(r)}{dt} = 0 \quad \left| \quad r=r_w \quad (10)$$

$$\frac{E [T^n(r_z)] \alpha [T^n(r_z)]}{1 - \nu} \left[T_{sr}^{n+1} - T^{n+1}(r_z) \right] = \delta_{t, dop} [T^{n+1}(r_z)] \quad (11)$$

dla $n=0, 1, 2, \dots$

$$T^n(r) = \begin{cases} T_0 & \text{dla } n=0 \\ T_{mod}^n(r) & \text{dla } n > 0 \end{cases} \quad (12)$$

Aby uniknąć obliczeń iteracyjnych, własności termofizyczne materiału obliczano na podstawie znanego rozkładu temperatury.

Sprzężenia zwrotne eliminujące niedoskonałą realizację techniczną sterowania zapewnia równanie (12). Wykorzystuje ono odtworzony z informacji pomiarowej modelowy rozkład temperatury metalu w chwili n .

W wyniku rozwiązania zadania (9) - (12) uzyskuje się rozkład temperatury, jaki powinien występować w metalu w chwili $t + \Delta t$, aby zapewnić równość naprężeń rzeczywistych z dopuszczalnymi.

II. Z warunku (2) przekształconego w (13) uzyskuje się optymalny strumień ciepła.

$$q_{opt}^{n+1} = \lambda [T^{n+1}(r_z)] \frac{dT^{n+1}(r_z)}{dr} \quad (13)$$

III. Wyznaczenie sterowania ze strumienia ciepła odbywa się z wykorzystaniem (7) i (8).

$$T_{s,opt}^{n+1} = \frac{q_{opt}^{n+1}}{f(D^n)} + T^{n+1}(r_z) \quad (14)$$

IV. Jeśli uzyskane optymalne sterowanie przekracza wartość dopuszczalną, to stosując ograniczenie, można je zredukować zgodnie z (15).

$$T_{s,opt,rz}^{n+1} = \begin{cases} T_{s,opt}^{n+1} & \text{jeśli } T_{s,opt}^{n+1} < T_{s,max} \\ T_{s,max} & \text{jeśli } T_{s,opt}^{n+1} \geq T_{s,max} \end{cases} \quad (15)$$

Równania (9) - (12) opisują zadanie przewodnictwa z nietypowym warunkiem brzegowym (11). W rozwiązaniu zastosowano dyskretyzację przestrzenną na równomiernej siatce różnicowej ($r=r_w + (i-1)\Delta r$; $i=1, \dots, IR$). Wobec tego $T(r_z) = T_{IR}$. Założono, że zależność dopuszczalnych naprężeń od temperatury jest liniowa (16).

$$\sigma_{t,dop}(T) = \beta + \gamma T \quad (16)$$

β, γ - stałe współczynniki

Warunek (11) można więc przedstawić w postaci (17).

$$T_{sr}^{n+1} + \mu T_{IR}^{n+1} = K \quad (17)$$

$$K = \frac{\beta}{\varphi}$$

$$\mu = -1 - \frac{\gamma}{\varphi}$$

$$\varphi = \frac{E(T_{IR}^n) \alpha [T_{IR}^n]}{1 - \nu}$$

Temperatura średniocalkowa obliczana jest numerycznie wg wzoru (18).

$$T_{sr} = \frac{2}{r_z^2 - r_w^2} \sum_{l=1}^{IR} w_l T_l \quad (18)$$

gdzie współczynniki w_l są wagami zależnymi od metody całkowania pomnożonymi przez współrzędne r_l węzłów siatki przestrzennej.

Z drugiej strony dzięki wykorzystaniu algorytmu Gaussa [3], temperaturę T_1 wyrazić można przez temperaturę zewnętrznego punktu T_{IR} wzorem (19).

$$T_1 = T_{IR} a_k + b_k \quad (19)$$

$$a_k = \prod_{i=1}^k E_{IR-1}$$

$$b_k = \sum_{i=1}^k \left[\prod_{j=i+1}^k E_{IR-j} \right] \cdot F_{IR-i}$$

$$k = IR - 1$$

Wartości E_{IR-i} , F_{IR-i} dla $i=1, \dots, k$ są współczynnikami przegania-
nia znanymi dzięki warunkowi brzegowemu (3).

Po podstawieniu (19) do (18) uzyskuje się zależność (20).

$$T_{sr} = T_{IR} s_1 + s_2 \quad (20)$$

$$s_1 = \frac{2}{r_z^2 - r_w^2} \left[\sum_{i=1}^{IR-1} w_i a_{IR-1} + w_{IR} \right]$$

$$s_2 = \frac{2}{r_z^2 - r_w^2} \sum_{i=1}^{IR-1} w_i b_{IR-1}$$

a po wstawieniu do (17) - zależność (21) stanowiącą prawy warunek brze-
gowy algorytmu eliminacji Gaussa umożliwiającą

$$T_{IR}^{n+1} = \frac{K - s_2}{s_1 + \mu} \quad (21)$$

wyznaczenie interesującego rozkładu T_i^{n+1} , $i=1, \dots, IR$.

3. UWZGLĘDNIENIE DYNAMIKI CZŁONÓW POMIAROWYCH I WYKONAWCZYCH

Algorytm optymalizacyjny uwzględnia informację pomiarową uzyskaną
z czujników i przetworników. Elementy te wprowadzają inercję, co powoduje,
że zmierzone wartości różnią się w stanach dynamicznych od rzeczywistych.
Jeśli równanie opisujące dynamikę kanału pomiarowego (czujnik + przetwor-
nik) ma postać (22)

$$T \frac{dy_p(t)}{dt} + y_p(t) = ky_{rz}(t), \quad (22)$$

$$y_p(0) = y_{p,0}$$

to wprowadzenie korekcji numerycznej wg wzoru (23) pozwala na odtworzenie
wielkości mierzonej znacznie dokładniej.

$$y_p^n = \begin{cases} y_{p,0} & \text{dla } n=0 \\ \frac{1}{k} \left[\frac{T}{\Delta t} + 1 \right] y_p^1 - \frac{T}{k \Delta t} y_{p,0} & \text{dla } n=1 \\ Ay_p^n + By_p^{n-1} + Cy_p^{n-2} & \text{dla } n=2,3,\dots \end{cases} \quad (23)$$

$$A = \frac{1}{k} \left[1 + \frac{2T}{\Delta t} - \frac{T}{2\Delta t} \right]$$

$$B = -\frac{2T}{k \Delta t}$$

$$C = \frac{T}{2k \Delta t}$$

Rysunek 2 obrazuje efekty korekcji pomiaru sygnału liniowo narastającego $y=t$ mierzzonego z krokiem dyskretyzacji 60 s i 30 s czujnikiem inercyjnym o stałej czasowej $T = 60$ s.

Efekty korekcji uwidaczniają się już po wykorzystaniu przez algorytm drugiej zmierzonej wartości. Wartości sygnału skorygowanego zbiegają się z sygnałem odtwarzanym tym szybciej, im krok dyskretyzacji jest krótszy. Należy więc starać się zwiększać częstotliwość pomiarów.

$$\text{Błąd względny } \varepsilon = \frac{y_{p,rz}^n - y_p^n}{y_{p,rz}^n} 100\% \text{ dla trzeciego punktu pomiarowego}$$

jest już mniejszy od 2%. Przy odtwarzaniu sygnału skokowego korekcja działa równie skutecznie.

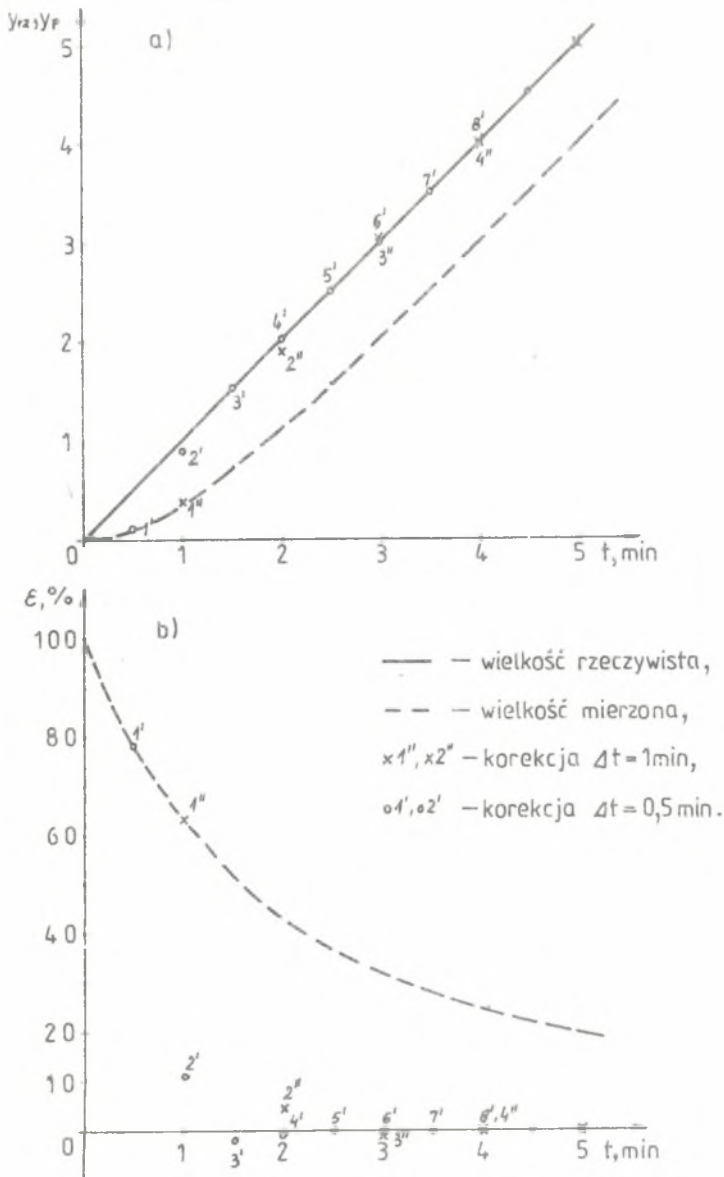
Wyznaczone sterowanie optymalne (rys. 1) po przejściu przez ogranicznik traktowane jest jako wartość zadana układu regulacji temperatury pary (układu wykonawczego). Dynamika tego układu powoduje, że wartości sterowań T_s oddziałujących na obiekt, różnią się od wartości wyznaczonych w procesie optymalizacji $T_{s,opt,rz}$.

Układ regulacji realizuje zadanie nadążania za sygnałem optymalnym. Znajomość własności dynamicznych układu wykonawczego pozwala skorygować sygnał optymalny tak, aby zniwelować inercję nadążania.

Uwzględniając opóźnienie transportowe przyjęto własności dynamiczne układu wykonawczego w postaci modelu Rotača [5], co jest równoznaczne z równaniem (24).

$$\frac{dT_s(t)}{dt} = -\frac{1}{T_w} T_s(t) + \frac{k_w}{T_w} T_{s,opt,rz} (t-t_{op}) \text{ dla } t > t_{op} \quad (24)$$

$$T_s(t) = T_{s,0} \text{ dla } t \leq t_{op}$$



Rys. 2. Odtworzenie sygnału liniowo-narastającego zmierzonego czujnikiem inercyjnym

a) sygnał rzeczywisty liniowo-narastający, zmierzony czujnikiem inercyjnym, odtworzony, b) błąd względny odtworzenia

Fig. 2. Reconstruction of the linear signal measured by the inertial sensor

a) real linear signal, measured by the inertial sensor, reconstructed, b) relation error of the reconstruction

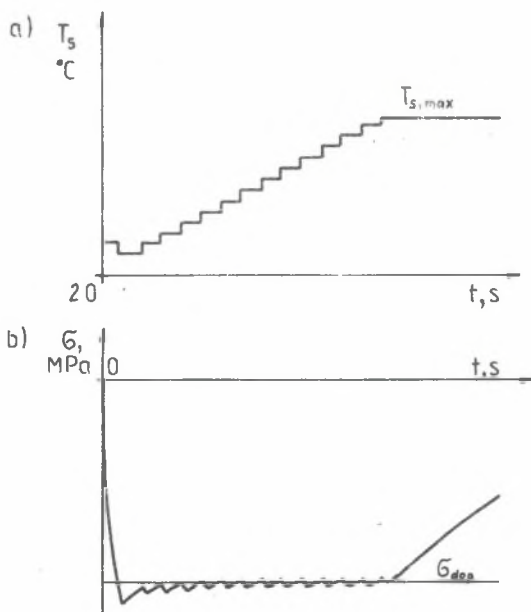
Algorytm optymalizacji uzupełniono o korekcję sygnału wyjściowego wg wzoru (23) z odpowiednim podstawieniem argumentów i parametrów opisujących dynamikę. Algorytm (23) zmniejsza wpływ inercji, lecz nie daje możliwości wyeliminowania pogorszenia jakości sterowania spowodowanego istnieniem opóźnienia transportowego.

4. WYNIKI SYMULACJI

Układ sterowania z rys. 1 (wersja B) symulowano komputerowo. Obiekt opisany był równaniem przewodnictwa (1) z warunkami brzegowymi (3), (25) oraz warunkiem początkowym (4).

$$-\lambda \frac{\partial T(t,r)}{\partial r} = H(D) [T(t,r) - T_s(t)] \Big|_{r=r_z} \quad (25)$$

Symulacja nagrzewania wirnika prowadzona była na dziesięciokrotnie gęstszej siatce czasowej i czterokrotnie gęstszej siatce przestrzennej (w stosunku do okresu dyskretyzacji pomiarów i generacji sterowań).

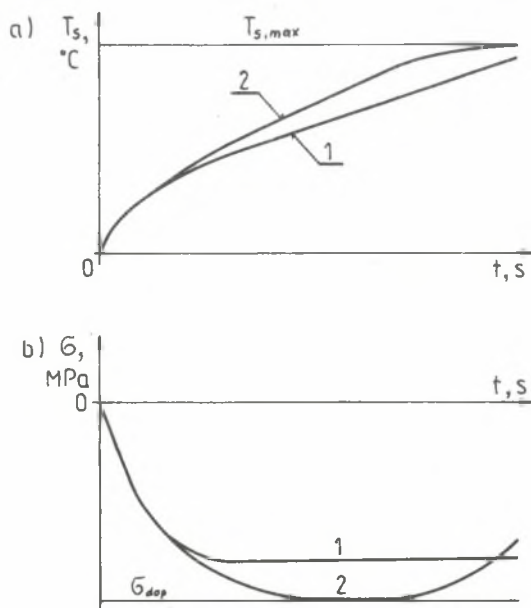


Rys. 3. Optymalny przebieg temperatury pary (a) i naprężeń (b) przy idealnym układzie wykonawczym

Fig. 3. Optimal run of the steam temperature (a) and stresses (b) in the case of ideal actuators

Rysunek 3 pokazuje kształt sygnału sterującego i naprężeń termicznych przy idealnym układzie wykonawczym. Po początkowym skokowym wzroście temperatury pary następuje obniżenie, a następnie liniowy narost do momentu osiągnięcia wartości maksymalnej. W pierwszym okresie nagrzewania naprężenia rosną, przekraczając wartość dopuszczalną. Następnie oscylują wokół tej wartości. Ograniczenie strumienia ciepła wnikającego do wirnika spowodowane osiągnięciem przez sterowanie wartości maksymalnej powoduje obniżenie naprężeń termicznych. Wartość początkowego przeregulowania i amplitudy oscylacji zależy od częstotliwości generowania sterowań. Długość przedziału czasu między kolejnymi zmianami sterowania musi być nie krótsza od czasu maszynowego (rzeczywistego czasu obliczeń), obejmującego pomiar, odtworzenie rozkładu temperatury i wyznaczenie wartości optymalnej.

Wyniki symulacji z uwzględnieniem inercji i opóźnienia układu wykonawczego przedstawiono na rys. 4. Brak idealnego nadążania za wiodącym sygnałem optymalnym wywołuje zbyt małe wartości sterowań (krzywa 1 rys. 4a). Naprężenia nie osiągają założonych dopuszczalnych wartości (krzywa 1 rys. 4b). Nie jest to groźne, przedłuża jednak czas manewru. Wprowadzenie korekcji dynamiki członów pomiarowych i wykonawczych (krzywe 2) powoduje, iż nagrzewanie odbywa się szybciej, a naprężenia osiągają wartości dopuszczalne.



Rys. 4. Optymalny przebieg temperatury pary (a) i naprężeń (b) przy uwzględnianiu dynamiki układu wykonawczego

1 - bez korekcji, 2 - z korekcją

Fig. 4. Optimal run of the steam temperature (a) and stresses (b) in the case of ideal actuators

1 - without correction, 2 - with correction

Na krzywych z rys. 4b nie widać wpływu nieciągłości sygnału ze sterownika (rys. 3). Wynika stąd, że krok dyskretyzacji cyfrowego układu sterowania współpracującego z układem wykonawczym zawierającym inercję może być większy niż przy idealnym układzie wykonawczym.

5. WNIOSKI

Proponowana metoda wyznaczania sterowań optymalno-czasowych z uwzględnieniem ograniczeń umożliwia sterowanie nagrzewaniem w układzie ze sprzężeniem zwrotnym. Ilość obliczeń prowadzących do wyznaczenia sterowania w danej chwili czasowej jest nie większa niż przy dwukrotnym rozwiązaniu równania przewodnictwa.

Uzyskana jakość sterowania zależy od okresu generowania sterowań. Zagęszczenie różnicowej siatki przestrzennej powoduje wydłużenie czasu obliczeń (pogarsza jakość sterowania), lecz polepsza opis zjawiska nagrzewania (polepszenie jakości sterowania). Konieczny kompromis należy rozstrzygnąć zależnie od możliwości obliczeniowych używanego sprzętu komputerowego. Skrócenie czasu obliczeń jest szczególnie ważne w przypadku, gdy charakterystyka przetwarzania urządzeń wykonawczych jest zbliżona do bezinercyjnej.

W przypadku urządzeń wykonawczych zawierających inercje można zwiększyć wartości dopuszczalnych naprężeń termicznych, gdyż i tak nie zostaną one osiągnięte (rys. 4b krzywa 1), lub zastosować w algorytmie optymalizacji korekcyjną. Proponowany algorytm korekcyjny daje pozytywne wyniki także przy występowaniu opóźnienia transportowego w układzie wykonawczym.

Sterowanie prezentowanej metody daje również możliwość wyznaczania optymalnego strumienia pary jako wielkości sterującej.

OZNACZENIA

- c - ciepło właściwe, $\text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{deg})$;
- D - strumień pary, kg ;
- E - moduł Younga, MPa ;
- H - współczynnik wnikania ciepła, $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{deg})$;
- IR - liczba punktów przestrzennej siatki różnicowej (wzdłuż osi r);
- q - strumień ciepła, W/m^2 ;
- r - promień, m ;
- t - czas, s ;
- T - temperatura, $^{\circ}\text{C}$; stała czasowa, s ;
- α - współczynnik termicznej rozszerzalności liniowej, $1/\text{deg}$;
- Δr - krok dyskretyzacji współrzędnej geometrycznej, m ;
- Δt - krok dyskretyzacji czasu, s ;

- λ - współczynnik przewodzenia ciepła, $W/(m \cdot deg)$;
 ν - liczba Poissona;
 ρ - gęstość, kg/m^3 ;
 σ - naprężenia, MPa;

INDEKSY

- dop - dopuszczalne,
max - maksymalne,
mod - modelu,
op - opóźnienia
opt - optymalne,
p - pomiarowe,
r - promieniowe,
rz - rzeczywiste,
s - czynnika roboczego (pary),
śr - średniocalkowe,
z - zewnętrzne,
0 - początkowe.

LITERATURA

- [1] Błazejowski J.: Sterowanie rozruchem turbin parowych z uwzględnieniem naprężeń termicznych, Praca doktorska I-20, Politechnika Wroclawska, 1988 r.
- [2] Dutko J., Siudak M: DTR Układ regulacji turbiny, UNIMAT Zakład Konstrukcji i Elementów Automatyki IASE, Wrocław 1983.
- [3] Godunov S.K., Rjabenkiij V.S.: Raznostnye schemy, Moskva 1977.
- [4] Kaczorek T.: Teoria sterowania, PWN, Warszawa 1981.
- [5] Rotac V.Ja.: Roscet dinamiki promyslennych avtomaticheskich sitem regulirovanija, Energija, Moskva 1973.
- [6] Vigal V.M., Kostenko A.V.: Optimalnyj nagrev tvergovo tela pri ogranichenii na perepag temperatur, Fizyka i Chemija Obrabotki Materialov 1973/3.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Gerard Kosman

ЦИФРОВОЙ АЛГОРИТМ ВРЕМЕННООПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ ПУСКОМ ТУРБИНЫ

Р е з ю м е

В статье представлен временнооптимальный алгоритм управления пуском турбины с учетом термических напряжений ротора. Этот алгоритм использует измерительную информацию от температурного зонда и математическую модель процесса нагрева. Разработан и проверен метод коррекции динамических свойств датчиков и исполнительных устройств. Корректность алгоритма подтверждена путем численных экспериментов.

DIGITAL ALGORITHM OF TIME-OPTIMAL
CONTROL FOR TURBINE UPROAR

S u m m a r y

Digital time optimal control algorithm for turbine uproar is presented taking into account thermal stresses of the rotor. The algorithm uses measurement information about temperature and mathematical model of the process. A correction method for dynamical properties of sensors and actuators is proposed. The algorithm has been checked by numerical experiments.