ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

Piotr FEDELIŃSKI

METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ANALIZIE DYNAMICZNEJ UKŁADÓW ODKSZTAŁCALNYCH Z PĘKNIĘCIAMI

MECHANIKA
z. 137

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

GLIWICE
2000

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYTY NAUKOWE
Nr 1456

Piotr FEDELIŃSKI

METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ANALIZIE DYNAMICZNEJ UKŁADÓW ODKSZTAŁCALNYCH Z PĘKNIĘCIAMI

GLIWICE 2000

OPINIODAWCY

Prof. dr hab. inż. Jan Awrejcewicz
Prof. dr hab. inż. Bohdan Mochnacki

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY - Prof. dr hab. Zygmunt Kleszczewski
REDAKTOR DZIAŁU - Dr hab. inż. Andrzej Buchacz
Profesor Politechniki Śląskiej
SEKRETARZ REDAKCJI - Mgr Elżbieta Leśko

REDAKCJA
Mgr Roma Łoś

REDAKCJA TECHNICZNA
Alicja Nowacka

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

Publikacja dofinansowana przez Komitet Badań Naukowych
w ramach projektu badawczego Nr 8T11F00316

PL ISSN 0434-0817

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice
tel./fax (0-32) 237 13 81
www.wydawnictwo.polsl.gliwice.pl
wydawnictwo@polsl.gliwice.pl

Nakład 110+83 Ark. wyd. 10 Ark. druk. 8.25 Papier offset. kl. III 70x100, 80g
Oddano do druku 04.05.2000 r. Podpisano do druku 04.05.2000 r. Data ukończ. w maju 2000 r.

Druk i oprawę wykonano w D&D Sp. z o.o., Gliwice, ul. Moniuszki 7

Spis treści

Wykaz podstawowych oznaczeń 9

1 Wstęp 15
1.1. Wprowadzenie . . . 15
1.2. Cel pracy . . . 17
1.3. Przegląd treści pracy . . . 18

2 Metoda elementów brzegowych w analizie statycznej pęknięć 20
2.1. Wprowadzenie . . . 20
2.2. Brzegowe równania całkowe . . . 20
2.3. Metody analizy ciał z pęknięciami . . . 24
2.4. Aproksymacja wielkości brzegowych . . . 25
2.5. Macierzowy układ równań . . . 29
2.6. Obliczanie całek brzegowych . . . 30
2.6.1. Całki hiperosobliwych rozwiązań podstawowych dla zagadnienia dwuwymiarowego . . . 31
2.6.2. Całki hiperosobliwych rozwiązań podstawowych dla zagadnienia trójwymiarowego . . . 32

3 Wprowadzenie do metody elementów brzegowych w analizie dynamicznej pęknięć 34
3.1. Metoda elementów brzegowych w analizie dynamicznej pęknięć . . . 34
3.2. Przemieszczenia i naprężenia w otoczeniu dynamicznie wzrastającego wierzchołka pęknięcia . . . 36
3.3. Całki niezależne od konturu całkowania . . . 38
3.4. Metody numeryczne określania dynamicznych współczynników intensywności naprężeń i kierunku wzrostu pęknięcia . . . 40
3.4.1. Obliczanie DWIN na podstawie rozwarcia wierzchołka pęknięcia . . . 40
3.4.2. Obliczanie DWIN na podstawie całek niezależnych od konturu całkowania . . . 41
3.4.3. Określanie kierunku wzrostu pęknięcia . . . 43

4 Metoda transformacji całkowych 46
4.1. Brzegowe równania całkowe . . . 47
4.2. Numeryczna realizacja metody . . . 48
4.3. Przykłady numeryczne . . . 49

5 Metoda rozwiązań w dziedzinie czasu **55**
5.1. Brzegowe równania całkowe 56
5.2. Numeryczna realizacja metody 57
5.3. Przykłady numeryczne 58

6 Metoda podwójnej zasady wzajemności **63**
6.1. Brzegowe równania całkowe 63
6.2. Numeryczna realizacja metody 64
6.3. Przykłady numeryczne 66

7 Porównanie metod **71**
7.1. Rozwiązania podstawowe i ich całkowanie 71
7.2. Sformułowanie macierzowych równań ruchu 72
7.3. Rozwiązanie układu równań ruchu 72
7.4. Wymagana pamięć, prędkość obliczeń i dokładność 72
7.5. Zastosowania 73
7.6. Przykłady numeryczne 73

8 Dynamiczny wzrost pęknięcia **77**
8.1. Numeryczna realizacja metody 78
8.2. Przykłady numeryczne 79

9 Metoda transformacji całkowych dla zagadnienia trójwymiarowego **84**
9.1. Numeryczna realizacja metody 85
9.2. Przykłady numeryczne 85

10 Przykłady analizy elementów konstrukcyjnych z pęknięciami **91**
10.1. Wprowadzenie 91
10.2. Prostokątny element łączący z dwoma pęknięciami brzegowymi 92
10.3. Korba z dwoma pęknięciami brzegowymi 95
10.4. Podpora z pęknięciem brzegowym 96
10.5. Wirujący krążek z dwoma pęknięciami brzegowymi 99
10.6. Rura grubościenna z pęknięciem 100

11 Uwagi końcowe **102**

Dodatki **105**

A Rozwiązania podstawowe elastostatyki dla zagadnienia dwuwymiarowego **105**

B Rozwiązania podstawowe elastostatyki dla zagadnienia trójwymiarowego **106**

C Transformaty całkowe rozwiązań podstawowych elastodynamiki dla zagadnienia dwuwymiarowego **107**

D Całki względem czasu rozwiązań podstawowych elastodynamiki dla zagadnienia dwuwymiarowego **109**

E Rozwiązania szczególne stosowane w metodzie podwójnej zasady wzajemności dla zagadnienia dwuwymiarowego 112

F Transformaty całkowe rozwiązań podstawowych elastodynamiki dla zagadnienia trójwymiarowego 113

G Całki w sensie wartości głównej 115

H Metoda Durbina numerycznego obliczania transformaty odwrotnej Laplace'a 116

I Metoda Houbolta numerycznego rozwiązywania równania ruchu 117

Literatura 118

Streszczenie 131

Contents

Basic notation 9

1 Introduction 15
1.1. Introductory remarks . . . 15
1.2. Aim of the work . . . 17
1.3. Review of the contents . . . 18

2 The boundary element method in static analysis of cracks 20
2.1. Introduction . . . 20
2.2. Boundary integral equations . . . 20
2.3. Methods of analysis of cracked structures . . . 24
2.4. Approximation of boundary quantities . . . 25
2.5. Matrix system of equations . . . 29
2.6. Computation of boundary integrals . . . 30
2.6.1. Integrals of hipersingular fundamental solutions for two-dimensional problems . . . 31
2.6.2. Integrals of hipersingular fundamental solutions for three-dimensional problems . . . 32

3 Introduction to the boundary element method in dynamic analysis of cracks 34
3.1. Boundary element method in dynamic analysis of cracks . . . 34
3.2. Displacements and stresses at the dynamically growing crack tip . . . 36
3.3. Path-independent integrals . . . 38
3.4. Numerical methods of determining dynamic stress intensity factors and the direction of crack growth . . . 40
3.4.1. Computation of DSIFs using crack opening displacements . . . 40
3.4.2. Computation of DSIFs using path-independent integrals . . . 41
3.4.3. Determination of the direction of crack growth . . . 43

4 Integral transform method 46
4.1. Boundary integral equations . . . 47
4.2. Numerical implementation . . . 48
4.3. Numerical examples . . . 49

5 Time-domain method 55
5.1. Boundary integral equations . . . 56
5.2. Numerical implementation . . . 57

5.3. Numerical examples 58

6 Dual reciprocity method **63**
6.1. Boundary integral equations 63
6.2. Numerical implementation 64
6.3. Numerical examples 66

7 Comparison of the methods **71**
7.1. Fundamental solutions and their integration 71
7.2. Matrix formulation of equations of motion 72
7.3. Solution of the system of equations 72
7.4. Memory requirement, speed and accuracy of computation 72
7.5. Applications 73
7.6. Numerical examples 73

8 Dynamic crack growth **77**
8.1. Numerical implementation 78
8.2. Numerical examples 79

9 Integral transform method for three-dimensional problems **84**
9.1. Numerical implementation 85
9.2. Numerical examples 85

10 Examples of analysis of structures with cracks **91**
10.1. Introduction 91
10.2. Rectangular connecting plate with two edge cracks 92
10.3. Crank with two edge cracks 95
10.4. Support with an edge crack 96
10.5. Rotating disc with two edge cracks 99
10.6. Thick-walled pipe with a crack 100

11 Concluding remarks **102**

Appendices **105**

A Fundamental solutions of elastostatics for two-dimensional problem **105**

B Fundamental solutions of elastostatics for three-dimensional problem **106**

C Integral transform of fundamental solutions of elastodynamics for two-dimensional problem **107**

D Convoluted fundamental solutions of elastodynamics for two-dimensional problem **109**

E Particular solutions in the dual reciprocity method for two-dimensional problem **112**

F Integral transform of fundamental solutions of elastodynamics for three-dimensional problem 113

G Principal-value integrals 115

H Durbin method of numerical inverse Laplace transform 116

I Houbolt method for numerical solution of equation of motion 117

References 118

Summary 131

Wykaz podstawowych oznaczeń

Uwagi ogólne

1. Zastosowano konwencję sumacyjną Einsteina dla powtarzających się indeksów.
2. Pochodną zmiennej względem czasu oznaczono za pomocą kropki powyżej zmiennej, np. $\partial u_i/\partial \tau = \dot{u}_i$; liczba kropek oznacza rząd pochodnej.
3. Pochodną zmiennej względem współrzędnej punktu oznaczono za pomocą przecinka poprzedzającego indeks współrzędnej, np. $\partial u_i/\partial x_j = u_{i,j}$; pochodną zmiennej względem odległości r oznaczono za pomocą przecinka poprzedzającego indeks r, np. $\partial \chi/\partial r = \chi_{,r}$; liczba indeksów r oznacza rząd pochodnej.
4. Transformatę całkową zmiennej lub wielkość zależną od niej oznaczono za pomocą kreski powyżej zmiennej, np. $\bar{U}_{ij}$.
5. Całkę zmiennej względem czasu lub wielkość zależną od niej oznaczono za pomocą tyldy powyżej zmiennej, np. $\tilde{U}_{ij}$.
6. Macierze jednowymiarowe oznaczono małymi pogrubionymi literami, np. $\mathbf{u}$, a macierze dwuwymiarowe dużymi pogrubionymi literami, np. $\mathbf{H}$.

Symbole łacińskie

a - zmienna charakteryzująca długość pęknięcia,
$\mathbf{a}^n$ - macierz zawierająca składowe przyspieszeń w kroku czasowym n,
$\mathbf{A}$ - macierz współczynników przy niewiadomych, utworzona z macierzy $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, po uwzględnieniu warunków brzegowych,
b - część rzeczywista parametru Laplace'a,
$\mathbf{B}$ - macierz utworzona z macierzy $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ po uwzględnieniu warunków brzegowych,
c - prędkość wzrostu pęknięcia,
c_1 - prędkość propagacji fali podłużnej,
c_2 - prędkość propagacji fali poprzecznej,
c_{ij} - stała zależna od położenia punktu kolokacji,
C - stała stosowana do aproksymacji przyspieszeń,
$\mathbf{C}$ - macierz tłumienia układu,
E - moduł Younga,
f^n - funkcja współrzędnych punktu stosowana do aproksymacji przyspieszeń,
$\mathbf{f}$ - macierz wyrazów wolnych,
$\mathbf{f}^n$ - macierz zawierająca składowe sił w kroku czasowym n,
$\mathcal{F}$ - transformata całkowa Fouriera,
$\mathbf{F}$ - macierz funkcji interpolujących,
G - współczynnik prędkości uwalniania energii,
$\mathbf{G}$ - macierz zależna od całek rozwiązań podstawowych U_{ij}, U_{kij}, funkcji kształtu i jakobianów,

$\mathbf{H}$	-	macierz zależna od całek rozwiązań podstawowych T_{ij}, T_{kij}, funkcji kształtu i jakobianów,
I	-	całka hiperosobliwego rozwiązania podstawowego,
$\Im$	-	część urojona liczby zespolonej,
J_k	-	całka niezależna od konturu całkowania,
J^m	-	jakobian przekształcenia z globalnego do lokalnego układu współrzędnych,
K_0, K_1	-	zmodyfikowane funkcje Bessela drugiego rzędu zerowego i pierwszego stopnia,
K_o	-	współczynnik intensywności naprężeń używany jako współczynnik normalizacyjny,
K_I, K_{II}	-	współczynniki intensywności naprężeń,
$\mathbf{K}$	-	macierz sztywności układu,
l	-	długość elementu brzegowego,
$\mathcal{L}$	-	transformata całkowa Laplace'a,
M	-	liczba elementów brzegowych,
M^q	-	czasowa funkcja kształtu,
$\mathbf{M}$	-	macierz bezwładności układu,
n_i	-	składowa wektora jednostkowego, zewnętrznego i prostopadłego do brzegu,
N	-	liczba kroków czasowych; liczba funkcji interpolujących,
N^p	-	przestrzenna funkcja kształtu,
P	-	liczba węzłów w elemencie brzegowym,
Q	-	liczba punktów interpolacji w kroku czasowym,
r	-	odległość między punktem kolokacji i całkowania,
R	-	odległość od krawędzi pęknięcia,
$\Re$	-	część rzeczywista liczby zespolonej,
s	-	parametr transformacji Laplace'a,
t	-	bieżąca chwila czasu,
t_j	-	składowa siły brzegowej,
t_i^b	-	zadana wartość składowej siły brzegowej,
$\hat{t}_{lj}^n$	-	składowa szczególnej siły brzegowej zależna od funkcji interpolacyjnej,
$\mathbf{t}$	-	macierz zawierająca składowe sił w węzłach,
$\hat{\mathbf{t}}$	-	macierz zawierająca składowe szczególnych sił w węzłach,
T	-	właściwa energia kinetyczna,
T_{ij}, T_{kij}	-	rozwiązania podstawowe,
u_j	-	składowa przemieszczenia,
u_i^b	-	zadana wartość składowej przemieszczenia brzegowego,
$\hat{u}_{lj}^n$	-	składowa szczególnego przemieszczenia brzegowego zależna od funkcji interpolacyjnej,
$\mathbf{u}$	-	macierz zawierająca składowe przemieszczeń węzłów,
$\hat{\mathbf{u}}$	-	macierz zawierająca składowe szczególnych przemieszczeń węzłów,
$\mathbf{u}^n$	-	macierz zawierająca składowe przemieszczeń w kroku czasowym n,
U_{ij}, U_{kij}	-	rozwiązania podstawowe,
$\mathbf{v}^n$	-	macierz zawierająca składowe prędkości w kroku czasowym n,
W	-	właściwa energia sprężysta,
x_1, x_2	-	współrzędne w globalnym układzie współrzędnych,
x_1^c, x_2^c	-	współrzędne w układzie współrzędnych związanym z pęknięciem,

$\mathbf{x}$ - punkt całkowania (brzegowy),
$\mathbf{x}'$ - punkt kolokacji (brzegowy albo wewnętrzny),
$\mathbf{x}''$ - punkt należący do pęknięcia, pokrywający się z punktem kolokacji,
$\mathbf{x}^+$, $\mathbf{x}^-$ - pokrywające się punkty, należące do obu powierzchni pęknięcia,
$\mathbf{x}^*$ - punkt definiujący stosowany do aproksymacji przyspieszeń,
$\mathbf{y}$ - macierz zawierająca nieznane przemieszczenia i siły brzegowe,
z_1, z_2 - parametr transformowanych rozwiązań podstawowych elastodynamiki,
$\mathbf{z}$ - macierz zawierająca zadane przemieszczenia i siły brzegowe.

Symbole greckie

α_l^n - współczynniki zależne od czasu, używane do aproksymacji przyspieszeń,
$\boldsymbol{\alpha}$ - macierz zawierająca współczynniki α_l^n,
Γ - brzeg ciała,
Γ_c - kontur otaczający wierzchołek pęknięcia,
Γ_c^+, Γ_c^- - części powierzchni pęknięcia, należące do konturu otaczającego wierzchołek,
Γ^e - brzeg zewnętrzny ciała,
Γ_g - nowy brzeg ciała, utworzony w wyniku wzrostu pęknięcia,
Γ_o - początkowy brzeg ciała,
Γ_u - część brzegu, na którym zadane są przemieszczenia,
Γ_t - część brzegu, na którym zadane są siły,
Γ^+, Γ^- - przeciwległe powierzchnie pęknięcia,
Γ_ε - kontur otaczający wierzchołek pęknięcia w nieskończenie małej odległości,
δ - odległość od punktu kolokacji w lokalnym układzie współrzędnych,
δ_{ij} - symbol Kroneckera,
Δu_j - różnica składowych przemieszczeń na przeciwległych powierzchniach pęknięcia,
$\Delta\tau$ - długość kroku czasowego,
ε - liczba określająca lokalne współrzędne węzłów,
θ - współrzędna w biegunowym układzie współrzędnych,
λ - stała Lamégo,
μ - moduł Kirchhoffa,
ν - współczynnik Poissona,
ξ, ξ_1, ξ_2 - współrzędne w lokalnym układzie współrzędnych,
ξ_p' - współrzędna węzła w lokalnym układzie współrzędnych,
ρ - gęstość materiału,
σ_{ij} - składowa tensora stanu naprężenia,
σ_o - maksymalna wartość obciążenia na brzegu,
$\sigma_{\theta\theta}$ - naprężenie obwodowe,
Σt_j - suma składowych sił na przeciwległych powierzchniach pęknięcia,
τ - czas,
ω - parametr transformacji Fouriera,
Ω - obszar zajmowany przez ciało,
Ω_c - obszar wokół wierzchołka pęknięcia ograniczony konturem Γ_c,
Ω_ε - obszar znajdujący się nieskończenie blisko wierzchołka pęknięcia, ograniczony konturem Γ_ε.

List of basic symbols

General remarks

1. Einstein summation convention for repeated indices is applied.
2. The derivative of variable with respect to time is denoted by a dot above the variable, for example $\partial u_i/\partial \tau = \dot{u}_i$; the number of dots denotes the order of derivative.
3. The derivative with respect to the coordinate of a point is denoted by a comma, which precedes the index of the coordinate, for example $\partial u_i/\partial x_j = u_{i,j}$; the derivative with respect to the distance r is denoted by an index r preceded by a comma, for example $\partial \chi/\partial r = \chi_{,r}$; the number of indices r denotes the order of derivative.
4. The integral transform of a variable, or the variable which depends on it, is denoted by a bar above the variable, for example $\bar{U}_{ij}$.
5. The integral of a variable with respect to time, or a variable which depends on it, is denoted by a tilde above the variable, for example $\tilde{U}_{ij}$.
6. One-dimensional matrices are denoted by small bold letters, for example $\mathbf{u}$; two-dimensional matrices are denoted by capital bold letters, for example $\mathbf{H}$.

Latin symbols

a - variable, which characterizes the length of a crack,
$\mathbf{a}^n$ - matrix, which contains the components of accelerations at the time step n,
$\mathbf{A}$ - matrix of coefficients of unknowns, created from the matrices $\mathbf{H}$ and $\mathbf{G}$, according to boundary conditions,
b - real part of the Laplace parameter,
$\mathbf{B}$ - matrix created from the matrices $\mathbf{H}$ and $\mathbf{G}$ according to boundary conditions,
c - velocity of crack growth,
c_1 - velocity of longitudinal wave,
c_2 - velocity of shear wave,
c_{ij} - constant which depends on the position of the collocation point,
C - constant used to approximate accelerations,
$\mathbf{C}$ - damping matrix of the system,
E - Young's modulus,
f^n - function of the coordinate of a point, used to approximate acceleration,
$\mathbf{f}$ - matrix of free terms,
$\mathbf{f}^n$ - matrix, which contains forces at the time step n,
$\mathcal{F}$ - Fourier integral transform,
$\mathbf{F}$ - matrix of interpolating functions,
G - energy release rate,
$\mathbf{G}$ - matrix, which depends on integrals of fundamental solutions U_{ij}, U_{kij}, shape functions and jacobians,

$\mathbf{H}$ - matrix, which depends on integrals of fundamental solutions T_{ij}, T_{kij}, shape functions and jacobians,
I - integral of hipersingular fundamental solution,
$\Im$ - imaginary part of the complex number,
J_k - path independent integral,
J^m - Jacobian of the transformation from the global to the local coordinate system,
K_0, K_1 - modified Bessel functions of the second kind of orders zero and one,
K_o - stress intensity factor, used as a normalizing factor,
K_I, K_{II} - stress intensity factors,
$\mathbf{K}$ - stiffness matrix of the system,
l - length of the boundary element,
$\mathcal{L}$ - Laplace integral transform,
M - number of boundary elements,
M^q - temporal shape function,
$\mathbf{M}$ - mass matrix of the system,
n_i - component of the unit outward normal vector,
N - number of time steps; number of interpolating functions,
N^p - space shape function,
P - number of nodes in the boundary element,
Q - number of interpolating points during the time step,
r - distance between the collocation and the integration point,
R - distance from the crack front,
$\Re$ - real part of the complex number,
s - Laplace transform parameter,
t - current time,
t_j - component of boundary traction,
t_i^b - prescribed component of boundary traction,
$\hat{t}_{lj}^n$ - component of particular boundary traction, which depends on the interpolating function,
$\mathbf{t}$ - matrix, which contains components of boundary tractions,
$\hat{\mathbf{t}}$ - matrix, which contains components of particular tractions,
T - kinetic energy density,
T_{ij}, T_{kij} - fundamental solutions,
u_j - component of displacement,
u_i^b - prescribed boundary component of displacement,
$\hat{u}_{lj}^n$ - component of particular boundary displacement, which depends on interpolating function,
$\mathbf{u}$ - matrix, which contains the components of nodal displacements,
$\hat{\mathbf{u}}$ - matrix, which contains components of particular displacements,
$\mathbf{u}^n$ - matrix, which contains components of displacements at the time step n,
U_{ij}, U_{kij} - fundamental solutions,
$\mathbf{v}^n$ - matrix, which contains components of velocities at the time step n,
W - strain energy density,
x_1, x_2 - coordinates in the global coordinate system,
x_1^c, x_2^c - coordinates in the crack coordinate system,

$\mathbf{x}$ - integration point (boundary point),
$\mathbf{x}'$ - collocation point (boundary or internal point),
$\mathbf{x}''$ - crack point, which is coincident with the collocation point,
$\mathbf{x}^+$, $\mathbf{x}^-$ - coincident points on both crack surfaces,
$\mathbf{x}^*$ - defining point, used to approximate accelerations,
$\mathbf{y}$ - matrix, which contains unknown displacements and tractions,
z_1, z_2 - parameter of transformed fundamental solutions of elastodynamics,
$\mathbf{z}$ - matrix, which contains prescribed displacements and tractions.

Greek symbols

α_l^n - time-dependent coefficients used to approximate accelerations,
$\boldsymbol{\alpha}$ - matrix, which contains coefficients α_l^n,
Γ - boundary of the body,
Γ_c - path which surrounds the crack tip,
Γ_c^+, Γ_c^- - parts of crack surfaces, which belong to the path surrounding the crack tip,
Γ^e - external boundary of the body,
Γ_g - new boundary created by the growing crack,
Γ_o - initial boundary of the body,
Γ_u - part of the boundary, where the displacements are prescribed,
Γ_t - part of the boundary, where the tractions are prescribed,
Γ^+, Γ^- - opposite crack surfaces,
Γ_ε - path, surrounding the crack tip in an infinite small distance,
δ - distance from the collocation point in the local coordinate system,
δ_{ij} - Kronecker symbol,
Δu_j - difference of components of displacements on opposite crack surfaces,
$\Delta\tau$ - time step,
ε - number, which characterizes the local coordinates of nodes,
θ - coordinate in the polar coordinate system,
λ - Lamé constant,
μ - Kirchhoff's modulus,
ν - Poisson's coefficient,
ξ, ξ_1, ξ_2 - coordinates in the local coordinate system,
ξ_p' - nodal coordinate in the local coordinate system,
ρ - mass density,
σ_{ij} - component of stress tensor,
σ_o - maximum value of boundary stress,
$\sigma_{\theta\theta}$ - circumferencial stress,
Σt_j - sum of components of tractions on opposite crack surfaces,
τ - time,
ω - Fourier transform parameter,
Ω - domain occupied by the body,
Ω_c - domain at the crack tip surrounded by the path Γ_c,
Ω_ε - domain in the infinite small distance from the crack tip, surrounded by the path Γ_ε.

Rozdział 1

Wstęp

1.1. Wprowadzenie

Mechanika pękania jest nauką interdyscyplinarną zajmującą się analizą pęknięć i ich wzrostu pod wpływem obciążenia i oddziaływania środowiska.

Podstawy mechaniki pękania zostały przedstawione w literaturze krajowej przez Wnuka [166], Kocańdę [90], Gołaskiego i Pilcera [71], Gołaskiego [70], Neimitza [108], a w literaturze zagranicznej przez Hellana [74], Ewaldsa i Wanhilla [39], Kanninena i Popelara [84], Broeka [18], Smitha [139], Gdoutosa [69] i innych. Zagadnienia inicjacji i wzrostu pęknięć oraz kumulacji uszkodzeń w złożonych stanach obciążeń omówiono w pracy Seweryna [130].

Pęknięcia stanowią nieciągłości materiału powstałe w czasie wytwarzania materiału lub konstrukcji, np. poprzez spawanie (Rykaluk [128]), oraz podczas eksploatacji, np. na skutek zmęczenia materiału (Kocańda [90], Kocańda i Szala [91]) lub korozyjnego oddziaływania środowiska. Pęknięcia można podzielić na kruche, ciągliwe i mieszane (Neimitz [108]). Kruche pękanie, w odróżnieniu od pękania ciągliwego, charakteryzuje się małymi odkształceniami plastycznymi, powoduje małą stratę energii i pęknięcie wzrasta z dużymi prędkościami. Wiele przypadków kruchego pękania następowało w niskich temperaturach i przy naprężeniach mniejszych od granicy plastyczności. Pęknięcia występowały w miejscach koncentracji naprężeń spowodowanej przez otwory, karby, wady materiałowe itp. Na kruche pękanie szczególnie podatne są materiały o wysokiej wytrzymałości i jednocześnie niskiej odporności na pękanie.

Mechanika pękania jest nauką o charakterze teoretycznym i doświadczalnym. Podstawowym celem mechaniki pękania jest poznanie zjawiska pękania. Metody mechaniki pękania powinny umożliwić (Neimitz [108], Ewalds i Wanhill [39], Gdoutos [69]) określenie krytycznej długości pęknięcia, przy zadanym obciążeniu lub krytycznej wartości obciążenia, przy zadanej długości pęknięcia. Wyznaczenie tych wielkości pozwala na określenie wytrzymałości konstrukcji w zależności od długości pęknięcia. Bada się także, jak zależy długość pęknięcia od czasu. Znając tę zależność, można wyznaczyć, jak długo trwa wzrost pęknięcia od długości początkowej, wykrywalnej stosowanymi metodami, do długości krytycznej. Na podstawie tego okresu można ustalić czas pomiędzy badaniami konstrukcji, wykonywanymi w celu wyznaczenia bieżącej długości pęknięć.

Poznanie zjawiska pękania stanowi podstawę do opracowania metod obliczeń konstrukcji z pęknięciami. Mimo znacznego rozwoju mechaniki pękania w ostatnich kilkudziesięciu latach ciągle istnieje niebezpieczeństwo zniszczenia konstrukcji przez pękanie, zwłaszcza

na skutek stosowania lekkich i wytrzymałych materiałów, które jednocześnie posiadają niską odporność na pękanie. Ponieważ uniknięcie wad materiałowych jest często niemożliwe, dlatego konstrukcje powinny być projektowane w ten sposób, żeby mogły przenosić obciążenie w obecności pęknięć.

Można rozróżnić trzy metody projektowania konstrukcji, uwzględniające zjawisko pękania (Smith [139]): *metodę bezpiecznej eksploatacji* (ang. safe-life), *metodę tolerancji wady* (ang. damage- tolerant) i *metodę bezpiecznego zniszczenia* (ang. fail-safe). Pierwszą metodą projektuje się konstrukcję, żeby mogła być eksploatowana przez określony czas bez badania. W drugiej metodzie zakłada się, że w konstrukcji istnieją pęknięcia i znajdują się one w miejscach o największych naprężeniach. Konstruktor, wiedząc, jakie wielkości pęknięcia mogą być wykryte stosowanymi metodami, jaka jest krytyczna długość pęknięcia, dla której następuje zniszczenie konstrukcji oraz ile czasu potrzeba, żeby nastąpił wzrost pęknięcia o pewną długość, może ustalić, jak często należy badać konstrukcję. W trzeciej metodzie zakłada się, że wystąpi lokalne zniszczenie, które jednak nie powinno spowodować zniszczenia całej konstrukcji. Wykryte pęknięcia są następnie zabezpieczane.

Istnieje kilka sposobów zabezpieczenia konstrukcji przed zniszczeniem na skutek pękania. Pierwszy sposób polega na stosowaniu materiałów o wysokiej wytrzymałości na pękanie oraz elementów konstrukcyjnych zatrzymujących rozwój pęknięcia. Drugi sposób polega na zastosowaniu jednocześnie kilku elementów przenoszących obciążenie. W przypadku pęknięcia któregoś z elementów jest on zastępowany przez nowy. Trzeci sposób dotyczy okresowego poddawania konstrukcji obciążeniom większym od eksploatacyjnych. Sprawdza się w ten sposób, czy w konstrukcji są pęknięcia o długości krytycznej odpowiadającej zwiększonemu obciążeniu. Przy zwiększonym obciążeniu te pęknięcia wzrastają w sposób niestabilny. Sporadycznie zwiększane obciążenie na ogół powoduje zmniejszenie prędkości wzrostu pęknięcia. Omawiana metoda ma ograniczone zastosowanie. Zwiększenie obciążenia powinno odbywać się w kontrolowanych warunkach, czasami wymaga demontażu elementów, a przy skomplikowanym obciążeniu może być trudne do zrealizowania. Czwarta metoda stosowana jest dla pęknięć brzegowych na powierzchniach elementów o dużej grubości. Metoda polega na mechanicznym usuwaniu warstwy zewnętrznej, posiadającej pęknięcia lub na obróbce plastycznej.

Jednym z podstawowych problemów jest ustalenie koniecznego okresu pomiędzy kolejnymi badaniami pęknięć w konstrukcji, obróbką mechaniczną lub plastyczną. Im częstszy okres pomiędzy badaniami, tym mniejsze niebezpieczeństwo niekontrolowanego rozwoju pęknięć. Ponieważ na ogół badania są bardzo kosztowne, dlatego ich częstość jest podyktowana względami ekonomicznymi, a także możliwościami przerw w eksploatacji konstrukcji. Okres pomiędzy kolejnymi badaniami można zmniejszyć, stosując metody umożliwiające wykrycie bardzo małych pęknięć lub stosując materiały o małej prędkości wzrostu pęknięcia.

Do szczególnie trudnych zadań należy analiza zagadnień dynamicznych mechaniki pękania. Zagadnienia dynamiczne mechaniki pękania przedstawiono w literaturze krajowej w pracach Neimitza [107] i Krawczuka [94], a w literaturze zagranicznej w pracach Siha [131], Williamsa i Knaussa [165], Klepaczki [89], Freunda [63] i innych.

Dynamiczna mechanika pękania jest dziedziną mechaniki pękania, dotyczącą zagadnień, w których bezwładność materiału odgrywa istotną rolę oraz własności materiału zależą od prędkości odkształcenia (Neimitz [107], Freund [63]). Efekty dynamiczne powstają pod wpływem dynamicznego obciążenia lub szybkiego wzrostu pęknięcia. Z tego

powodu rozróżnia się trzy rodzaje zagadnień dynamicznych: obciążenie dynamiczne i powolny wzrost pęknięcia lub jego brak, obciążenie statyczne i szybki wzrost pęknięcia oraz obciążenie dynamiczne i szybki wzrost pęknięcia.

Proces kwalifikuje się jako dynamiczny na podstawie: prędkości obciążenia, prędkości ruchu wierzchołka pęknięcia i prędkości deformacji w strefie zniszczenia przed wierzchołkiem pęknięcia (Neimitz [107]). Proces uważa się za dynamiczny, jeżeli: prędkość obciążenia, wyrażana za pomocą prędkości zmiany dynamicznego współczynnika naprężeń $\dot{K} > 10^4\ MPa\sqrt{m}s^{-1}$, prędkość wzrostu pęknięcia $c > 0.1c_R$, gdzie c_R jest prędkością propagacji fali Rayleigha lub prędkość odkształcenia $\dot{\varepsilon} > 1s^{-1}$.

Podstawowym celem obliczeń jest ustalenie, czy nastąpi wzrost pęknięcia, określenie kierunku i prędkości wzrostu oraz ewentualnego zatrzymania pękania. Jednymi z podstawowych wielkości, które charakteryzują przebieg tych zjawisk, są współczynniki intensywności naprężeń. W przypadku prostej geometrii ciała i pęknięcia oraz sposobu obciążenia konstrukcje można analizować metodami analitycznymi. Wartości współczynników intensywności naprężeń dla prostych zagadnień można odczytywać z katalogów (Murakami [104]). Bardziej złożone przypadki można analizować np. metodą superpozycji, metodą spiętrzenia naprężeń, metodą lokalnego rozkładu naprężeń itp. (Aliabadi i Rooke [6]). Omówienie metod analitycznych i proste przykłady zastosowania tych metod przedstawiono w pracach Neimitza [107] i Freunda [63]. Złożone zagadnienia mechaniki pękania analizowane są metodami numerycznymi. Do najczęściej stosowanych metod numerycznych należą: metoda różnic skończonych (MRS), metoda elementów skończonych (MES) (Gawroński i inni [68], Rakowski i Kacprzyk [123], Rusiński [126], Rusiński, Czmochowski i Smolnicki [127]) i metoda elementów brzegowych (MEB)(Burczyński [20]). Omówienie różnych metod komputerowych stosowanych w mechanice ciała stałego przedstawiono w pracy pod redakcją Kleibera [88].

Za pomocą MEB można rozwiązać wiele zagadnień w wyniku dyskretyzacji i aproksymacji wyłącznie wielkości brzegowych (Burczyński [20], Dominguez [32]). Dzięki temu rozwiązania są dokładniejsze niż w metodach wymagających dyskretyzacji wnętrza ciała, np. MRS, MES. Jest to szczególnie ważne w przypadku analizy ciał z pęknięciami (Aliabadi i Rooke [6], Aliabadi [4]) ze względu na duże gradienty pola naprężeń wokół wierzchołka pęknięcia. Drugą ważną zaletą jest łatwość modelowania wzrostu pęknięcia. Wzrost pęknięcia modeluje się poprzez dodawanie nowych elementów wzdłuż krawędzi pęknięcia. Niepotrzebna jest zmiana istniejącej siatki elementów.

1.2. Cel pracy

Ciała z pęknięciami są analizowane za pomocą trzech sformułowań MEB: metody podziału na podobszary, metody nieciągłości przemieszczeń i metody dualnej. Spośród wymienionych metod ujęcie dualne jest najbardziej uniwersalnym sformułowaniem. Metoda dualna umożliwia bezpośrednie obliczenie nieznanych wielkości brzegowych w wyniku wyłącznie dyskretyzacji powierzchni ciała. Przegląd podstaw teoretycznych i zastosowań tej metody w różnych dziedzinach mechaniki pękania został przedstawiony w pracy Aliabadiego [5].

Metodę zastosowali po raz pierwszy Portela, Aliabadi i Rooke [121], [122] w zagadnieniach dwuwymiarowych oraz Mi i Aliabadi [100], [101] w zagadnieniach trójwymiarowych statyki. Analizowano pęknięcia w materiałach jednorodnych, izotropowych i liniowosprężystych. Metodę zastosowano także do analizy wzrostu pęknięć w tarczy wzmocnio-

nej żebrami, w tarczy wykonanej z materiału sprężysto-plastycznego, betonu i materiału kompozytowego, przy naprężeniach wywołanych obciążeniem i przepływem ciepła.

W 1992 r. autor podjął badania nad sformułowaniem i zastosowaniem ujęcia dualnego MEB do analizy dynamicznej pęknięć. W momencie podjęcia tej problematyki badawczej w literaturze przedmiotu brak było prac z tego zakresu.

Celem niniejszej pracy jest podsumowanie dotychczasowych prac własnych związanych ze sformułowaniem i zastosowaniem ujęcia dualnego metody elementów brzegowych w analizie dynamicznej elementów konstrukcyjnych z pęknięciami.

Metodę zastosowano do analizy elementów konstrukcyjnych wykonanych z materiału jednorodnego, izotropowego i liniowo-sprężystego. Analizowano elementy posiadające pęknięcia stacjonarne i wzrastające.

Wyniki badań prowadzonych od 1992 r. przedstawiono w pracach Fedelińskiego i współpracowników. Rozwiązania zależne od czasu wyznaczono, stosując trzy różne metody analizy zagadnień dynamicznych za pomocą metody elementów brzegowych. W pracach [52], [53], [54], [55] przedstawiono połączenie sformułowania dualnego z metodą podwójnej zasady wzajemności, w [56], [57], [58] - z metodą rozwiązań w dziedzinie czasu, w [41], [60] - z metodą transformacji całkowych. Zastosowanie trzech różnych metod umożliwiło porównanie ich efektywności i możliwych zastosowań, które przedstawiono w pracach [59], [61], [42], [43], [48], [50]. Metodę rozwiązań w dziedzinie czasu zastosowano do analizy dynamicznego wzrostu pęknięć [44], [62], a metodę transformacji całkowych do analizy zagadnień trójwymiarowych [45], [46], [47], [49], [51].

Opracowane programy komputerowe obliczają przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia dla konstrukcji o dowolnej postaci geometrycznej, sposobie obciążenia i podparcia, posiadających stacjonarne i wzrastające pęknięcia. Opracowanie tego typu oprogramowania komputerowego, zaliczanego do metod komputerowego wspomagania projektowania, ma duże znaczenie w budowie, a następnie eksploatacji maszyn.

Opracowane programy komputerowe umożliwiają określenie miejsc, w których mogą wystąpić pęknięcia jeszcze w fazie konstruowania maszyn. Dzięki temu poprzez odpowiedni dobór cech konstrukcyjnych można zmniejszyć prawdopodobieństwo wystąpienia pęknięć, zapobiec wzrostowi pęknięć, jeżeli wystąpią one w konstrukcji lub zminimalizować skutki ich wzrostu.

W trakcie eksploatacji maszyn można ocenić, czy przy występujących obciążeniach nastąpi wzrost pęknięcia oraz określić kierunek jego wzrostu. Programy komputerowe mogą być także wykorzystane do identyfikacji pęknięć, tzn. określenia ich liczby, położenia i postaci geometrycznej na podstawie zachowania układu pod wpływem obciążenia dynamicznego.

1.3. Przegląd treści pracy

Treść pracy ujęto w jedenastu rozdziałach.

Rozdział 2. poświęcono zastosowaniu metody elementów brzegowych w analizie statycznej ciał z pęknięciami. Przedstawiono brzegowe równania całkowe przemieszczeń i sił powierzchniowych, ze szczególnym uwzględnieniem postaci tych równań dla pęknięcia. Omówiono sformułowanie, zalety i wady trzech podstawowych metod analizy pęknięć za pomocą MEB: metody podziału na podobszary, metody nieciągłości przemieszczeń i metody dualnej. Opisano aproksymację wielkości brzegowych za pomocą elementów kwa-

dratowych. Przedstawiono sformułowanie macierzowych równań ruchu i ich modyfikacje ze względu na warunki brzegowe. Przedstawiono obliczanie całek brzegowych. Szczególną uwagę poświęcono obliczaniu całek hiperosobliwych, występujących w równaniu całkowym sił brzegowych.

W rozdziale 3. przedstawiono wprowadzenie do analizy dynamicznej pęknięć za pomocą MEB. Podano brzegowe równania całkowe dla zagadnienia dynamicznego i przedstawiono podobieństwo metod stosowanych w analizie statycznej i dynamicznej MEB. Opisano pola sprężyste wokół wierzchołka pęknięcia i wielkości je charakteryzujące. Podano równania określające pola przemieszczeń i naprężeń wokół dynamicznie wzrastającego pęknięcia. Omówiono sposoby obliczenia dynamicznych współczynników naprężeń za pomocą całek niezależnych od konturu całkowania i rozwarcia wierzchołka pęknięcia. Przedstawiono sposób określania kierunku wzrostu pęknięcia na podstawie maksymalnego naprężenia obwodowego.

W kolejnych trzech rozdziałach przedstawiono sformułowanie dualne dla zagadnienia dwuwymiarowego w połączeniu z trzema różnymi metodami analizy stanów nieustalonych: w rozdziale 4. - metodę transformacji całkowych, w rozdziale 5. - metodę rozwiązań w dziedzinie czasu, a w rozdziale 6. - metodę podwójnej zasady wzajemności. W każdym z rozdziałów podano odpowiednie brzegowe równania całkowe, dyskretyzację wielkości brzegowych i czasu, macierzowe sformułowanie równań ruchu oraz przykłady zastosowania.

W rozdziale 7. porównano wcześniej przedstawione sformułowania, biorąc pod uwagę cechy decydujące o ich efektywności: rozwiązania podstawowe i ich całkowanie, sformułowanie macierzowych równań ruchu, wymaganą pamięć, prędkość obliczeń, dokładność i możliwe zastosowania.

W rozdziale 8. przedstawiono zastosowanie metody rozwiązań w dziedzinie czasu do analizy dynamicznego wzrostu pęknięcia.

W rozdziale 9. opisano analizę zagadnień trójwymiarowych za pomocą metody transformacji całkowych.

W rozdziale 10. zaprezentowano 5 nowych, praktycznych przykładów analizy dynamicznej elementów konstrukcyjnych z pęknięciami.

W rozdziale 11. podsumowano wyniki zastosowania metody dualnej MEB w analizie dynamicznej ciał z pęknięciami.

W dodatkach przedstawiono rozwiązania podstawowe stosowane w poszczególnych sformułowaniach, definicje całek w sensie wartości głównej Cauchy'ego i Hadamarda oraz metodę Durbina numerycznego obliczania transformaty odwrotnej Laplace'a i metodę Houbolta numerycznego rozwiązywania równania ruchu.

Rozdział 2

Metoda elementów brzegowych w analizie statycznej pęknięć

2.1. Wprowadzenie

W pracy przedstawiono trzy różne sposoby analizy zagadnień dynamicznych za pomocą metody elementów brzegowych: metodę transformacji całkowych, metodę rozwiązań w dziedzinie czasu i metodę podwójnej zasady wzajemności. Formy brzegowych równań całkowych dla każdej metody są inne i zostaną przedstawione w następnych rozdziałach. Natomiast sposób analizy pęknięć, rodzaje równań, aproksymacja wielkości brzegowych, modyfikacja układu równań zgodnie z warunkami brzegowymi i rodzaj osobliwości stosowanych rozwiązań podstawowych są takie same i jednocześnie identyczne jak dla zagadnienia statycznego. Dlatego żeby wyjaśnić ideę modelowania pęknięć, zostanie ona najpierw przedstawiona dla zagadnienia statycznego, a następnie omówiona dla różnych metod analizy zagadnienia dynamicznego.

W tym rozdziale przedstawiono brzegowe równania całkowe przemieszczeń i sił. Podano szczególne formy tych równań dla punktów na powierzchniach pęknięcia. Omówiono własności tych równań w zastosowaniu do analizy pęknięć. Opisano trzy podstawowe metody analizy pęknięć za pomocą metody elementów brzegowych: metodę podziału na podobszary, metodę nieciągłości przemieszczeń i metodę dualną. Przedstawiono sposób aproksymacji wielkości brzegowych i tworzenia macierzowego układu równań. Omówiono sposób obliczania całek brzegowych, ze szczególnym uwzględnieniem całek funkcji hiperosobliwych dla zagadnienia dwu- i trójwymiarowego.

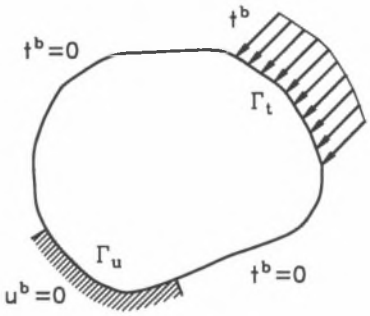
2.2. Brzegowe równania całkowe

Rozważmy ciało o dowolnym kształcie, zajmujące obszar Ω i posiadające brzeg Γ (rys. 2.1). Na części brzegu ciała Γ_u zadane są warunki brzegowe w postaci przemieszczeń $u_i^b(\mathbf{x})$, a na pozostałym brzegu Γ_t obciążenia $t_i^b(\mathbf{x})$ w następujący sposób:

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^b(\mathbf{x}), \quad dla \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t_i(\mathbf{x}) = t_i^b(\mathbf{x}), \quad dla \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t, \tag{2.1}$$

gdzie $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$ i $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \oslash$, $\mathbf{x}$ jest punktem należącym do brzegu, $u_i(\mathbf{x})$ jest składową przemieszczenia, $t_i(\mathbf{x})$ jest składową siły brzegowej.

Na swobodnym brzegu siły są równe zeru, natomiast na sztywno utwierdzonym brzegu przemieszczenia są równe zeru. W punktach brzegu, gdzie zadane są przemieszczenia, nieznane są obciążenia, natomiast na brzegu, gdzie zadane są obciążenia, nieznane są przemieszczenia.



Rys. 2.1. Warunki brzegowe
Fig. 2.1. Boundary conditions

Rozważmy ciało, którego materiał jest jednorodny, izotropowy i liniowo-sprężysty. Przemieszczenie dowolnego punktu ciała można wyznaczyć, stosując następujące brzegowe równanie całkowe przemieszczeń, nazywane dalej w skrócie równaniem przemieszczeń:

$$c_{ij}(\mathbf{x}')u_j(\mathbf{x}') = \int_\Gamma U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})t_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) - \oint_\Gamma T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})u_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}), \tag{2.2}$$

gdzie $\mathbf{x}'$ jest punktem, w którym wyznacza się przemieszczenie (punktem kolokacji), $\mathbf{x}$ punktem brzegowym (punktem całkowania), $c_{ij}(\mathbf{x}')$ jest stałą, $T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})$ i $U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})$ rozwiązaniami podstawowymi elastostatyki (rozwiązaniami Kelvina), $\oint$ oznacza całkę w sensie wartości głównej Cauchy'ego, której definicję podano w dodatku G. Wartość stałej $c_{ij}(\mathbf{x}')$ zależy od położenia punktu:

$c_{ij}(\mathbf{x}') = \delta_{ij}$ dla punktu $\mathbf{x}'$ należącego do wnętrza ciała,
$c_{ij}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2}\delta_{ij}$ dla punktu $\mathbf{x}'$ należącego do gładkiego brzegu,
$c_{ij}(\mathbf{x}') = 0$ dla punktu $\mathbf{x}'$ znajdującego się na zewnątrz ciała,

gdzie δ_{ij} jest deltą Kroneckera. Gdy punkt $\mathbf{x}'$ jest w narożu, wówczas wartość stałej zależy od kształtu brzegu w narożu i jego orientacji względem globalnego układu współrzędnych. Szczegółowy sposób obliczania stałej został przedstawiony w pracy Domingueza [32].

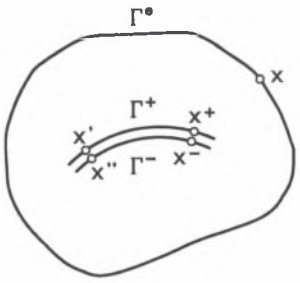
Rozwiązania podstawowe $T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})$ i $U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})$ dla zagadnienia dwu- i trójwymiarowego podano odpowiednio w dodatkach A i B. Rozwiązania podstawowe zależą od długości i składowych wektora łączącego punkty $\mathbf{x}'$ i $\mathbf{x}$, własności sprężystych materiału i wektora jednostkowego, normalnego do brzegu w punkcie $\mathbf{x}$, skierowanego na zewnątrz ciała.

Załóżmy, że ciało posiada pęknięcie, którego powierzchnie pokrywają się (rys. 2.2). Równanie przemieszczeń (2.2) dla punktu $\mathbf{x}'$, w którym powierzchnia pęknięcia jest gładka, ma formę:

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}') + \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}'') = \int_\Gamma U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})t_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) - \oint_\Gamma T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})u_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}), \tag{2.3}$$

gdzie punkt $\mathbf{x}''$ jest punktem należącym do przeciwległej powierzchni pęknięcia mającego takie same współrzędne jak punkt $\mathbf{x}'$.

Brzegowe równania całkowe (2.3) ułożone dla punktów $\mathbf{x}'$ i $\mathbf{x}''$ są identyczne. Gdy dyskretyzację przeciwległych powierzchni pęknięcia przeprowadza się, stosując ten sam podział na elementy brzegowe, wowczas otrzymuje się takie same równania dla pokrywających się węzłów. W takim przypadku tworzony metodą elementów brzegowych układ równań jest osobliwy.



Rys. 2.2. Ciało z pęknięciem
Fig. 2.2. Cracked body

Oznaczymy brzeg zewnętrzny ciała przez Γ^e, a pokrywające się powierzchnie pęknięcia przez Γ^+ i Γ^-, gdzie $\Gamma^e \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^- = \Gamma$ (rys. 2.2). Rozwiązania podstawowe elastostatyki w pokrywających się punktach całkowania $\mathbf{x}^+$ i $\mathbf{x}^-$ należących do brzegów pęknięcia Γ^+ i Γ^- mają następujące własności:

$$U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^+) = U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^-), \quad T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^+) = -T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^-). \tag{2.4}$$

Biorąc pod uwagę powyższe własności, równanie przemieszczeń (2.3) dla ciała z pęknięciem można zapisać w następującej postaci:

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}') + \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}'') = \int_{\Gamma^e} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \oint_{\Gamma^e} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})$$
$$+ \int_{\Gamma^+} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \Sigma t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \oint_{\Gamma^+} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \Delta u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \tag{2.5}$$

gdzie $\Sigma t_j(\mathbf{x})$ oznacza sumę sił brzegowych, a $\Delta u_j(\mathbf{x})$ - różnicę przemieszczeń w pokrywających się punktach na powierzchniach pęknięcia:

$$\Sigma t_j(\mathbf{x}) = t_j(\mathbf{x}^+) + t_j(\mathbf{x}^-), \quad \Delta u_j(\mathbf{x}) = u_j(\mathbf{x}^+) - u_j(\mathbf{x}^-). \tag{2.6}$$

Wyznaczenie przemieszczenia wymaga całkowania wzdłuż brzegu zewnętrznego Γ^e i jednej z powierzchni pęknięcia, np. Γ^+, jak pokazano w równaniu (2.5). Często spotykanym przypadkiem jest obciążenie przeciwległych powierzchni pęknięcia siłami znajdującymi się w równowadze. W takim przypadku $\Sigma t_j(\mathbf{x}) = 0$ i przemieszczenie jest niezależne od obciążenia powierzchni pęknięcia. Ten fakt, który jest sprzeczny z rzeczywistością, jest jedną z wad brzegowego równania całkowego przemieszczeń, stosowanego dla ciała z pęknięciem. Za pomocą równania (2.5) nie można wyznaczyć przemieszczeń, gdy zadane są obciążenia na powierzchniach pęknięcia, gdyż niewiadomymi są jednocześnie różnica przemieszczeń $\Delta u_j(\mathbf{x})$ i ich suma $u_i(\mathbf{x}') + u_i(\mathbf{x}'')$.

Dwie wymienione wady brzegowego równania całkowego przemieszczeń, tzn. identyczna postać równania dla pokrywających się punktów należących do przeciwległych powierzchni pęknięcia i niezależność rozwiązania od obciążenia na powierzchniach pęknięcia, uniemożliwiają jego bezpośrednie zastosowanie w analizie ciał z pęknięciami (Cruse [26]).

Równanie przemieszczeń określa związek między przemieszczeniami i siłami brzegowymi. Inny związek między tymi wielkościami można otrzymać, stosując brzegowe równanie całkowe sił, nazywane dalej w skrócie równaniem sił. Równanie sił brzegowych dla pęknięcia otrzymuje się, różniczkując równanie (2.3) względem współrzędnej punktu kolokacji $\mathbf{x}'$, stosując uogólnione prawo Hooke'a i mnożąc otrzymane równanie przez wektor jednostkowy normalny do brzegu w punkcie $\mathbf{x}'$, skierowany na zewnątrz ciała. W rezultacie otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}t_j(\mathbf{x}') - \frac{1}{2}t_j(\mathbf{x}'') = n_i(\mathbf{x}')\Big[\oint\!\!\!\!\!\!-_{\Gamma} U_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \oint\!\!\!\!\!\!=_{\Gamma} T_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})\Big], \quad (2.7)$$

gdzie $T_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ i $U_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ są rozwiązaniami podstawowymi elastostatyki, które podano w dodatkach A i B, $\oint\!\!\!\!\!\!=$ oznacza całkę w sensie wartości głównej Hadamarda, której definicję podano w dodatku G, n_i oznacza składową wektora jednostkowego normalnego do brzegu w punkcie $\mathbf{x}'$, skierowanego na zewnątrz ciała. Równania (2.7) ułożone dla punktów $\mathbf{x}'$ i $\mathbf{x}''$ są identyczne. Z tych samych powodów, co w przypadku równania przemieszczeń, gdyby stosować dla obu powierzchni równanie sił brzegowych, otrzymalibyśmy osobliwy układ równań.

Rozwiązania $T_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ i $U_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ mają takie same własności, jak rozwiązania występujące w równaniu przemieszczeń:

$$U_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^+) = U_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^-), \quad T_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^+) = -T_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^-). \quad (2.8)$$

Biorąc pod uwagę powyższe własności, równanie sił brzegowych dla ciała z pęknięciem można zapisać w następującej postaci:

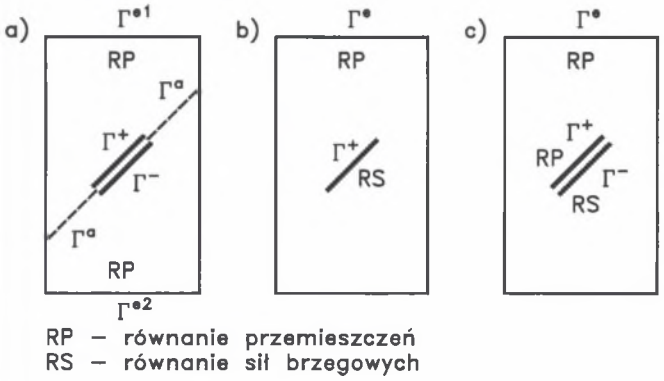
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}t_j(\mathbf{x}') - \frac{1}{2}t_j(\mathbf{x}'') = n_i(\mathbf{x}')\Big[&\oint\!\!\!\!\!\!-_{\Gamma^e} U_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \oint\!\!\!\!\!\!=_{\Gamma^e} T_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ \oint\!\!\!\!\!\!-_{\Gamma^+} U_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \Sigma t_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \oint\!\!\!\!\!\!=_{\Gamma^+} T_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \Delta u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})\Big]. \quad (2.9)\end{aligned}$$

W odróżnieniu od równania przemieszczeń rozwiązanie zależy od obciążenia powierzchni pęknięcia siłami znajdującymi się w równowadze, ponieważ w równaniu oprócz sumy sił $\Sigma t_k(\mathbf{x})$, która w tym przypadku jest równa zeru, występuje także ich różnica $t_j(\mathbf{x}') - t_j(\mathbf{x}'')$. Za pomocą równania nie można wyznaczyć sił brzegowych, gdy zadane są przemieszczenia powierzchni pęknięć, gdyż niewiadomymi są równocześnie różnice sił brzegowych $t_j(\mathbf{x}') - t_j(\mathbf{x}'')$ i ich suma $\Sigma t_k(\mathbf{x})$.

2.3. Metody analizy ciał z pęknięciami

Z powyższej analizy własności brzegowych równań całkowych przemieszczeń i sił wynika, że nie można ich bezpośrednio zastosować w analizie pęknięć. Mimo tych trudności opracowano kilka metod analizy pęknięć za pomocą MEB (Cruse [26], [27], [28], Smith [137], Aliabadi [4]).

Do najczęściej stosowanych należą: metoda podziału na podobszary, metoda nieciągłości przemieszczeń i metoda dualna.



Rys. 2.3. Metody analizy pęknięć za pomocą MEB: a) metoda podziału na podobszary, b) metoda nieciągłości przemieszczeń, c) metoda dualna

Fig. 2.3. Methods of crack analysis using the BEM: a) subregion method, b) displacement discontinuity method, c) dual method

Niezależny układ równań dla pokrywających się węzłów można otrzymać, stosując *metodę podziału na podobszary* (ang. subregion method) (Blandford, Ingraffea i Liggett [16]) wzdłuż przedłużenia powierzchni pęknięcia (rys. 2.3a). W tej metodzie dzieli się na elementy brzeg zewnętrzny Γ^e, obie powierzchnie pęknięcia Γ^+ i Γ^- oraz brzeg rozdzielający podobszary Γ^a. Równanie przemieszczeń (2.2) stosuje się dla węzłów położonych na wszystkich wymienionych brzegach i całkuje wzdłuż brzegu odpowiedniego podobszaru. Równania dla pokrywających się punktów są różne, ponieważ każdy z podobszarów ma inny brzeg. Podobszary łączy się, wykorzystując warunki ciągłości przemieszczeń oraz równowagi sił wzdłuż linii podziału. Wadą metody jest konieczność wprowadzenia sztucznego brzegu rozdzielającego podobszary, co powoduje zwiększenie liczby węzłów i liczby elementów brzegowych. Sztuczny brzeg jest szczególnie niewygodny w modelowaniu wzrostu pęknięcia ze względu na konieczność jego ciągłej zmiany. Dodatkowo, żeby otrzymać dokładne rozwiązanie, należy stosować specjalne elementy na sztucznym brzegu, które aproksymują pole naprężeń w pobliżu krawędzi pęknięcia.

W *metodzie nieciągłości przemieszczeń* (ang. displacement discontinuity method) dzieli się na elementy brzegowe tylko brzeg zewnętrzny Γ^e i jedną z powierzchni pęknięcia, np. Γ^+ (rys. 2.3b). Równanie przemieszczeń (2.2) stosuje się dla punktów należących do brzegu zewnętrznego, a równanie sił brzegowych (2.9) dla powierzchni pęknięcia. Metoda nazywa się metodą nieciągłości przemieszczeń, ponieważ zmiennymi są różnice przemieszczeń powierzchni pęknięcia $\Delta u_k(\mathbf{x})$. W metodzie tej stosuje się najmniejszą liczbę elementów brzegowych spośród trzech wymienionych metod.

Wadą metody jest to, że można bezpośrednio wyznaczyć tylko różnicę przemieszczeń powierzchni pęknięcia, natomiast nie można wyznaczyć sił brzegowych, wówczas gdy na powierzchniach pęknięcia zadane są warunki brzegowe w postaci przemieszczeń.

W *metodzie dualnej* (ang. dual method) (Portela, Aliabadi i Rooke [121], [122]) dzieli się na elementy brzegowe cały brzeg ciała, tzn. brzeg zewnętrzny Γ^e i obie powierzchnie pęknięcia Γ^+ i Γ^- (rys. 2.3c). Równanie przemieszczeń stosuje się dla brzegu zewnętrznego. Metoda nazywa się metodą dualną, ponieważ dla węzłów na jednej powierzchni pęknięcia stosuje się równanie przemieszczeń (2.3), a dla drugiej - równanie sił brzegowych (2.7). W odróżnieniu od poprzedniej metody, w metodzie dualnej wyznacza się bezpośrednio przemieszczenia obu powierzchni pęknięcia. Można analizować ciała przy zadanych przemieszczeniach i obciążeniach na powierzchniach pęknięcia.

Oprócz wymienionych, podstawowych metod stosuje się także *metodę funkcji Greena* (Snyder i Cruse [140]). Przy stosowaniu tej metody dzieli się na elementy brzegowe tylko brzeg zewnętrzny. W metodzie nie dyskretyzuje się powierzchni pęknięcia. Do analizy stosuje się równanie przemieszczeń, w którym funkcje podcałkowe zależą od funkcji Greena. Funkcje Greena są sumą rozwiązań podstawowych elastostatyki i rozwiązań dodatkowych, które uwzględniają istnienie pęknięcia w materiale. Metodę można stosować dla pęknięć o prostej geometrii. Pęknięcia o złożonej geometrii można analizować *metodą numerycznej funkcji Greena* (Telles, Castor i Guimaraes [145]). Metoda wymaga dyskretyzacji brzegu zewnętrznego i pęknięcia oraz rozwiązania dwóch zadań. Najpierw wyznacza się przemieszczenia i naprężenia w ośrodku nieograniczonym zawierającym pęknięcie, na którego powierzchniach zadaje się warunki brzegowe zależne od rozwiązań podstawowych elastostatyki. Numeryczne funkcje Greena otrzymuje się przez dodanie otrzymanych rozwiązań do rozwiązań podstawowych. Następnie analizuje się ciało bez pęknięcia, jak w metodzie analitycznej funkcji Greena. W metodzie numerycznej funkcji Greena całkuje się wzdłuż pęknięcia, żeby otrzymać rozwiązania dodatkowe, a następnie wzdłuż brzegu zewnętrznego, żeby wyznaczyć rozwiązania dla ciała z pęknięciem. Gdy pęknięcie jest obciążone, wówczas należy całkować jednocześnie wzdłuż brzegu zewnętrznego i pęknięcia. Ponieważ w tej metodzie dyskretyzacji podlega brzeg zewnętrzny, dla którego stosuje się równanie przemieszczeń, oraz jedna z powierzchni pęknięcia, dla której stosuje się równanie sił brzegowych, dlatego metodę można uważać za pewien wariant metody nieciągłości przemieszczeń.

Spośród przedstawionych trzech sformułowań metoda dualna jest najbardziej uniwersalna. Podobnie jak w standardowym zastosowaniu metody elementów brzegowych dla ciał bez pęknięć, w metodzie tej dyskretyzacji podlega wyłącznie brzeg ciała, zmiennymi są przemieszczenia i obciążenia na brzegu. Można także rozwiązywać zadania dla zadanych przemieszczeń i obciążeń na brzegu.

W dalszej części pracy zostanie przedstawione sformułowanie i zastosowanie metody dualnej.

2.4. Aproksymacja wielkości brzegowych

Rozwiązanie numeryczne za pomocą metody elementów brzegowych otrzymuje się w wyniku aproksymacji geometrii brzegu oraz zmienności przemieszczeń i sil wzdłuż brzegu. Brzeg ciała jest dzielony na M elementów brzegowych. Każdy element brzegowy posiada P węzłów, których liczba zależy od przyjętej aproksymacji.

Wartości brzegowe w każdym elemencie aproksymuje się za pomocą funkcji kształtu N^p. Współrzędne x_i oraz składowe przemieszczeń u_i i sił brzegowych t_i w elemencie m aproksymuje się w następujący sposób:

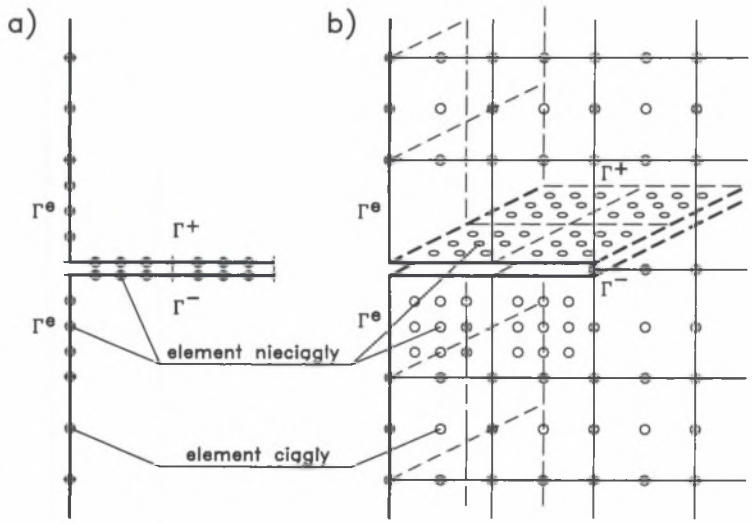
$$x_i = \sum_{p=1}^{P} N^p x_i^{mp}, \tag{2.10}$$

$$u_i = \sum_{p=1}^{P} N^p u_i^{mp}, \tag{2.11}$$

$$t_i = \sum_{p=1}^{P} N^p t_i^{mp}, \tag{2.12}$$

gdzie x_i^{mp} są współrzędnymi węzłów, a u_i^{mp} i t_i^{mp} składowymi przemieszczeń i sił brzegowych w węźle p i elemencie m.

Występujące w równaniach (2.2), (2.3) i (2.7) całki niewłaściwe narzucają określony sposób modelowania pęknięcia. Do dyskretyzacji brzegu zostaną zastosowane ciągłe i nieciągłe elementy brzegowe. W elemencie ciągłym skrajne węzły należą do brzegu elementu, podczas gdy w elemencie nieciągłym skrajne węzły przesunięte są do wnętrza elementu. Występująca w równaniach całka w sensie wartości głównej Cauchy'ego wymaga ciągłości przemieszczeń w punkcie kolokacji. Ten warunek jest spełniony dla węzła należącego zarówno do ciągłego, jak i nieciągłego elementu brzegowego. Całka w sensie wartości głównej Hadamarda wymaga ciągłości przemieszczeń i ich pochodnych w punkcie kolokacji. Z kolei ten warunek jest spełniony dla węzłów elementów nieciągłych, które są położone wewnątrz elementu.



Rys. 2.4. Dyskretyzacja elementami brzegowymi ciała z pęknięciem: a) zagadnienie dwuwymiarowe, b) zagadnienie trójwymiarowe

Fig. 2.4. Discretization of cracked structure using boundary elements: a) two-dimensional problem, b) three-dimensional problem

Biorąc pod uwagę powyższe wymagania, w metodzie dualnej zastosowano następujący sposób modelowania ciał z pęknięciami :

- brzeg pęknięcia Γ^+ i Γ^- modeluje się za pomocą nieciągłych elementów brzegowych,
- brzeg ciała Γ^e w pobliżu pęknięcia brzegowego modeluje się za pomocą nieciągłych elementów brzegowych,
- pozostały brzeg ciała Γ^e modeluje się elementami ciągłymi.

Przyjęty sposób modelowania został przedstawiony na rys. 2.4. Funkcje kształtu kwadratowych elementów brzegowych dla zagadnienia dwuwymiarowego mają postać:

$$N^1(\xi) = \frac{1}{2}\frac{\xi}{\varepsilon}(\frac{\xi}{\varepsilon} - 1), \tag{2.13}$$

$$N^2(\xi) = (1 + \frac{\xi}{\varepsilon})(1 - \frac{\xi}{\varepsilon}), \tag{2.14}$$

$$N^3(\xi) = \frac{1}{2}\frac{\xi}{\varepsilon}(\frac{\xi}{\varepsilon} + 1), \tag{2.15}$$

a dla zagadnienia trójwymiarowego są równe:

$$N^1(\xi_1,\xi_2) = (1 - \frac{\xi_1}{\varepsilon})(1 - \frac{\xi_2}{\varepsilon})\frac{\xi_1\xi_2}{4\varepsilon^2}, \tag{2.16}$$

$$N^2(\xi_1,\xi_2) = -[1 - (\frac{\xi_1}{\varepsilon})^2](1 - \frac{\xi_2}{\varepsilon})\frac{\xi_2}{2\varepsilon}, \tag{2.17}$$

$$N^3(\xi_1,\xi_2) = -(1 + \frac{\xi_1}{\varepsilon})(1 - \frac{\xi_2}{\varepsilon})\frac{\xi_1\xi_2}{4\varepsilon^2}, \tag{2.18}$$

$$N^4(\xi_1,\xi_2) = (1 + \frac{\xi_1}{\varepsilon})[1 - (\frac{\xi_2}{\varepsilon})^2]\frac{\xi_1}{2\varepsilon}, \tag{2.19}$$

$$N^5(\xi_1,\xi_2) = (1 + \frac{\xi_1}{\varepsilon})(1 + \frac{\xi_2}{\varepsilon})\frac{\xi_1\xi_2}{4\varepsilon^2}, \tag{2.20}$$

$$N^6(\xi_1,\xi_2) = [1 - (\frac{\xi_1}{\varepsilon})^2](1 + \frac{\xi_2}{\varepsilon})\frac{\xi_2}{2\varepsilon}, \tag{2.21}$$

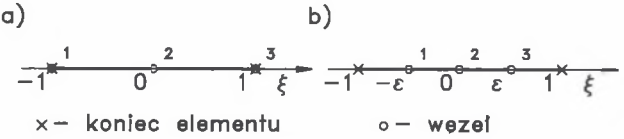
$$N^7(\xi_1,\xi_2) = -(1 - \frac{\xi_1}{\varepsilon})(1 + \frac{\xi_2}{\varepsilon})\frac{\xi_1\xi_2}{4\varepsilon^2}, \tag{2.22}$$

$$N^8(\xi_1,\xi_2) = -(1 - \frac{\xi_1}{\varepsilon})[1 - (\frac{\xi_2}{\varepsilon})^2]\frac{\xi_1}{2\varepsilon}, \tag{2.23}$$

$$N^9(\xi_1,\xi_2) = [1 - (\frac{\xi_1}{\varepsilon})^2][1 - (\frac{\xi_2}{\varepsilon})^2], \tag{2.24}$$

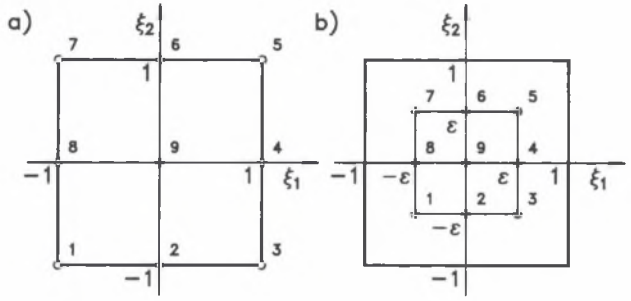
gdzie: ξ, ξ_1, ξ_2 są współrzędnymi punktu w lokalnym układzie współrzędnych $(-1 \leq \xi \leq 1)$; parametr ε definiuje położenie węzłów w elemencie. Współrzędne węzłów w układzie lokalnym są równe: $\xi' = -\varepsilon,\ 0,\ +\varepsilon$; $\varepsilon = 1$ dla elementów ciągłych, $\varepsilon < 1$ dla elementów nieciągłych.

Kwadratowe elementy brzegowe ciągłe i nieciągłe dla zagadnienia dwu- i trójwymiarowego przedstawiono na rys. 2.5 i 2.6.



Rys. 2.5. Kwadratowe elementy brzegowe dla zagadnienia dwuwymiarowego: a) element ciągły, b) element nieciągły

Fig. 2.5. Quadratic boundary elements for two-dimensional problems: a) continuous element, b) discontinuous element



Rys. 2.6. Kwadratowe elementy brzegowe dla zagadnienia trójwymiarowego: a) element ciągły, b) element nieciągły

Fig. 2.6. Quadratic boundary elements for three-dimensional problems: a) continuous element, b) discontinuous element

W celu zmniejszenia liczby węzłów na brzegu zewnętrznym, w pobliżu pęknięcia brzegowego, zamiast elementów nieciągłych można stosować elementy półnieciągłe. W elemencie półnieciągłym węzły, które znajdują się na krawędzi pęknięcia, przesunięte są do wnętrza elementu.

Całkę wzdłuż całego brzegu Γ oblicza się, całkując wzdłuż każdego elementu, a następnie sumując obliczone wartości.

W wyniku dyskretyzacji i aproksymacji wielkości brzegowych równania całkowe dla zagadnienia dwuwymiarowego przyjmują formę:

- równanie przemieszczeń dla węzłów należących do brzegu zewnętrznego:

$$c'_{ij}u'_j = \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[t_j^{mp}\int_{-1}^{1} U'_{ij}(\xi)N^{mp}(\xi)J^m(\xi)d\xi$$

$$-u_j^{mp}\int_{-1}^{1} T'_{ij}(\xi)N^{mp}(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big], \tag{2.25}$$

- równanie przemieszczeń dla węzłów należących do powierzchni pęknięcia:

$$\frac{1}{2}u_i' + \frac{1}{2}u_i'' = \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[t_j^{mp}\int_{-1}^{1} U_{ij}'(\xi)N^{mp}(\xi)J^m(\xi)d\xi$$

$$-u_j^{mp}\int_{-1}^{1} T_{ij}'(\xi)N^{mp}(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big], \tag{2.26}$$

- równanie sił brzegowych dla węzłów należących do powierzchni pęknięcia:

$$\frac{1}{2}t_j' - \frac{1}{2}t_j'' = n_i'\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[t_k^{mp}\int_{-1}^{1} U_{kij}'(\xi)N^{mp}(\xi)J^m(\xi)d\xi$$

$$-u_k^{mp}\int_{-1}^{1} T_{kij}'(\xi)N^{mp}(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big], \tag{2.27}$$

gdzie J^m jest jakobianem. Równania dla zagadnienia trójwymiarowego mają podobną formę. Różnica polega na tym, że w równaniach występują całki podwójne zamiast całek pojedynczych.

Jakobian dla zagadnienia dwuwymiarowego obliczamy w następujący sposób:

$$J^m = \sqrt{(\frac{dx_1}{d\xi})^2 + (\frac{dx_2}{d\xi})^2}, \tag{2.28}$$

a dla zagadnienia trójwymiarowego:

$$J^m = \sqrt{(\frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial\xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial\xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial\xi_2})^2 + (\frac{\partial x_3}{\partial\xi_1}\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial\xi_2})^2 + (\frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial\xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2})^2}. \tag{2.29}$$

Pochodne współrzędnych globalnych względem lokalnych w równaniach (2.28) i (2.29) są równe:

$$\frac{\partial x_i}{\partial\xi_k} = \sum_{p=1}^{P}\frac{\partial N^{mp}}{\partial\xi_k}x_i^p. \tag{2.30}$$

Brzeg ciała w punkcie jest gładki, gdy pochodne cząstkowe współrzędnych globalnych względem lokalnych, określone równaniem (2.30), w tym punkcie są funkcjami ciągłymi.

2.5. Macierzowy układ równań

W metodzie dualnej brzegowe równania całkowe stosuje się dla węzłów w następujący sposób:

- równanie przemieszczeń (2.25) stosuje się dla węzłów na brzegu zewnętrznym ciała Γ^e,
- równanie przemieszczeń (2.26) stosuje się dla węzłów na jednym brzegu pęknięcia Γ^+,
- równanie sił brzegowych (2.27) stosuje się dla węzłów na drugim brzegu pęknięcia Γ^-.

Równania (2.25), (2.26) i (2.27) ułożone dla wszystkich węzłów można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt}, \tag{2.31}$$

gdzie macierze $\mathbf{H}$ i $\mathbf{G}$ zależą od całek funkcji kształtu $N^{mp}(\xi)$, jakobianów $J^m(\xi)$ oraz odpowiednio rozwiązań podstawowych $T'_{ij}(\xi)$, $T'_{kij}(\xi)$ oraz $U'_{ij}(\xi)$ i $U'_{kij}(\xi)$. Macierze $\mathbf{u}$ i $\mathbf{t}$ zawierają wartości składowych przemieszczeń i sił brzegowych we wszystkich węzłach. Na ogół na części brzegu zadane są przemieszczenia $\mathbf{u}_z$ i nieznane są siły brzegowe $\mathbf{t}_y$, a na pozostałej części brzegu zadane są siły brzegowe $\mathbf{t}_z$ i nieznane są przemieszczenia $\mathbf{u}_y$. Indeks y dotyczy nieznanych wielkości w węźle, a indeks z znanych wielkości. Układ równań (2.31) można zapisać w postaci uwzględniającej podział zmiennych na nieznane i zadane wielkości brzegowe:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{yy} & \mathbf{H}_{yz} \\ \mathbf{H}_{zy} & \mathbf{H}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{zz} & \mathbf{G}_{zy} \\ \mathbf{G}_{yz} & \mathbf{G}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_z \\ \mathbf{t}_y \end{bmatrix}. \tag{2.32}$$

Równanie przegrupowuje się w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{yy} & -\mathbf{G}_{zy} \\ \mathbf{H}_{zy} & -\mathbf{G}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_y \\ \mathbf{t}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{zz} & -\mathbf{H}_{yz} \\ \mathbf{G}_{yz} & -\mathbf{H}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_z \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

Powyższe równanie można zapisać w prostszej postaci:

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{Bz}, \tag{2.34}$$

gdzie macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są utworzone z elementów macierzy $\mathbf{H}$ i $\mathbf{G}$; macierz $\mathbf{y}$ zawiera nieznane składowe przemieszczenia i siły brzegowe, a macierz $\mathbf{z}$ zawiera zadane wielkości brzegowe. W wyniku rozwiązania układu równań wyznacza się nieznane wielkości brzegowe.

2.6. Obliczanie całek brzegowych

Występujące w brzegowych równaniach całkowych rozwiązania podstawowe elastostatyki zależą od odległości r między punktem kolokacji $\mathbf{x}'$ i punktem całkowania $\mathbf{x}$. Rozwiązania podstawowe są funkcjami osobliwymi ze względu na odległość r, ponieważ dążą do nieskończoności, gdy ta odległość dąży do zera. Punkt kolokacji $\mathbf{x}'$ jest punktem osobliwym rozwiązań podstawowych.

Tabela 2.1 przedstawia zależność rozwiązań podstawowych elastostatyki od odległości r dla zagadnienia dwu- i trójwymiarowego i klasyfikację rzędu osobliwości. W przypadku gdy odległość r jest duża w stosunku do rozmiaru elementu brzegowego, do którego należy punkt całkowania, do obliczania całek stosuje się metodę całkowania numerycznego Gaussa. Gdy punkty kolokacji i całkowania należą do tego samego elementu brzegowego, wówczas, ze względu na osobliwość funkcji podcałkowych, stosuje się specjalne metody całkowania.

Metodom obliczania całek występujących w MEB poświęcono wiele prac. Przegląd różnych sposobów całkowania przedstawiono np. w pracy Tanaki, Sládka i Sládka [144].

Funkcje podcałkowe, które są klasyfikowane jako słabo osobliwe, najczęściej całkuje się, stosując specjalne kwadratury Gaussa. Całki funkcji, które są silnie osobliwe, najczęściej oblicza się, wykorzystując warunek, że równanie brzegowe powinno być spełnione dla ciała poruszającego się jak ciało sztywne. Wyżej wymienione całki występują w równaniu przemieszczeń, które jest powszechnie stosowane w metodzie elementów brzegowych. Z tego powodu sposób obliczania tych całek nie będzie szczegółowo omawiany w niniejszej pracy.

Tabela 2.1. Rzędy osobliwości rozwiązań podstawowych elastostatyki

Rozwiązanie podstawowe	Zagadnienie dwuwymiarowe	Zagadnienie trójwymiarowe	Rodzaj osobliwości
U_{ij}	$\log(r)$	$1/r$	słaba osobliwość
T_{ij}	$1/r$	$1/r^2$	silna osobliwość
U_{kij}	$1/r$	$1/r^2$	silna osobliwość
T_{kij}	$1/r^2$	$1/r^3$	hiperosobliwość

W przypadku metody nieciągłości przemieszczeń lub metody dualnej stosuje się równanie sił brzegowych, które zależy od hiperosobliwych rozwiązań podstawowych. Obliczanie tych całek jest jednym z trudniejszych zadań. W dwóch następnych podrozdziałach zostanie przedstawiony sposób obliczania całek hiperosobliwych rozwiązań podstawowych dla zagadnienia dwu- i trójwymiarowego.

2.6.1. Całki hiperosobliwych rozwiązań podstawowych dla zagadnienia dwuwymiarowego

Gdy punkt kolokacji o współrzędnej lokalnej ξ' należy do elementu, wzdłuż którego wykonuje się całkowanie, wówczas funkcja podcałkowa w równaniu sił brzegowych:

$$I = \oint_{-1}^{1} T_{kij}(\xi', \xi) N^{mp}(\xi) J^m(\xi) d\xi, \tag{2.35}$$

jest hiperosobliwa. Funkcję podcałkową pomnożoną przez $(\xi - \xi')^2$ rozwija się w szereg Taylora w otoczeniu punktu ξ', uwzględniając dwa wyrazy w rozwinięciu (Portela, Aliabadi i Rooke [121], Guiggiani [72]):

$$T_{kij}(\xi', \xi) N^{mp}(\xi) J^m(\xi)(\xi - \xi')^2 = g_{kij}(\xi) = g_{kij}(\xi') + g^{(1)}_{kij}(\xi')(\xi - \xi'), \tag{2.36}$$

gdzie $g^{(1)}_{kij}(\xi')$ jest pierwszą pochodną funkcji g_{kij} w punkcie ξ' ze względu na zmienną ξ.

Rozwinięcie w szereg Taylora odejmuje się i dodaje do funkcji podcałkowej:

$$I = \oint_{-1}^{1} \frac{g_{kij}(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{g_{kij}(\xi) - g_{kij}(\xi') - g_{kij}^{(1)}(\xi')(\xi - \xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi \tag{2.37}$$

$$+ g_{kij}(\xi') \oint_{-1}^{1} \frac{d\xi}{(\xi - \xi')^2} + g_{kij}^{(1)}(\xi') \oint_{-1}^{1} \frac{d\xi}{\xi - \xi'}.$$

Uwzględnienie w rozwinięciu w szereg Taylora dwóch wyrazów powoduje, że pierwsza całka po prawej stronie równania jest nieosobliwa i może być całkowana numerycznie metodą Gaussa. Dwie kolejne całki oblicza się analitycznie w następujący sposób:

$$\oint_{-1}^{1} \frac{d\xi}{(\xi - \xi')^2} = -\frac{2}{1 - \xi'^2}, \tag{2.38}$$

$$\oint_{-1}^{1} \frac{d\xi}{\xi - \xi'} = \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right|. \tag{2.39}$$

Istnienie całki funkcji hiperosobliwej wymaga ciągłości pierwszej pochodnej funkcji podcałkowej w punkcie kolokacji. Ten warunek jest spełniony w węźle elementu nieciągłego, który jest położony wewnątrz elementu.

2.6.2. Całki hiperosobliwych rozwiązań podstawowych dla zagadnienia trójwymiarowego

Gdy punkt kolokacji o współrzędnych lokalnych (ξ_1', ξ_2') należy do elementu, wzdłuż którego wykonuje się całkowanie, wówczas funkcja podcałkowa w równaniu sił brzegowych:

$$I = \oint_{-1}^{1} \oint_{-1}^{1} T_{kij}(\xi_1', \xi_2', \xi_1, \xi_2) N^{mp}(\xi_1, \xi_2) J^m(\xi_1, \xi_2), d\xi_1 d\xi_2, \tag{2.40}$$

jest hiperosobliwa. Całka jest transformowana do biegunowego układu współrzędnych (δ, θ) (Guiggiani, Krishnasamy, Rudolphi i Rizzo [73]) z początkiem w punkcie kolokacji (rys. 2.7). Jakobian tej dodatkowej transformacji jest równy δ. Następnie funkcja podcałkowa jest rozwijana w szereg Laurenta ze względu na odległość od punktu kolokacji:

$$T_{kij}(\delta, \theta) N^{mp}(\delta, \theta) J^m(\delta, \theta) \delta = F(\delta, \theta) = \frac{F_{-2}(\theta)}{\delta^2} + \frac{F_{-1}(\theta)}{\delta} + O(1). \tag{2.41}$$

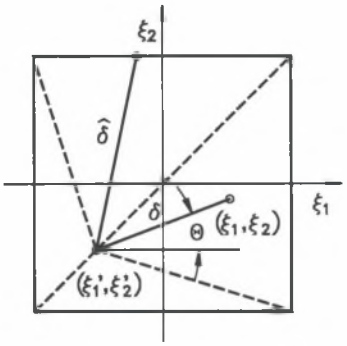
Każda wielkość w funkcji podcałkowej jest rozwijana w szereg oddzielnie. Rozwinięcie odległości $\mathbf{r}$ jest równe:

$$\mathbf{r} = \delta \mathbf{a}(\theta) + \delta^2 \mathbf{b}(\theta) + O(\delta^3), \tag{2.42}$$

gdzie:

$$\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{x}_{,\xi_1}(\xi_1', \xi_2') \cos\theta + \mathbf{x}_{,\xi_2}(\xi_1', \xi_2') \sin\theta, \qquad a(\theta) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{\frac{1}{2}}, \tag{2.43}$$

$$\mathbf{b}(\theta) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_{,\xi_1\xi_1}(\xi_1', \xi_2') \cos^2\theta + \mathbf{x}_{,\xi_1\xi_2}(\xi_1', \xi_2') \sin\theta \cos\theta + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{,\xi_2\xi_2}(\xi_1', \xi_2') \sin^2\theta. \tag{2.44}$$



Rys. 2.7. Biegunowy układ współrzędnych z początkiem w punkcie kolokacji
Fig. 2.7. Polar coordinate system with the origin at the collocation point

Rozwinięcie wielkości $1/r^3$ i $r_{,i}$ w rozwiązaniach podstawowych elastostatyki jest równe:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\delta^3 a^3} - 3\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\delta^2 a^5} + O(\frac{1}{\delta}), \tag{2.45}$$

$$r_{,i} = \frac{a_i}{a} + (\frac{b_i}{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{a^3}a_i)\delta + O(\delta^2). \tag{2.46}$$

Rozwinięcie funkcji kształtu i jakobianu wynosi:

$$N^{mp}(\delta,\theta) = N^{mp}(\xi_1',\xi_2') + \delta[N^{mp}_{,\xi_1}(\xi_1',\xi_2')\cos\theta + N^{mp}_{,\xi_2}(\xi_1',\xi_2')\sin\theta] + O(\delta^2), \tag{2.47}$$

$$J^{m}(\delta,\theta) = J^{m}(\xi_1',\xi_2') + \delta[J^{m}_{,\xi_1}(\xi_1',\xi_2')\cos\theta + J^{m}_{,\xi_2}(\xi_1',\xi_2')\sin\theta] + O(\delta^2). \tag{2.48}$$

Rozwinięcie promienia otoczenia punktu kolokacji wynosi:

$$\delta = \alpha(\varepsilon,\theta) = \beta(\theta)\varepsilon + \gamma(\theta)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \tag{2.49}$$

gdzie:

$$\beta(\theta) = \frac{1}{a}, \quad \gamma(\theta) = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{a^4}. \tag{2.50}$$

Całka hiperosobliwa w równaniu (2.40) jest przekształcana do nieosobliwej formy, która może być całkowana numerycznie:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\hat{\delta}(\theta)} [F(\delta,\theta) - \frac{F_{-2}(\theta)}{\delta^2} - \frac{F_{-1}(\theta)}{\delta}]d\delta d\theta$$

$$+ \int_0^{2\pi} \{F_{-1}(\theta)\ln|\frac{\hat{\delta}(\theta)}{\beta(\theta)}| - F_{-2}(\theta)[\frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\hat{\delta}(\theta)}]\}d\theta, \tag{2.51}$$

gdzie $\hat{\delta}$ jest promieniem brzegu elementu (rys. 2.7). Element jest dzielony na cztery trójkąty, całkę oblicza się dla każdego elementu oddzielnie, a następnie wyniki sumuje się. Przedstawiona metoda całkowania może być stosowana dla elementów o zakrzywionych powierzchniach i zaburzonym położeniu węzłów.

Rozdział 3

Wprowadzenie do metody elementów brzegowych w analizie dynamicznej pęknięć

W rozdziale przedstawiono brzegowe równania całkowe stosowane w analizie dynamicznej pęknięć. Wykazano podobieństwo równań oraz realizacji numerycznej metod stosowanych w analizie dynamicznej i statycznej. Przedstawiono równania określające pola przemieszczeń i naprężeń w otoczeniu wzrastającego dynamicznie pęknięcia. Wymienione pola są funkcjami dynamicznych współczynników intensywności naprężeń (DWIN) i prędkości wzrostu pęknięcia. Od wartości tych współczynników zależy, czy nastąpi wzrost pęknięcia lub jego zatrzymanie oraz kierunek propagacji pęknięcia. Podano równania określające całki niezależne od konturu całkowania. Opisano metody numeryczne obliczania DWIN na podstawie rozwarcia wierzchołka pęknięcia oraz całki niezależnej od konturu całkowania. Przyjęto, że o kierunku wzrostu pęknięcia decyduje maksymalne naprężenie obwodowe. Omówiono zależność tego naprężenia od DWIN i prędkości wzrostu pęknięcia.

3.1. Metoda elementów brzegowych w analizie dynamicznej pęknięć

Rozważmy ciało o dowolnym kształcie zajmujące obszar Ω i posiadające brzeg Γ, przedstawione na rys. 2.1. Na części brzegu ciała Γ_u zadane są warunki brzegowe w postaci przemieszczeń $u_i^b(\mathbf{x},t)$, a na pozostałym brzegu Γ_t obciążenia $t_i^b(\mathbf{x},t)$ w następujący sposób:

$$u_i(\mathbf{x},t) = u_i^b(\mathbf{x},t), \quad dla \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t_i(\mathbf{x},t) = t_i^b(\mathbf{x},t), \quad dla \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t. \tag{3.1}$$

W zagadnieniu dynamicznym zadane warunki brzegowe są funkcjami położenia punktu $\mathbf{x}$ i czasu t. W całym obszarze Ω zajmowanym przez ciało zadane są warunki początkowe w chwili $t = 0$. Początkowe przemieszczenia $u_i^o(\mathbf{x})$ i początkowe prędkości $v_i^o(\mathbf{x})$ określone są w następujący sposób:

$$u_i(\mathbf{x},0) = u_i^o(\mathbf{x}), \quad v_i(\mathbf{x},0) = v_i^o(\mathbf{x}), \quad dla \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t = 0. \tag{3.2}$$

Dla ciała znajdującego się w spoczynku w chwili początkowej $u_i^o(\mathbf{x}) = 0$ i $v_i^o(\mathbf{x}) = 0$.

Rozważmy ciało, którego materiał jest jednorodny, izotropowy i liniowo-sprężysty. Rozpatrzymy przypadek, gdy w chwili początkowej ciało znajduje się w spoczynku i nie jest obciążone siłami objętościowymi. Przemieszczenie dowolnego punktu ciała można wyznaczyć, stosując następujące brzegowe równanie całkowe przemieszczeń:

$$c_{ij}(\mathbf{x}')u_j(\mathbf{x}',t) = \int_\Gamma U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t) * t_j(\mathbf{x},t)d\Gamma(\mathbf{x}) - \oint_\Gamma T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t) * u_j(\mathbf{x},t)d\Gamma(\mathbf{x}), \qquad (3.3)$$

gdzie $U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)$ i $T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)$ są rozwiązaniami podstawowymi elastodynamiki. Symbol $*$ oznacza splot względem czasu, który dla dwóch dowolnych tensorów $g_{ij}(\mathbf{x},t)$ i $h_j(\mathbf{x},t)$ jest zdefiniowany następująco:

$$g_{ij}(\mathbf{x},t) * h_j(\mathbf{x},t) = \int_0^t g_{ij}(\mathbf{x},t-\tau)h_j(\mathbf{x},\tau)d\tau, \quad dla \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in < 0,+\infty). \qquad (3.4)$$

W odróżnieniu od zagadnienia statycznego rozwiązania podstawowe elastodynamiki $U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)$ i $T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)$ oraz przemieszczenia $u_j(\mathbf{x},t)$ i siły brzegowe $t_j(\mathbf{x},t)$ są funkcjami czasu. Pozostałe zmienne w równaniu (3.3) mają takie samo znaczenie jak zmienne w równaniu (2.2) dla zagadnienia statycznego.

Rozpatrzmy ciało posiadające pęknięcie, którego powierzchnie pokrywają się. Równania przemieszczeń i sił brzegowych dla punktu $\mathbf{x}'$, w którym powierzchnia pęknięcia jest gładka, mają formę:

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}',t)+\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}'',t) = \int_\Gamma U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)*t_j(\mathbf{x},t)d\Gamma(\mathbf{x}) - \oint_\Gamma T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)*u_j(\mathbf{x},t)d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{2}t_j(\mathbf{x}',t) - \frac{1}{2}t_j(\mathbf{x}'',t) = n_i(\mathbf{x}')\Big[\int_\Gamma U_{kij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t) * t_k(\mathbf{x},t)d\Gamma(\mathbf{x})$$

$$- \oint_\Gamma T_{kij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t) * u_k(\mathbf{x},t)d\Gamma(\mathbf{x})\Big]. \qquad (3.6)$$

Oznaczenia zmiennych są takie same jak dla zagadnienia statycznego. Przedstawione równania przemieszczeń i sił brzegowych (3.3), (3.5) i (3.6) mają podobne formy jak równania (2.2), (2.3) i (2.7). Różnica polega na tym, że występujące w nich wielkości są funkcjami czasu. Równania wymagają całkowania nie tylko wzdłuż brzegu ciała, ale także względem czasu w celu obliczenia splotów czasowych.

Metoda elementów brzegowych pozwala na rozwiązywanie zagadnień dynamicznych za pomocą metody transformacji całkowych, metody rozwiązań w dziedzinie czasu i metody podwójnej zasady wzajemności (Manolis i Beskos [96], Dominguez [32]). Przegląd prac dotyczących zastosowania metody elementów brzegowych w dynamice został przedstawiony przez Beskosa [14], [15].

Przedstawione powyżej równania stosowane są w metodzie rozwiązań w dziedzinie czasu, która jest szerzej omawiana w rozdziale 5. Brzegowe równania całkowe stosowane w metodzie transformacji całkowej, przedstawionej w rozdziale 4, i w metodzie podwójnej zasady wzajemności, omawianej w rozdziale 6, mają także podobne formy jak w zagadnieniu statycznym.

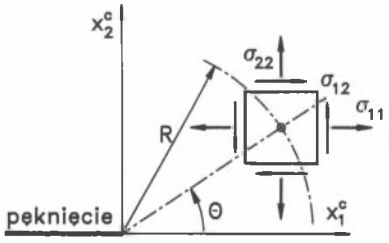
Omawiane w rozdziale 2.2 własności brzegowych równań całkowych stosowanych dla pęknięcia dotyczą także zagadnień dynamicznych. Z tego powodu w analizie dynamicznej pęknięć za pomocą MEB stosuje się takie same metody jak dla zagadnienia statycznego: metodę podziału na podobszary, metodę nieciągłości przemieszczeń i metodę dualną. Stosowana jest także metoda numerycznej funkcji Greena. Geometrię brzegu, zmienność przemieszczeń i obciążeń wzdłuż brzegu można aproksymować funkcjami kształtu przedstawionymi w rozdziale 2.4.

Macierzowe układy równań dla zagadnienia dynamicznego można przegrupowywać zgodnie z warunkami brzegowymi, tak jak dla zagadnienia statycznego, opisanego w rozdziale 2.5.

Można wykazać, że sploty czasowe oraz transformaty całkowe rozwiązań podstawowych elastodynamiki mają ten sam rząd osobliwości, ze względu na odległość pomiędzy punktem kolokacji i całkowania, co odpowiednie rozwiązania podstawowe elastostatyki. Dlatego do całkowania rozwiązań hiperosobliwych, występujących w równaniu sił brzegowych, można zastosować metodę odjęcia rozwiązań podstawowych elastodynamiki i elastostatyki. Otrzymana różnica jest nieosobliwa i może być całkowana metodą numeryczną Gaussa. Do tej różnicy dodaje się rozwiązania podstawowe elastostatyki, które można całkować metodami opisanymi w rozdziale 2.6.1 i 2.6.2. Transformaty całkowe rozwiązań podstawowych elastodynamiki dążą do rozwiązań podstawowych elastostatyki, gdy gęstość materiału lub częstość dąży do zera. Całki względem czasu rozwiązań podstawowych elastodynamiki dążą do rozwiązań podstawowych elastostatyki, gdy gęstość materiału dąży do zera lub krok czasowy dąży do nieskończoności. Wykorzystując te własności rozwiązań podstawowych oraz podobieństwo brzegowych równań całkowych, można otrzymać rozwiązania statyczne, stosując programy komputerowe dla zagadnienia dynamicznego.

3.2. Przemieszczenia i naprężenia w otoczeniu dynamicznie wzrastającego wierzchołka pęknięcia

Zakłada się, że pęknięcie wzrasta z prędkością $c(\tau)$, która jest funkcją czasu i wprowadza lokalny układ współrzędnych (x_1^c, x_2^c), związany z poruszającym się wierzchołkiem pęknięcia. Oś x_1^c ma kierunek styczny do krawędzi pęknięcia w wierzchołku (rys. 3.1).



Rys. 3.1. Składowe stanu naprężenia w pobliżu wierzchołka pęknięcia w układzie współrzędnych pęknięcia (x_1^c, x_2^c)

Fig. 3.1. Stress components near the crack tip in the crack co-ordinate system (x_1^c, x_2^c)

Przemieszczenia w układzie związanym z pęknięciem można wyrazić w funkcji dynamicznych współczynników intensywności naprężeń i chwilowej prędkości wzrostu pęknięcia w następujący sposób (Nishioka i Atluri [114]):

$$u_1 = \frac{K_I B_I}{\mu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big[\sqrt{R_1}\cos(\frac{1}{2}\theta_1) - \frac{2\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)}\sqrt{R_2}\cos(\frac{1}{2}\theta_2)\Big] +$$
$$+\frac{K_{II}B_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big[\sqrt{R_1}\sin(\frac{1}{2}\theta_1) - \frac{(1+\beta_2^2)}{2}\sqrt{R_2}\sin(\frac{1}{2}\theta_2)\Big] + ..., \tag{3.7}$$

$$u_2 = \frac{K_I B_I}{\mu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big[-\beta_1\sqrt{R_1}\sin(\frac{1}{2}\theta_1) + \frac{2\beta_1}{(1+\beta_2^2)}\sqrt{R_2}\sin(\frac{1}{2}\theta_2)\Big] +$$
$$+\frac{K_{II}B_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big[\beta_1\sqrt{R_1}\cos(\frac{1}{2}\theta_1) - \frac{(1+\beta_2^2)}{2\beta_2}\sqrt{R_2}\cos(\frac{1}{2}\theta_2)\Big] + ... \tag{3.8}$$

W podobny sposób można wyrazić składowe stanu naprężenia:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I B_I}{\sqrt{2\pi}}\Big[(1+2\beta_1^2-\beta_2^2)\frac{\cos(\frac{1}{2}\theta_1)}{\sqrt{R_1}} - \frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)}\frac{\cos(\frac{1}{2}\theta_2)}{\sqrt{R_2}}\Big] +$$
$$+\frac{K_{II}B_{II}}{\sqrt{2\pi}}\Big[-(1+2\beta_1^2-\beta_2^2)\frac{\sin(\frac{1}{2}\theta_1)}{\sqrt{R_1}} + (1+\beta_2^2)\frac{\sin(\frac{1}{2}\theta_2)}{\sqrt{R_2}}\Big] + ..., \tag{3.9}$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I B_I}{\sqrt{2\pi}}\Big[-(1+\beta_2^2)\frac{\cos(\frac{1}{2}\theta_1)}{\sqrt{R_1}} + \frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)}\frac{\cos(\frac{1}{2}\theta_2)}{\sqrt{R_2}}\Big] +$$
$$+\frac{K_{II}B_{II}}{\sqrt{2\pi}}\Big[(1+\beta_2^2)\frac{\sin(\frac{1}{2}\theta_1)}{\sqrt{R_1}} - (1+\beta_2^2)\frac{\sin(\frac{1}{2}\theta_2)}{\sqrt{R_2}}\Big] + ..., \tag{3.10}$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I B_I}{\sqrt{2\pi}}\Big[2\beta_1\frac{\sin(\frac{1}{2}\theta_1)}{\sqrt{R_1}} - 2\beta_1\frac{\sin(\frac{1}{2}\theta_2)}{\sqrt{R_2}}\Big] +$$
$$+\frac{K_{II}B_{II}}{\sqrt{2\pi}}\Big[2\beta_1\frac{\cos(\frac{1}{2}\theta_1)}{\sqrt{R_1}} - \frac{(1+\beta_2^2)^2}{2\beta_2}\frac{\cos(\frac{1}{2}\theta_2)}{\sqrt{R_2}}\Big] + ..., \tag{3.11}$$

gdzie:

$$\beta_1 = \sqrt{1-(\frac{c}{c_1})^2}, \qquad \beta_2 = \sqrt{1-(\frac{c}{c_2})^2}, \tag{3.12}$$

$$B_I = \frac{1+\beta_2^2}{D}, \qquad B_{II} = \frac{2\beta_2}{D}, \qquad D = 4\beta_1\beta_2 - (1+\beta_2^2)^2, \tag{3.13}$$

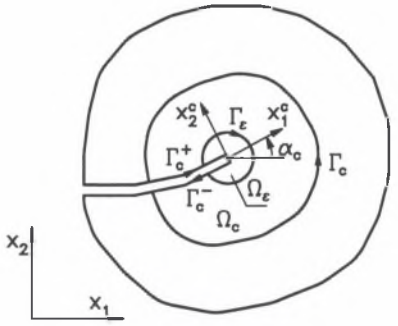
$$R_i = R\sqrt{1-(\frac{c}{c_i})^2\sin^2\theta}, \qquad \tan\theta_i = \beta_i\tan\theta, \tag{3.14}$$

gdzie K_I i K_{II} są dynamicznymi współczynnikami intensywności naprężeń, które odpowiadają rozciąganiu i ścinaniu wzdłużnemu pęknięcia; μ jest modułem sprężystości poprzecznej; c_1 i c_2 to prędkości propagacji fali podłużnej i poprzecznej; R oznacza odległość od wierzchołka pęknięcia, a θ jest kątem przedstawionym na rys. 3.1.

3.3. Całki niezależne od konturu całkowania

Całki niezależne od konturu całkowania mogą być zastosowane do wyznaczenia współczynników intensywności naprężeń. Wartości całek zależą od wielkości wyznaczanych wzdłuż konturu, który może znajdować się w dużej odległości od wierzchołka pęknięcia. Z tego powodu wyniki otrzymywane tą metodą są dokładne, nawet przy zastosowaniu małej liczby elementów do dyskretyzacji pęknięcia. W przypadku zagadnień dynamicznych całki niezależne od konturu całkowania zależą dodatkowo od całki po obszarze ograniczonym konturem.

Zakłada się, że wzrastające pęknięcie nie zmienia gwałtownie kierunku i prędkości. Pęknięcie wraz z konturem całkowania, który nie zmienia swojego położenia w przestrzeni, przedstawiono na rys. 3.2.



Rys. 3.2. Kontur otaczający wierzchołek pęknięcia
Fig. 3.2. Contour surrounding crack tip

Globalny układ współrzędnych oznaczono przez (x_1, x_2), a lokalny, związany z wierzchołkiem pęknięcia, przez (x_1^c, x_2^c). Na rys. 3.2 Γ_c jest konturem otaczającym wierzchołek, Γ_c^+ i Γ_c^- to fragmenty konturu należące do górnej i dolnej powierzchni pęknięcia, Γ_ε oznacza kontur otaczający wierzchołek w nieskończenie małej odległości, Ω_c jest obszarem ograniczonym konturem Γ_c, a Ω_ε obszarem ograniczonym konturem Γ_ε. Założono, że kontur Γ_c jest niezmienny w przestrzeni oraz że powierzchnie pęknięcia są nieobciążone. W analizie dynamicznej pęknięć stosowanych jest kilka całek niezależnych od konturu całkowania. Szczegółową analizę różnych całek stosowanych w mechanice pękania przedstawiono w pracy Atluriego [10]. Do najczęściej stosowanych należą całki podane przez Nishiokę i Atluriego [114], [115]:

$$J_k' = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} [(W+T)n_k - t_i u_{i,k}] d\Gamma =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_c} [(W+T)n_k - t_i u_{i,k}] d\Gamma + \int_{\Omega_c - \Omega_\varepsilon} \rho[\ddot{u}_i u_{i,k} - \dot{u}_i \dot{u}_{i,k}] d\Omega, \tag{3.15}$$

przez Atluriego [9]:

$$J_k = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} [(W-T)n_k - t_i u_{i,k}] d\Gamma =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_c} [(W-T)n_k - t_i u_{i,k}] d\Gamma + \int_{\Omega_c - \Omega_\varepsilon} \rho[\ddot{u}_i u_{i,k} + \dot{u}_i \dot{u}_{i,k}] d\Omega, \tag{3.16}$$

i przez Kishimoto, Aoki i Sakatę [86]:

$$\hat{J}_k = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} [W n_k - t_i u_{i,k}] d\Gamma =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_c} [W n_k - t_i u_{i,k}] d\Gamma + \int_{\Omega_c - \Omega_\varepsilon} \rho \ddot{u}_i u_{i,k} d\Omega, \tag{3.17}$$

gdzie ρ jest gęstością materiału; n_k jest składową wektora jednostkowego, normalnego do konturu i zwróconego na zewnątrz; W jest właściwą energią sprężystą; T jest właściwą energią kinetyczną; kropka powyżej zmiennej oznacza pochodną względem czasu, np. $\partial u_i / \partial \tau = \dot{u}_i$; liczba kropek oznacza rząd pochodnej; indeks poprzedzony przecinkiem oznacza pochodną zmiennej względem współrzędnej punktu, np. $\partial u_i / \partial x_k = u_{i,k}$.

Na podstawie całek niezależnych od konturu całkowania można wyznaczyć prędkość uwalniania energii sprężystej G w następujący sposób:

$$G = \frac{c_k}{c} J'_k = \frac{c_k}{c} (\hat{J}_k + \int_{\Gamma_\varepsilon} T n_k d\Gamma) = \frac{c_k}{c} (J_k + 2 \int_{\Gamma_\varepsilon} T n_k d\Gamma), \tag{3.18}$$

gdzie c_k jest składową prędkości wzrostu pęknięcia w globalnym układzie współrzędnych.

Dla pęknięcia stacjonarnego energia kinetyczna jest nieosobliwa, więc całka $\int_{\Gamma_\varepsilon} T n_k d\Gamma$ dąży do zera. W tym przypadku całki J'_k, $\hat{J}_k$ i J_k są sobie równe. Dla wzrastającego pęknięcia całki mają różne wartości, ponieważ wyrażenie $\int_{\Gamma_\varepsilon} T n_k d\Gamma$ jest różne od zera.

Oprócz całek o konturze nie zmieniającym swego położenia w przestrzeni, stosowane są także całki wzdłuż konturu przemieszczającego się razem z wierzchołkiem pęknięcia. Jedną z takich całek jest całka podana przez Bui [19]:

$$J_1^* = \int_{\Gamma_c} [(W - T) n_1 - t_i u_{i,1} - c \rho \dot{u}_i u_{i,1} n_1] d\Gamma + \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_c} \rho \dot{u}_i u_{i,1} d\Omega. \tag{3.19}$$

Zależność między całkami niezależnymi od konturu całkowania a współczynnikami intensywności naprężeń dla pęknięć stacjonarnych i dynamicznie wzrastających podano w pracy Nishioki i Atluriego [114].

Jeden ze sposobów wyznaczania DWIN na podstawie całki niezależnej od konturu całkowania zostanie przedstawiony w rozdziale 3.4.2.

3.4. Metody numeryczne określania dynamicznych współczynników intensywności naprężeń i kierunku wzrostu pęknięcia

3.4.1. Obliczanie DWIN na podstawie rozwarcia wierzchołka pęknięcia

Dynamiczne współczynniki intensywności naprężeń obliczono, porównując wartości numeryczne przemieszczeń powierzchni pęknięcia ze znanymi wyrażeniami określającymi przemieszczenia w otoczeniu wierzchołka pęknięcia (porównaj równania (3.7) (3.8)). DWIN określone tą metodą są równe:

$$K_I = 2\mu\sqrt{\frac{\pi}{2R}}\frac{4\beta_1\beta_2 - (1+\beta_2^2)^2}{4\beta_1(1-\beta_2^2)}\Delta u_2^{BC}, \tag{3.20}$$

$$K_{II} = 2\mu\sqrt{\frac{\pi}{2R}}\frac{4\beta_1\beta_2 - (1+\beta_2^2)^2}{4\beta_2(1-\beta_2^2)}\Delta u_1^{BC}, \tag{3.21}$$

gdzie Δu_1^{BC} i Δu_2^{BC} są różnicami przemieszczeń punktów B i C na przeciwległych powierzchniach pęknięcia w kierunku stycznym i prostopadłym do pęknięcia; R jest odległością punktów B i C od wierzchołka pęknięcia.

Gdy prędkość wzrostu c dąży do 0, wówczas wyrażenia w równaniach (3.20) i (3.21) są równe:

$$\lim_{c\to 0}\frac{4\beta_1\beta_2 - (1+\beta_2^2)^2}{4\beta_1(1-\beta_2^2)} = \frac{1}{\kappa+1}, \tag{3.22}$$

$$\lim_{c\to 0}\frac{4\beta_1\beta_2 - (1+\beta_2^2)^2}{4\beta_2(1-\beta_2^2)} = \frac{1}{\kappa+1}, \tag{3.23}$$

gdzie $\kappa = 3-4\nu$ dla płaskiego stanu odkształcenia i $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ dla płaskiego stanu naprężenia. W tym przypadku równania (3.20) i (3.21) mają postać równań stosowanych w analizie pęknięć stacjonarnych:

$$K_I = \frac{2\mu}{\kappa+1}\sqrt{\frac{\pi}{2R}}\Delta u_2^{BC}, \tag{3.24}$$

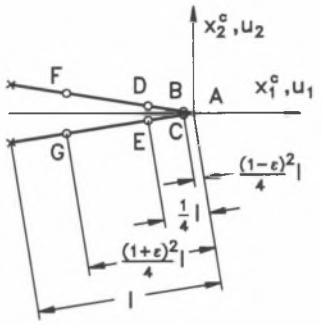
$$K_{II} = \frac{2\mu}{\kappa+1}\sqrt{\frac{\pi}{2R}}\Delta u_1^{BC}. \tag{3.25}$$

DWIN można obliczyć bezpośrednio na podstawie względnych przemieszczeń powierzchni pęknięcia modelowanego standardowymi elementami nieciągłymi. Znacznie dokładniejsze rozwiązania można otrzymać, zmieniając w określony sposób położenie węzłów elementu prostoliniowego w pobliżu wierzchołka pęknięcia (rys. 3.3). Nowe odległości par węzłów: B-C, D-E i F-G od wierzchołka A są równe: $(1-\varepsilon)^2 l/4$, $1/4l$ i $(1+\varepsilon)^2 l/4$, gdzie l jest długością elementu brzegowego. Współrzędne węzłów w układzie lokalnym są takie same jak innych elementów nieciągłych, tzn. $\xi' = -\varepsilon,\ 0,\ \varepsilon$. Taki element o zmienionym położeniu węzłów nazywa się ćwiartkowym (ang. quarter-point-element), gdyż odległość środkowej pary węzłów od wierzchołka pęknięcia jest równa 1/4 długości elementu.

Dla elementu ćwiartkowego współrzędna lokalna ξ jest funkcją pierwiastkową odległości R mierzonej od wierzchołka pęknięcia:

$$\xi = +1 - 2\sqrt{\frac{R}{l}}, \text{ dla wierzchołka o współrzędnej } \xi = +1, \tag{3.26}$$

$$\xi = -1 + 2\sqrt{\frac{R}{l}}, \text{ dla wierzchołka o współrzędnej } \xi = -1. \tag{3.27}$$



Rys. 3.3. Nieciągły element ćwiartkowy
Fig. 3.3. Discontinuous quarter-point element

Po tej modyfikacji przemieszczenia dla elementów ćwiartkowych są aproksymowane przez funkcje:

$$u = a_1 + a_2\sqrt{R} + a_3 R, \tag{3.28}$$

gdzie a_1, a_2, a_3 są współczynnikami, które zależą od przemieszczeń węzłów elementu. Ten rodzaj funkcji lepiej aproksymuje pole przemieszczeń w pobliżu wierzchołka pęknięcia niż funkcje standardowego elementu kwadratowego. Opisana modyfikacja jest podobna do tej, która jest stosowana dla ciągłych ćwiartkowych elementów brzegowych (Blanford, Ingraffea i Ligget [16], Martinez i Dominguez [97], Smith [138]).

3.4.2. Obliczanie DWIN na podstawie całek niezależnych od konturu całkowania

Do obliczenia DWIN dla pęknięcia stacjonarnego zastosowano $\hat{J}_1$ -całkę. W celu otrzymania współczynników intensywności naprężeń dla mieszanego rodzaju obciążenia pęknięcia $\hat{J}_1$ -całkę rozkłada się w następujący sposób:

$$\hat{J}_1 = \hat{J}_1^I + \hat{J}_1^{II}, \tag{3.29}$$

gdzie:

$$\hat{J}_1^\beta = \int_{\Gamma_c} (W^\beta n_1 - t_i^\beta u_{i,1}^\beta) d\Gamma + \int_{\Omega_c} \rho \ddot{u}_i^\beta u_{i,1}^\beta dA, \quad \beta = I,\ II, \tag{3.30}$$

gdzie indeks β oznacza rodzaj obciążenia pęknięcia.

Przemieszczenia rozkłada się na składniki symetryczne i antysymetryczne w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_1 + u_1' \\ u_2 - u_2' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1^{II} \\ u_2^{II} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 + u_2' \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

a naprężenia:

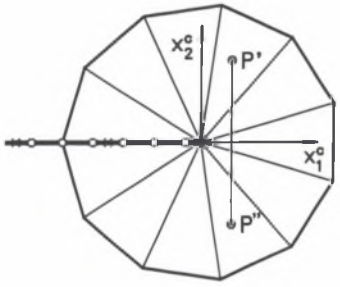
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^I \\ \sigma_{22}^I \\ \sigma_{12}^I \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} + \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} - \sigma_{12}' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^{II} \\ \sigma_{12}^{II} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} - \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} + \sigma_{12}' \end{bmatrix}, \tag{3.32}$$

gdzie u_i, σ_{ij}, u_i' i σ_{ij}' są przemieszczeniami i naprężeniami w punktach $P(x_1^c, x_2^c)$ i $P'(x_1^c, -x_2^c)$ symetrycznie położonymi względem pęknięcia.

Odkształcenia i pochodne przemieszczeń względem współrzędnych rozkłada się w ten sam sposób jak naprężenia, a siły brzegowe i przyspieszenia rozkłada się jak przemieszczenia. Znając $\hat{J}_1^\beta$ -całkę możemy wyznaczyć współczynniki intensywności naprężeń w następujący sposób:

$$K_I = \sqrt{\frac{8\mu}{\kappa+1}\hat{J}_1^I} \quad \text{i} \quad K_{II} = \sqrt{\frac{8\mu}{\kappa+1}\hat{J}_1^{II}}. \tag{3.33}$$

Znaki K_I i K_{II} określa się na podstawie względnych przemieszczeń powierzchni pęknięcia. Przyjęto, że konturem jest wielokąt foremny, którego środek znajduje się w wierzchołku pęknięcia. Pierwszym i ostatnim punktem konturu są węzły na powierzchniach pęknięcia. Obszar ograniczony przez kontur dzieli się na trójkąty (rys. 3.4).



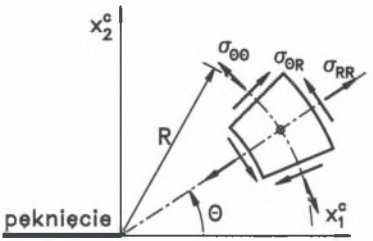
Rys.3.4. Kontur otaczający wierzchołek pęknięcia stosowany w obliczeniach numerycznych

Fig.3.4. Contour surrounding crack tip applied in numerical computations

Naroża trójkątów są usytuowane symetrycznie względem pęknięcia. Wielkości potrzebne do określenia $\hat{J}_1$-całki: pochodne przemieszczeń, odkształcenia, naprężenia i siły brzegowe wyznacza się z odpowiednich brzegowych równań całkowych. Przyspieszenia można wyznaczyć na podstawie przemieszczeń wyznaczonych w różnych chwilach czasowych i metody różnic skończonych lub bardziej dokładnie, na podstawie pochodnych naprężeń i równania ruchu (Fedeliński [55]). Przemieszczenia w pierwszej metodzie i pochodne naprężeń w drugiej metodzie wyznacza się, stosując brzegowe równania całkowe. Całka wzdłuż konturu w równaniu (3.30) wyznaczana jest metodą trapezów, a całka po obszarze ograniczonym konturem metodą Gaussa.

3.4.3. Określanie kierunku wzrostu pęknięcia

Kierunek wzrostu pęknięcia zależy od prędkości wzrostu i DWIN. W zastosowanej metodzie przyjęto, że pęknięcie wzrasta w kierunku prostopadłym do kierunku maksymalnego naprężenia obwodowego $\sigma_{\theta\theta}$, pokazanego na rys. 3.5.



Rys. 3.5. Składowe stanu naprężenia w pobliżu wierzchołka pęknięcia w biegunowym układzie współrzędnych (R, Θ)

Fig. 3.5. Stress components near the crack tip in the polar co-ordinate system (R, Θ)

Takie samo kryterium zostało zastosowane w pracy Swensona i Ingraffea [141], Seeliga i Grossa [129] do określenia kierunku wzrostu. Naprężenie obwodowe jest równe:

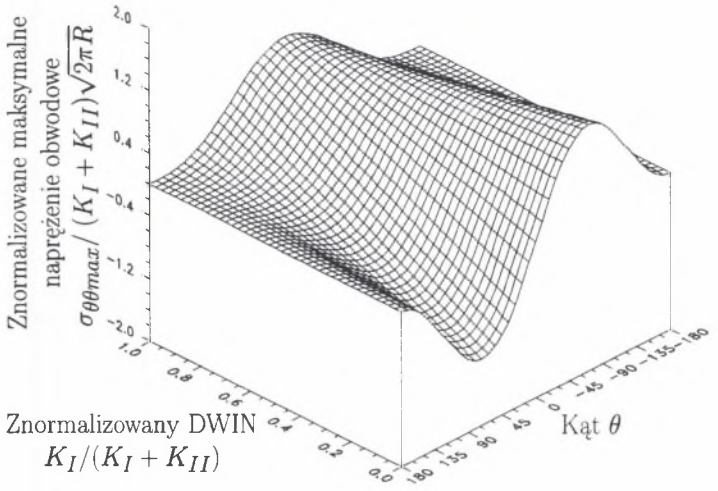
$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} \sin^2\theta + \sigma_{22} \cos^2\theta - 2\sigma_{12} \sin\theta \cos\theta. \tag{3.34}$$

Zmienność znormalizowanych naprężeń obwodowych $\sigma_{\theta\theta}/(K_I + K_{II})\sqrt{2\pi R}$, jako funkcję znormalizowanych DWIN $K_I/(K_I + K_{II})$ i kąta θ, pokazano na rys. 3.6 i rys. 3.7 dla współczynnika Poissona $\nu = 0.3$ i przykładowo, dla dwóch znormalizowanych prędkości wzrostu pęknięcia $c/c_2 = 0.1$ i $c/c_2 = 0.8$.

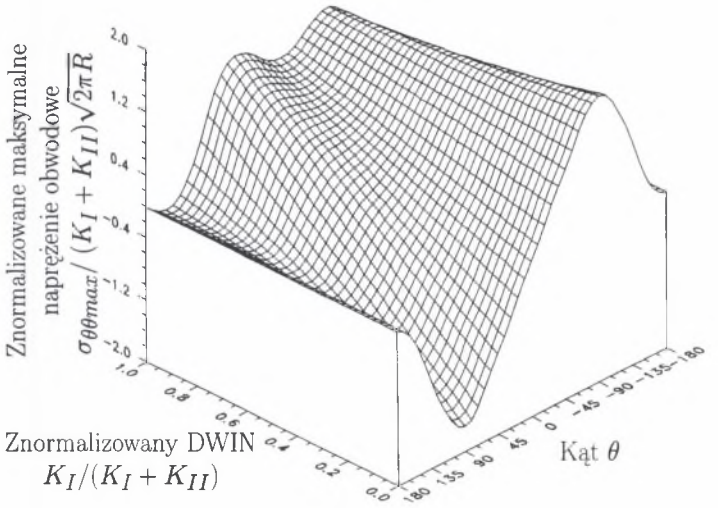
Wykresy dla I i II rodzaju obciążenia przedstawiono w pracy Freunda [63]. Naprężenia pokazano tylko dla dodatnich K_{II}. Na podstawie rys. 3.6 można stwierdzić, że dla małych prędkości naprężenie obwodowe ma jedno maksimum dla określonego K_I i K_{II}. Dla większych prędkości naprężenie obwodowe ma dwa maksima (rys. 3.7). Na rys. 3.8 i rys. 3.9 pokazano kąt, dla którego naprężenie obwodowe jest maksymalne, oraz wartość tego maksimum jako funkcję znormalizowanego DWIN i prędkości wzrostu pęknięcia. Dla prędkości wzrostu dążącej do zera kąt maksymalnego naprężenia obwodowego jest równy dla I rodzaju obciążenia $\theta = 0^o$, a dla II rodzaju $\theta = -70.5^o$. Te wyniki są zgodne z wynikami dla statycznych pól naprężeń (Erdogan i Sih [38]).

Kąt wzrostu pęknięcia dla I rodzaju obciążenia jest równy $\theta = 0^o$ dla prędkości mniejszych od około $c/c_2 = 0.6$, natomiast dla większych jest ujemny. Jak pokazano na rys.3.7, w tym przypadku możliwe są dwa maksima o tych samych wartościach. Z powodu symetrii pola naprężeń względem osi pęknięcia x_1^c dla I rodzaju i antysymetrii dla II rodzaju, kąty odpowiadające maksymalnym naprężeniom obwodowym dla ujemnych wartości K_{II} mają przeciwne wartości. Wartości maksymalnych naprężeń obwodowych wzrastają z prędkością.

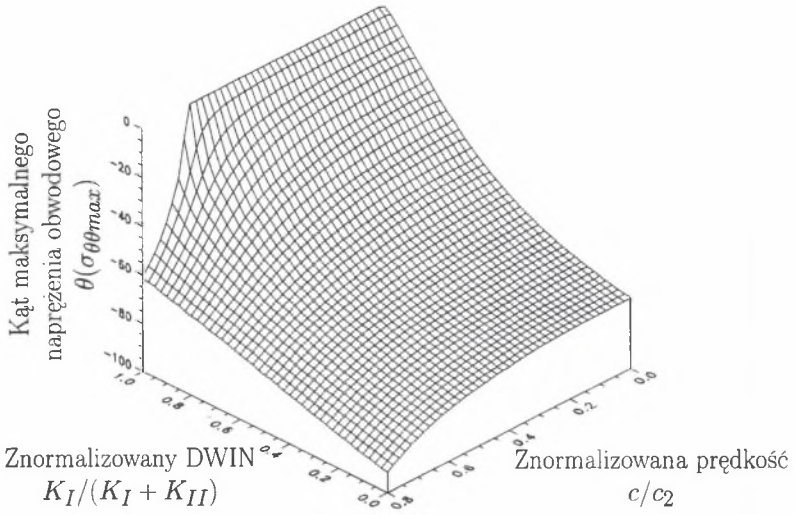
Przedstawione kryterium maksymalnego naprężenia obwodowego jest jednym z kryteriów stosowanych w mechanice pękania. W pracach Mroza i Seweryna [102], [103] wartości krytycznych obciążeń i kierunki wzrostu pęknięcia określono na podstawie nielokalnego naprężeniowego kryterium kruchego pękania.



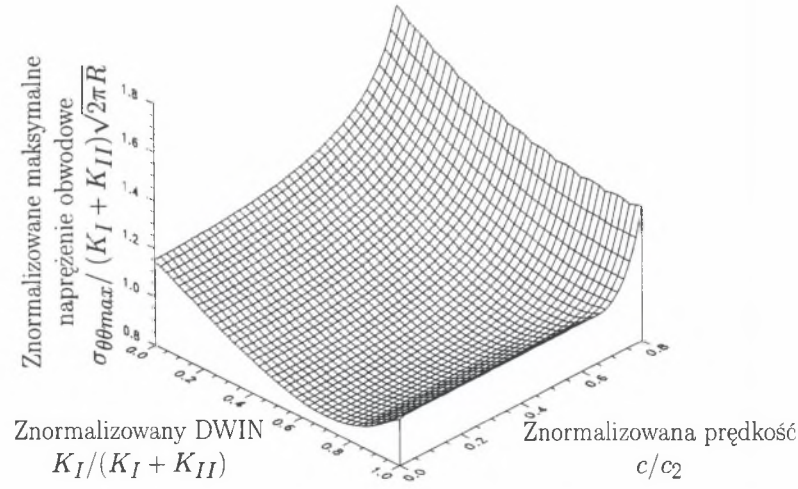
Rys. 3.6. Znormalizowane naprężenie obwodowe $\sigma_{\theta\theta}/(K_I + K_{II})\sqrt{2\pi R}$ dla $c/c_2 = 0.1$
Fig. 3.6. Normalized circumferential stress $\sigma_{\theta\theta}/(K_I + K_{II})\sqrt{2\pi R}$ for $c/c_2 = 0.1$



Rys. 3.7. Znormalizowane naprężenie obwodowe $\sigma_{\theta\theta}/(K_I + K_{II})\sqrt{2\pi R}$ dla $c/c_2 = 0.8$
Fig. 3.7. Normalized circumferential stress $\sigma_{\theta\theta}/(K_I + K_{II})\sqrt{2\pi R}$ for $c/c_2 = 0.8$



Rys. 3.8. Kąt maksymalnego naprężenia obwodowego $\theta(\sigma_{\theta\theta max})$
Fig. 3.8. Angle of maximum circumferential stress $\theta(\sigma_{\theta\theta max})$



Rys. 3.9. Znormalizowane maksymalne naprężenie obwodowe $\theta(\sigma_{\theta\theta max})$
Fig. 3.9. Normalized maximum circumferential stress $\theta(\sigma_{\theta\theta max})$

Rozdział 4

Metoda transformacji całkowych

Metodę transformacji całkowych (MTC) (ang. integral transform method) Laplace'a i Fouriera w połączeniu z metodą podziału na podobszary i metodą nieciągłości przemieszczeń w analizie dynamicznej pęknięć przedstawiono w wielu pracach.

Fan i Hahn [40] analizowali za pomocą brzegowego równania całkowego przemieszczeń tarcze prostokątne z pęknięciem brzegowym o różnych wymiarach. Do dyskretyzacji zastosowano elementy stałe, a DWIN wyznaczono na podstawie przemieszczeń w pobliżu wierzchołka pęknięcia. Sládek i Sládek [133] analizowali zagadnienia symetryczne: tarczę prostokątną z pęknięciem brzegowym poddaną różnym obciążeniom i rurę grubościenną z pęknięciem skierowanym wzdłuż promienia, na powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej, obciążoną ciśnieniem wewnętrznym. Do dyskretyzacji brzegu zastosowano kwadratowe elementy brzegowe, a DWIN wyznaczono na podstawie względnych przemieszczeń pęknięcia. Ze względu na symetrię tarczy i warunków brzegowych modelowano tylko część tarczy. Podobną metodę stosowali Yin i Ji [167] do analizy tarczy prostokątnej z pęknięciem wewnętrznym. Badano wpływ różnych długości pęknięcia i różnej zmienności obciążenia w czasie na DWIN. DWIN wyznaczono na podstawie przemieszczeń pęknięcia modelowanego elementami ćwiartkowymi. Tanaka, Nakamura, Aoki i Matsumoto [142], [143] stosowali podobną metodę do analizy pęknięcia w tarczy prostokątnej. Badano wpływ liczby elementów brzegowych i liczby parametrów metody Durbina i Hosono wyznaczania odwrotnej transformaty Laplace'a na dokładność rozwiązania. Polyzos, Stamos i Beskos [119] analizowali tarczę prostokątną wykonaną z materiału lepkosprężystego z pęknięciem wewnętrznym i brzegowym. Zagadnienia z mieszanym rodzajem obciążenia pęknięcia rozwiązano, stosując metodę podziału na podobszary.

Wen, Aliabadi i Rooke [148] zastosowali metodę pośrednią do analizy pęknięcia w obszarze nieograniczonym i tarczy prostokątnej. W pracy [149] przedstawiono metodę przybliżonej analizy zjawiska kontaktu powierzchni pęknięcia. Metodę zastosowano dla pęknięcia wewnętrznego w tarczy prostokątnej i dla pęknięcia w obszarze nieograniczonym. Dla przedstawionych przykładów uwzględnienie zjawiska kontaktu miało niewielki wpływ na otrzymane rozwiązania. W pracy [152] zastosowano metodę funkcji ważonych i funkcji Greena do wyznaczenia DWIN dla pęknięcia wewnętrznego i brzegowego w tarczy prostokątnej i różnego sposobu obciążenia. W pracy [153] przedstawiono analizę pęknięcia w ośrodku nieograniczonym, obciążonego siłami równomiernie rozłożonymi, siłami skupionymi, obciążeniem o zmieniającym się w czasie rozkładzie, a także oddziaływanie dwóch pęknięć. Omówiono wpływ propagacji fal na zmienność DWIN. W pracy [158] zastosowano całkę niezależną od konturu całkowania do obliczania DWIN dla pęknięcia w tarczy prostokątnej. W pracy [157] analizowano pęknięcia w tarczach prostokątnych

dla III sposobu obciążenia. Wen podsumował wyniki swoich badań w pracy [151].

Telles, Barra i Guimaraes [146] oraz Barra i Telles [13] zastosowali metodę numerycznej funkcji Greena do analizy pęknięcia w nieograniczonym ośrodku sprężystym i w tarczy prostokątnej.

Metodę transformacji Fouriera stosowali Dominguez i Chirino [33], [24] do analizy pęknięcia w obszarze nieograniczonym, półprzestrzeni i obszarze ograniczonym. Wyznaczono zależność DWIN od częstości i czasu. Zhang [168] stosował równanie sił brzegowych do analizy oddziaływania fali harmonicznej z pęknięciem brzegowym, które jest nachylone pod dowolnym kątem do nieobciążonego brzegu półprzestrzeni.

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawione sformułowanie dualne i metoda transformacji całkowych w analizie dynamicznej pęknięć (Fedeliński [41], [60]).

4.1. Brzegowe równania całkowe

Rozwiązanie zagadnień dynamicznych metodą transformacji całkowych wyznacza się najczęściej, stosując transformację Laplace'a lub Fouriera.

Transformata Laplace'a funkcji $f(\mathbf{x}, \tau)$ jest zdefiniowana następująco:

$$\mathcal{L}[f(\mathbf{x}, \tau)] = \bar{f}(\mathbf{x}, s) = \int_0^\infty f(\mathbf{x}, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \tag{4.1}$$

a transformata Fouriera ma postać:

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{x}, \tau)] = \tilde{f}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^\infty f(\mathbf{x}, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \tag{4.2}$$

gdzie τ jest czasem, s parametrem transformacji Laplace'a, a ω parametrem transformacji Fouriera. Brzegowe równania całkowe oraz transformowane rozwiązania podstawowe elastodynamiki dla transformacji Fouriera można otrzymać z równań dla transformacji Laplace'a, podstawiając za s parametr $i\omega$. Biorąc pod uwagę podobieństwo metod, poniżej zostanie przedstawiona tylko metoda transformacji Laplace'a.

Rozważmy jednorodne, izotropowe i liniowo-sprężyste ciało, obciążone dynamicznie siłami brzegowymi. Zakładamy, że początkowe przemieszczenia i prędkości są zerowe. Przemieszczenie dowolnego punktu ciała można wyznaczyć, stosując następujące brzegowe równanie całkowe [29]:

$$c_{ij}(\mathbf{x}')\bar{u}_j(\mathbf{x}', s) = \int_\Gamma \bar{U}_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, s)\bar{t}_j(\mathbf{x}, s) d\Gamma(\mathbf{x}) - \oint_\Gamma \bar{T}_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, s)\bar{u}_j(\mathbf{x}, s) d\Gamma(\mathbf{x}), \tag{4.3}$$

gdzie $\bar{u}_j(\mathbf{x}, s)$ i $\bar{t}_j(\mathbf{x}, s)$ są transformatami Laplace'a przemieszczeń i sił brzegowych, $\bar{U}_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, s)$ i $\bar{T}_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, s)$ są transformatami Laplace'a rozwiązań podstawowych elastodynamiki, które podano w dodatku C. Pozostałe oznaczenia są takie same jak dla zagadnienia statycznego.

Jeżeli w punkcie kolokacji $\mathbf{x}'$ pokrywające się powierzchnie pęknięcia są gładkie, wówczas równanie przemieszczeń ma postać:

$$\frac{1}{2}\bar{u}_i(\mathbf{x}',s)+\frac{1}{2}\bar{u}_i(\mathbf{x}'',s)=\int_\Gamma \bar{U}_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},s)\bar{t}_j(\mathbf{x},s)d\Gamma(\mathbf{x})$$

$$-\oint_\Gamma \bar{T}_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},s)\bar{u}_j(\mathbf{x},s)d\Gamma(\mathbf{x}), \tag{4.4}$$

a równanie sił brzegowych ma formę:

$$\frac{1}{2}\bar{t}_j(\mathbf{x}',s)-\frac{1}{2}\bar{t}_j(\mathbf{x}'',s)=n_i(\mathbf{x}')\Big[\oint_\Gamma \bar{U}_{kij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},s)\bar{t}_k(\mathbf{x},s)d\Gamma(\mathbf{x})$$

$$-\oint_\Gamma \bar{T}_{kij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},s)\bar{u}_k(\mathbf{x},s)d\Gamma(\mathbf{x})\Big], \tag{4.5}$$

gdzie $\bar{U}_{kij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},s)$ i $\bar{T}_{kij}(\mathbf{x}',\mathbf{x},s)$ są transformatami Laplace'a rozwiązań podstawowych elastodynamiki, które podano w dodatku C.

4.2. Numeryczna realizacja metody

Sposób podziału na elementy brzegowe i aproksymacji wielkości brzegowych dla metody transformacji całkowych jest taki sam jak dla zagadnienia statycznego. W wyniki dyskretyzacji i aproksymacji otrzymujemy następujące równanie przemieszczeń:

$$c'_{ij}\bar{u}'_j(s)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[\bar{t}_j^{mp}(s)\int_{-1}^{1}\bar{U}'_{ij}(\xi,s)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi$$

$$-\bar{u}_j^{mp}(s)\int_{-1}^{1}\bar{T}'_{ij}(\xi,s)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big], \tag{4.6}$$

oraz równanie przemieszczeń i sił brzegowych dla węzłów należących do pęknięcia:

$$\frac{1}{2}\bar{u}'_i(s)+\frac{1}{2}\bar{u}''_i(s)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[\bar{t}_j^{mp}(s)\int_{-1}^{1}\bar{U}'_{ij}(\xi,s)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi$$

$$-\bar{u}_j^{mp}(s)\int_{-1}^{1}\bar{T}'_{ij}(\xi,s)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big], \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{2}\bar{t}'_j(s)-\frac{1}{2}\bar{t}''_j(s)=n'_i\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[\bar{t}_k^{mp}(s)\int_{-1}^{1}\bar{U}'_{kij}(\xi,s)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi$$

$$-\bar{u}_k^{mp}(s)\int_{-1}^{1}\bar{T}'_{kij}(\xi,s)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big], \tag{4.8}$$

W równaniach zastosowano takie same oznaczenia jak dla zagadnienia statycznego. Całki hiperosobliwych rozwiązań podstawowych obliczono, stosując metodę odjęcia rozwiązań podstawowych elastostatyki.

Układ równań brzegowych dla wszystkich węzłów brzegowych można zapisać w formie macierzowej

$$\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{t}}, \tag{4.9}$$

gdzie $\bar{\mathbf{u}}$ i $\bar{\mathbf{t}}$ zawierają odpowiednio wartości węzłowe transformowanych przemieszczeń i sił brzegowych, macierze $\bar{\mathbf{H}}$ i $\bar{\mathbf{G}}$ zależą od całek transformowanych rozwiązań podstawowych $\bar{T}_{ij}$, $\bar{T}_{kij}$ i $\bar{U}_{ij}$, $\bar{U}_{kij}$, funkcji interpolujących i jakobianów.

Macierzowy układ równań przegrupowuje się zgodnie z warunkami brzegowymi. Sposób modyfikacji układu równań jest taki sam jak dla zagadnienia statycznego. Nowe macierze $\bar{\mathbf{A}}$ i $\bar{\mathbf{B}}$ otrzymuje się z $\bar{\mathbf{H}}$ i $\bar{\mathbf{G}}$, a $\bar{\mathbf{y}}$ i $\bar{\mathbf{z}}$ z $\bar{\mathbf{u}}$ i $\bar{\mathbf{t}}$. Macierz $\bar{\mathbf{A}}$ jest mnożona przez macierz jednokolumnową nieznanych transformowanych przemieszczeń i sił brzegowych $\bar{\mathbf{y}}$, a macierz $\bar{\mathbf{B}}$ przez macierz transformowanych warunków brzegowych $\bar{\mathbf{z}}$, co daje nowy układ równań:

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{z}}, \tag{4.10}$$

lub

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{f}}, \tag{4.11}$$

gdzie $\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{z}}$ jest znaną macierzą.

W przypadku prostej zmienności w czasie zadanych warunków brzegowych ich transformaty całkowe można obliczyć analitycznie. Równanie macierzowe (4.11) rozwiązuje się, otrzymując nieznane transformowane przemieszczenia i siły brzegowe dla szczególnego parametru Laplace'a. Żeby otrzymać nieznane przemieszczenia i siły jako funkcje czasu, nieznane transformowane wielkości należy obliczać dla szeregu parametrów Laplace'a. Końcowe rozwiązanie, zależne od czasu, można otrzymać, stosując numeryczną transformatę odwrotną. W pracy zastosowano metodę Durbina [37], numerycznego obliczania transformaty odwrotnej Laplace'a, opisaną w dodatku H.

4.3. Przykłady numeryczne

Prezentowaną metodę zastosowano do rozwiązania dwóch przykładów. Pierwszym przykładem jest pęknięcie w nieograniczonym ośrodku sprężystym, dla którego rozpatrzono różny rozkład obciążenia na powierzchni pęknięcia. Drugim przykładem jest tarcza prostokątna z pęknięciem wewnętrznym, dla której analizowano różną zmienność obciążenia w czasie. Zmienność DWIN w czasie wyznaczono, stosując metodę transformacji Laplace'a (MTCL). Za pomocą metody transformacji Fouriera (MTCF) wyznaczono charakterystykę amplitudowo - częstotliwościową DWIN.

Wszystkie DWIN znormalizowano ze względu na:

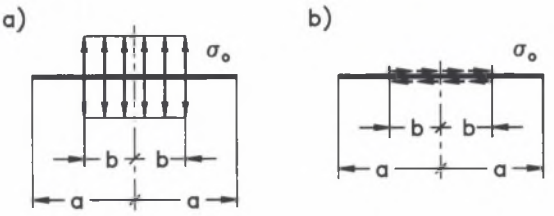
$$K_o = \sigma_o\sqrt{\pi a}, \tag{4.12}$$

gdzie σ_o jest wartością przyłożonego naprężenia i a jest wymiarem pęknięcia. Naprężenie σ_o jest przyłożone nagle w chwili początkowej i następnie ma stałą wartość. Ten rodzaj obciążenia będzie nazywany dalej w pracy impulsem stałym.

DWIN obliczono na podstawie rozwarcia wierzchołka pęknięcia. Statyczne współczynniki intensywności naprężeń (SWIN) otrzymano za pomocą prezentowanej metody, przyjmując bardzo małą gęstość materiału.

Pęknięcie w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Prostoliniowe pęknięcie o długości $2a$ w nieograniczonym ośrodku sprężystym jest obciążone siłami prostopadłymi lub równoległymi do powierzchni pęknięcia, równomiernie rozłożonymi na długości $2b$ ($b \leq a$) (rys. 4.1) (Fedeliński [59], [42]).



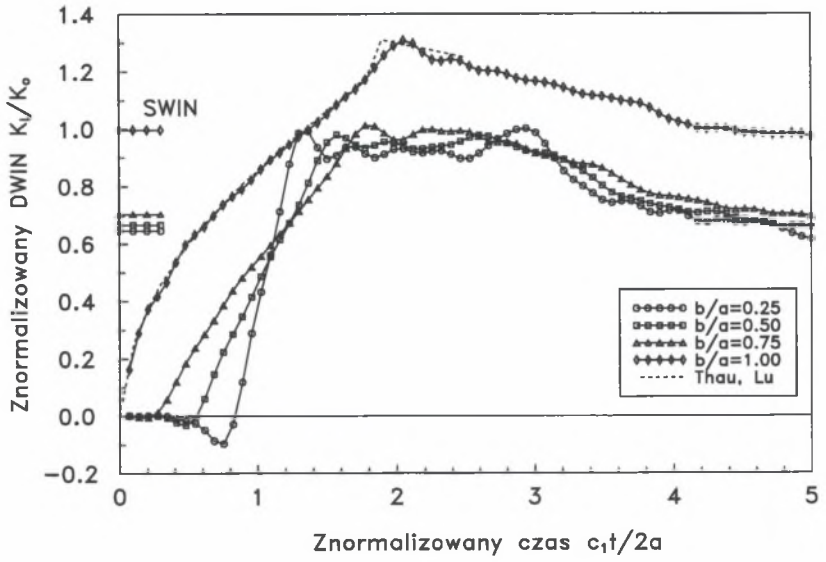
Rys. 4.1. Pęknięcie w nieograniczonym ośrodku sprężystym: a) obciążenie normalne, b) obciążenie styczne
Fig. 4.1. Crack in an infinite elastic sheet: a) normal traction, b) tangential traction

Analizowano różny rozkład obciążenia na powierzchni pęknięcia $b/a = 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$. Siła wypadkowa na powierzchni pęknięcia jest taka sama dla różnego rozkładu obciążenia. Wymagało to przyłożenia różnego obciążenia σ_o. W równaniu (4.12) przyjęto obciążenie σ_o dla pęknięcia obciążonego na całej długości. Materiał ma współczynnik Poissona $\nu = 0.25$ i znajduje się w płaskim stanie odkształcenia. Pęknięcie podzielono na 16 elementów brzegowych. Obliczenia wykonano dla 50 parametrów Laplace'a, żeby wyznaczyć rozwiązanie w dziedzinie czasu i 50 częstości, żeby określić charakterystykę amplitudowo- częstotliwościową.

Znormalizowane K_I/K_o dla obciążenia normalnego i K_{II}/K_o dla obciążenia stycznego przedstawiono na rys. 4.2 i 4.3. Rozwiązania dla $b/a = 1$ porównano z rozwiązaniami otrzymanymi przez Thau i Lu [147], którzy stosowali metodę Wienera-Hopfa. Na rys. 4.4 przedstawiono charakterystykę amplitudowo- częstotliwościową DWIN dla przypadku, gdy $b/a = 1$.

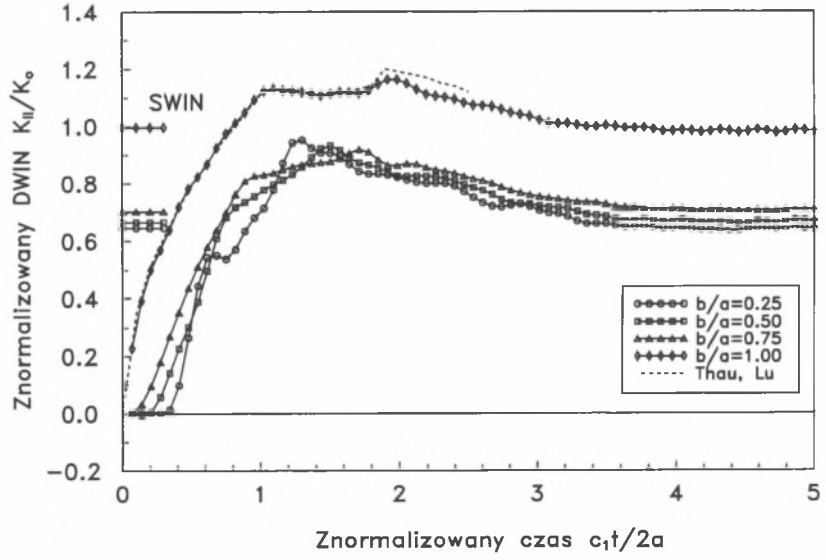
Tarcza prostokątna z pęknięciem wewnętrznym

Tarcza prostokątna o długości $2b = 40\ mm$ i szerokości $2h = 20\ mm$ ma pęknięcie wewnętrzne o długości $2a = 4.8\ mm$ (rys. 4.5) (Fedeliński [41], [42]). Przykład jest powszechnie nazywany zagadnieniem Chena [23] i był analizowany przez wielu autorów, np. Lina, Ballmanna [95] i innych. Materiał tarczy ma następujące własności mechaniczne: moduł sprężystości poprzecznej $\mu = 76.92 \cdot 10^9\ Pa$, współczynnik Poissona $\nu = 0.3$, gęstość $\rho = 5000\ kg/m^3$ i znajduje się w płaskim stanie odkształcenia. Brzeg podzielono na 32 elementy kwadratowe. Obliczenia wykonano dla 100 parametrów Laplace'a, żeby wyznaczyć rozwiązanie w dziedzinie czasu i 100 częstości, żeby określić charakterystykę amplitudowo - częstotliwościową DWIN.



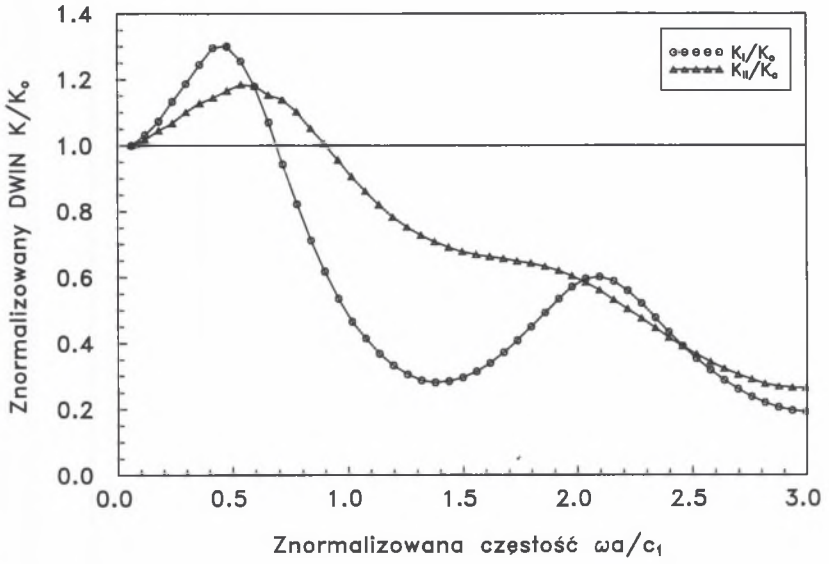
Rys. 4.2. Znormalizowany DWIN K_I/K_o dla obciążenia normalnego - różny rozkład obciążenia na powierzchniach pęknięcia w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Fig. 4.2. Normalized DSIF K_I/K_o for the normal traction - different distribution of loading on crack surfaces in an infinite elastic sheet



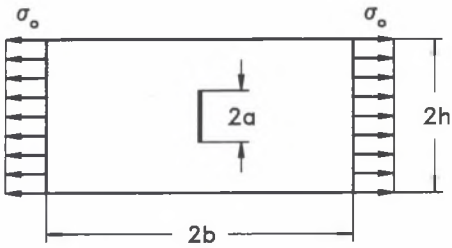
Rys. 4.3. Znormalizowany DWIN K_{II}/K_o dla obciążenia stycznego - różny rozkład obciążenia na powierzchniach pęknięcia w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Fig. 4.3. Normalized DSIF K_{II}/K_o for the tangential traction - different distribution of loading on crack surfaces in an infinite elastic sheet



Rys. 4.4. Znormalizowany DWIN K/K_o dla pęknięcia w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Fig. 4.4. Normalized DSIF K/K_o for the crack in an infinite elastic sheet

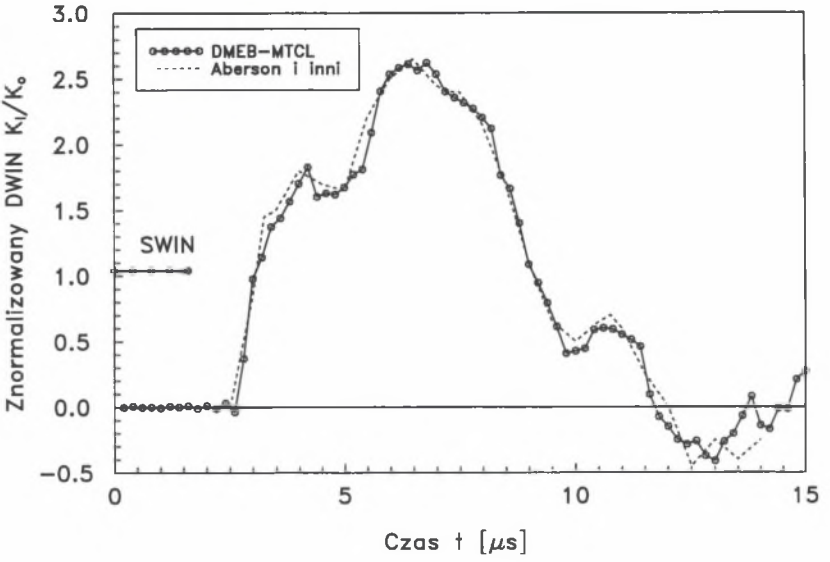


Rys. 4.5. Tarcza prostokątna z pęknięciem wewnętrznym

Fig. 4.5. Rectangular plate with an internal crack

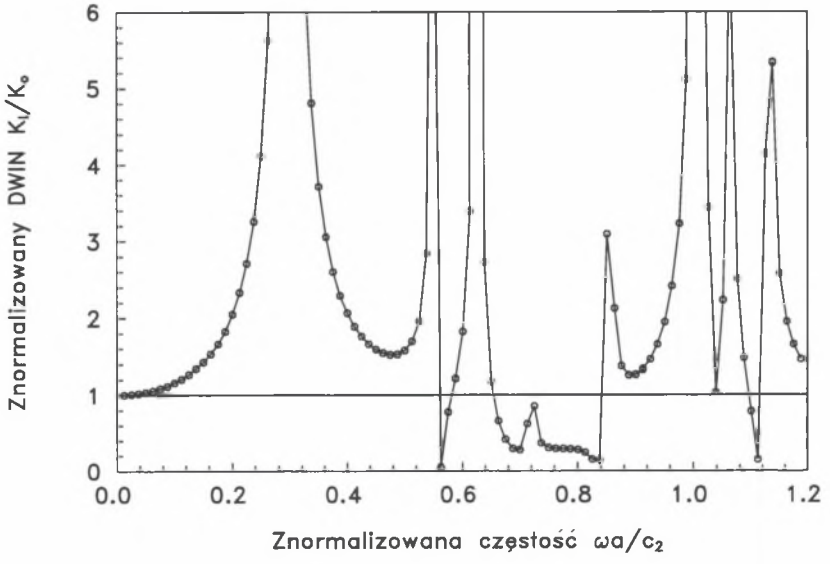
Na rys. 4.6 przedstawiono znormalizowane DWIN K_I/K_o dla impulsu stałego. Rozwiązanie porównano z rozwiązaniem otrzymanym przez Abersona, Andersona i Kinga [1], którzy stosowali MES. Na rys. 4.7 przedstawiono charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową. Podobne rozwiązanie otrzymał Dominguez [32], który stosował MEB i metodę podziału na podobszary.

Rozpatrzono trzy różne przypadki zmienności obciążenia w czasie: impuls stały, impuls prostokątny i impuls trójkątny, jak pokazano na rys. 4.8. Czas trwania impulsu jest zdefiniowany przez $\tau_o = b/c_1$, gdzie c_1 jest prędkością fali podłużnej. Na rys. 4.9 przedstawiono wpływ zmienności obciążenia w czasie na znormalizowane DWIN. Rozwiązania porównano z rozwiązaniami otrzymanymi przez Wena [152], który stosował ujęcie pośrednie MEB i metodę nieciągłości przemieszczeń. Rozwiązania dla impulsu stałego i prostokątnego są takie same do czasu $2\tau_o$.



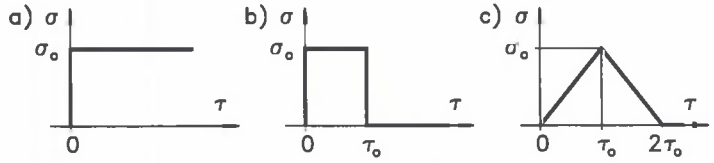
Rys. 4.6. Znormalizowane DWIN K_I/K_o dla tarczy prostokątnej z pęknięciem wewnętrznym

Fig. 4.6. Normalized DSIF K_I/K_o for a rectangular plate with an internal crack



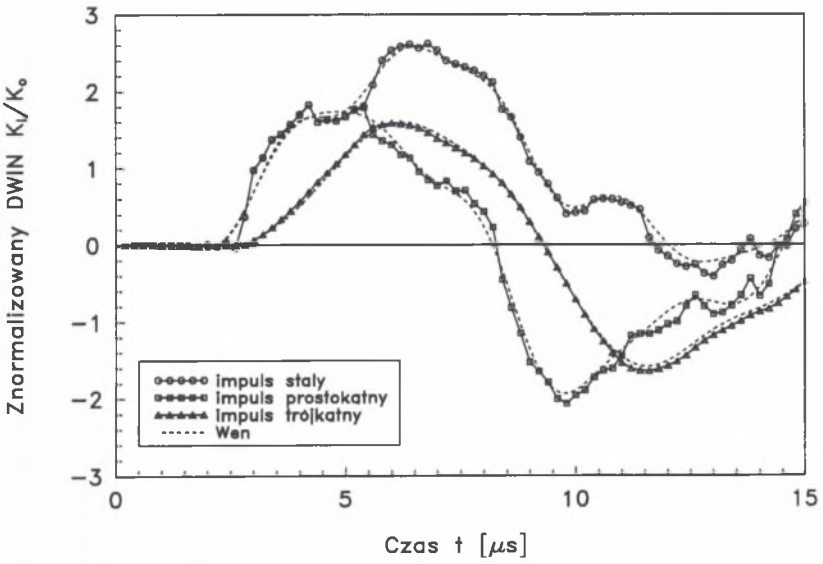
Rys. 4.7. Znormalizowane DWIN K_I/K_o dla tarczy prostokątnej z pęknięciem wewnętrznym

Fig. 4.7. Normalized DSIF K_I/K_o for a rectangular plate with an internal crack



Rys. 4.8. Zmienność obciążenia w czasie: a) impuls stały, b) impuls prostokątny, c) impuls trójkątny

Fig. 4.8. Temporal variation of loading: a) constant impulse, b) rectangular impulse, c) triangular impulse



Rys. 4.9. Znormalizowane DWIN K_I/K_o dla tarczy prostokątnej z pęknięciem wewnętrznym - różna zmienność obciążenia w czasie

Fig. 4.9. Normalized DSIF K_I/K_o for a rectangular plate with an internal crack - different temporal variation of loading

Rozdział 5

Metoda rozwiązań w dziedzinie czasu

Metodę rozwiązań w dziedzinie czasu (MRDC) (ang. time-domain method) w połączeniu z metodą podziału na podobszary i metodą nieciągłości przemieszczeń w analizie dynamicznej pęknięć przedstawiono w wielu pracach.

Metodę rozwiązań w dziedzinie czasu wykorzystywali Nishimura, Guo i Kobayashi [110], [111]. Rząd osobliwości brzegowych równań całkowych obniżono, stosując dwukrotne całkowanie przez części. Zastosowano stałe funkcje kształtu dla aproksymacji zmienności w przestrzeni i liniowe dla czasu. Metodę zastosowano dla pęknięć prostoliniowych i zagadnień dwuwymiarowych oraz płaskich pęknięć w obszarach nieograniczonych. Analizowano pęknięcia stacjonarne oraz ich wzrost. Zhang i Achenbach [170] zastosowali inną metodę obniżenia rzędu osobliwości równania całkowego. Do dyskretyzacji zastosowano stałe oraz specjalne elementy brzegowe w pobliżu wierzchołka pęknięcia. Przyjęto liniową zmienność w czasie. Metodę zastosowano do analizy pęknięć leżących na tej samej linii prostej w obszarze nieograniczonym. Zhang [169] przedstawił zastosowanie całki reprezentującej zachowanie energii do otrzymania niehiperosobliwego brzegowego równania całkowego. Nieznanymi wielkościami w tym sformułowaniu są przemieszczenia i ich pochodne. Metodę zastosowano do analizy pęknięcia prostoliniowego w obszarze nieograniczonym i III sposobu obciążenia. Zhang i Gross [173] zastosowali tę samą metodę do analizy pęknięć kołowych i kwadratowych w obszarze nieograniczonym. Chen, Gross i Zhang [22] analizowali pęknięcie kołowe w obszarze nieograniczonym, obciążonym siłami skupionymi prostopadłymi do pęknięcia. Analizowano wpływ odległości sił skupionych od pęknięcia na DWIN. Zhang i Gross podsumowali wyniki swoich badań w pracy [174]. Zhang i Savaidis [175] analizowali pęknięcie w obszarze nieograniczonym i tarczy prostokątnej. Hirose [75] oraz Hirose i Achenbach [76], [77], [78] zastosowali równanie sił brzegowych. Przyjęto liniową zmienność w czasie. Przemieszczenia interpolowano, stosując analityczne rozwiązania dla zagadnienia statycznego. Analizowano stacjonarne i wzrastające pęknięcie kołowe. Nicholson i Mettu [109], [99] stosowali dwa typy aproksymacji: stałe elementy brzegowe i stałe czasowe funkcje kształtu oraz elementy kwadratowe i liniową zmienność w czasie. Metodą analizowano półnieskończone i skończone pęknięcie w obszarze nieograniczonym obciążone na powierzchniach oraz pęknięcie w tarczy o skończonych wymiarach. Dominguez i Gallego [34], [36] przyjęli stałe funkcje czasowe dla sił brzegowych i liniowe dla przemieszczeń. Brzeg podzielono na kwadratowe elementy brzegowe. DWIN wyznaczono na podstawie względnych przemieszczeń powierzchni pęknięcia i sił wzdłuż osobliwych elementów brzegowych. Metodę zastosowano do analizy tarcz o skończonych wymiarach z pęknięciami. Mieszane przypadki deformacji pęknięcia analizowano, stosując metodę podziału na podobszary. Israil i Dargush [83] przedstawili

podobną metodę i przykłady. Dodatkowo zastosowano metodę do analizy tarczy wykonanej z kilku różnych materiałów. Gallego i Dominguez [65], [66] przedstawili metodę nieciągłości przemieszczeń. Do dyskretyzacji brzegu zewnętrznego i pęknięcia zastosowano ciągłe elementy kwadratowe. Punkty kolokacji dla równania sił brzegowych były położone wewnątrz elementu brzegowego. Metodę zastosowano dla prostoliniowego i półokrągłego pęknięcia, współliniowych pęknięć i pęknięć brzegowych w otworze w ośrodku nieograniczonym oraz ukośnego pęknięcia brzegowego w tarczy prostokątnej.

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawione sformułowanie dualne i metoda rozwiązań w dziedzinie czasu w analizie dynamicznej pęknięć (Fedeliński [56], [57], [58]).

5.1. Brzegowe równania całkowe

Przyjmiemy te same założenia dotyczące materiału, warunków początkowych i obciążenia jak dla metody transformacji całkowych. Przy tych założeniach przemieszczenie dowolnego punktu można wyznaczyć, stosując następujące brzegowe równanie całkowe:

$$c_{ij}(\mathbf{x}')u_j(\mathbf{x}',t) = \int_0^t \Big[\int_\Gamma U_{ij}(\mathbf{x}',t;\mathbf{x},\tau)t_j(\mathbf{x},\tau)d\Gamma(\mathbf{x})\Big]d\tau \tag{5.1}$$

$$- \int_0^t \Big[\int_\Gamma T_{ij}(\mathbf{x}',t;\mathbf{x},\tau)u_j(\mathbf{x},\tau)d\Gamma(\mathbf{x})\Big]d\tau,$$

gdzie $U_{ij}(\mathbf{x}',t;\mathbf{x},\tau)$ i $T_{ij}(\mathbf{x}',t;\mathbf{x},\tau)$ są zależnymi od czasu rozwiązaniami podstawowymi elastodynamiki, t jest czasem, w którym wyznacza się przemieszczenie. Pozostałe oznaczenia są takie same jak dla zagadnienia statycznego. Wyznaczenie przemieszczenia wymaga nie tylko całkowania wzdłuż brzegu, jak wcześniej omawiane metody, ale także całkowania względem czasu od chwili początkowej aż do czasu t.

Jeżeli w punkcie $\mathbf{x}'$ pokrywające się powierzchnie pęknięcia są gładkie, wówczas równanie przemieszczeń ma postać:

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}',t) + \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}'',t) = \int_0^t \Big[\int_\Gamma U_{ij}(\mathbf{x}',t;\mathbf{x},\tau)t_j(\mathbf{x},\tau)d\Gamma(\mathbf{x})\Big]d\tau \tag{5.2}$$

$$- \int_0^t \Big[\int_\Gamma T_{ij}(\mathbf{x}',t;\mathbf{x},\tau)u_j(\mathbf{x},\tau)d\Gamma(\mathbf{x})\Big]d\tau,$$

a równanie sił brzegowych ma formę:

$$\frac{1}{2}t_j(\mathbf{x}',t) - \frac{1}{2}t_j(\mathbf{x}'',t) = n_i(\mathbf{x}')\Big\{ \int_0^t \Big[\int_\Gamma U_{kij}(\mathbf{x}',t;\mathbf{x},\tau)t_k(\mathbf{x},\tau)d\Gamma(\mathbf{x})\Big]d\tau \tag{5.3}$$

$$- \int_0^t \Big[\int_\Gamma T_{kij}(\mathbf{x}',t;\mathbf{x},\tau)u_k(\mathbf{x},\tau)d\Gamma(\mathbf{x})\Big]d\tau\Big\},$$

gdzie $U_{kij}(\mathbf{x}',t;\mathbf{x},\tau)$ i $T_{kij}(\mathbf{x}',t;\mathbf{x},\tau)$ są rozwiązaniami podstawowymi elastodynamiki.

5.2. Numeryczna realizacja metody

Rozwiązanie numeryczne wymaga dyskretyzacji zmienności wzdłuż brzegu geometrii, przemieszczeń i sił, która jest taka sama jak dla zagadnienia statycznego. Dodatkowo wymagana jest dyskretyzacja zmienności w czasie przemieszczeń i sił brzegowych.

Czas analizy t dzielony jest na N kroków czasowych. Zmienność w czasie wielkości brzegowych jest określona przez Q wartości w każdym kroku czasowym i jest aproksymowana za pomocą funkcji interpolujących $M^q(\tau)$. W wyniku dyskretyzacji i aproksymacji otrzymujemy następujące równanie przemieszczeń:

$$c_{ij}u_j'^N = \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\sum_{n=1}^{N}\sum_{q=1}^{Q}\Big\{t_j^{mpnq}\int_{-1}^{1}\Big[\int_{\tau^{n-1}}^{\tau^n} U_{ij}'^N(\xi,\tau)M^q(\tau)d\tau\Big]N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi$$

$$-u_j^{mpnq}\int_{-1}^{1}\Big[\int_{\tau^{n-1}}^{\tau^n} T_{ij}'^N(\xi,\tau)M^q(\tau)d\tau\Big]N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big\}, \tag{5.4}$$

oraz równanie przemieszczeń i sił brzegowych dla węzłów należących do pęknięcia:

$$\frac{1}{2}u_i'^N + \frac{1}{2}u_i''^N = \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\sum_{n=1}^{N}\sum_{q=1}^{Q}\Big\{t_j^{mpnq}\int_{-1}^{1}\Big[\int_{\tau^{n-1}}^{\tau^n} U_{ij}'^N(\xi,\tau)M^q(\tau)d\tau\Big]N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi$$

$$-u_j^{mpnq}\int_{-1}^{1}\Big[\int_{\tau^{n-1}}^{\tau^n} T_{ij}'^N(\xi,\tau)M^q(\tau)d\tau\Big]N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big\}, \tag{5.5}$$

$$\frac{1}{2}t_j'^N - \frac{1}{2}t_j''^N = n_i'\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\sum_{n=1}^{N}\sum_{q=1}^{Q}\Big\{t_k^{mpnq}\int_{-1}^{1}\Big[\int_{\tau^{n-1}}^{\tau^n} U_{kij}'^N(\xi,\tau)M^q(\tau)d\tau\Big]N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi$$

$$-u_k^{mpnq}\int_{-1}^{1}\Big[\int_{\tau^{n-1}}^{\tau^n} T_{kij}'^N(\xi,\tau)M^q(\tau)d\tau\Big]N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big\}. \tag{5.6}$$

Przemieszczenia aproksymuje się w każdym kroku czasowym, stosując funkcje liniowe, a siły brzegowe - funkcjami stałymi. Mieszany rodzaj aproksymacji daje dokładniejsze rozwiązania (Dominguez i Gallego [35]) w przypadku uderzeniowego obciążenia ciała. Stała czasowa funkcja kształtu ma postać:

$$M^1(\tau) = 1, \tag{5.7}$$

a liniowe funkcje mają formę:

$$M^1(\tau) = \frac{\tau - \tau^{n-1}}{\Delta\tau} \quad \text{i} \quad M^2(\tau) = \frac{\tau^n - \tau}{\Delta\tau}, \tag{5.8}$$

gdzie $\tau^{n-1} \le \tau \le \tau^n$, $\Delta\tau$ jest krokiem czasowym ($\tau^n = n\Delta\tau$), indeksy 1, 2 oznaczają pierwszy i drugi węzeł czasowy. Całki względem czasu rozwiązań podstawowych elastodynamiki podano w dodatku D. Całki wzdłuż elementów brzegowych rozwiązań hiperosobliwych obliczono, stosując metodę odjęcia rozwinięć funkcji podcałkowych w szereg Taylora (Fedeliński [58]).

Układ równań dla wszystkich węzłów można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{H}^{NN}\mathbf{u}^{N} = \mathbf{G}^{NN}\mathbf{t}^{N} + \sum_{n=1}^{N-1}(\mathbf{G}^{Nn}\mathbf{t}^{n} - \mathbf{H}^{Nn}\mathbf{u}^{n}), \tag{5.9}$$

gdzie $\mathbf{u}^n$ i $\mathbf{t}^n$ zawierają wartości węzłowe przemieszczeń i sił brzegowych w kroku czasowym n, $\mathbf{H}^{Nn}$ i $\mathbf{G}^{Nn}$ zależą od całek rozwiązań podstawowych elastodynamiki, funkcji interpolujących i jakobianów. Indeksy Nn podkreślają, że macierze zależą od różnicy między krokiem czasowym N i n. Kolumny macierzy $\mathbf{H}^{NN}$ i $\mathbf{G}^{NN}$ przegrupowuje się zgodnie z warunkami brzegowymi, otrzymując nowe macierze $\mathbf{A}^{NN}$ i $\mathbf{B}^{NN}$. Sposób modyfikacji macierzy jest taki sam jak dla zagadnienia statycznego. Macierz $\mathbf{A}^{NN}$ jest mnożona przez macierz jednokolumnową $\mathbf{y}^N$, która zawiera nieznane przemieszczenia i siły brzegowe, a macierz $\mathbf{B}^{NN}$ przez macierz jednokolumnową $\mathbf{z}^N$ znanych warunków brzegowych w następujący sposób:

$$\mathbf{A}^{NN}\mathbf{y}^{N} = \mathbf{B}^{NN}\mathbf{z}^{N} + \sum_{n=1}^{N-1}(\mathbf{G}^{Nn}\mathbf{t}^{n} - \mathbf{H}^{Nn}\mathbf{u}^{n}). \tag{5.10}$$

W każdym kroku czasowym oblicza się tylko macierze, które odpowiadają maksymalnej różnicy $N - n$. Pozostałe macierze znane są z poprzednich kroków czasowych. Macierze $\mathbf{A}^{NN}$ i $\mathbf{B}^{NN}$ tworzy się w pierwszym kroku czasowym i są one takie same w dalszych krokach czasowych. Macierze można oznaczyć prościej $\mathbf{A}^{NN} = \tilde{\mathbf{A}}$ i $\mathbf{B}^{NN} = \tilde{\mathbf{B}}$, a równanie macierzowe (5.10) można zapisać w postaci:

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y}^{N} = \mathbf{f}^{N}, \tag{5.11}$$

gdzie:

$$\mathbf{f}^{N} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{z}^{N} + \sum_{n=1}^{N-1}(\mathbf{G}^{Nn}\mathbf{t}^{n} - \mathbf{H}^{Nn}\mathbf{u}^{n}), \tag{5.12}$$

jest znaną macierzą. Układ równań rozwiązuje się metodą krokową, wyznaczając nieznane przemieszczenia i siły brzegowe w każdym kroku. W pierwszych krokach czasowych rozwiązania podstawowe są niezerowe tylko w pobliżu punktu kolokacji i dlatego są całkowane tylko wzdłuż części brzegu. W dalszych krokach czasowych konieczne jest całkowanie wzdłuż całego brzegu. Obliczenia stają się coraz bardziej czasochłonne, ponieważ macierz $\mathbf{f}^N$ zależy od wszystkich macierzy wyznaczonych w poprzednich krokach czasowych.

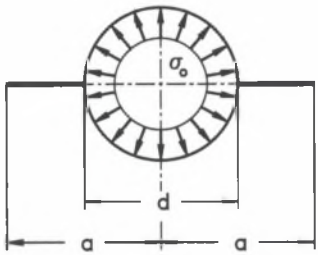
5.3. Przykłady numeryczne

Prezentowaną metodę zastosowano do rozwiązania dwóch przykładów. W pierwszym przykładzie rozpatrzono otwór z dwoma pęknięciami brzegowymi w nieograniczonym ośrodku sprężystym. Dla tego przykładu analizowano wpływ gęstości materiału na DWIN. Z kolei w drugim przykładzie analizowano tarczę prostokątną z otworem mającym dwa pęknięcia brzegowe. Na tym przykładzie przedstawiono wpływ długości pęknięć i ich kierunku na DWIN.

DWIN obliczono na podstawie rozwarcia wierzchołka pęknięcia i znormalizowano jak w przykładach przedstawionych w poprzednim rozdziale. Układy obciążono impulsem stałym. Rozwiązania statyczne otrzymano za pomocą przedstawionej metody, przyjmując bardzo małą gęstość materiału.

Okrągły otwór z pęknięciami w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Na rys. 5.1 przedstawiono otwór o średnicy $d = 20\ mm$ z dwoma pęknięciami, skierowanymi wzdłuż prostej, przechodzącej przez środek otworu, znajdujący się w nieograniczonym ośrodku sprężystym (Fedeliński [58]). Odległość między wierzchołkami pęknięcia jest równa $2a = 60\ mm$. Materiał tarczy ma następujące własności mechaniczne: moduł Younga $E = 0.2 \cdot 10^{12}\ Pa$, współczynnik Poissona $\nu = 0.3$ i znajduje się w płaskim stanie odkształcenia. Analizowano układ dla trzech różnych gęstości materiału $\rho = 4000,\ 8000,\ 12000\ kg/m^3$ Otwór jest obciążony impulsem stałym równomiernie rozłożonego obciążenia σ_o skierowanego prostopadle do powierzchni.

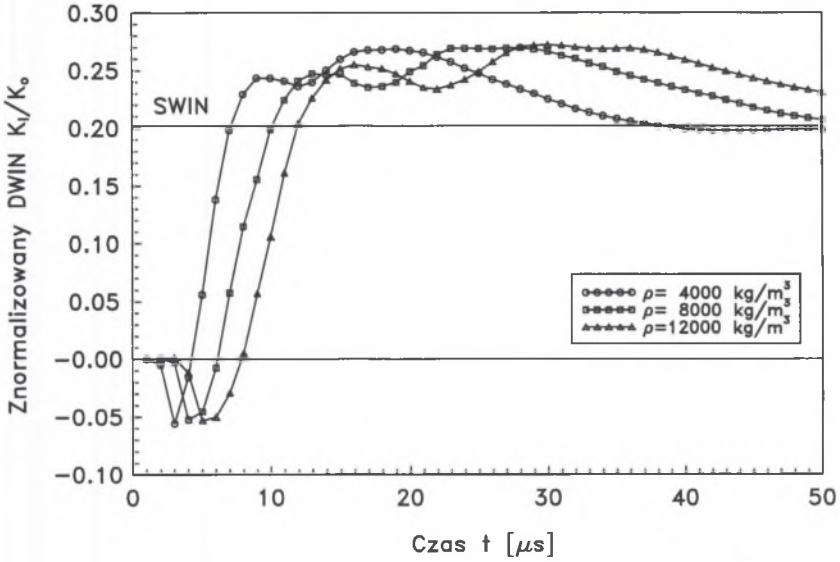


Rys. 5.1. Okrągły otwór z pęknięciami w nieograniczonym ośrodku sprężystym
Fig. 5.1. Circular cracked hole in an infinite elastic sheet

Brzeg otworu i pęknięć podzielono na 44 elementy kwadratowe. Obliczenia wykonano dla kroku czasowego $\Delta\tau = 1\ \mu s$. Znormalizowane DWIN K_I/K_o przedstawiono na rys. 5.2. Podobne rozwiązanie dla $\rho = 8000\ kg/m^3$ otrzymali Gallego i Dominguez [66], którzy stosowali metodę nieciągłości MEB. Dla czasu dążącego do nieskończoności DWIN dąży do wartości statycznej. Ze wzrostem gęstości materiału zmniejsza się prędkość propagacji fal w tarczy. Na skutek tego wzrost DWIN następuje w późniejszym czasie. Kształt wykresów przedstawiających DWIN i wartości maksymalne DWIN są podobne dla różnych gęstości materiału.

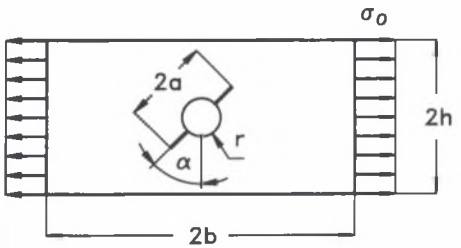
Tarcza prostokątna z okrągłym otworem mającym dwa pęknięcia brzegowe

Tarcza prostokątna o długości $2b = 60\ mm$ i szerokości $2h = 30\ mm$ z okrągłym otworem o promieniu $r = 3.75\ mm$ ma dwa pęknięcia brzegowe. Odległość między wierzchołkami pęknięć wynosi $2a$, a kąt nachylenia pęknięć względem osi pionowej jest równy α (rys. 5.3). Własności materiałowe są takie same jak w poprzednim przykładzie (gęstość materiału jest równa $\rho = 8000\ kg/m^3$). Brzeg tarczy i pęknięć podzielono na 64 elementy kwadratowe i zastosowano krok czasowy równy $\Delta\tau = 0.5\ \mu s$. Wykonano obliczenia dla różnych wartości kąta nachylenia pęknięć wynoszącego $\alpha = 0^o,\ 30^o,\ 45^o,\ 60^o$ dla $a/h = 0.5$. Znormalizowane K_I/K_o i K_{II}/K_o przedstawiono na rys. 5.4 i 5.5.



Rys. 5.2. Znormalizowane DWIN K_I/K_o dla okrągłego otworu z pęknięciami w nieograniczonym ośrodku sprężystym - różna gęstość materiału

Fig. 5.2. Normalized DSIF K_I/K_o for the cracked hole in an infinite elastic sheet - different mass density of the material

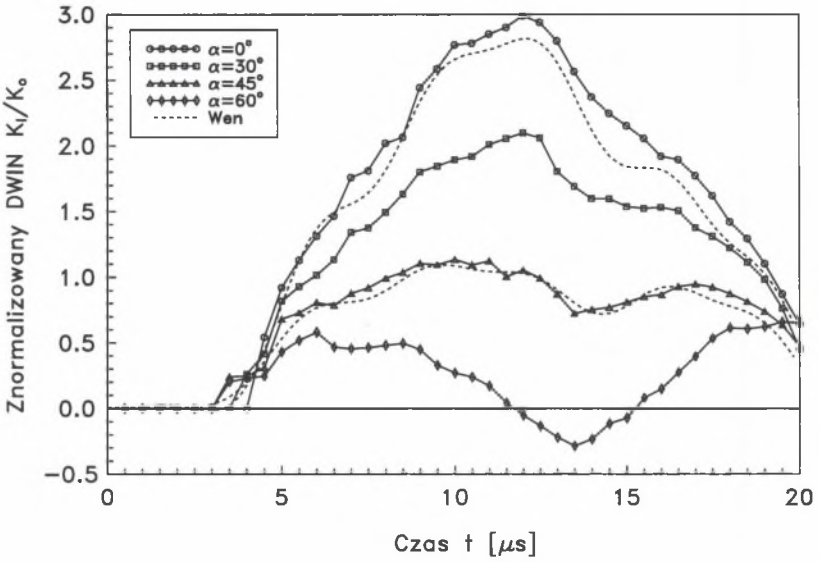


Rys. 5.3. Tarcza prostokątna z okrągłym otworem mającym dwa pęknięcia brzegowe

Fig. 5.3. Rectangular plate with two cracks at a circular hole

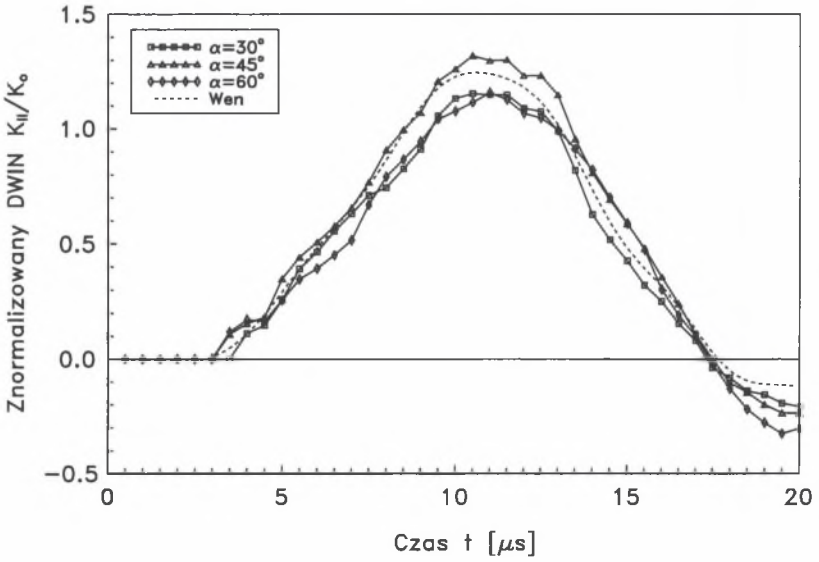
Z rys. 5.4 wynika, że ze wzrostem kąta α maleje maksymalna wartość K_I/K_o. Na podstawie rys. 5.5 można stwierdzić, że K_{II}/K_o ma podobny przebieg dla $\alpha = 30^o$, 45^o, 60^o. Rozwiązania dla $a/h = 0.5$ oraz kątów $\alpha = 0^o$, 45^o porównano z rozwiązaniami otrzymanymi przez Wena [151], który stosował ujęcie pośrednie MEB i metodę nieciągłości przemieszczeń. Podobne rozwiązania otrzymano, wykorzystując metodę podwójnej zasady wzajemności (Fedeliński [55]).

Następnie analizowano tarczę z pęknięciami o różnej długości $a/h = 0.35$, 0.5 , 0.7 dla $\alpha = 0^o$. Znormalizowane DWIN K_I/K_o dla różnych długości pęknięć przedstawiono na rys. 5.6. Z wykresu wynika, że K_I/K_o ma podobny przebieg dla różnych długości pęknięć aż do czasu około 12 μs, a następnie większe wartości dla dłuższych pęknięć.



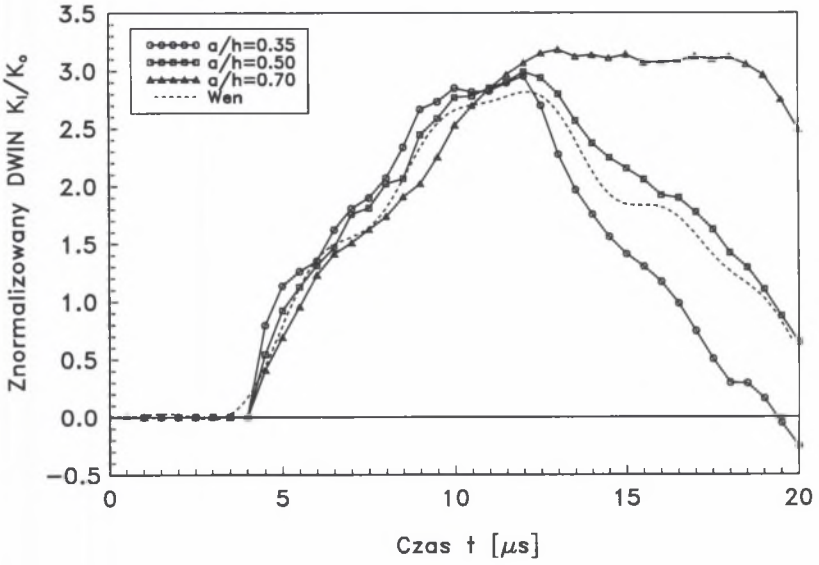
Rys. 5.4. Znormalizowane DWIN K_I/K_o dla tarczy prostokątnej z okrągłym otworem mającym dwa pęknięcia brzegowe - różne kierunki pęknięć dla $a/h = 0.5$

Fig. 5.4. Normalized DSIF K_I/K_o for the rectangular plate with two edge cracks at a circular hole - different directions of the cracks for $a/h = 0.5$



Rys. 5.5. Znormalizowane DWIN K_{II}/K_o dla tarczy prostokątnej z okrągłym otworem mającym dwa pęknięcia brzegowe - różne kierunki pęknięć dla $a/h = 0.5$

Fig. 5.5. Normalized DSIF K_{II}/K_o for the rectangular plate with two edge cracks at a circular hole - different directions of the cracks for $a/h = 0.5$



Rys. 5.6. Znormalizowane DWIN K_I/K_o dla tarczy prostokątnej z okrągłym otworem mającym dwa pęknięcia brzegowe - różne długości pęknięć dla $\alpha = 0^o$

Fig. 5.6. Normalized DSIF K_I/K_o for the rectangular plate with two edge cracks at a circular hole - different lengths of the cracks for $\alpha = 0^o$

Rozdział 6

Metoda podwójnej zasady wzajemności

Metodę podwójnej zasady wzajemności (MPZW) (ang. dual reciprocity method) w połączeniu z metodą podziału na podobszary i metodą nieciągłości przemieszczeń w analizie dynamicznej pęknięć przedstawiono w kilku pracach.

Metodę podwójnej zasady wzajemności stosowali Balaš, Sládek i Sládek [12] dla zagadnień symetrycznych. Pekau i Batta [118] stosowali metodę podziału na podobszary do analizy pęknięć stacjonarnych i ich wzrostu w tarczy prostokątnej. Chirino, Gallego, Saez i Dominguez [25] przedstawili porównanie różnych ujęć w dynamice dla metody podziału na podobszary. Wen, Aliabadi i Rooke [162], [163] zastosowali metodę nieciągłości przemieszczeń do analizy pęknięcia eliptycznego i ukośnego pęknięcia kwadratowego w elemencie prostopadłościennym.

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawione sformułowanie dualne i metoda podwójnej zasady wzajemności w analizie dynamicznej pęknięć (Fedeliński [52], [53], [54], [55]).

6.1. Brzegowe równania całkowe

Metoda podwójnej zasady wzajemności może być stosowana w analizie dynamicznej przy niezerowych warunkach początkowych i dla ciał obciążonych siłami objętościowymi. W MPZW równanie ruchu jest wyrażone w postaci brzegowych równań całkowych za pomocą rozwiązań podstawowych elastostatyki. Przyspieszenie dowolnego punktu $\mathbf{x}$ aproksymuje się, stosując sumy N funkcji współrzędnych $f^n(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$ pomnożonych przez nieznane, zależne od czasu współczynniki $\ddot{\alpha}_l^n(\tau)$ (Nardini i Brebbia[106], [17], Partridge, Brebbia i Wrobel [117]):

$$\ddot{u}_l(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{n=1}^{N} \ddot{\alpha}_l^n(\tau) f^n(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}), \tag{6.1}$$

gdzie $\mathbf{x}^*$ jest punktem definiującym, który może być punktem wewnętrznym lub brzegowym.

Jako funkcję aproksymującą przyjęto $f^n(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) = C + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$, gdzie C jest stałą, a $r(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$ jest odległością między punktem definiującym $\mathbf{x}^*$ i punktem $\mathbf{x}$.

Dla tak przyjętej aproksymacji przyspieszeń przemieszczenie dowolnego punktu ciała jednorodnego, izotropowego i liniowo-sprężystego można wyznaczyć z następującego brzegowego równania całkowego:

$$c_{ij}(\mathbf{x}')u_j(\mathbf{x}',\tau) - \int_\Gamma U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})t_j(\mathbf{x},\tau)d\Gamma(\mathbf{x}) + \oint_\Gamma T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})u_j(\mathbf{x},\tau)d\Gamma(\mathbf{x}) = \tag{6.2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \rho\ddot{\alpha}_l^n(\tau)\Big[c_{ij}(\mathbf{x}')\hat{u}_{lj}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x}') - \int_\Gamma U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})\hat{t}_{lj}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) + \oint_\Gamma T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})\hat{u}_{lj}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x})\Big],$$

gdzie $U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})$ i $T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})$ są rozwiązaniami podstawowymi elastostatyki, które podano w dodatku A, a $\hat{u}_{lj}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x})$ i $\hat{t}_{lj}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x})$ są szczególnymi przemieszczeniami i siłami brzegowymi, które odpowiadają funkcji $f^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x})$ i są podane w dodatku E.

Jeżeli w punkcie $\mathbf{x}'$ pokrywające się powierzchnie pęknięcia są gładkie, wówczas równanie przemieszczeń ma postać:

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}',\tau) + \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}'',\tau) - \int_\Gamma U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})t_j(\mathbf{x},\tau)d\Gamma(\mathbf{x}) + \oint_\Gamma T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})u_j(\mathbf{x},\tau)d\Gamma(\mathbf{x}) =$$

$$\sum_{n=1}^{N} \rho\ddot{\alpha}_l^n(\tau)\Big[\frac{1}{2}\hat{u}_{li}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x}') + \frac{1}{2}\hat{u}_{li}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x}'') - \int_\Gamma U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})\hat{t}_{lj}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) \tag{6.3}$$

$$+ \oint_\Gamma T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})\hat{u}_{lj}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x})\Big],$$

a równanie sił brzegowych ma formę:

$$\frac{1}{2}t_j(\mathbf{x}',\tau) - \frac{1}{2}t_j(\mathbf{x}'',\tau) - n_i(\mathbf{x}')\Big[\oint_\Gamma U_{kij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})t_k(\mathbf{x},\tau)d\Gamma(\mathbf{x}) - \oint_\Gamma T_{kij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})u_k(\mathbf{x},\tau)d\Gamma(\mathbf{x})\Big] =$$

$$\sum_{n=1}^{N} \rho\ddot{\alpha}_l^n(\tau)\Big\{\frac{1}{2}\hat{t}_{lj}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x}') - \frac{1}{2}\hat{t}_{lj}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x}'') - n_i(\mathbf{x}')\Big[\oint_\Gamma U_{kij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})\hat{t}_{lk}(\mathbf{x}^*,\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) \tag{6.4}$$

$$- \oint_\Gamma T_{kij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})\hat{u}_{lk}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x})\Big]\Big\},$$

gdzie $U_{kij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})$ i $T_{kij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})$ są rozwiązaniami podstawowymi elastostatyki podanymi w dodatku A.

6.2. Numeryczna realizacja metody

Dyskretyzacja wielkości brzegowych jest taka sama jak dla zagadnienia statycznego. Rzeczywiste i szczególne przemieszczenia i siły brzegowe $u_j(\mathbf{x},\tau)$ i $t_j(\mathbf{x},\tau)$ oraz $\hat{u}_{lj}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x})$, $\hat{t}_{lj}^n(\mathbf{x}^*,\mathbf{x})$ dla każdego elementu aproksymuje się tymi samymi funkcjami interpolującymi. W wyniku dyskretyzacji i aproksymacji otrzymujemy następujące równanie przemieszczeń:

$$c'_{ij}u'_j(\tau) - \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[t_j^{mp}(\tau)\int_{-1}^{1} U'_{ij}(\xi)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi - u_j^{mp}(\tau)\int_{-1}^{1} T'_{ij}(\xi)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big] =$$

$$\sum_{n=1}^{N}\rho\ddot{\alpha}_l^n(\tau)\Big\{c'_{ij}\hat{u}'^n_{lj} - \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[\hat{t}_{lj}^{nmp}\int_{-1}^{1} U'_{ij}(\xi)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi \tag{6.5}$$

$$-\hat{u}_{lj}^{nmp}\int_{-1}^{1} T'_{ij}(\xi)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big]\Big\},$$

oraz równanie przemieszczeń i sił brzegowych dla węzłów należących do pęknięcia:

$$\frac{1}{2}u'_i(\tau) + \frac{1}{2}u''_i(\tau) - \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[t_j^{mp}(\tau)\int_{-1}^{1} U'_{ij}(\xi)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi$$

$$-u_j^{mp}(\tau)\int_{-1}^{1} T'_{ij}(\xi)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big] =$$

$$\sum_{n=1}^{N}\rho\ddot{\alpha}_l^n(\tau)\Big\{\frac{1}{2}\hat{u}'^n_{li} + \frac{1}{2}\hat{u}''^n_{li} - \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[\hat{t}_{lj}^{nmp}\int_{-1}^{1} U'_{ij}(\xi)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi \tag{6.6}$$

$$-\hat{u}_{lj}^{nmp}\int_{-1}^{1} T'_{ij}(\xi)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big]\Big\},$$

$$\frac{1}{2}t'_j(\tau) - \frac{1}{2}t''_j(\tau) - n'_i\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[t_k^{mp}(\tau)\int_{-1}^{1} U'_{kij}(\xi)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi$$

$$-u_k^{mp}(\tau)\int_{-1}^{1} T'_{kij}(\xi)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big] =$$

$$\sum_{n=1}^{N}\rho\ddot{\alpha}_l^n(\tau)\Big\{\frac{1}{2}\hat{t}'^n_{lj} - \frac{1}{2}\hat{t}''^n_{lj} - n'_i\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[\hat{t}_{lk}^{nmp}\int_{-1}^{1} U'_{kij}(\xi)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi \tag{6.7}$$

$$-\hat{u}_{lk}^{nmp}\int_{-1}^{1} T'_{kij}(\xi)N^p(\xi)J^m(\xi)d\xi\Big]\Big\}.$$

Brzegowe równania całkowe stosuje się dla węzłów jak w zagadnieniu statycznym. Otrzymany układ równań można zapisać w postaci macierzowej

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gt} - \rho(\mathbf{H\hat{u}} - \mathbf{G\hat{t}})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} = 0, \tag{6.8}$$

gdzie $\mathbf{H}$ i $\mathbf{G}$ zależą od całek rozwiązań podstawowych elastostatyki, funkcji aproksymujących, jakobianów i są takie same jak dla zagadnienia statycznego. Macierze jednokolumnowe $\mathbf{u}$, $\mathbf{t}$, $\hat{\mathbf{u}}$ i $\hat{\mathbf{t}}$ zawierają wartości węzłowe rzeczywistych i szczególnych przemieszczeń oraz sił brzegowych.

Zależność między $\ddot{\mathbf{u}}$ i $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$ określa się, układając równania (6.1) dla wszystkich węzłów brzegowych i punktów wewnętrznych. W rezultacie otrzymuje się układ równań, który może być zapisany w postaci macierzowej:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}\ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \tag{6.9}$$

gdzie elementami macierzy $\mathbf{F}$ są wartości funkcji $f^n(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$ dla wszystkich węzłów.

Nieznane współczynniki $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$ można wyrazić przez przyspieszenia w następujący sposób:

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{F}^{-1}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{E}\ddot{\mathbf{u}}. \tag{6.10}$$

Po podstawieniu równania (6.10) do (6.8) otrzymujemy:

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gt} - \rho(\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{t}})\mathbf{E}\ddot{\mathbf{u}} = 0 \tag{6.11}$$

lub

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gt} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = 0, \tag{6.12}$$

gdzie $\mathbf{M} = -\rho(\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{t}})\mathbf{E}$ jest macierzą bezwładności ciała. Układ równań jest modyfikowany zgodnie z warunkami brzegowymi, tak samo jak dla zagadnienia statycznego, a następnie może być rozwiązany metodami całkowania bezpośredniego.

Metoda Houbolta, przedstawiona w dodatku I, która ma silne tłumienie numeryczne, została zastosowana do analizy ciał poddanych obciążeniu dynamicznemu.

6.3. Przykłady numeryczne

Metodę podwójnej zasady wzajemności zastosowano do rozwiązania dwóch przykładów. W pierwszym przykładzie rozpatrzono wirującą tarczę kołową z pęknięciem brzegowym i wewnętrznym. DWIN wyznaczono na podstawie $\hat{J}$-całki niezależnej od konturu całkowania. Dla tego przykładu badano wpływ długości pęknięcia i wpływ wielkości konturu, dla którego obliczana jest $\hat{J}$-całka na DWIN. Z kolei w drugim przykładzie analizowano tarczę prostokątną z ukośnym pęknięciem. Na tym przykładzie pokazano wpływ sposobu zamocowania na DWIN.

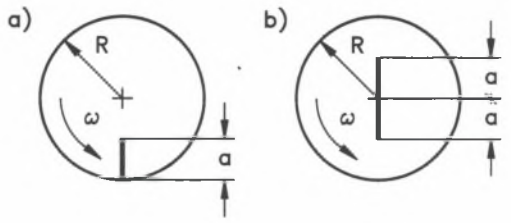
Wartości statyczne SWIN wyznaczono, przyjmując zerową gęstość materiału.

Tarcza kołowa z pęknięciem brzegowym lub wewnętrznym

Tarcza kołowa o promieniu R z pęknięciem skierowanym wzdłuż promienia obraca się ze stałą prędkością kątową ω (Fedeliński [54]). Tarcza jest obciążona niezależnymi od czasu siłami odśrodkowymi. Materiał tarczy ma współczynnik Poissona $\nu = 0.3$ i znajduje się w płaskim stanie odkształcenia. Rozpatrzono dwa przypadki - tarcza ma pęknięcie:

a) brzegowe o długości a (rys. 6.1a),

b) wewnętrzne o długości $2a$ (rys. 6.1b).



Rys. 6.1. Tarcza kołowa z pęknięciem: a) brzegowym, b) wewnętrznym
Fig. 6.1. Circular plate with: a) an edge crack, b) an internal crack

Brzeg tarczy podzielono na 32 elementy w pierwszym przypadku i na 40 elementów w drugim przypadku. Dodatkowo zastosowano 16 punktów wewnętrznych. Znormalizowane DWIN K_I/K_o, gdzie

$$K_o = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}\rho\omega^2 R^2\sqrt{\pi a}, \tag{6.13}$$

wyznaczono metodą $\hat{J}$-całki dla różnych konturów całkowania i długości pęknięcia $a/R = 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5$ i 0.6. Numer konturu oznacza numer węzła na krawędzi pęknięcia, który należy do konturu całkowania. Numer konturu wzrasta ze wzrostem jego promienia. Rozwiązania porównano z wynikami prezentowanymi przez Rooke'a i Cartwrighta [125] i przedstawiono w tabeli 6.1. Największa różnica między otrzymanymi i cytowanymi wynikami wynosi około 1%. Na podstawie otrzymanych wyników widzimy także niewielką zależność DWIN od konturu całkowania.

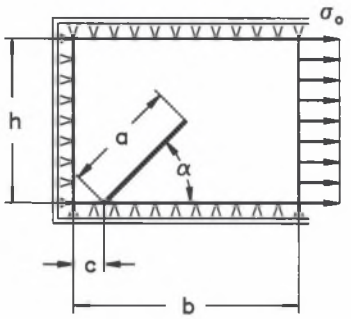
Tabela 6.1. Znormalizowany DWIN K_I/K_o dla tarczy kołowej z pęknięciem (**- część konturu byłaby poza obszarem tarczy)

$\frac{a}{R}$	K_I/K_o									
	Pęknięcie brzegowe					Pęknięcie wewnętrzne				
	Prezentowana metoda - kontur				[125]	Prezentowana metoda - kontur				[125]
	2	5	8	11		2	5	8	11	
0.2	0.631	0.631	0.632	0.631	0.63	1.058	1.056	1.056	1.057	1.05
0.3	0.769	0.768	0.769	0.767	0.76	1.116	1.114	1.114	1.116	1.11
0.4	0.920	0.920	0.920	0.916	0.91	1.198	1.196	1.196	1.198	1.19
0.5	1.088	1.086	1.087	1.081	1.07	1.305	1.302	1.302	1.304	1.29
0.6	1.275	1.273	1.273	1.266	1.26	1.445	1.442	1.441	**	1.43

Tarcza prostokątna z ukośnym pęknięciem brzegowym

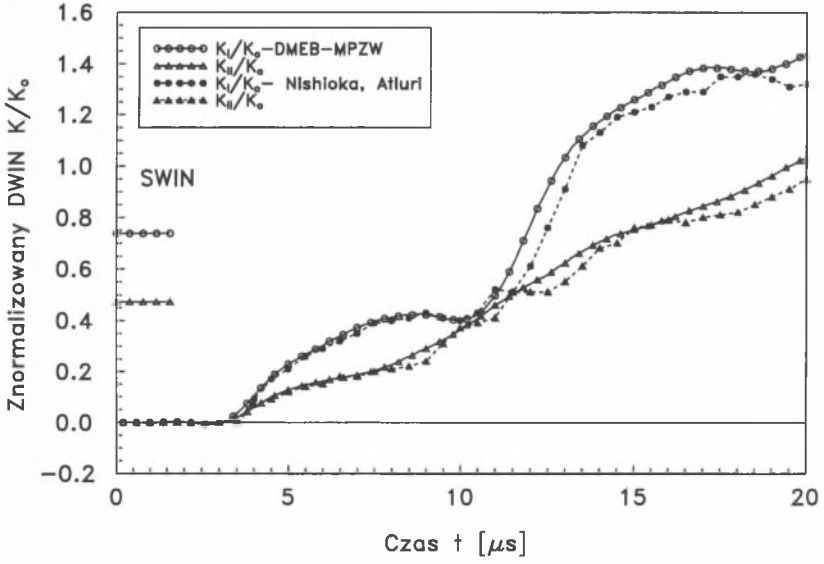
Tarcza prostokątna o długości $b = 44\ mm$, wysokości $h = 32\ mm$ ma pęknięcie o długości $a = 22.63\ mm$ nachylone do brzegu pod kątem $\alpha = 45^o$ (rys. 6.2). Odległość końca pęknięcia od naroża jest równa $c = 6\ mm$. Wierzchołek pęknięcia znajduje się w środku tarczy. Tarcza jest podparta wzdłuż trzech krawędzi i obciążona wzdłuż jednej krawędzi obciążeniem równomiernie rozłożonym o natężeniu σ_o. Tarczę obciążono impulsem stałym.

Materiał tarczy ma następujące własności mechaniczne: moduł sprężystości poprzecznej $\mu = 29.4 \cdot 10^9\ Pa$, współczynnik Poissona $\nu = 0.286$, gęstość $\rho = 2450\ kg/m^3$ i znajduje się w płaskim stanie odkształcenia.



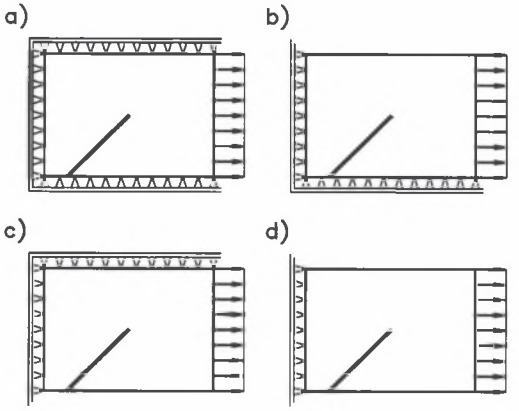
Rys. 6.2. Tarcza prostokątna z ukośnym pęknięciem brzegowym
Fig. 6.2. Rectangular plate with an inclined edge crack

Brzeg tarczy podzielono na 58 elementów, zastosowano 54 punkty wewnętrzne i krok czasowy $\Delta\tau = 0.2\ \mu s$. Znormalizowane DWIN K/K_o wyznaczono dla konturu o numerze 5, a współczynnik K_o według równania (4.12). Rozwiązanie porównano z wynikami Nishioki i Atluriego [116], którzy stosowali MES i przedstawiono na rys. 6.3. Podobne rozwiązania MES zaprezentowane są w pracy Kishimoto, Aoki i Sakaty [85] i Aoki, Kishimoto, Izumihary i Sakaty [7], Murtiego i Valliappana [105].



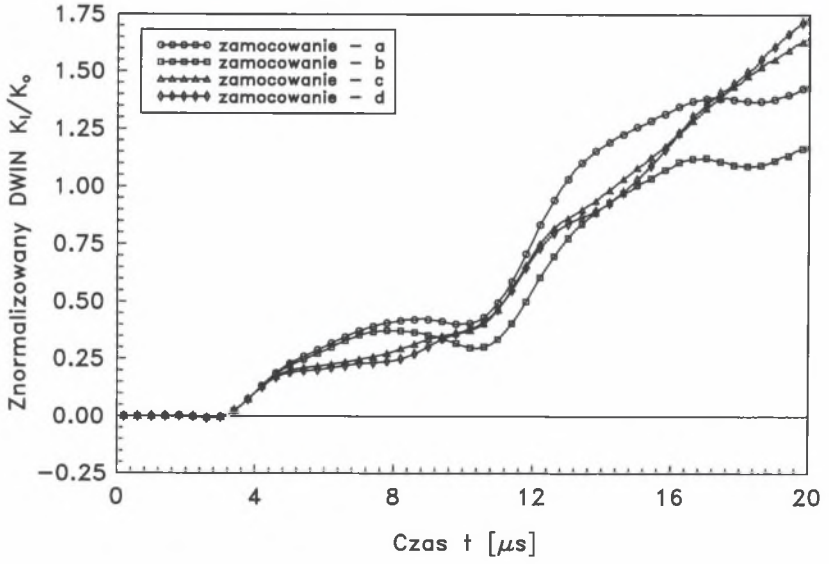
Rys. 6.3. Znormalizowany DWIN K/K_o dla tarczy prostokątnej z ukośnym pęknięciem brzegowym
Fig. 6.3. Normalized DSIF K/K_o for the rectangular plate with an inclined edge crack

Dla tej samej tarczy rozpatrzono cztery różne sposoby zamocowania pokazane na rys. 6.4. Znormalizowane DWIN K/K_o dla różnych sposobów podparcia przedstawiono na rys. 6.5 i 6.6. Na podstawie wykresów można stwierdzić, że decydujący wpływ na zmienność DWIN ma zamocowanie dolnej krawędzi. Zmienności DWIN, w przypadku kiedy górna krawędź jest zamocowana i swobodna, są podobne.



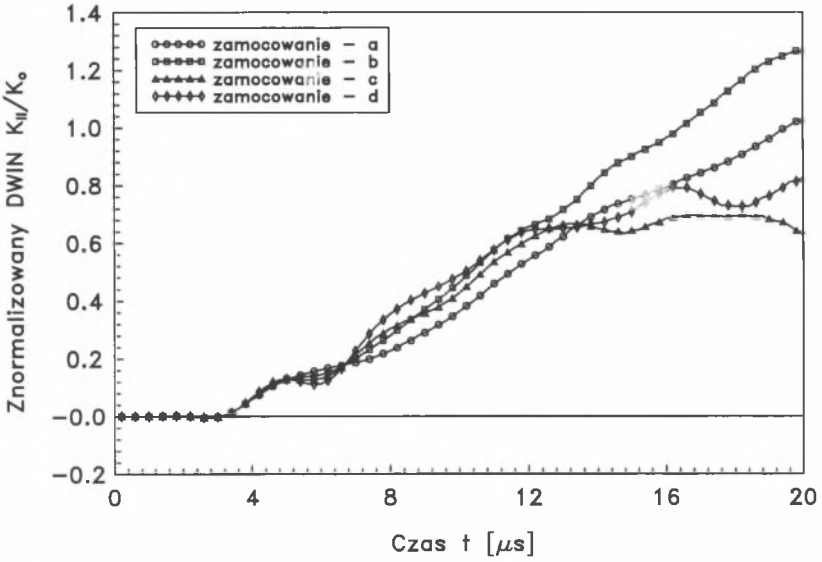
Rys. 6.4. Tarcza prostokątna z ukośnym pęknięciem brzegowym - różne sposoby zamocowania

Fig. 6.4. Rectangular plate with an inclined edge crack - different support conditions



Rys. 6.5. Znormalizowany DWIN K_I/K_o dla tarczy prostokątnej z ukośnym pęknięciem brzegowym - różne sposoby zamocowania

Fig. 6.5. Normalized DSIF K_I/K_o for the rectangular plate with an inclined edge crack - different support conditions



Rys. 6.6. Znormalizowany DWIN K_{II}/K_o dla tarczy prostokątnej z ukośnym pęknięciem brzegowym - różne sposoby zamocowania

Fig. 6.6. Normalized DSIF K_{II}/K_o for the rectangular plate with an inclined edge crack - different support conditions

Rozdział 7

Porównanie metod

W pracy przedstawiono metodę analizy dynamicznej pęknięć za pomocą sformułowania dualnego MEB i trzech metod: transformacji całkowych (MTC), rozwiązań w dziedzinie czasu (MRDC) i podwójnej zasady wzajemności (MPZW). Poniżej zostaną porównane charakterystyczne cechy metod, decydujące o ich efektywności: rozwiązania podstawowe i ich całkowanie, sformułowanie macierzowych równań ruchu i ich rozwiązanie, wymagana pamięć, prędkość obliczeń, dokładność i możliwe zastosowania (Fedeliński [61]).

7.1. Rozwiązania podstawowe i ich całkowanie

W MTC stosuje się transformaty całkowe rozwiązań podstawowych elastodynamiki, które mają bardzo skomplikowane formy (dodatek C). Rozwiązania zależą od funkcji Bessela, które wyraża się w postaci szeregów funkcji zmiennych zespolonych. Metoda wymaga tylko całkowania wzdłuż brzegu ciała.

W MRDC stosuje się zależne od czasu rozwiązania podstawowe elastodynamiki. Metoda wymaga całkowania wzdłuż brzegu i względem czasu. Dla prostej aproksymacji zmienności przemieszczeń i sił brzegowych, np. stałych lub liniowych czasowych funkcji kształtu, które przyjęto w pracy, całki dla kroku czasowego można obliczyć analitycznie. W wyniku całkowania otrzymujemy wyrażenia, które mają bardziej skomplikowane formy niż rozwiązania podstawowe elastostatyki (dodatek D). W początkowej fazie analizy rozwiązania podstawowe elastodynamiki są niezerowe tylko w otoczeniu punktu kolokacji. W takim przypadku całkuje się tylko wzdłuż części brzegu.

W MPZW stosuje się rozwiązania podstawowe elastostatyki (dodatek A) oraz szczególne przemieszczenia i siły brzegowe, które zależą od sposobu aproksymacji przyspieszeń (dodatek E). Ponieważ rozwiązania podstawowe elastostatyki nie zależą od czasu, dlatego w metodzie całkuje się tylko wzdłuż brzegu.

Transformaty całkowe i całki względem czasu rozwiązań podstawowych elastodynamiki są zbieżne do rozwiązań podstawowych elastostatyki, gdy gęstość materiału dąży do zera lub krok czasowy dąży do nieskończoności. Rozwiązania podstawowe są funkcjami osobliwymi. Rząd osobliwości ze względu na odległość r między punktem kolokacji i całkowania jest taki sam dla każdej metody: rozwiązania stosowane w równaniu przemieszczeń mają słabą osobliwość rzędu $O(ln(r))$ i silną rzędu $O(1/r)$, rozwiązania stosowane w równaniu sił brzegowych mają silną osobliwość rzędu $O(1/r)$ i hiperosobliwość rzędu $O(1/r^2)$.

7.2. Sformułowanie macierzowych równań ruchu

W MTC oblicza się dwie macierze $\bar{\mathbf{H}}$ i $\bar{\mathbf{G}}$ dla każdego parametru transformaty. W MRDC oblicza się dwie macierze $\mathbf{H}^{Nn}$ i $\mathbf{G}^{Nn}$ dla każdego kroku czasowego. Określenie macierzy wymaga całkowania wzdłuż brzegu ciała i względem czasu. W MPZW oblicza się dwie macierze $\mathbf{H}$ i $\mathbf{G}$, które wymagają całkowania wzdłuż brzegu i są takie same jak macierze stosowane w elastostatyce. Dodatkowo oblicza się macierz $\mathbf{F}$, która zawiera wartości funkcji aproksymującej przyspieszenia oraz macierze $\hat{\mathbf{u}}$ i $\hat{\mathbf{t}}$, które zawierają wartości szczególnych przemieszczeń i sił brzegowych, żeby obliczyć macierz bezwładności $\mathbf{M}$. Utworzenie macierzy $\mathbf{F}$, $\hat{\mathbf{u}}$ i $\hat{\mathbf{t}}$ jest proste, ale obliczenie macierzy odwrotnej $\mathbf{F}^{-1}$ i dwukrotne mnożenie macierzy, żeby otrzymać macierz bezwładności, jest bardzo czasochłonne. W MPZW wszystkie wymienione macierze oblicza się tylko raz.

7.3. Rozwiązanie układu równań ruchu

Liczba równań ruchu dla MTC i MRDC jest równa liczbie węzłów brzegowych pomnożonych przez liczbę stopni swobody węzła. Liczba równań dla MPZW jest równa liczbie węzłów brzegowych i punktów wewnętrznych, jeżeli takie są stosowane do poprawienia aproksymacji przyspieszeń, pomnożonych przez liczbę stopni swobody w węźle. Wielkość układu równań tworzonego za pomocą każdej metody zależy od rodzaju zagadnienia. Zazwyczaj układ tworzony przez MPZW jest największy ze względu na konieczność stosowania punktów wewnętrznych. W MRDC i MPZW macierz współczynników jest taka sama w każdym kroku czasowym, dlatego można stosować efektywne metody rozwiązywania układów równań ze stałą macierzą współczynników i zmienną macierzą kolumnową wyrazów wolnych, np. metodę dekompozycji LU stosowaną w pracy. Obliczanie macierzy kolumnowej wyrazów wolnych dla MRDC, która zależy od wszystkich macierzy $\mathbf{H}^{Nn}$ i $\mathbf{G}^{Nn}$, obliczanych w poprzednich krokach czasowych, jest bardzo czasochłonne. Układ równań tworzonych przez MTC jest inny dla każdego parametru transformacji.

7.4. Wymagana pamięć, prędkość obliczeń i dokładność

W MTC oblicza się dwie macierze $\bar{\mathbf{H}}$ i $\bar{\mathbf{G}}$, które są następnie przegrupowywane, żeby otrzymać macierze $\bar{\mathbf{A}}$ i $\bar{\mathbf{B}}$. Metoda nie wymaga innych macierzy. W MRDC oblicza się w każdym kroku czasowym macierze $\mathbf{H}^{Nn}$ i $\mathbf{G}^{Nn}$. Te macierze są przegrupowywane w pierwszym kroku, żeby otrzymać macierze $\bar{\mathbf{A}}$ i $\bar{\mathbf{B}}$. W metodzie wykorzystuje się w każdym kroku macierze $\mathbf{H}^{Nn}$ i $\mathbf{G}^{Nn}$ obliczone we wcześniejszych krokach, które przechowuje się w pamięci komputera. MPZW wymaga więcej macierzy, żeby utworzyć układ równań ($\mathbf{H}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{-1}$, $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{t}}$, $\mathbf{M}$). Te wszystkie macierze nie są wymagane jednocześnie. Jeżeli chcemy przyspieszyć obliczenia, wówczas lepiej jest przechowywać macierze w pamięci komputera. Biorąc pod uwagę powyższe własności metod, można stwierdzić, że najwięcej pamięci wymaga MRDC, następnie MPZW, a najmniej MTC.

Utworzenie układu równań w MTC jest stosunkowo proste, ale bardzo czasochłonne ze względu na skomplikowaną formę transformat całkowych rozwiązań podstawowych elastodynamiki. Ten czas jest zależny od liczby wyrazów w rozwinięciu funkcji Bessela w szereg. W przybliżeniu czas obliczeń jest proporcjonalny do liczby parametrów transformacji całkowych. Metoda wymaga rozwiązywania innego układu równań dla każdego

parametru transformacji. Obliczenie macierzowego układu równań w MRDC jest proste, ale czasochłonne, ponieważ w każdym kroku trzeba obliczać dwie nowe macierze i trzeba uwzględnić cały wcześniejszy przebieg zjawisk dynamicznych. W MPZW należy obliczyć wiele różnych macierzy. Jakkolwiek utworzenie układu równań jest najbardziej czasochłonne, jego rozwiązanie jest szybkie ze względu na prosty sposób obliczania macierzy wyrazów wolnych. W większości przypadków MPZW jest kilkakrotnie szybsza niż MTC i MRDC.

MTC wymaga tylko aproksymacji przemieszczeń i sił wzdłuż brzegu. Zazwyczaj zmienności zadanych przemieszczeń i sił brzegowych są prostymi funkcjami czasu i ich transformaty całkowe mogą być obliczone analitycznie. Rozwiązania w dziedzinie czasu otrzymuje się, stosując numeryczne obliczanie transformat odwrotnych. Dokładność rozwiązania można zwiększać przez wykonanie obliczeń dla większej liczby parametrów transformaty. MRDC wymaga aproksymacji zmienności przemieszczeń i sił wzdłuż brzegu oraz zmienności w czasie. W tej metodzie stosowany krok czasowy zależy od rozmiaru elementów brzegowych. Dokładniejsze rozwiązanie można otrzymać, skracając krok czasowy i jednocześnie zwiększając liczbę elementów. W MPZW, podobnie jak w poprzednim ujęciu, aproksymuje się zmienność wielkości wzdłuż brzegu i zmienność w czasie. Dodatkowo konieczna jest aproksymacja zmienności przyspieszeń wewnątrz ciała. Jeżeli ciało jest obciążone impulsem dynamicznym, wówczas pole przyspieszeń ma duże gradienty i dokładne rozwiązanie wymaga stosowania dodatkowych punktów wewnętrznych. Zastosowanie punktów wewnętrznych jest niewygodne. Dobór ich położenia wymaga doświadczenia użytkownika lub specjalnych metod adaptacyjnych. Konieczność stosowania dodatkowej aproksymacji przyspieszeń powoduje, że metoda jest mniej dokładna niż pozostałe. Na podstawie obliczeń wykonanych dla wielu przykładów i ich porównania z innymi rozwiązaniami można stwierdzić, że MTC jest najbardziej dokładna przy tej samej dyskretyzacji wielkości brzegowych.

7.5. Zastosowania

Zamieszczone w pracy przykłady numeryczne pokazują, że każda z metod umożliwia efektywną analizę dynamiczną ciał z pęknięciami. MTC i MRDC są szczególnie efektywne w przypadku analizy pęknięć w nieograniczonym ośrodku sprężystym. Przeprowadza się wówczas tylko dyskretyzację pęknięć, bez potrzeby wprowadzania sztucznych brzegów, znajdujących się w dużej odległości od pęknięcia. MPZW umożliwia uwzględnienie niezerowych warunków początkowych i działanie sił objętościowych w prostszy sposób niż MTC i MRDC. Sformułowania, w których otrzymuje się rozwiązania metodami krokowymi, tzn. MRDC i MPZW, są bardziej odpowiednie do analizy wzrostu pęknięć niż MTC.

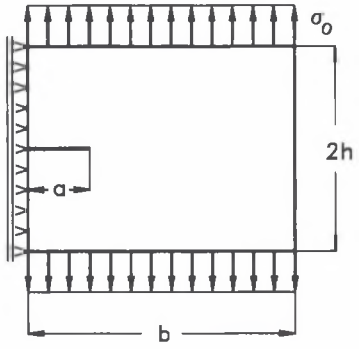
7.6. Przykłady numeryczne

W celu porównania rozwiązań, otrzymanych za pomocą trzech omawianych sformułowań, rozwiązano dwa przykłady, stosując taką samą dyskretyzację wielkości brzegowych dla każdej metody. Szczegółowe porównanie wymaganej pamięci i czasów obliczeń dla drugiego przykładu przedstawiono w pracy Fedelińskiego [61]. Przykład potwierdza wcześniej

przedstawione wnioski wynikające z analizy algorytmów poszczególnych metod. Dodatkowe porównanie rozwiązań dla elementu konstrukcji pokazano w rozdziale 10.2. Współczynnik K_o obliczono według równania (4.12).

Tarcza prostokątna z pęknięciem brzegowym

Tarcza prostokątna o długości $b = 52\ mm$ i szerokości $2h = 40\ mm$ ma pęknięcie brzegowe o długości $a = 12\ mm$. Tarcza jest utwierdzona wzdłuż jednej krawędzi i obciążona wzdłuż dwóch krawędzi impulsem stałym o wartości σ_o (rys. 7.1). Materiał tarczy ma następujące własności mechaniczne: moduł sprężystości poprzecznej $\mu = 29.4 \cdot 10^9\ Pa$, współczynnik Poissona $\nu = 0.286$, gęstość $\rho = 2450\ kg/m^3$ i znajduje się w płaskim stanie odkształcenia.

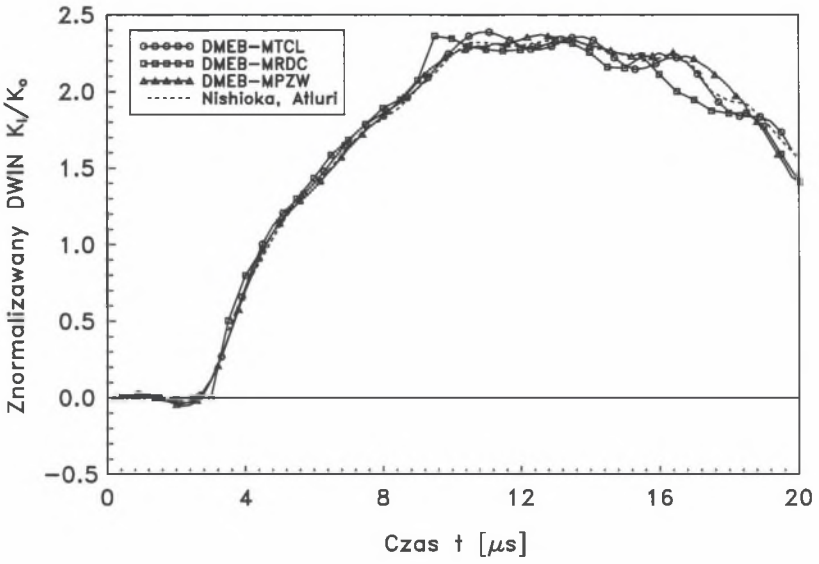


Rys. 7.1. Tarcza prostokątna z pęknięciem brzegowym
Fig. 7.1. Rectangular plate with an edge crack

Brzeg tarczy i pęknięcia podzielono na 52 elementy kwadratowe i zastosowano dodatkowo 44 punkty wewnętrzne dla MPZW. Obliczenia wykonano dla 25 parametrów Laplace'a w przypadku MTCL, dla kroku czasowego $\Delta t = 0.6\ \mu s$ w przypadku MRDC i $\Delta t = 0.2\ \mu s$ dla MPZW. Znormalizowane DWIN K_I/K_o przedstawiono na rys. 7.2 i porównano z rozwiązaniem otrzymanym przez Nishiokę i Atluriego [113], którzy stosowali MES. Podobne rozwiązania MES przedstawione są w pracy Kishimoty, Aokiego i Sakaty [85], Aokiego, Kishimoty, Izumihary i Sakaty [7] oraz Murtiego i Valliappana [105]. Rozwiązania otrzymane trzema metodami MEB są podobne i zgodne z rozwiązaniem wyznaczonym za pomocą MES.

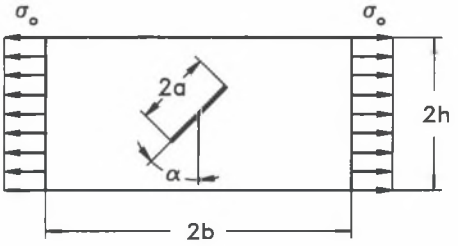
Tarcza prostokątna z ukośnym pęknięciem wewnętrznym

Tarcza prostokątna o długości $2b = 60\ mm$ i szerokości $2h = 30\ mm$ ma pęknięcie wewnętrzne o długości $2a = 14.14\ mm$, nachylone pod kątem $\alpha = 45^o$ (rys. 7.3). Tarcza jest obciążona impulsem stałym o wartości σ_o. Materiał tarczy ma następujące własności mechaniczne: moduł sprężystości poprzecznej $\mu = 76.92 \cdot 10^9\ Pa$, współczynnik Poissona $\nu = 0.3$, gęstość $\rho = 5000\ kg/m^3$ i znajduje się w płaskim stanie odkształcenia. Brzeg tarczy i pęknięcia podzielono na 40 elementów kwadratowych i zastosowano dodatkowo 40 punktów wewnętrznych dla MPZW. Obliczenia wykonano dla 25 parametrów Laplace'a w przypadku MTCL, dla kroku czasowego $\Delta t = 0.8\ \mu s$ w przypadku MRDC, $\Delta t = 0.2\ \mu s$ dla MPZW.

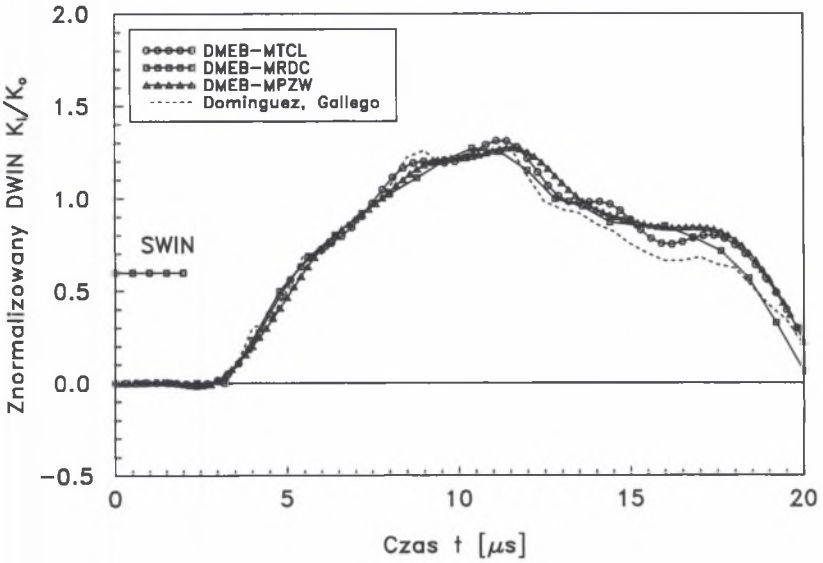


Rys. 7.2. Znormalizowane DWIN K_I/K_o dla tarczy prostokątnej z pęknięciem brzegowym - różne metody analizy
Fig. 7.2. Normalized DSIF K_I/K_o for the rectangular plate with an edge crack - different methods of analysis

Znormalizowane DWIN K_I/K_o i K_{II}/K_o przedstawiono na rys. 7.4 i 7.5 i porównano z rozwiązaniem otrzymanym przez Domingueza i Gallego [36], którzy stosowali MEB i metodę podziału na podobszary. Podobne rozwiązanie otrzymali Murti i Valliappan [105] za pomocą MES. Rozwiązania otrzymane trzema metodami MEB są podobne. Znormalizowany K_I/K_o jest większy i K_{II}/K_o mniejszy dla końcowej fazy analizowanego czasu niż rozwiązanie otrzymane przez Domingueza i Gallego.

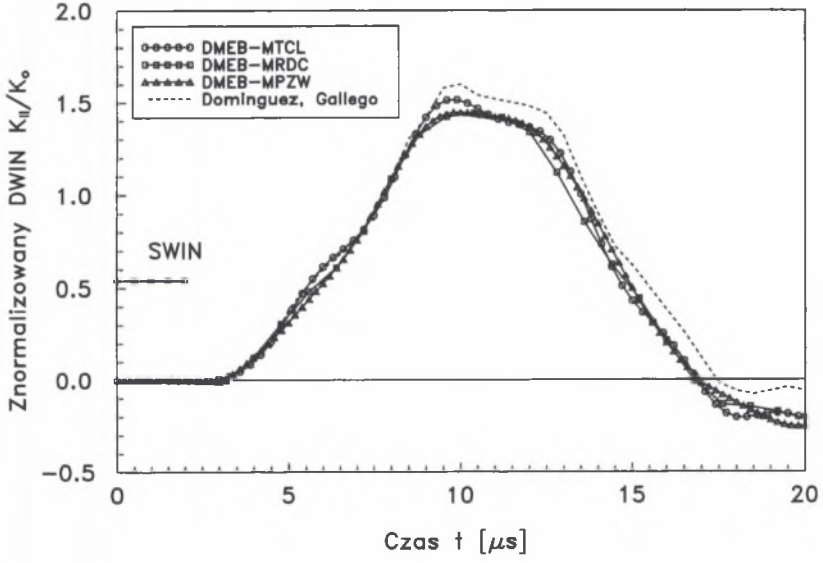


Rys. 7.3. Tarcza prostokątna z ukośnym pęknięciem wewnętrznym
Fig. 7.3. Rectangular plate with an inclined internal crack



Rys. 7.4. Znormalizowane DWIN K_I/K_o dla tarczy prostokątnej z ukośnym pęknięciem wewnętrznym - różne metody analizy

Fig. 7.4. Normalized DSIF K_I/K_o for a rectangular plate with an inclined internal crack - different methods of analysis



Rys. 7.5. Znormalizowane DWIN K_{II}/K_o dla tarczy prostokątnej z ukośnym pęknięciem wewnętrznym - różne metody analizy

Fig. 7.5. Normalized DSIF K_{II}/K_o for a rectangular plate with an inclined internal crack - different methods of analysis

Rozdział 8

Dynamiczny wzrost pęknięcia

Metoda elementów brzegowych umożliwia proste modelowanie dynamicznego wzrostu pęknięcia. Metody rozwiązań w dziedzinie czasu i podziału na podobszary oraz nieciągłości przemieszczeń w analizie dynamicznego wzrostu pęknięć przedstawiono w wielu pracach.

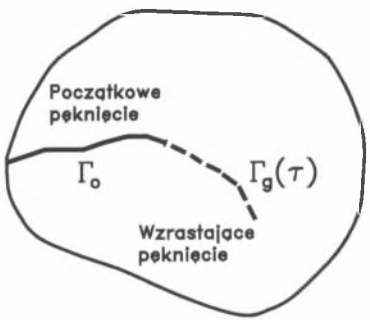
Metodą brzegowych równań całkowych modelowano płytkie trzęsienia Ziemi jako wzrastające dynamicznie poprzeczne pęknięcia. Das [30] stosował równanie przemieszczeń, żeby określić uskok spowodowany płaskim pęknięciem wzrastającym w obszarze nieograniczonym. Rozpatrzono dwa przypadki: nagłe pojawienie się stacjonarnego pęknięcia kołowego oraz wzrost i zatrzymanie pęknięcia. Das i Kostrov [31] przedstawili równanie przemieszczeń i sił brzegowych dla obszarów przestrzennych z pęknięciem poprzecznym. Omówiono numeryczne zastosowanie równań oraz ich efektywność i stabilność. Koller, Bonnet i Madariaga [93] wykorzystywali metodę nieciągłości przemieszczeń w analizie pęknięć poprzecznych. Używano liniowych funkcji przestrzennych i czasowych. W pobliżu wierzchołka pęknięcia zastosowano elementy o osobliwych funkcjach kształtu. Wzrost pęknięcia modelowano przez dodanie nowych elementów brzegowych przy wierzchołku pęknięcia. Analizowano półnieskończone pęknięcie wzrastające ze stałą lub zmienną prędkością oraz pęknięcie o skończonych wymiarach. Hirose i Achenbach [78] stosowali równanie sił brzegowych do analizy emisji akustycznej wywołanej przez wzrastające okrągłe pęknięcia poddane obciążeniu statycznemu. Pola sprężyste wyznaczono dla różnych częstości i promieni początkowych. Przemieszczenia pęknięcia aproksymowano przemieszczeniami statycznymi i liniowymi funkcjami czasowymi. Mettu i Kim [98] stosowali superpozycje dwóch rozwiązań dynamicznych dla pęknięcia stacjonarnego. Wykorzystywano stałe funkcje kształtu dla przestrzeni i czasu. DWIN wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów na podstawie przemieszczeń pęknięcia. Metodę zastosowano do analizy wzrostu półnieskończonego pęknięcia obciążonego na powierzchniach. Gallego i Dominguez [64] modelowali wzrost pęknięcia, stosując przemieszczające się elementy osobliwe i zmianę dyskretyzacji. Brzeg podzielono na elementy kwadratowe. W pobliżu wierzchołka pęknięcia zastosowano zwykłe i osobliwe elementy ćwiartkowe, które pozostają niezmienione w czasie wzrostu pęknięcia. Przyjęto stałe funkcje czasowe dla obciążeń i liniowe dla przemieszczeń. DWIN wyznaczono na podstawie obciążeń elementów osobliwych. Metoda wymaga wyznaczania na nowo w każdym kroku podmacierzy, które odpowiadają zmieniającym się punktom kolokacji i elementom brzegowym. Dla przemieszczających się elementów zastosowano funkcje kształtu zależne jednocześnie od zmiennych przestrzennych i czasu. Metodę wykorzystywano w zagadnieniach, w których ruch pęknięcia został wcześniej zdefiniowany: półnieskończonego pęknięcia wzrastającego ze stałą prędkością w

obszarze nieograniczonym i pęknięcia w tarczy o skończonych wymiarach. Seelig i Gross [129] stosowali metodę nieciągłości przemieszczeń. Nieciągłość przemieszczeń wzdłuż pęknięcia aproksymowano stałymi funkcjami kształtu i liniowymi funkcjami zależnymi od czasu. W pobliżu wierzchołka pęknięcia zastosowano specjalne funkcje kształtu. Wzrost pęknięcia modelowano poprzez dodawanie nowych elementów brzegowych. W obliczeniach uwzględniono zjawisko kontaktu powierzchni pęknięcia, przyjmując, że w miejscu styku działają siły zależne od względnego przemieszczenia powierzchni pęknięcia. Przyjęto, że pęknięcie wzrasta w kierunku wyznaczonym przez maksymalne naprężenie obwodowe, gdy naprężenie przekroczyło wartość krytyczną. Otrzymano w ten sposób zmienną prędkość wzrostu. Metodę zastosowano do analizy pęknięć w nieograniczonym ośrodku sprężystym.

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawione sformułowanie dualne i metoda rozwiązań w dziedzinie czasu w analizie dynamicznego wzrostu pęknięć (Fedeliński [62]).

8.1. Numeryczna realizacja metody

Do analizy dynamicznego wzrostu pęknięcia zastosowano wcześniej omawianą metodę rozwiązań w dziedzinie czasu. Ruch ciała z pęknięciem może być opisany za pomocą równań (5.1), (5.2) i (5.3), w których brzeg ciała Γ jest funkcją czasu $\Gamma(\tau)$ ze względu na zwiększające się powierzchnie pęknięcia. Brzeg ciała możemy podzielić na brzeg początkowy Γ_o i nowy brzeg Γ_g utworzony przez wzrastające pęknięcie ($\Gamma(\tau) = \Gamma_o \cup \Gamma_g$) (rys. 8.1).



Rys. 8.1. Brzeg ciała ze wzrastającym pęknięciem
Fig. 8.1. Boundaries of the body with a growing crack

Wzrost pęknięcia jest modelowany przez dodawanie nowych elementów brzegowych przy wierzchołku pęknięcia. Istniejące elementy nie zmieniają swojego położenia. Ten sposób modelowania powoduje wzrost liczby elementów i punktów kolokacji w czasie wzrostu pęknięcia.

Obliczenia wykonuje się według następującego algorytmu:

przed wzrostem pęknięcia (tak samo jak dla pęknięcia stacjonarnego - rozdział 5.):

- w pierwszym kroku oblicz macierze $\mathbf{H}^{NN}$ i $\mathbf{G}^{NN}$, przegrupuj je zgodnie z warunkami brzegowymi, żeby otrzymać nowe macierze $\mathbf{A}^{NN}$ i $\mathbf{B}^{NN}$ i rozwiąż utworzony układ równań,
- w kolejnych krokach czasowych oblicz macierze $\mathbf{H}^{Nn}$ i $\mathbf{G}^{Nn}$, które odpowiadają największej różnicy $N - n$ i rozwiąż układ równań,

w czasie wzrostu pęknięcia:

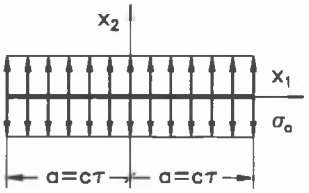
- wyznacz kierunek wzrostu pęknięcia,
- dodaj nowe elementy brzegowe przy wierzchołku pęknięcia,
- oblicz macierze $\mathbf{H}^{Nn}$ i $\mathbf{G}^{Nn}$ dla nowego brzegu ciała,
- dodaj nowe wiersze i kolumny do macierzy obliczonych w poprzednich krokach czasowych, które odpowiadają nowym punktom kolokacji i elementom brzegowym,
- rozwiąż utworzony układ równań i powtórz obliczenia dla kolejnego wzrostu pęknięcia.

8.2. Przykłady numeryczne

Przedstawioną metodę zastosowano do rozwiązania dwóch przykładów. Pierwszy przykład to pęknięcie w nieograniczonym ośrodku sprężystym, wzrastające w dwóch kierunkach. Drugi przykład to pęknięcie brzegowe w tarczy prostokątnej, wzrastające wzdłuż linii prostej. W obu przypadkach pęknięcie wzrasta ze stałą prędkością.

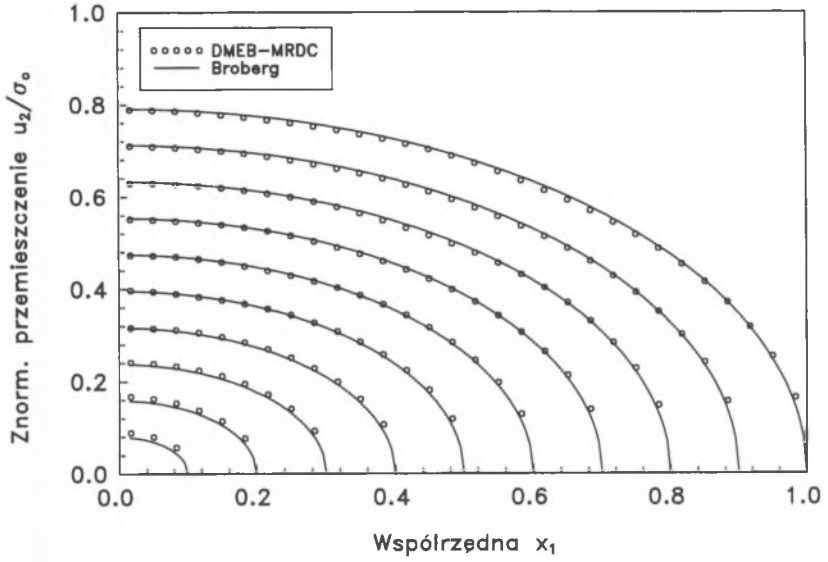
Pęknięcie w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Pęknięcie w nieograniczonym ośrodku sprężystym wzrasta symetrycznie ze stałą prędkością c od zerowej długości początkowej (rys. 8.2). Powierzchnie pęknięcia są obciążone równomiernie rozłożonym obciążeniem o natężeniu σ_o (Fedeliński [62]).

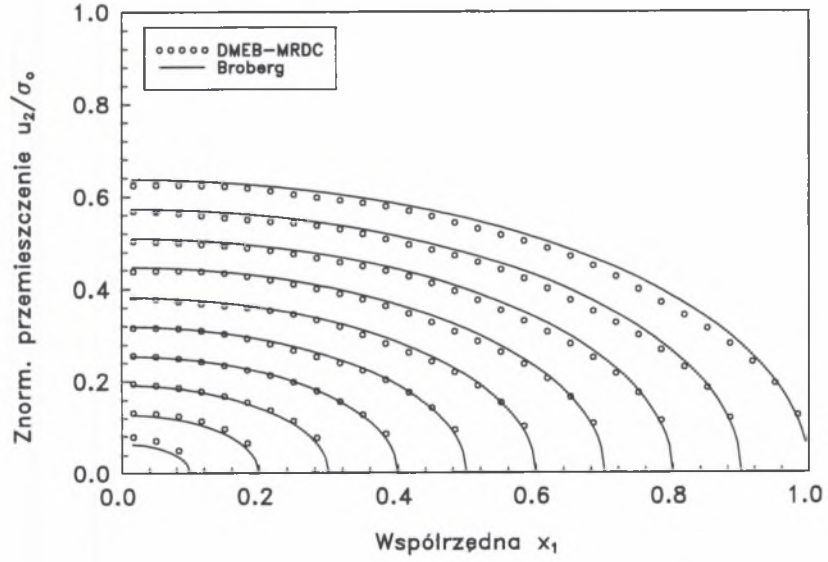


Rys. 8.2. Wzrastające pęknięcie w nieograniczonym ośrodku sprężystym
Fig. 8.2. Growing crack in an infinite elastic sheet

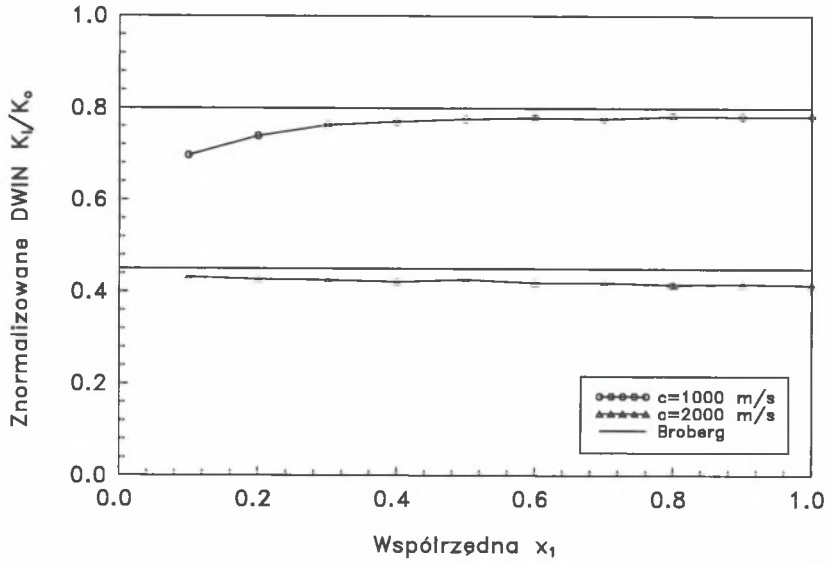
Materiał tarczy ma następujące własności mechaniczne: moduł Younga $E = 0.2 \cdot 10^{12}\ Pa$, współczynnik Poissona $\nu = 0.3$, gęstość $\rho = 8000\ kg/m^3$ i znajduje się w płaskim stanie odkształcenia. Prędkość fali podłużnej jest równa $c_1 = 5801\ m/s$, a prędkość fali poprzecznej $c_2 = 3101\ m/s$. Analizowano pęknięcie dla dwóch prędkości wzrostu: $c = 1000\ m/s$ $(c/c_2 = 0.322)$ i $c = 2000\ m/s$ $(c/c_2 = 0.645)$. Zastosowano krok czasowy $\Delta\tau = 1\ \mu s$ dla prędkości $c = 1000\ m/s$ i $\Delta\tau = 0.5\ \mu s$ dla $c = 2000\ m/s$. Długości elementów brzegowych były takie same w obu przypadkach. Na rys. 8.3 i 8.4 pokazano kształt pęknięć dla różnych chwil, które porównano z rozwiązaniami analitycznymi Broberga [63]. Wzrastające pęknięcie powinno mieć kształt eliptyczny. Długość osi elipsy w kierunku pęknięcia jest równa $2c\tau$, a w kierunku prostopadłym zależy od obciążenia σ_o, modułu sprężystości poprzecznej μ, współczynnika Poissona ν i stosunku c/c_2 (Freund [63]). Na rys. 8.5 przedstawiono znormalizowane DWIN K_I/K_o. Prezentowane rozwiązania numeryczne są zgodne z rozwiązaniami analitycznymi.



Rys. 8.3. Znormalizowane przemieszczenie pęknięcia u_2/σ_o dla prędkości $c = 1000\ m/s$
Fig. 8.3. Normalized displacement of the crack u_2/σ_o for the velocity of growth $c = 1000\ m/s$



Rys. 8.4. Znormalizowane przemieszczenie pęknięcia u_2/σ_o dla prędkości $c = 2000\ m/s$
Fig. 8.4. Normalized displacement of the crack u_2/σ_o for the velocity of growth $c = 2000\ m/s$

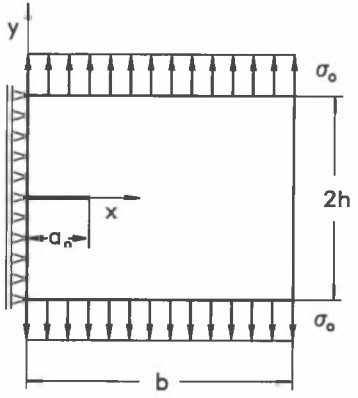


Rys. 8.5. Znormalizowane DWIN K_I/K_o dla wzrastającego pęknięcia w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Fig. 8.5. Normalized DSIF K_I/K_o for the growing crack in an infinite elastic sheet

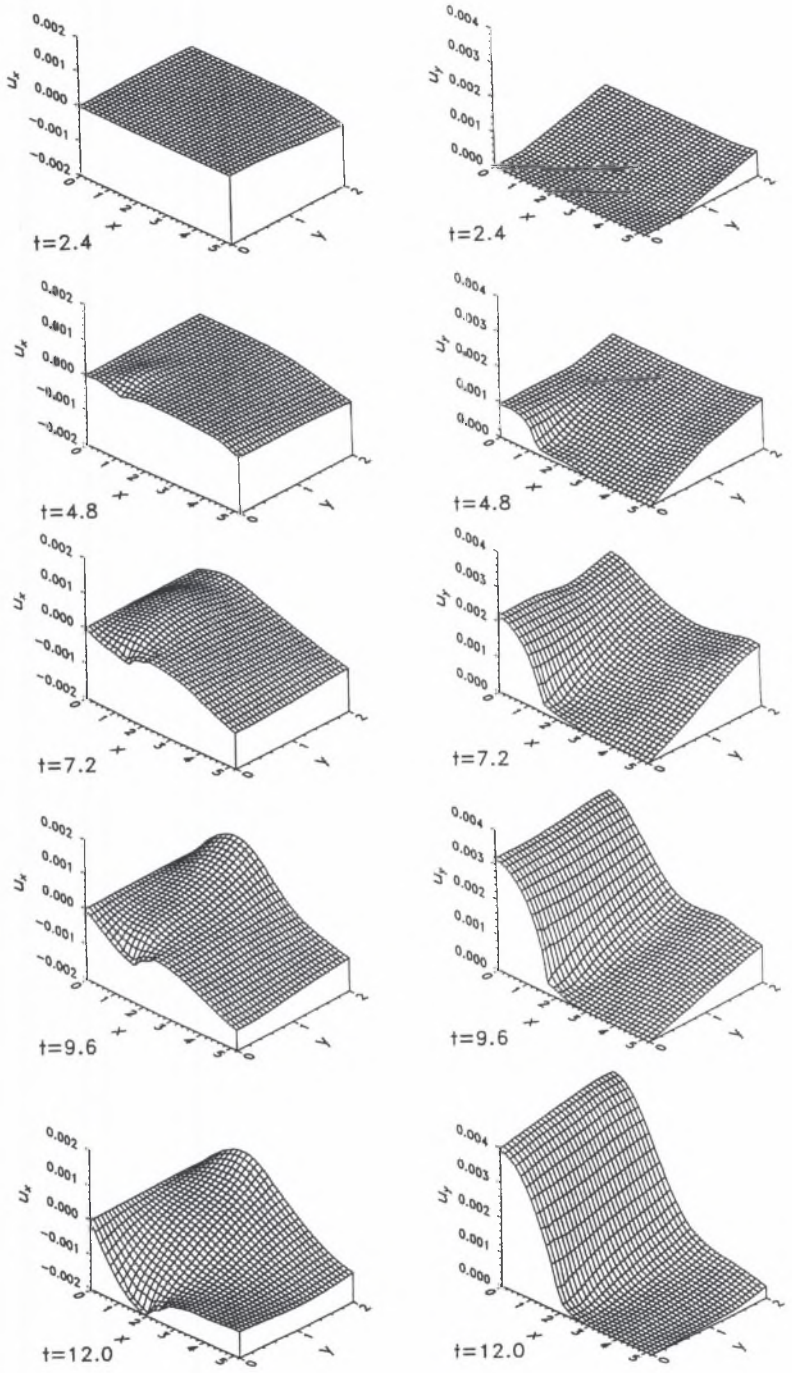
Tarcza prostokątna z pęknięciem brzegowym

Tarcza prostokątna ma długość $b = 52\ mm$ i szerokość $2h = 40\ mm$ (Fedeliński [62]). Początkowa długość pęknięcia jest równa $a_o = 12\ mm$. Tarcza jest utwierdzona wzdłuż jednej krawędzi i obciążona wzdłuż dwóch krawędzi impulsem stałym o natężeniu σ_o (rys. 8.6). Materiał tarczy ma następujące własności mechaniczne: moduł sprężystości poprzecznej $\mu = 29.4 \cdot 10^9\ Pa$, współczynnik Poissona $\nu = 0.286$, gęstość $\rho = 2450\ kg/m^3$ i znajduje się w płaskim stanie odkształcenia.



Rys. 8.6. Tarcza prostokątna ze wzrastającym pęknięciem brzegowym

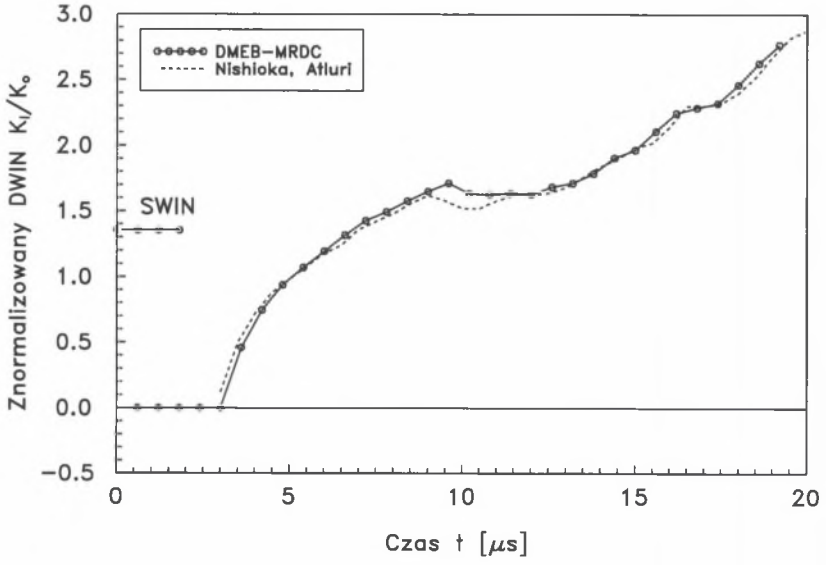
Fig. 8.6. Rectangular plate with a growing edge crack



Rys. 8.7. Pole przemieszczeń dla tarczy prostokątnej z pęknięciem brzegowym
Fig. 8.7. Displacement field for the rectangular plate with an edge crack

Pęknięcie jest stacjonarne dla czasu $\tau < 4.4\ \mu s$ i następnie wzrasta ze stałą prędkością $c = 1000\ m/s$. Początkowy brzeg tarczy i pęknięcia podzielono na 48 elementów kwadratowych i zastosowano krok czasowy $\Delta\tau = 0.6\ \mu s$. Przemieszczenia górnej połowy tarczy w różnych chwilach czasowych $t = 2.4,\ 4.8,\ 7.2,\ 9.6,\ 12\ \mu s$, w kierunku osi x i y przedstawiono na rys. 8.7. Znormalizowane DWIN K_I/K_o pokazano na rys. 8.8 i porównano z rozwiązaniem otrzymanym przez Nishiokę i Atluriego [113], którzy stosowali MES. Podstawy teoretyczne tej metody opisano w pracy Nishioki i Atluriego [112] oraz Atluriego i Nishioki [11].

Podobne rozwiązania prezentowane są w pracach Kishimoty, Aoki i Sakaty [87], Aoki, Kishimoty i Sakaty [8], Koha, Lee, Habera [92] oraz Gallego i Domingueza [64]. Współczynnik K_o obliczono według równania (4.12), przyjmując, że a jest początkową długością pęknięcia a_o.



Rys. 8.8. Znormalizowane DWIN K_I/K_o dla tarczy prostokątnej ze wzrastającym pęknięciem brzegowym

Fig. 8.8. Normalized DSIF K_I/K_o for the rectangular plate with a growing edge crack

Rozdział 9

Metoda transformacji całkowych dla zagadnienia trójwymiarowego

Metodę transformacji całkowych (MTC) Laplace'a i Fouriera w połączeniu z metodą podziału na podobszary i metodą nieciągłości przemieszczeń w analizie dynamicznej pęknięć przedstawiono w wielu pracach.

Metoda transformacji całkowej Laplace'a była stosowana przez Sládka i Sládka [132], którzy analizowali pęknięcie kołowe w nieograniczonym ośrodku sprężystym poddane obciążeniu harmonicznemu i uderzeniowemu. Zagadnienie rozwiązano metodą nieciągłości przemieszczeń. Przyjęto biegunowy układ współrzędnych i liniową zmienność przemieszczeń wzdłuż promienia. Analizowano wpływ współczynnika Poissona i częstości wymuszenia dla obciążenia harmonicznego. Zhang, Lee i Zhang [176] analizowali symetryczne zagadnienia trójwymiarowe: pęknięcie w prostokątnej płycie i sześcian z kołowym pęknięciem brzegowym. Wen, Aliabadi i Rooke [154] zastosowali metodę nieciągłości przemieszczeń i metodę równoważnego naprężenia do analizy przemieszczeń i DWIN w płaskich prostokątnych, kołowych i eliptycznych pęknięciach w ośrodku nieograniczonym. Ci sami autorzy [150] stosowali metodę pośrednią, w której wielkościami nieznanymi są fikcyjne obciążenia i nieciągłość przemieszczeń powierzchni pęknięcia. Za pomocą metody transformacji Laplace'a analizowano płaskie pęknięcia kwadratowe, kołowe i eliptyczne w elemencie prostopadłościennym. Dla tych samych układów analizowano metodą funkcji ważonej [155] wpływ rozkładu obciążenia oraz metodą funkcji Greena wpływ zmienności obciążenia w czasie na DWIN. W pracy [156] analizowano metodą funkcji ważonych ukośne pęknięcie kwadratowe w elemencie prostopadłościennym. W pracy [161] wykorzystywano metodę nieciągłości przemieszczeń i metodę funkcji ważonych do obliczenia DWIN dla wewnętrznego pęknięcia kołowego i eliptycznego oraz prostokątnych pęknięć brzegowych w elemencie prostopadłościennym i różnego sposobu obciążenia. Hirose i Niwa [79] stosowali metodę nieciągłości przemieszczeń do analizy rozproszenia fal sprężystych przez pęknięcie kołowe. Zhang i Achenbach [171] przedstawili metodę całki reprezentującej zachowanie energii sprężystej, która umożliwia otrzymanie brzegowego równania całkowego dla zagadnienia drgań harmonicznych nie posiadającego hiperosobliwości. Zhang i Gross [172] zastosowali tę metodę dla pęknięcia kołowego, eliptycznego i kwadratowego obciążonego siłami harmonicznymi.

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawione ujecie dualne MEB i metoda transformacji całkowych w analizie dynamicznej pęknięć dla zagadnienia trójwymiarowego (Fedeliński [45], [46], [47], [49], [51]).

9.1. Numeryczna realizacja metody

W przypadku ciała jednorodnego, izotropowego i liniowo-sprężystego obciążonego siłami brzegowymi i przy zerowych warunkach początkowych ogólna postać brzegowych równań całkowych dla zagadnienia trójwymiarowego jest taka sama jak dla zadania dwuwymiarowego (równania (4.3), (4.4) i (4.5)).

Sposób podziału na elementy brzegowe i aproksymacji wielkości brzegowych dla metody transformacji całkowych jest taki sam jak dla zagadnienia statycznego. W wyniku dyskretyzacji i aproksymacji otrzymujemy następujące równanie przemieszczeń:

$$c'_{ij}\bar{u}'_j(s) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[\bar{t}_j^{\,mp}(s)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\bar{U}'_{ij}(\xi,s)N^{mp}(\xi)J^m(\xi)d\xi_1 d\xi_2$$

$$-\bar{u}_j^{\,mp}(s)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\bar{T}'_{ij}(\xi,s)N^{mp}(\xi)J^m(\xi)d\xi_1 d\xi_2\Big], \tag{9.1}$$

oraz równanie przemieszczeń i sił brzegowych dla węzłów należących do pęknięcia:

$$\frac{1}{2}\bar{u}'_i(s)+\frac{1}{2}\bar{u}''_i(s) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[\bar{t}_j^{\,mp}(s)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\bar{U}'_{ij}(\xi,s)N^{mp}(\xi)J^m(\xi)d\xi_1 d\xi_2$$

$$-\bar{u}_j^{\,mp}(s)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\bar{T}'_{ij}(\xi,s)N^{mp}(\xi)J^m(\xi)d\xi_1 d\xi_2\Big], \tag{9.2}$$

$$\frac{1}{2}\bar{t}'_j(s)-\frac{1}{2}\bar{t}''_j(s) = n'_i\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\Big[\bar{t}_k^{\,mp}(s)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\bar{U}'_{kij}(\xi,s)N^{mp}(\xi)J^m(\xi)d\xi_1 d\xi_2$$

$$-\bar{u}_k^{\,mp}(s)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\bar{T}'_{kij}(\xi,s)N^{mp}(\xi)J^m(\xi)d\xi_1 d\xi_2\Big]. \tag{9.3}$$

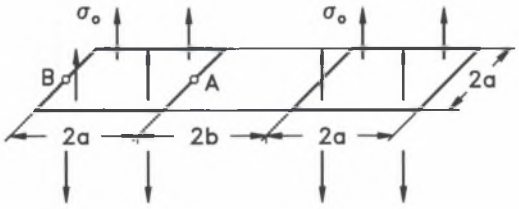
Sposób tworzenia macierzowego układu równań i jego rozwiązania jest taki sam jak dla zagadnienia dwuwymiarowego.

9.2. Przykłady numeryczne

Metodę transformacji całkowych zastosowano do rozwiązania dwóch przykładów. Pierwszy przykład - dwa współpłaszczyznowe pęknięcia kwadratowe w nieograniczonym ośrodku sprężystym przedstawia wpływ odległości między pęknięciami na DWIN. Drugi przykład - prostopadłościenny pręt z kwadratowym pęknięciem wewnętrznym pokazuje wpływ położenia pęknięcia na przemieszczenia i DWIN. Obliczenia wykonano dla współczynnika Poissona $\nu = 0.2$. Układy obciążono impulsem stałym o wartości σ_0. DWIN wyznaczono na podstawie rozwarcia wierzchołka pęknięcia i znormalizowano ze względu na K_o, określonego za pomocą równania (4.12). Rozwiązania zależne od czasu otrzymano, stosując 25 parametrów Laplace'a, a charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową wyznaczono dla 50 częstości.

Dwa współpłaszczyznowe pęknięcia kwadratowe w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Dwa współpłaszczyznowe pęknięcia kwadratowe o wymiarach $2a \times 2a$ w nieograniczonym ośrodku sprężystym są obciążone prostopadle do powierzchni pęknięć (rys. 9.1) (Fedeliński [47]). Każdą powierzchnię pęknięcia podzielono na 225 elementów stałych. Obliczono znormalizowane DWIN K_I/K_o dla różnych względnych odległości $b/a = 0.2,\ 0.6,\ 1.0$ w punktach A i B w środku przeciwległych krawędzi pęknięcia. Znormalizowane DWIN K_I/K_o w punktach A i B jako funkcję znormalizowanego czasu $\tau c_2/a$ przedstawiono na rys. 9.2 i 9.3, a jako funkcję znormalizowanej częstości $\omega a/c_2$ na rys. 9.4 i 9.5. Wyniki porównano z rozwiązaniami dla pojedynczego pęknięcia, otrzymanymi za pomocą DMEB oraz przez Wena, Aliabadiego, Rooke'a [154] i Zhanga, Grossa [172]. Z obliczeń wynika, że gdy odległość między pęknięciami zmniejsza się, to DWIN wzrasta. Ze wzrostem odległości między pęknięciami rozwiązania dążą do rozwiązań dla pojedynczego pęknięcia. Gdy względna odległość b/a jest większa niż 1, to wpływ drugiego pęknięcia jest pomijalnie mały. Odległość ma większy wpływ na DWIN w punkcie A niż w punkcie B. Początkowa zmienność DWIN dla każdej odległości jest taka sama.

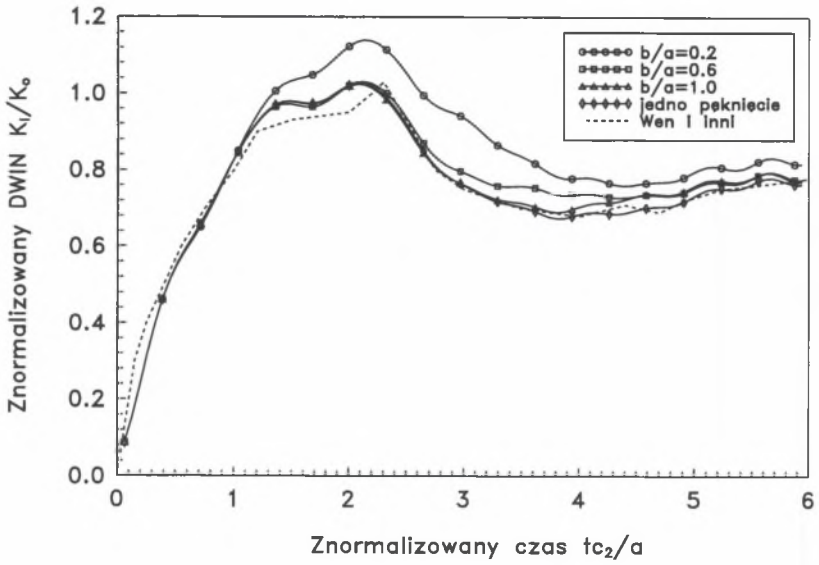


Rys. 9.1. Dwa współpłaszczyznowe pęknięcia kwadratowe w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Fig. 9.1. Two coplanar square cracks in an infinite elastic domain

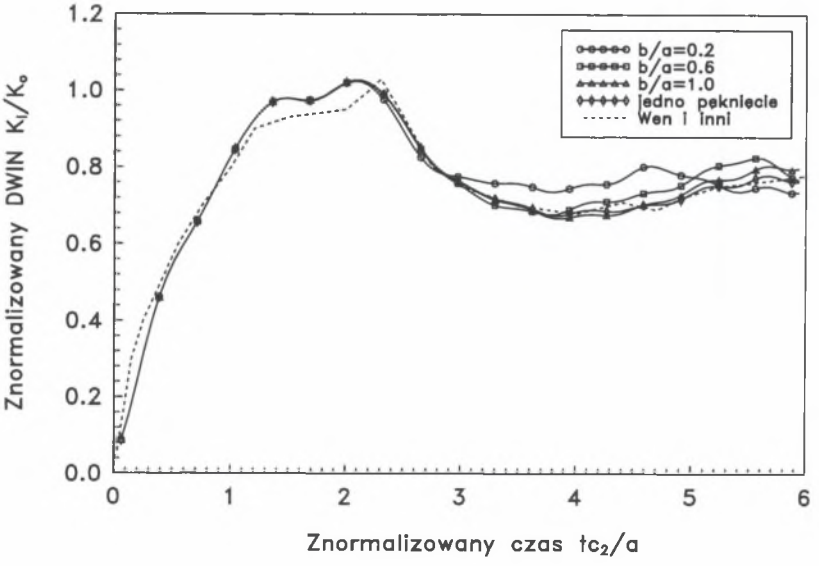
Pręt prostopadłościenny z kwadratowym pęknięciem wewnętrznym

Pręt prostopadłościenny o wysokości h i kwadratowym przekroju poprzecznym o wymiarach $2b \times 2b$ ma pęknięcie wewnętrzne o wymiarach $2a \times 2a$ (rys. 9.6) (Fedeliński [47]). Stosunki wymiarów są równe $a/b = 0.5$ i $h/b = 4$. Odległość poziomego pęknięcia od dolnego utwierdzonego końca jest równa c. Górny koniec jest obciążony równomiernie i prostopadle do powierzchni. Rozpatrzono dwa sposoby dyskretyzacji ciała - powierzchnie podzielono na 450 elementów stałych i 58 elementów kwadratowych. Analizowano dynamikę pręta dla trzech różnych względnych wysokości pęknięcia $c/a = 0.25,\ 0.50,\ 0.75$. Znormalizowane pionowe przemieszczenie $uE/(\sigma_o h)$ jako funkcję znormalizowanego czasu $\tau c_1/h$ dla trzech punktów: A w środku górnej powierzchni pręta, B i C w środku górnej i dolnej powierzchni pęknięcia przedstawiono na rys. 9.7. Z wykresu wynika, że położenie pęknięcia ma mały wpływ na przemieszczenia górnej powierzchni pręta. Przemieszczenia są identyczne aż do chwili, gdy fala podłużna odbita przez pęknięcie dociera do górnej powierzchni pręta. Rozwiązania otrzymano, stosując elementy kwadratowe. Podobne wyniki otrzymano dla elementów stałych.



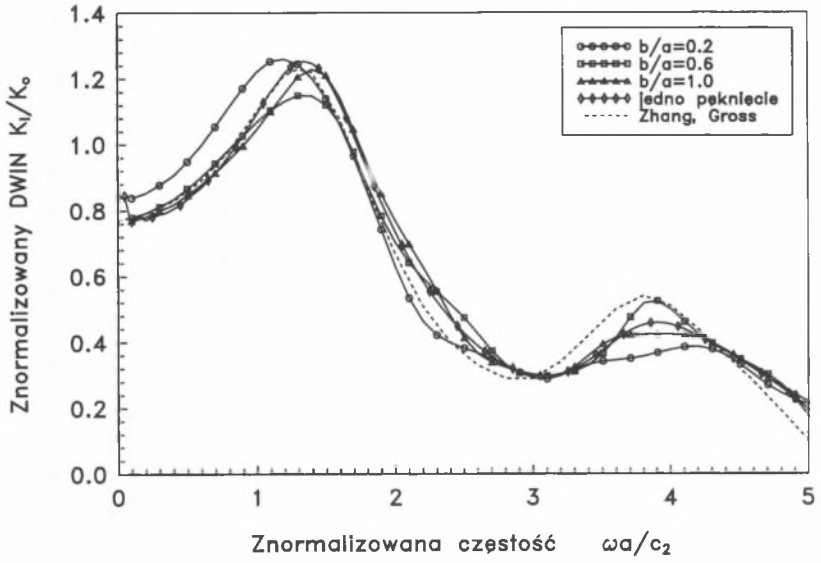
Rys. 9.2. Znormalizowany DWIN K_I/K_o w punkcie A dla dwóch współpłaszczyznowych pęknięć kwadratowych w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Fig. 9.2. Normalized DSIF K_I/K_o at the point A for two coplanar square cracks in an infinite elastic domain



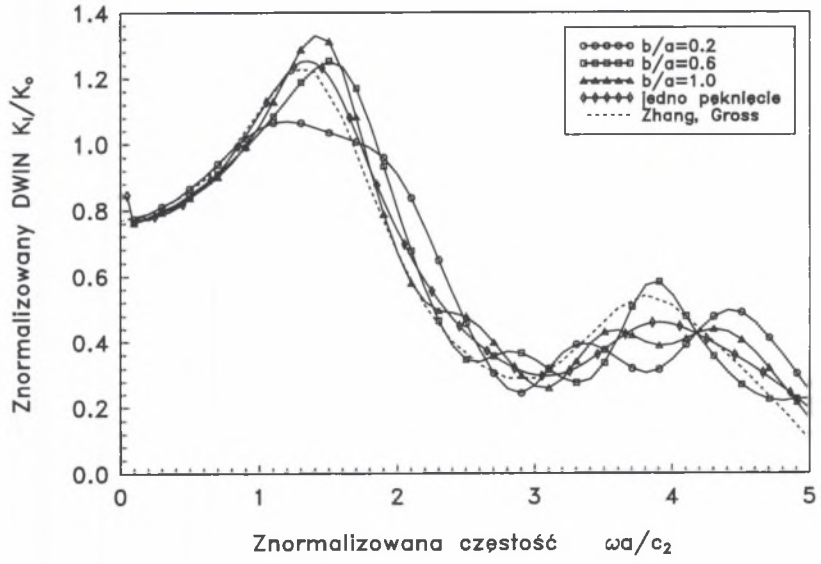
Rys. 9.3. Znormalizowany DWIN K_I/K_o w punkcie B dla dwóch współpłaszczyznowych pęknięć kwadratowych w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Fig. 9.3. Normalized DSIF K_I/K_o at the point B for two coplanar square cracks in an infinite elastic domain



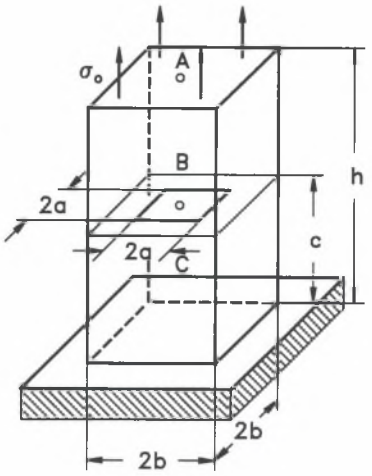
Rys. 9.4. Znormalizowany DWIN K_I/K_o w punkcie A dla dwóch współpłaszczyznowych pęknięć kwadratowych w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Fig. 9.4. Normalized DSIF K_I/K_o at the point A for two coplanar square cracks in an infinite elastic domain

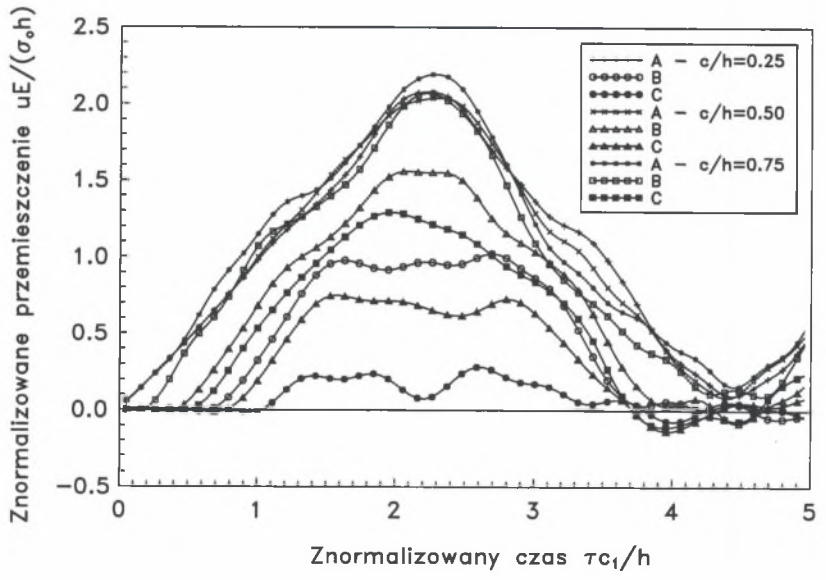


Rys. 9.5. Znormalizowany DWIN K_I/K_o w punkcie B dla dwóch współpłaszczyznowych pęknięć kwadratowych w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Fig. 9.5. Normalized DSIF K_I/K_o at the point B for two coplanar square cracks in an infinite elastic domain

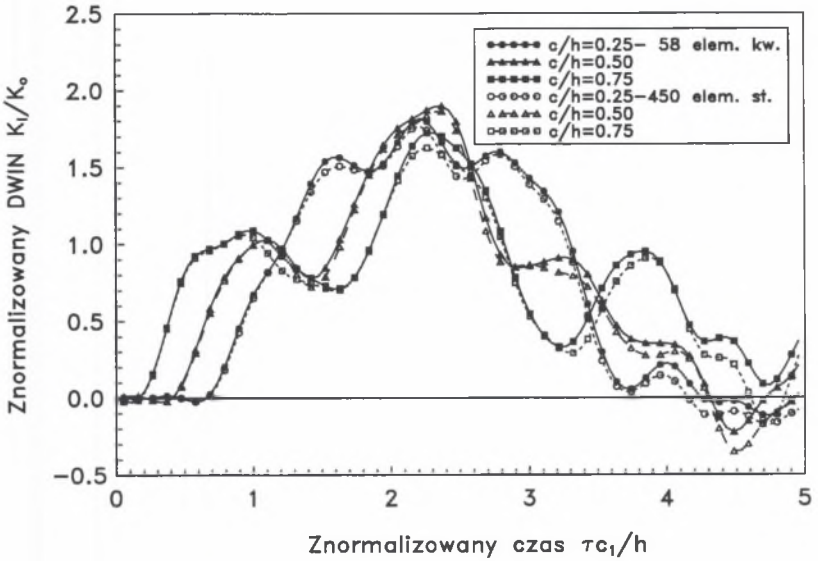


Rys. 9.6. Pręt prostopadłościenny z kwadratowym pęknięciem wewnętrznym
Fig. 9.6. Rectangular bar with an internal square crack



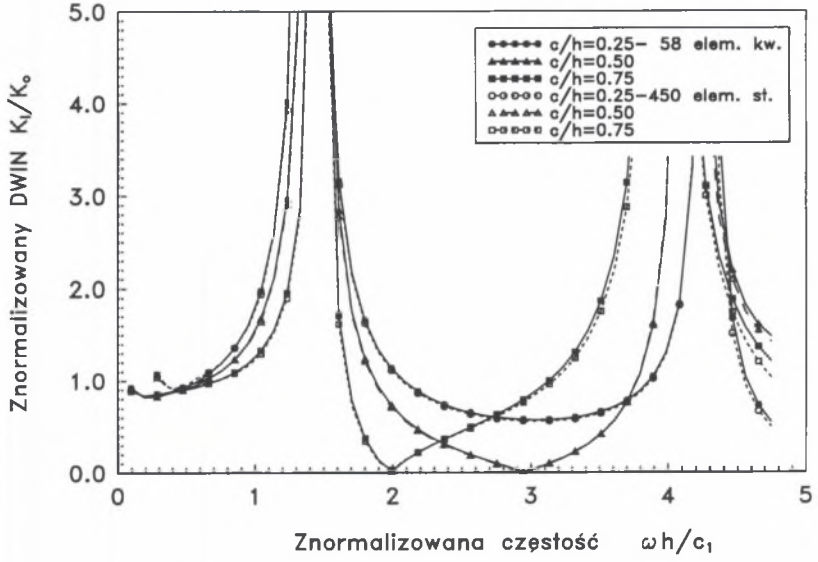
Rys. 9.7. Znormalizowane przemieszczenia $uE/(\sigma_o h)$ w punktach A, B i C dla pęknięcia kwadratowego w pręcie prostopadłościennym - różne położenie pęknięcia
Fig. 9.7. Normalized displacements $uE/(\sigma_o h)$ at points A, B and C for the square crack in the rectangular bar - different positions of the crack

Znormalizowane DWIN K_I/K_o jako funkcje znormalizowanego czasu $\tau c_1/h$ i znormalizowanej częstości $\omega h/c_1$ przedstawiono odpowiednio na rys. 9.8 i 9.9. Rozwiązania wyznaczone za pomocą elementów stałych i kwadratowych są podobne. Położenie pęknięcia ma mały wpływ na największe wartości DWIN i wartość pierwszej częstości rezonansowej.



Rys. 9.8. Znormalizowany DWIN K_I/K_o dla pęknięcia kwadratowego w pręcie prostopadłościennym - różne położenie pęknięcia

Fig. 9.8. Normalized DSIF K_I/K_o for the square crack in the rectangular bar - different positions of the crack



Rys. 9.9. Znormalizowany DWIN K_I/K_o dla pęknięcia kwadratowego w pręcie prostopadłościennym - różne położenie pęknięcia

Fig. 9.9. Normalized DSIF K_I/K_o for the square crack in the rectangular bar - different positions of the crack

Rozdział 10

Przykłady analizy elementów konstrukcyjnych z pęknięciami

10.1. Wprowadzenie

W poprzednich rozdziałach przedstawiono przykłady numeryczne ilustrujące zastosowanie omawianych metod. Jednym z celów tych przykładów było porównanie otrzymanych rozwiązań z dostępnymi w literaturze rozwiązaniami analitycznymi i numerycznymi. Na ogół prezentowane w literaturze układy mają prostą geometrię, sposób zamocowania i obciążenia.

W miejscach, gdzie elementy konstrukcyjne zmieniają swój kształt i wymiary, zmienia się rozkład naprężeń. Szczególnie duże spiętrzenie naprężeń występuje na dnie karbu. Karbami mogą być np. odsadzenia wałów, otwory, rowki, gwinty itp. Spiętrzenie charakteryzuje się tym, że naprężenia są znacznie większe od nominalnych. W miejscach, w których następuje spiętrzenie naprężeń, często dochodzi do powstania pęknięć zmęczeniowych.

Jeden ze sposobów zmniejszenia spiętrzenia naprężeń polega na odpowiednim kształtowaniu elementów konstrukcyjnych (Kocańda i Szala [91]). W przypadku wałów, osi i sworzni można zmniejszyć naprężenia poprzez zwiększenie promienia zaokrąglenia odsadzenia lub wykonanie obrączkowego rowka odciążającego. Otwory smarownicze nawierca się, wykonuje się płaskie ścięcia, rowki odciążające i kołnierze. Dla wałów korbowych stosuje się tak zwane dodatnie przekrycie czopów, otwory i wgłębienia odciążające oraz zwiększa się pochylenie ramion korb. W rowkach wpustowych i klinowych zaokrągla się dna. W połączeniach wtłaczanych wykonuje się rowek odciążający w piaście i wale, zaokrągla się wewnętrzne krawędzie elementu wciskanego lub zmniejsza się grubość jego krawędzi zewnętrznych. W elementach płaskich stosuje się karby lub rowki odciążające. W połączeniach gwintowych zmniejsza się średnicę trzpienia śruby i wykonuje się łagodne przejścia od trzpienia do gwintu i do łba śruby. Dodatkowo zwiększa się podatność nakrętki za pomocą rowków odciążających lub przez zmniejszenie jej grubości.

W tym rozdziale przedstawiono nowe, złożone i praktyczne przykłady analizy elementów konstrukcyjnych z pęknięciami. Analizowane elementy konstrukcyjne mają pęknięcia w miejscach o dużych naprężeniach lub w miejscach spiętrzenia naprężeń na dnie karbu.

Pierwszy przykład - prostokątny element łączący z dwoma pęknięciami brzegowymi pokazuje jeszcze jedno porównanie rozwiązań otrzymanych trzema metodami: metodą transformacji całkowej Laplace'a, metodą rozwiązań w dziedzinie czasu i metodą podwój-

nej zasady wzajemności. Drugi przykład - korba z dwoma pęknięciami brzegowymi przedstawia zastosowanie metody transformacji całkowej Laplace'a. Trzeci przykład - podpora z pęknięciem brzegowym prezentuje zastosowanie metody rozwiązań w dziedzinie czasu do analizy stacjonarnego i wzrastającego pęknięcia. Czwarty przykład - wirujący krążek z dwoma pęknięciami brzegowymi przedstawia zastosowanie metody podwójnej zasady wzajemności do analizy konstrukcji obciążonej siłami odśrodkowymi. Piąty przykład - rura grubościenna z pęknięciem na wskroś przedstawia zastosowanie metody transformacji całkowej do analizy konstrukcji trójwymiarowej. Przyjęto, że elementy konstrukcyjne wykonane są z materiału o następujących własnościach: moduł Younga $E = 0.2 \cdot 10^{12}\ Pa$, współczynnik Poissona $\nu = 0.3$ i gęstość $\rho = 8000\ kg/m^3$. Dla zagadnień dwuwymiarowych przyjęto, że układ znajduje się w płaskim stanie odkształcenia. Założono, że obciążenie dynamiczne σ_o jest przyłożone nagle w chwili początkowej i następnie ma stałą wartość.

Dla większości przykładów DWIN znormalizowano ze względu na

$$K_o = \sigma_o \sqrt{\pi a}, \tag{10.1}$$

gdzie σ_o jest wartością przyłożonego naprężenia i a jest wymiarem pęknięcia. Jeżeli wprowadzono inny współczynnik normalizacyjny, to został on zdefiniowany w odpowiednim podrozdziale.

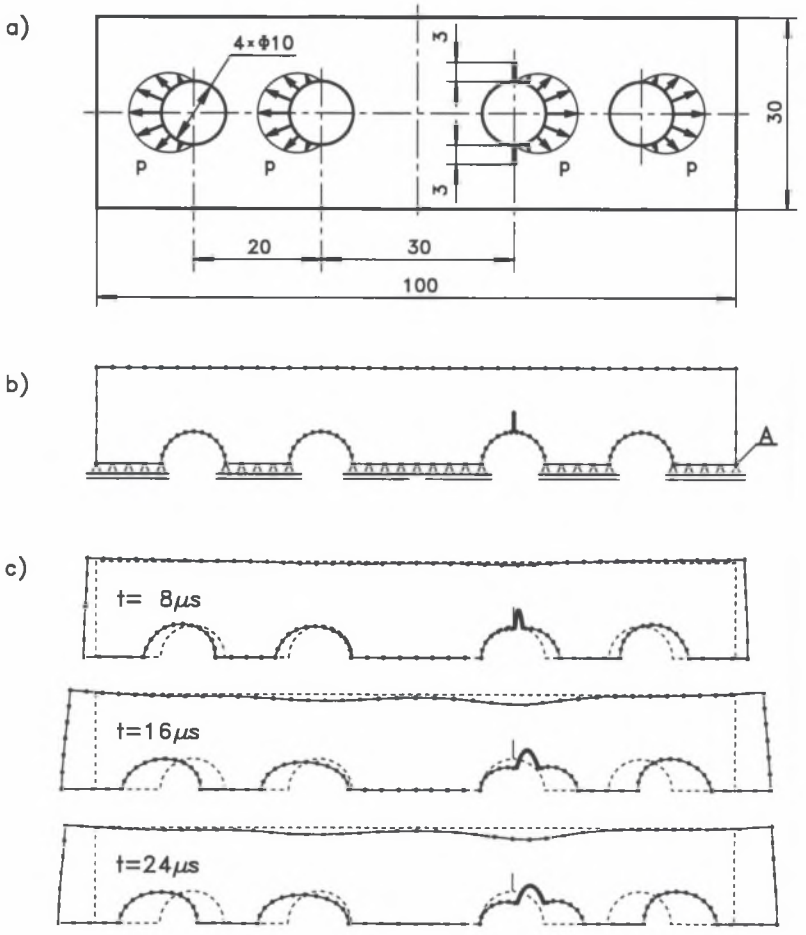
10.2. Prostokątny element łączący z dwoma pęknięciami brzegowymi

Prostokątny element łączy za pomocą śrub dwa elementy konstrukcji, które są rozciągane (Fedeliński [43]). Element łączący jest przykręcony do każdej części konstrukcji dwoma śrubami. Przyjęto, że śruby działają na element siłami skierowanymi prostopadle do powierzchni otworów. Założono, że obciążona jest połowa każdego otworu, a rozkład obciążenia jest sinusoidalny, o maksymalnej wartości $\sigma_o = 10\ MPa$. Jeden z otworów, w miejscach gdzie występuje spiętrzenie naprężeń, ma dwa pęknięcia brzegowe skierowane wzdłuż średnicy i prostopadle do kierunku działania obciążenia. Wymiary elementu wyrażone w milimetrach i sposób obciążenia przedstawiono na rys. 10.1a. Ze względu na symetrię układu rozpatrzono połowę konstrukcji, przyjmując odpowiednie warunki brzegowe wzdłuż osi symetrii (rys. 10.1b). Zadanie rozwiązano, stosując trzy metody: metodę transformacji całkowej Laplace'a (MTCL), metodę rozwiązań w dziedzinie czasu (MRDC) i metodę podwójnej zasady wzajemności (MPZW). Brzeg ciała podzielono na 68 elementów kwadratowych. W przypadku metody podwójnej zasady wzajemności zastosowano dodatkowo 43 punkty wewnętrzne. Rozwiązania numeryczne otrzymano, stosując 50 parametrów Laplace'a, krok czasowy $\Delta t = 2\ \mu s$ dla metody rozwiązań w dziedzinie czasu i $\Delta t = 1\ \mu s$ dla metody podwójnej zasady wzajemności. Na rys. 10.1c pokazano odkształcony element dla kilku wybranych chwil czasowych $t = 8,\ 16,\ 24\ \mu s$. Przemieszczenia punktu A, pokazanego na rys. 10.1a, przedstawiono na rys. 10.2, a znormalizowane DWIN K_I/K_o na rys. 10.3. Na wykresach jest widoczna dobra zgodność wyników otrzymanych trzema metodami.

DWIN znormalizowano ze względu na wartość statyczną SWIN dla pęknięcia o długości $2(r+a)$ w nieograniczonym ośrodku sprężystym obciążonego siłami $P = \sigma_o \pi r/2$ w środku pęknięcia

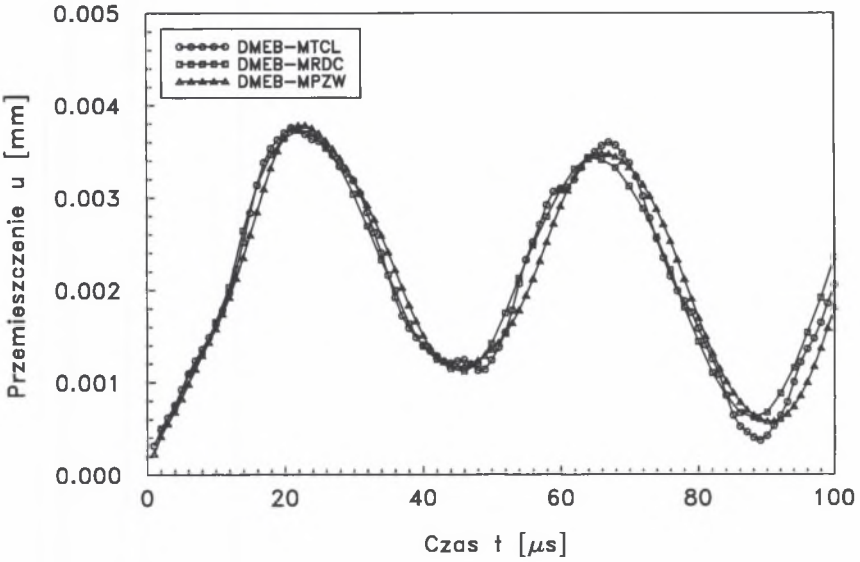
$$K_o = \frac{\sigma_o \pi r}{2\sqrt{\pi(r+a)}}, \tag{10.2}$$

gdzie r jest promieniem otworu, a a jest długością pęknięcia.



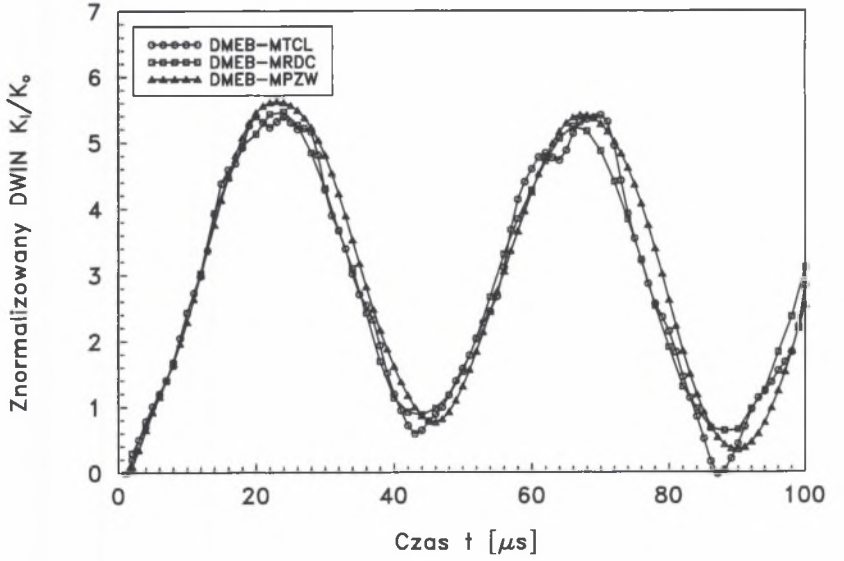
Rys. 10.1. Prostokątny element łączący z dwoma pęknięciami brzegowymi:
a) wymiary konstrukcji, b) model numeryczny konstrukcji,
c) postać nieodkształconej (linia przerywana) i odkształconej (linia ciągła) konstrukcji dla kilku wybranych chwil czasowych

Fig. 10.1. Rectangular connecting rod with two edge cracks:
a) dimensions of the structure, b) numerical model of the structure,
c) undeformed (dashed line) and deformed (continuous line) shapes of the structure at particular times



Rys. 10.2. Przemieszczenia punktu A dla prostokątnego elementu łączącego z dwoma pęknięciami brzegowymi

Fig. 10.2. Displacements of the point A for the rectangular connecting rod with two edge cracks

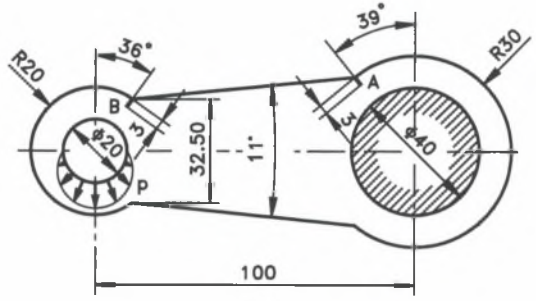


Rys. 10.3. Znormalizowany DWIN K_I/K_o dla prostokątnego elementu łączącego z dwoma pęknięciami brzegowymi

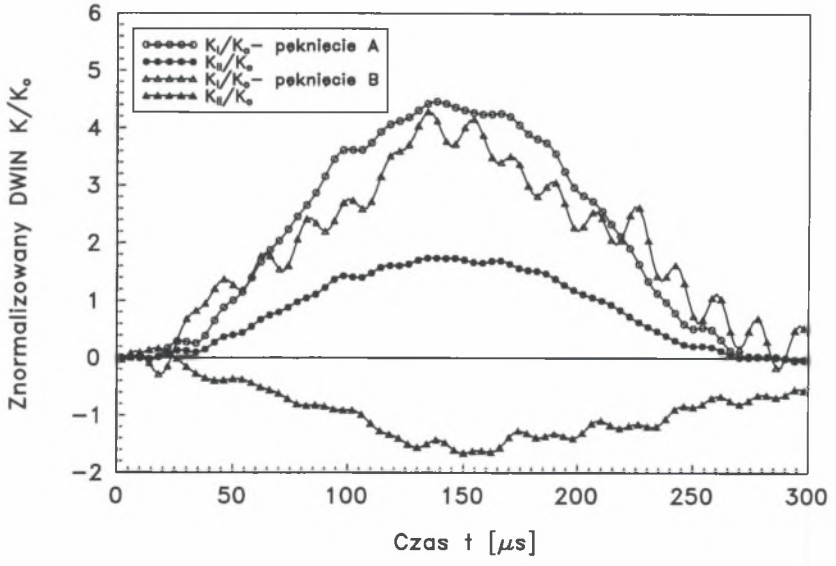
Fig. 10.3. Normalized DSIF K_I/K_o for the rectangular connnecting rod with two edge cracks

10.3. Korba z dwoma pęknięciami brzegowymi

Korba ma dwa otwory: większy jest sztywno zamocowany, a połowa mniejszego jest obciążona siłami prostopadłymi do powierzchni otworu o rozkładzie sinusoidalnym (Fedeliński [48]). Na powierzchni zewnętrznej, w miejscach gdzie znajdują się karby, występują pęknięcia brzegowe skierowane w kierunku osi otworów. Wymiary korby, wyrażone w milimetrach, sposób zamocowania i obciążenia przedstawiono na rys. 10.4. Rozwiązania numeryczne otrzymano, stosując metodę transformacji całkowej Laplace'a o 25 parametrach. Brzeg korby podzielono na 68 elementów kwadratowych. Znormalizowane DWIN K/K_o dla obu pęknięć pokazano na rys. 10.5.



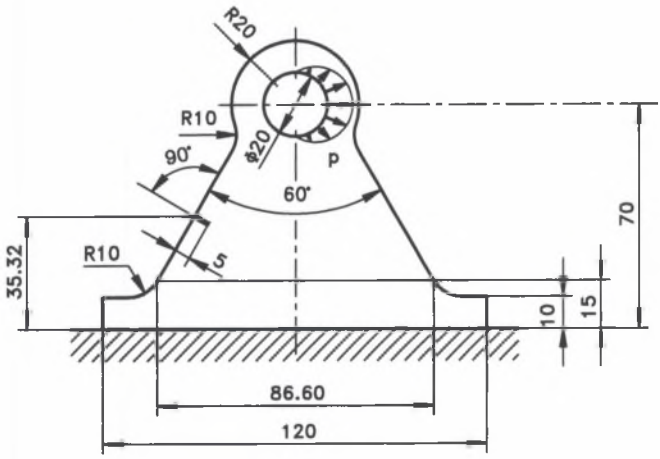
Rys. 10.4. Korba z dwoma pęknięciami brzegowymi
Fig. 10.4. Crank with two edge cracks



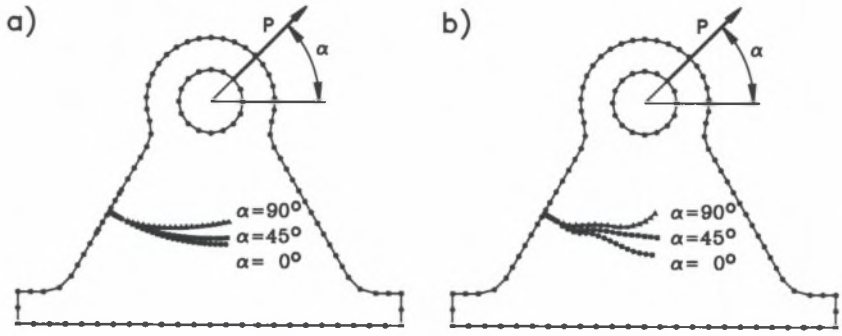
Rys. 10.5. Znormalizowany DWIN K/K_o dla korby z dwoma pęknięciami brzegowymi
Fig. 10.5. Normalized DSIF K/K_o for the crank with two edge cracks

10.4. Podpora z pęknięciem brzegowym

Podstawa podpory jest sztywno zamocowana, a otwór jest połączony z konstrukcją za pomocą sworznia (Fedeliński [44]). Przyjęto, że połowa otworu jest obciążona siłami normalnymi o rozkładzie sinusoidalnym. Na krawędzi bocznej znajduje się pęknięcie brzegowe skierowane prostopadle do powierzchni. Wymiary podpory, wyrażone w milimetrach, sposób zamocowania i obciążenia przedstawiono na rys. 10.6. Rozpatrzono trzy różne kierunki siły wypadkowej P na powierzchni otworu: poziomy ($\alpha = 0^o$), ukośny ($\alpha = 45^o$) i pionowy ($\alpha = 90^o$) (rys. 10.7). Pęknięcie jest stacjonarne do chwili $t \leq 16\ \mu s$, a następnie wzrasta ze stałą prędkością $c = 1000\ m/s$. Zagadnienie analizowano metodą rozwiązań w dziedzinie czasu. Początkowy brzeg ciała podzielono na 56 elementów kwadratowych, a krok czasowy jest równy $\Delta t = 2\ \mu s$. W czasie wzrostu pęknięcia, w każdym kroku czasowym dodawano do wierzchołka pęknięcia parę elementów brzegowych o długości $\Delta a = 2\ mm$. Wyniki wyznaczono dla 24 kroków czasowych. Końcowy model numeryczny miał 88 elementów brzegowych. Kształt wzrastającego pęknięcia dla różnego kierunku obciążenia statycznego i dynamicznego przedstawiono na rys. 10.7. Wyniki dla obciążenia statycznego wyznaczono za pomocą programu komputerowego Porteli i Aliabadiego [121]. Pęknięcia dla obciążenia dynamicznego mają podobny kształt jak dla obciążenia statycznego. W przypadku obciążenia dynamicznego pęknięcie częściej zmienia kierunek wzrostu ze względu na poruszające się fale sprężyste w ciele. Na rys. 10.8 pokazano postać nieodkształconą i odkształconą dla kilku wybranych chwil czasowych $t = 20\ \mu s$, $30\ \mu s$ i $40\ \mu s$. Znormalizowane DWIN K/K_o dla pęknięcia stacjonarnego przedstawiono na rys. 10.9, a dla pęknięcia wzrastającego na rys. 10.10. Rozwiązania dla pęknięcia stacjonarnego obliczono dla dwukrotnie dłuższego czasu, żeby pokazać największe wartości DWIN. Wartości znormalizowanych DWIN K_I/K_o są większe od K_{II}/K_o, dla pęknięć stacjonarnych i wzrastających.

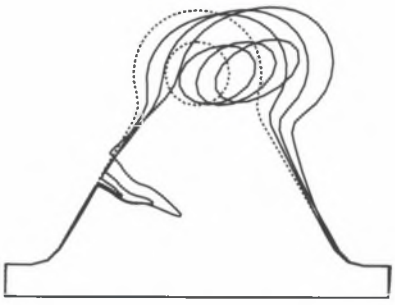


Rys. 10.6. Podpora z pęknięciem brzegowym
Fig. 10.6. Support with an edge crack



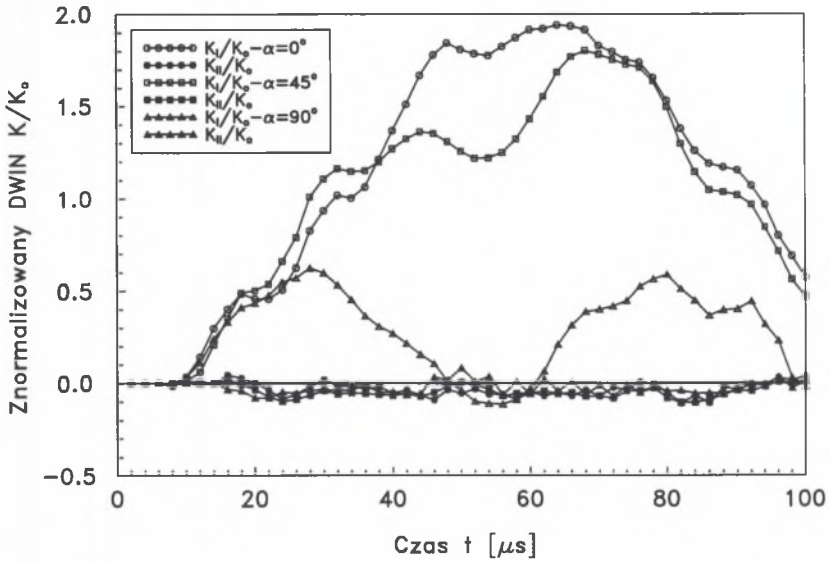
Rys. 10.7. Linia pęknięcia w podporze dla różnego kierunku przyłożonego obciążenia: a) statycznego, b) dynamicznego

Fig. 10.7. Crack paths in the support for different directions of the applied load: a) static, b) dynamic



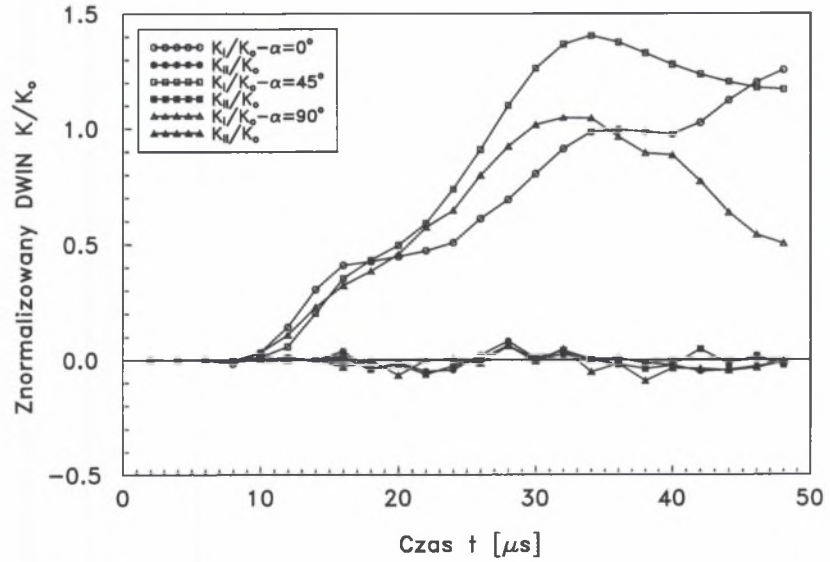
Rys. 10.8. Postacie nieodkształconej (linia przerywana) i odkształconej (linie ciągłe) podpory z pęknięciem brzegowym, obciążonej poziomo, dla wybranych chwil czasowych $20\mu s$, $30\mu s$ i $40\mu s$

Fig. 10.8. Shapes of undeformed (dashed lines) and deformed (continuous lines) support with the edge crack, subjected to the horizontal load, at particular times $20\mu s$, $30\mu s$ and $40\mu s$



Rys. 10.9. Znormalizowany DWIN K/K_o dla podpory z brzegowym pęknięciem stacjonarnym - różny kierunek przyłożonego obciążenia

Fig. 10.9. Normalized DSIF K/K_o for the support with the stationary edge crack - different directions of the applied load



Rys. 10.10. Znormalizowany DWIN K/K_o dla podpory ze wzrastającym pęknięciem brzegowym - różny kierunek przyłożonego obciążenia

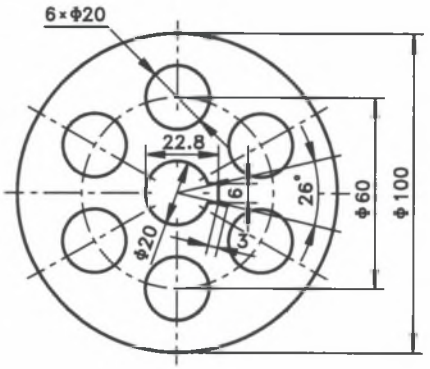
Fig. 10.10. Normalized DSIF K/K_o for the support with the growing edge crack - different directions of the applied load

10.5. Wirujący krążek z dwoma pęknięciami brzegowymi

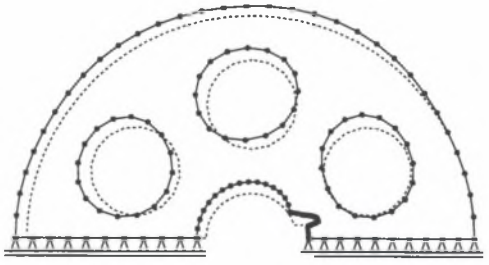
Wirujący krążek ma sześć otworów na obwodzie i otwór z rowkiem wpustowym do osadzenia tarczy na wale (Fedeliński [48]). W narożach rowka wpustowego znajdują się dwa pęknięcia skierowane w kierunku środka otworu. Wymiary krążka, wyrażone w milimetrach, pokazano na rys. 10.11. Krążek wiruje ze stałą prędkością kątową ω i jest obciążony siłami odśrodkowymi. Ze względu na symetrię krążka rozpatrzono połowę układu, przyjmując odpowiednie warunki brzegowe wzdłuż osi symetrii (rys. 10.12). Zadanie rozwiązano metodą podwójnej zasady wzajemności. Brzeg układu podzielono na 66 elementów kwadratowych. W obliczeniach zastosowano dodatkowo 44 punkty wewnętrzne. Na rys. 10.12 przedstawiono postać nieodkształconego i odkształconego krążka. DWIN znormalizowano ze względu na:

$$K_o = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}\rho\omega^2 R^2\sqrt{\pi a}, \tag{10.3}$$

gdzie R jest promieniem krążka. Obliczone znormalizowane DWIN są równe $K_I/K_o = 2.158$ i $K_{II}/K_o = 0.333$.



Rys. 10.11. Wirujący krążek z dwoma pęknięciami brzegowymi
Fig. 10.11. Rotating disc with two edge cracks



Rys. 10.12. Postać nieodkształconego (linia przerywana) i odkształconego (linia ciągła) wirującego krążka z dwoma pęknięciami brzegowymi
Fig. 10.12. Undeformed (dashed line) and deformed shapes (continuous line) of the rotating disc with two edge cracks

10.6. Rura grubościenna z pęknięciem

Rura grubościenna jest obciążona ciśnieniem wewnętrznym p (Fedeliński [49], [51]). Rura ma prostokątne pęknięcie na całej grubości, leżące w płaszczyźnie przechodzącej przez oś rury. Promień wewnętrzny rury wynosi $r_1 = 10\ mm$; promień zewnętrzny $r_2 = 25\ mm$; analizowana długość rury $l = 150\ mm$, a długość pęknięcia $2a = 50\ mm$. Wymiary rury, wyrażone w milimetrach, i układ współrzędnych pokazano na rys. 10.13. Rura z pęknięciem ma dwie płaszczyzny symetrii yz i xz. Analizowano połowę rury, przyjmując odpowiednie warunki brzegowe wzdłuż płaszczyzny symetrii xz. Połowę rury podzielono na 606 elementów stałych. Rozwiązania numeryczne wyznaczono, stosując metodę transformacji całkowej Laplace'a o 25 parametrach.

Znormalizowane przemieszczenia u/u_o punktów na powierzchni zewnętrznej w kierunku promieniowym przedstawiono na rys. 10.14. Przemieszczenie u_o jest przemieszczeniem statycznym rury bez pęknięcia, które wyznaczono z następującego równania:

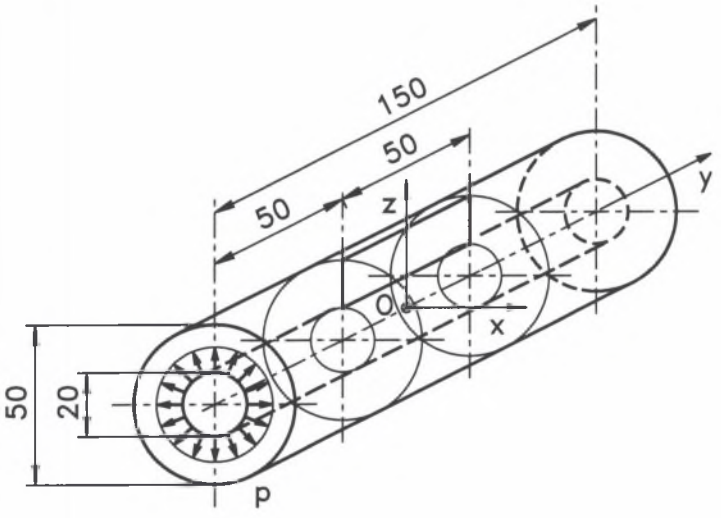
$$u_o = \frac{2r_1^2 r_2 p}{E(r_2^2 - r_1^2)}. \tag{10.4}$$

Przemieszczenia obliczono w trzech punktach, które mają następujące współrzędne (x, y, z): $A(25, 2.5, 0)$, $B(25, 17.5, 0)$, $C(25, 32.5, 0)$, $D(25, 47.5, 0)$ i $E(25, 62.5, 0)$.

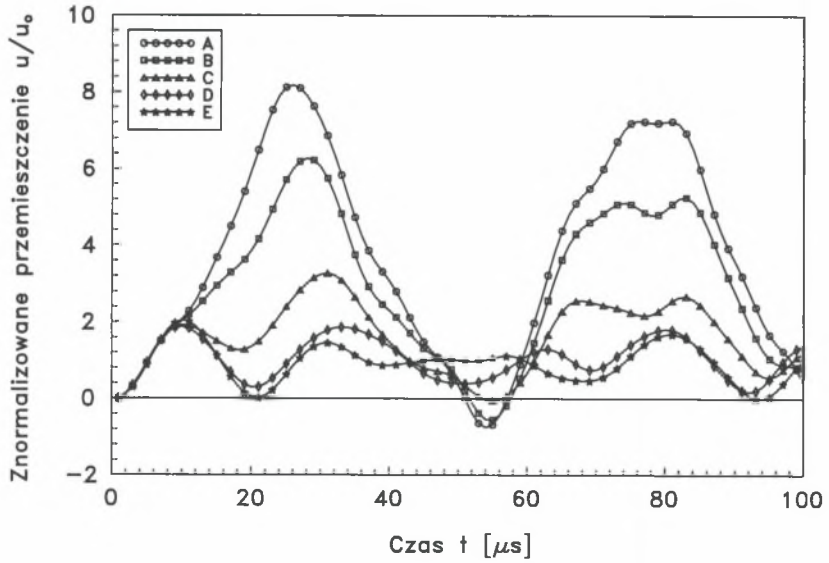
Znormalizowane DWIN K_I/K_o obliczono w środku pęknięcia i przedstawiono na rys. 10.15. Współczynnik normalizacyjny jest równy:

$$K_o = \sigma\sqrt{\pi a}, \quad \sigma = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right), \tag{10.5}$$

gdzie σ jest statycznym naprężeniem obwodowym w środku pęknięcia, a r jest odległością środka pęknięcia od osi rury.

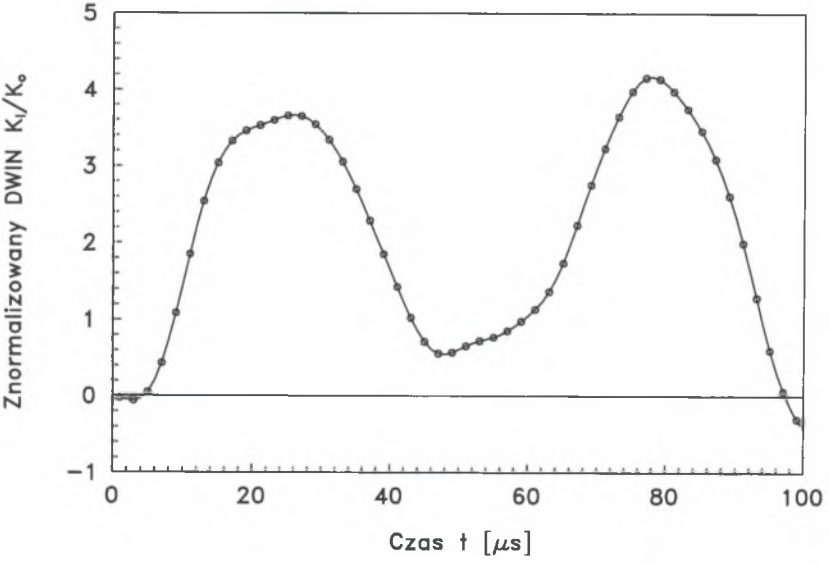


Rys. 10.13. Rura grubościenna z pęknięciem
Fig. 10.13. Thick-walled pipe with a crack



Rys. 10.14. Znormalizowane przemieszczenia u/u_o punktów wzdłuż powierzchni zewnętrznej dla rury grubościennej z pęknięciem

Fig. 10.14. Normalized displacements u/u_o of points along the external surface of the thick-walled pipe with a crack



Rys. 10.15. Znormalizowany DWIN K_I/K_o w środku krawędzi pęknięcia dla rury grubościennej z pęknięciem

Fig. 10.15. Normalized DSIF K_I/K_o in the middle of the crack front for the thick-walled pipe with a crack

Rozdział 11

Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono sformułowanie i zastosowanie dualnej metody elementów brzegowych (DMEB) w zagadnieniach dynamicznych mechaniki pękania. W odróżnieniu od wcześniej stosowanych metod analizy pęknięć za pomocą MEB, tzn. metody podziału na podobszary i metody nieciągłości przemieszczeń, metoda dualna umożliwia bezpośrednie obliczenie nieznanych wielkości brzegowych, w wyniku wyłącznie dyskretyzacji powierzchni ciała.

W pracy przedstawiono po raz pierwszy:

- sformułowanie i zastosowanie DMEB w połączeniu z metodą transformacji całkowej, metodą rozwiązań w dziedzinie czasu i metodą podwójnej zasady wzajemności,
- porównanie różnych sformułowań DMEB ze względu na ich złożoność, wymaganą pamięć komputerową, szybkość i dokładność obliczeń oraz możliwe zastosowania,
- wykorzystanie całek niezależnych od konturu całkowania i MEB do obliczania dynamicznych współczynników intensywności naprężeń,
- określenie kierunku dynamicznego wzrostu pęknięcia za pomocą MEB,
- analizę wpływu wielkości, kierunku, położenia i prędkości wzrostu pęknięć, rozkładu i zmienności obciążenia, sposobu zamocowania, własności materiałowych na dynamiczne współczynniki intensywności naprężeń,
- rozwiązanie wielu nowych, złożonych i praktycznych przykładów dynamicznie obciążonych konstrukcji z pęknięciami.

Poprawność rozwiązań nowych zagadnień została potwierdzona w późniejszych pracach, np. Wena [151], Gallego i Domingueza [66], Agnantiarisa, Polyzosa i Beskosa [2] i innych.

Opracowano pięć programów komputerowych, które mogą być stosowane do analizy dynamicznej elementów konstrukcyjnych z pęknięciami. Zagadnienia dwuwymiarowe i pęknięcia stacjonarne mogą być analizowane jedną z trzech metod: metodą transformacji całkowych, metodą rozwiązań w dziedzinie czasu i metodą podwójnej zasady wzajemności. Zagadnienia dwuwymiarowe i pęknięcia wzrastające analizowane są metodą rozwiązań w dziedzinie czasu, a zagadnienia trójwymiarowe i pęknięcia stacjonarne metodą transformacji całkowych. Opracowane programy komputerowe obliczają nieznane przemieszczenia i naprężenia na brzegu i we wskazanych punktach wewnętrznych oraz dynamiczne współczynniki intensywności naprężeń.

W pracy przedstawiono tylko podstawowe zastosowania opracowanych programów komputerowych. Inne zastosowania omówiono w publikacjach.

Rooke, Acros i Fedeliński [124] analizowali efekt dynamiczny spowodowany zerwaniem elementu, który wzmacnia pęknięcie. Za pomocą metody podwójnej zasady wzajemności badano wpływ rozkładu obciążenia na powierzchniach pęknięcia. Wykorzystując te rozwiązania oraz zasadę superpozycji, określono względną różnicę dynamicznych współczynników intensywności naprężeń przy pęknięciu statycznym i dynamicznym wzmocnienia.

Sládek, Sládek i Fedeliński [134], [135] i [136] wyznaczyli nieosobliwy składnik dynamicznego pola naprężeń wokół wierzchołka pęknięcia, tzw. T-naprężenie. Uwzględnienie tego składnika pozwala na dokładniejsze określenie kierunku wzrostu pęknięcia. T-naprężenie określono na podstawie całki niezależnej od konturu całkowania. Wielkości potrzebne do obliczenia całki wyznaczono, stosując metodę rozwiązań w dziedzinie czasu.

Albuquerque, Sollero i Fedeliński [3] analizowali obciążone dynamicznie elementy z pęknięciami, wykonane z materiału ortotropowego. Zagadnienie rozwiązano, stosując metodę podwójnej zasady wzajemności.

Burczyński, Bonnet i Nowakowski [21] analizowali wpływ translacji i zmiany kształtu pęknięcia na przemieszczenia brzegu dla układu obciążonego dynamicznie. Wrażliwość określono, stosując metodę układu sprzężonego oraz metodę różnic skończonych. Następnie wyznaczono nieznane położenie pęknięcia na podstawie przemieszczeń brzegu. Wielkości potrzebne do obliczenia wrażliwości i identyfikacji położenia pęknięcia wyznaczono metodą podwójnej zasady wzajemności.

Dualne sformułowanie MEB było rozwijane dla zagadnień trójwymiarowych przez Wena, Aliabadiego i Rooke'a. W pracach [159], [160] zastosowano metodę transformacji Laplace'a do analizy DWIN dla wewnętrznego pęknięcia kołowego i eliptycznego oraz prostokątnego pęknięcia brzegowego w elemencie prostopadłościennym. Wen, Aliabadi i Young [164] przedstawili zastosowanie metody rozwiązań w dziedzinie czasu do analizy pęknięcia kołowego w obszarze nieograniczonym oraz pęknięcia kołowego i eliptycznego w elemencie prostopadłościennym.

Przedstawione w pracy metody zastosowano do analizy elementów konstrukcyjnych w postaci tarcz lub ciał trójwymiarowych, wykonanych z materiału jednorodnego, izotropowego i liniowo-sprężystego. Rozpatrywano przypadki, kiedy w chwili początkowej ciało znajduje się w spoczynku. Analizowano dynamiczny wzrost pojedynczego pęknięcia ze stałą prędkością. Nie uwzględniano zjawiska kontaktu powierzchni pęknięcia. Przedstawione metody mogą być dalej rozwijane w celu lepszego modelowania rzeczywistych elementów konstrukcyjnych i rozwiązywania nowych zagadnień mechaniki pękania.

Do zagadnień, które powinny być rozważane w przyszłości, można zaliczyć:

- materiały niejednorodne, anizotropowe i nieliniowe,
- płyty, powłoki, elementy wzmocnione elementami usztywniającymi itp.,
- zjawisko kontaktu powierzchni pęknięcia oraz kontaktu kilku ciał,
- pęknięcia rozproszone w ciele,
- rozwidlanie się pęknięć, jednoczesny wzrost kilku pęknięć, zmienną prędkość wzrostu, zatrzymanie wzrostu,
- identyfikację położenia, wielkości i kształtu pęknięć na podstawie ruchu układu.

Inną grupę zagadnień stanowią zagadnienia numeryczne. Celem badań w tej dziedzinie powinno być poprawienie dokładności i efektywności metod. W pracy modelowano pęknięcia nieciągłymi elementami prostymi albo płaskimi. Całki rozwiązań hiperosobliwych obliczano metodą odjęcia rozwiązań podstawowych elastostatyki. Dynamiczny wzrost pęknięcia modelowano poprzez dodawanie w każdym kroku czasowym nowych elementów brzegowych w wierzchołku pęknięcia.

Do zagadnień, które mogą być przedmiotem dalszych badań, można zaliczyć:

- modelowanie pęknięć elementami brzegowymi,
- obliczanie całek brzegowych,
- stabilność rozwiązań numerycznych,
- modelowanie dynamicznego wzrostu pęknięcia.

Opracowanie metod oraz programów komputerowych, które analizują obciążone dynamicznie elementy konstrukcyjne z pęknięciami, ma duże znaczenie w budowie i eksploatacji maszyn. W czasie konstruowania elementów maszyn można zmniejszyć prawdopodobieństwo powstawania pęknięć i ich dalszego wzrostu poprzez odpowiedni dobór cech konstrukcyjnych. W trakcie eksploatacji można ocenić, czy powstałe w konstrukcji pęknięcia będą wzrastały i określić kierunek ich wzrostu.

Dodatek A

Rozwiązania podstawowe elastostatyki dla zagadnienia dwuwymiarowego

Rozwiązania podstawowe elastostatyki stosowane w równaniu przemieszczeń są równe (Aliabadi i Rooke [6]):

$$U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\Big[(4\nu - 3)\delta_{ij}\ln(r) + r_{,i}r_{,j}\Big], \tag{A.1}$$

$$T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r}\Big\{\Big[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}\Big]\frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i)\Big\}. \tag{A.2}$$

Rozwiązania podstawowe elastostatyki stosowane w równaniu sił brzegowych są równe:

$$U_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\Big[(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}\Big], \tag{A.3}$$

$$T_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r^2}\Big\{2\Big[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}\Big]\frac{\partial r}{\partial n}$$

$$+2\nu(r_{,j}r_{,k}n_i + r_{,i}r_{,k}n_j) + (1-2\nu)(2r_{,i}r_{,j}n_k + \delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i) - (1-4\nu)\delta_{ij}n_k\Big\}. \tag{A.4}$$

Dodatek B

Rozwiązania podstawowe elastostatyki dla zagadnienia trójwymiarowego

Rozwiązania podstawowe elastostatyki stosowane w równaniu przemieszczeń są równe (Aliabadi i Rooke [6]):

$$U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r}\Big[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}\Big], \tag{B.1}$$

$$T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2}\Big\{\Big[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}\Big]\frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i)\Big\}. \tag{B.2}$$

Rozwiązania podstawowe elastostatyki stosowane w równaniu sił brzegowych są równe:

$$U_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\Big[(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}\Big], \tag{B.3}$$

$$T_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r^3}\Big\{3\Big[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}\Big]\frac{\partial r}{\partial n}$$

$$+3\nu(r_{,j}r_{,k}n_i + r_{,i}r_{,k}n_j) + (1-2\nu)(3r_{,i}r_{,j}n_k + \delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i) - (1-4\nu)\delta_{ij}n_k\Big\}. \tag{B.4}$$

Dodatek C

Transformaty całkowe rozwiązań podstawowych elastodynamiki dla zagadnienia dwuwymiarowego

Transformaty Laplace'a rozwiązań podstawowych elastodynamiki stosowane w równaniu przemieszczeń (Cruse i Rizzo [29]) i sił brzegowych (Fedeliński [60]) są równe:

$$\bar{U}_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, s) = \frac{1}{2\pi\mu}(\psi\delta_{ij} - \chi r_{,i}r_{,j}), \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, s) = \frac{1}{2\pi}\Big[&(\psi_{,r} - \frac{\chi}{r})(\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j}n_i) - 2\frac{\chi}{r}(r_{,i}n_j - 2r_{,i}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n}) \\ &-2\chi_{,r}r_{,i}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\lambda}{\mu}(\psi_{,r} - \chi_{,r} - \frac{\chi}{r})r_{,i}n_j\Big],\end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}\bar{U}_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, s) = \frac{1}{2\pi}\Big\{&\Big[2\frac{\chi}{r} - \frac{\lambda}{\mu}(\psi_{,r} - \chi_{,r} - \frac{\chi}{r})\Big]\delta_{ij}r_{,k} \\ &-(\psi_{,r} - \frac{\chi}{r})(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) + 2(\chi_{,r} - 2\frac{\chi}{r})r_{,i}r_{,j}r_{,k}\Big\},\end{aligned} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, s) = \frac{\mu}{2\pi}\Big\{&\Big[4(\chi_{,rr} - 5\frac{\chi_{,r}}{r} + 8\frac{\chi}{r^2})r_{,i}r_{,j}r_{,k} \\ &-(\psi_{,rr} - \frac{\psi_{,r}}{r} - 3\frac{\chi_{,r}}{r} + 6\frac{\chi}{r^2})(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) \\ &+2[2\frac{\chi_{,r}}{r} - 4\frac{\chi}{r^2} + \frac{\lambda}{\mu}(\chi_{,rr} - 2\frac{\chi}{r^2} - \psi_{,rr} + \frac{\psi_{,r}}{r})]\delta_{ij}r_{,k}\Big]\frac{\partial r}{\partial n} \\ &+2[2\frac{\chi_{,r}}{r} - 4\frac{\chi}{r^2} + \frac{\lambda}{\mu}(\chi_{,rr} - 2\frac{\chi}{r^2} - \psi_{,rr} + \frac{\psi_{,r}}{r})]r_{,i}r_{,j}n_k \\ &-(\psi_{,rr} - \frac{\psi_{,r}}{r} - 3\frac{\chi_{,r}}{r} + 6\frac{\chi}{r^2})(r_{,j}n_i + r_{,i}n_j)r_{,k} \\ &+\Big[4\frac{\chi}{r^2} + 4\frac{\lambda}{\mu}(\frac{\chi_{,r}}{r} + \frac{\chi}{r^2} - \frac{\psi_{,r}}{r}) + (\frac{\lambda}{\mu})^2(\chi_{,rr} + 2\frac{\chi_{,r}}{r} - \psi_{,rr} - \frac{\psi_{,r}}{r})\Big]\delta_{ij}n_k \\ &-2(\frac{\psi_{,r}}{r} - \frac{\chi}{r^2})(\delta_{jk}n_i + \delta_{ik}n_j)\Big\}.\end{aligned} \tag{C.4}$$

Funkcja ψ i jej pochodne są równe:

$$\psi = \Big[-\frac{c_2}{c_1} K_1(z_1) + K_1(z_2) \Big] \frac{1}{z_2} + K_0(z_2), \tag{C.5}$$

$$\psi_{,r} = \Big\{ \frac{c_2}{c_1} \Big[K_0(z_1) z_1 + 2K_1(z_1) \Big] - \Big[K_0(z_2) z_2 + 2K_1(z_2) \Big] - K_1(z_2) z_2^2 \Big\} \frac{1}{z_2 r}, \tag{C.6}$$

$$\psi_{,rr} = \Big\{ -\frac{c_2}{c_1} \Big[3K_0(z_1) z_1 + K_1(z_1)(z_1^2 + 6) \Big]$$

$$+ \Big[3K_0(z_2) z_2 + K_1(z_2)(z_2^2 + 6) \Big] + \Big[K_0(z_2) z_2 + K_1(z_2) \Big] z_2^2 \Big\} \frac{1}{z_2 r^2}. \tag{C.7}$$

Funkcja χ i jej pochodne są równe:

$$\chi = -(\frac{c_2}{c_1})^2 \Big[K_0(z_1) + \frac{2}{z_1} K_1(z_1) \Big] + K_0(z_2) + \frac{2}{z_2} K_1(z_2), \tag{C.8}$$

$$\chi_{,r} = \Big\{ (\frac{c_2}{c_1})^2 \Big[K_1(z_1) z_1 + 2[K_0(z_1) + \frac{2}{z_1} K_1(z_1)] \Big]$$

$$- \Big[K_1(z_2) z_2 + 2[K_0(z_2) + \frac{2}{z_2} K_1(z_2)] \Big] \Big\} \frac{1}{r}, \tag{C.9}$$

$$\chi_{,rr} = \Big\{ -(\frac{c_2}{c_1})^2 \Big[K_0(z_1) z_1^2 + 3K_1(z_1) z_1 + 6[K_0(z_1) + \frac{2}{z_1} K_1(z_1)] \Big]$$

$$+ \Big[K_0(z_2) z_2^2 + 3K_1(z_2) z_2 + 6[K_0(z_2) + \frac{2}{z_2} K_1(z_2)] \Big] \Big\} \frac{1}{r^2}, \tag{C.10}$$

gdzie K_0 i K_1 są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela drugiego rzędu zerowego i pierwszego stopnia, $z_1 = sr/c_1$ i $z_2 = sr/c_2$.

Dodatek D

Całki względem czasu rozwiązań podstawowych elastodynamiki dla zagadnienia dwuwymiarowego

W dodatku przedstawiono całki rozwiązań podstawowych elastodynamiki przy aproksymacji zmienności w czasie sił brzegowych funkcjami przedziałami stałymi i przemieszczeń funkcjami liniowymi. Przyjęto następujące oznaczenia dla skrócenia zapisu:

$$\varphi_\alpha = \frac{r}{c_\alpha \Delta\tau (N-n+1)}\,, \tag{D.1}$$

$$\chi_\alpha = \frac{r}{c_\alpha \Delta\tau (N-n)}\,, \tag{D.2}$$

$$\psi_\alpha = \frac{r}{c_\alpha \Delta\tau (N-n-1)}\,. \tag{D.3}$$

Całki rozwiązań podstawowych elastodynamiki stosowane w równaniu przemieszczeń są równe (Israil i Banerjee [80], [82]):

$$\tilde{U}_{ij}^{Nn}(\mathbf{x}',\mathbf{x}) = \int_{\tau^{n-1}}^{\tau^n} U_{ij}^N(\mathbf{x}',\mathbf{x})d\tau =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{4\pi\rho c_\alpha^2}\Big[\delta_{ij}\Big(\ln\frac{1+\sqrt{1-\varphi_\alpha^2}}{\varphi_\alpha} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\chi_\alpha^2}}{\chi_\alpha}\Big) \tag{D.4}$$

$$+(-1)^\alpha(\delta_{ij}-2r_{,i}r_{,j})\Big(\frac{\sqrt{1-\varphi_\alpha^2}}{\varphi_\alpha^2} - \frac{\sqrt{1-\chi_\alpha^2}}{\chi_\alpha^2}\Big)\Big],$$

$$\tilde{T}_{ij}^{Nn}(\mathbf{x}',\mathbf{x}) = \int_{\tau^{n-1}}^{\tau^n} T_{ij}^N(\mathbf{x}',\mathbf{x})M^1 d\tau + \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} T_{ij}^N(\mathbf{x}',\mathbf{x})M^2 d\tau =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\mu}{2\pi\rho c_\alpha^2}\frac{1}{c_\alpha\Delta\tau}\Big\{\frac{2A_\alpha}{3}\Big[\frac{(1-\varphi_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi_\alpha^3} - 2\frac{(1-\chi_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\chi_\alpha^3} + \frac{(1-\psi_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\psi_\alpha^3}\Big] \tag{D.5}$$

$$-B_\alpha\Big[\frac{\sqrt{1-\varphi_\alpha^2}}{\varphi_\alpha} - 2\frac{\sqrt{1-\chi_\alpha^2}}{\chi_\alpha} + \frac{\sqrt{1-\psi_\alpha^2}}{\psi_\alpha}\Big]\Big\}.$$

Całki rozwiązań podstawowych elastodynamiki stosowane w równaniu sił brzegowych są równe (Israil i Banerjee [81], [82]):

$$\tilde{U}_{kij}^{Nn}(\mathbf{x}',\mathbf{x}) = \int_{\tau^{n-1}}^{\tau^n} U_{kij}^N(\mathbf{x}',\mathbf{x})d\tau =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{(-1)^\alpha \mu}{2\pi\rho c_\alpha^2}\frac{1}{r}\Big\{ -C_\alpha\Big[\frac{1}{\sqrt{1-\varphi_\alpha^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\chi_\alpha^2}}\Big] + 2D\Big[\frac{\sqrt{1-\varphi_\alpha^2}}{\varphi_\alpha^2} - \frac{\sqrt{1-\chi_\alpha^2}}{\chi_\alpha^2}\Big]\Big\}, \tag{D.6}$$

$$\tilde{T}_{kij}^{Nn}(\mathbf{x}',\mathbf{x}) = \int_{\tau^{n-1}}^{\tau^n} T_{kij}^N(\mathbf{x}',\mathbf{x})M^1 d\tau + \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} T_{kij}^N(\mathbf{x}',\mathbf{x})M^2 d\tau =$$

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{(-1)^\alpha \mu^2}{2\pi\rho c_\alpha^2}\frac{1}{r c_\alpha \Delta\tau}\Big\{ & 2(E_\alpha + F_\alpha)\Big[\frac{\sqrt{1-\varphi_\alpha^2}}{\varphi_\alpha} - 2\frac{\sqrt{1-\chi_\alpha^2}}{\chi_\alpha} + \frac{\sqrt{1-\psi_\alpha^2}}{\psi_\alpha}\Big] \\ & -\frac{4}{3}G\Big[\frac{(1-\varphi_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi_\alpha^3} - 2\frac{(1-\chi_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\chi_\alpha^3} + \frac{(1-\psi_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\psi_\alpha^3}\Big] \\ & +E_\alpha\Big[\frac{\varphi_\alpha}{\sqrt{1-\varphi_\alpha^2}} - 2\frac{\chi_\alpha}{\sqrt{1-\chi_\alpha^2}} + \frac{\psi_\alpha}{\sqrt{1-\psi_\alpha^2}}\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{D.7}$$

Współczynniki w powyższych równaniach są równe (Israil i Banerjee [82]):

$$A_\alpha = -(-1)^\alpha\Big[r_{,i}n_j + r_{,j}n_i + (\delta_{ij} - 4r_{,i}r_{,j})\frac{\partial r}{\partial n}\Big], \tag{D.8}$$

$$B_1 = \frac{\lambda}{\mu}r_{,i}n_j + 2r_{,i}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n}, \tag{D.9}$$

$$B_2 = (\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j})\frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j}n_i, \tag{D.10}$$

$$C_1 = \frac{\lambda}{\mu}\delta_{ij}r_{,k} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}, \tag{D.11}$$

$$C_2 = 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} - \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ik}r_{,j}, \tag{D.12}$$

$$D = \delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k} - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}, \tag{D.13}$$

$$E_1 = (\frac{\lambda}{\mu}\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j})(\frac{\lambda}{\mu}n_k + 2r_{,k}\frac{\partial r}{\partial n}), \tag{D.14}$$

$$E_2 = (4r_{,i}r_{,j}r_{,k} - \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ik}r_{,j})\frac{\partial r}{\partial n} - r_{,j}r_{,k}n_i - r_{,i}r_{,k}n_j, \tag{D.15}$$

$$\begin{aligned}F_1 = & -\Big[\frac{\lambda}{\mu}(2+\frac{\lambda}{\mu})\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}\Big]n_k - 2r_{,j}r_{,k}n_i - 2r_{,i}r_{,k}n_j \\ & -2(\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k} - 6r_{,i}r_{,j}r_{,k})\frac{\partial r}{\partial n},\end{aligned} \tag{D.16}$$

$$F_2 = (\delta_{jk} - 2r_{,j}r_{,k})n_i + (\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k})n_j - 2r_{,i}r_{,j}n_k$$
$$-2(\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k} - 6r_{,i}r_{,j}r_{,k})\frac{\partial r}{\partial n}. \tag{D.17}$$

$$G = (-\delta_{jk} + 4r_{,j}r_{,k})n_i + (-\delta_{ik} + 4r_{,i}r_{,k})n_j + (-\delta_{ij} + 4r_{,i}r_{,j})n_k$$
$$+4(\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k} - 6r_{,i}r_{,j}r_{,k})\frac{\partial r}{\partial n}. \tag{D.18}$$

Dla liniowych funkcji interpolujących wzięto pod uwagę całki wzdłuż kroku czasowego przed i za węzłem czasowym. Przy obliczaniu zmiennych φ_α, χ_α i ψ_α należy uwzględnić warunki propagacji fal, tzn. jeżeli r jest większe niż odległość, którą przebywa fala w danym czasie, wówczas zmienna φ_α, χ_α i ψ_α jest większa od 1. W takim przypadku składniki w równaniach $(D.4)$, $(D.5)$, $(D.6)$ i $(D.7)$, które zależą od tej zmiennej, należy przyrównać do 0.

Dodatek E

Rozwiązania szczególne stosowane w metodzie podwójnej zasady wzajemności dla zagadnienia dwuwymiarowego

Dla funkcji aproksymującej

$$f(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) = C + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}), \tag{E.1}$$

szczególne przemieszczenia i siły brzegowe są równe (Partridge, Brebbia i Wrobel [117]):

$$\hat{u}_{lj}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) = C\frac{1-2\nu}{(5-4\nu)\mu} r_{,l} r_{,j} r^2 + \frac{1}{30(1-\nu)\mu}\Big[(3-\frac{10\nu}{3})\delta_{lj} - r_{,l}r_{,j}\Big]r^3, \tag{E.2}$$

$$\hat{t}_{lj}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) = C\frac{2(1-2\nu)}{(5-4\nu)}\Big[\frac{1+\nu}{1-2\nu} r_{,l} n_j + \frac{1}{2} r_{,j} n_l + \frac{1}{2}\delta_{lj}\frac{\partial r}{\partial n}\Big] r$$

$$+\frac{1}{15(1-\nu)}\Big\{(4-5\nu) r_{,j} n_l - (1-5\nu) r_{,l} n_j + \Big[(4-5\nu)\delta_{lj} - r_{,l} r_{,j}\Big]\frac{\partial r}{\partial n}\Big\} r^2. \tag{E.3}$$

Dodatek F

Transformaty całkowe rozwiązań podstawowych elastodynamiki dla zagadnienia trójwymiarowego

Transformaty Laplace'a rozwiązań podstawowych elastodynamiki stosowane w równaniu przemieszczeń (Cruse i Rizzo [29]) i sił brzegowych (Gaul i Fiedler [67]) są równe:

$$\bar{U}_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, s) = \frac{1}{4\pi\mu}(\psi\delta_{ij} - \chi r_{,i}r_{,j}), \tag{F.1}$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, s) = \frac{1}{4\pi}\Big[&(\psi_{,r} - \frac{\chi}{r})(\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j}n_i) - 2\frac{\chi}{r}(r_{,i}n_j - 2r_{,i}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n}) \\ &-2\chi_{,r}r_{,i}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\lambda}{\mu}(\psi_{,r} - \chi_{,r} - 2\frac{\chi}{r})r_{,i}n_j\Big],\end{aligned} \tag{F.2}$$

$$\begin{aligned}\bar{U}_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, s) = \frac{1}{4\pi}\Big\{&\Big[2\frac{\chi}{r} - \frac{\lambda}{\mu}(\psi_{,r} - \chi_{,r} - 2\frac{\chi}{r})\Big]\delta_{ij}r_{,k} \\ &-(\psi_{,r} - \frac{\chi}{r})(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) + 2(\chi_{,r} - 2\frac{\chi}{r})r_{,i}r_{,j}r_{,k}\Big\},\end{aligned} \tag{F.3}$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, s) = \frac{\mu}{4\pi}\Big\{&\Big[4(\chi_{,rr} - 5\frac{\chi_{,r}}{r} + 8\frac{\chi}{r^2})r_{,i}r_{,j}r_{,k} \\ &-(\psi_{,rr} - \frac{\psi_{,r}}{r} - 3\frac{\chi_{,r}}{r} + 6\frac{\chi}{r^2})(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) \\ &+2[2\frac{\chi_{,r}}{r} - 4\frac{\chi}{r^2} + \frac{\lambda}{\mu}(\chi_{,rr} + \frac{\chi_{,r}}{r} - 4\frac{\chi}{r^2} - \psi_{,rr} + \frac{\psi_{,r}}{r})]\delta_{ij}r_{,k}\Big]\frac{\partial r}{\partial n} \\ &+2[2\frac{\chi_{,r}}{r} - 4\frac{\chi}{r^2} + \frac{\lambda}{\mu}(\chi_{,rr} + \frac{\chi_{,r}}{r} - 4\frac{\chi}{r^2} - \psi_{,rr} + \frac{\psi_{,r}}{r})]r_{,i}r_{,j}n_k \\ &-(\psi_{,rr} - \frac{\psi_{,r}}{r} - 3\frac{\chi_{,r}}{r} + 6\frac{\chi}{r^2})(r_{,j}n_i + r_{,i}n_j)r_{,k} \\ &+\Big[4\frac{\chi}{r^2} + 4\frac{\lambda}{\mu}(\frac{\chi_{,r}}{r} + 2\frac{\chi}{r^2} - \frac{\psi_{,r}}{r}) + (\frac{\lambda}{\mu})^2(\chi_{,rr} + 4\frac{\chi_{,r}}{r} + 2\frac{\chi}{r^2} - \psi_{,rr} - 2\frac{\psi_{,r}}{r})\Big]\delta_{ij}n_k \\ &-2(\frac{\psi_{,r}}{r} - \frac{\chi}{r^2})(\delta_{jk}n_i + \delta_{ik}n_j)\Big\}.\end{aligned} \tag{F.4}$$

Funkcja ψ i jej pochodne są równe:

$$\psi = -(\frac{c_2}{c_1})^2 e^{-z_1}[1+z_1]\frac{1}{z_1^2 r} + e^{-z_2}[1+z_2+z_2^2]\frac{1}{z_2^2 r}, \tag{F.5}$$

$$\psi_{,r} = (\frac{c_2}{c_1})^2 e^{-z_1}[3+3z_1+z_1^2]\frac{1}{z_1^2 r^2} - e^{-z_2}[3+3z_2+2z_2^2+z_2^3]\frac{1}{z_2^2 r^2}, \tag{F.6}$$

$$\psi_{,rr} = -(\frac{c_2}{c_1})^2 e^{-z_1}[12+12z_1+5z_1^2+z_1^3]\frac{1}{z_1^2 r^3}$$

$$+e^{-z_2}[12+12z_2+7z_2^2+3z_2^3+z_2^4]\frac{1}{z_2^2 r^3}. \tag{F.7}$$

Funkcja χ i jej pochodne są równe:

$$\chi = -(\frac{c_2}{c_1})^2 e^{-z_1}[3+3z_1+z_1^2]\frac{1}{z_1^2 r} + e^{-z_2}[3+3z_2+z_2^2]\frac{1}{z_2^2 r}, \tag{F.8}$$

$$\chi_{,r} = (\frac{c_2}{c_1})^2 e^{-z_1}[9+9z_1+4z_1^2+z_1^3]\frac{1}{z_1^2 r^2}$$

$$-e^{-z_2}[9+9z_2+4z_2^2+z_2^3]\frac{1}{z_2^2 r^2}, \tag{F.9}$$

$$\chi_{,rr} = -(\frac{c_2}{c_1})^2 e^{-z_1}[36+36z_1+17z_1^2+5z_1^3+z_1^4]\frac{1}{z_1^2 r^3}$$

$$+e^{-z_2}[36+36z_2+17z_2^2+5z_2^3+z_2^4]\frac{1}{z_2^2 r^3}. \tag{F.10}$$

Dodatek G

Całki w sensie wartości głównej

Rozpatrzmy całkę niewłaściwą w przedziale $a \leq t \leq b$, w którym funkcja podcałkowa, nieograniczona w punkcie wewnętrznym $a < x < b$, ma część osobliwą daną wyrażeniem $1/(t-x)$ (Portela [120]). Niech część regularna funkcji podcałkowej $f(t)$ spełnia warunek ciągłości Höldera, tzn.

$$|f(t) - f(x)| \leq |B||t-x|^{\alpha}, \tag{G.1}$$

gdzie: $|B| < \infty$ i $0 < \alpha \leq 1$. Wówczas całka w sensie wartości głównej Cauchy'ego, dla osobliwego punktu wewnętrznego, jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$\oint_a^b \frac{f(t)}{(t-x)} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \{ \int_a^{x-\varepsilon} \frac{f(t)}{t-x} dt + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{f(t)}{t-x} dt \}, \tag{G.2}$$

gdzie otoczenie ε jest symetryczne względem punktu osobliwego.

Rozważmy z kolei całkę niewłaściwą w przedziale $a \leq t \leq b$, w którym funkcja podcałkowa, nieograniczona w punkcie wewnętrznym $a < x < b$, ma część osobliwą daną wyrażeniem $1/(t-x)^2$ (Portela [120]). Niech część regularna funkcji podcałkowej $f(t)$ spełnia warunek ciągłości Höldera pierwszej pochodnej, tzn.

$$|f(t) - f(x) - f'(x)(t-x)| \leq |B||t-x|^{\alpha+1}, \tag{G.3}$$

gdzie: $|B| < \infty$ i $0 < \alpha \leq 1$. Wówczas całka w sensie wartości głównej Hadamarda, dla osobliwego punktu wewnętrznego, jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$\oint_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \{ \int_a^{x-\varepsilon} \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt - \frac{2f(x)}{\varepsilon} \}, \tag{G.4}$$

gdzie otoczenie ε jest symetryczne względem punktu osobliwego.

Dodatek H

Metoda Durbina numerycznego obliczania transformaty odwrotnej Laplace'a

Transformatę odwrotną Laplace'a wyznaczono metodą numeryczną Durbina [37].

Wartości transformowanej funkcji $\bar{f}(s)$ oblicza się dla serii parametrów Laplace'a $s_k = b + ik2\pi/T$, gdzie b jest stałą, $i = \sqrt{-1}$, a T jest analizowanym przedziałem czasu.

Wartości oryginalnej funkcji $f(t)$ wyznacza się z następującego równania:

$$f(t) = \frac{2e^{bt}}{T}\Big(-\frac{1}{2}Re[\bar{f}(b)] + \sum_{k=0}^{L} \{\Re[\bar{f}(b+ik\frac{2\pi}{T})]\cos(kt\frac{2\pi}{T}) - \Im[\bar{f}(b+ik\frac{2\pi}{T})]\sin(kt\frac{2\pi}{T})\}\Big), \tag{H.1}$$

gdzie $\Re[]$ oznacza część rzeczywistą i $\Im[]$ oznacza część urojoną. Zazwyczaj przyjmuje się zakres parametrów bT od 5 do 10 oraz L od 50 do 5000.

Dodatek I

Metoda Houbolta numerycznego rozwiązywania równania ruchu

Metoda Houbolta [123] jest metodą krokowego rozwiązywania równania ruchu. Przemieszczenia u_{n+1} w chwili $\tau_{n+1} = (n+1)\Delta\tau$, gdzie n oznacza numer kroku czasowego, oblicza się na podstawie przemieszczeń u_k w trzech poprzednich krokach czasowych $k = n, n-1, n-2$.

Równania metody Houbolta otrzymuje się, rozwijając przemieszczenia układu w szereg Taylora względem czasu w otoczeniu chwili τ_{n+1} przy uwzględnieniu 4 składników.

Prędkości $\mathbf{v}_{n+1}$ i przyspieszenia $\mathbf{a}_{n+1}$ w metodzie Houbolta oblicza się z następujących równań:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{1}{6\Delta\tau}(11\mathbf{u}_{n+1} - 18\mathbf{u}_n + 9\mathbf{u}_{n-1} - 2\mathbf{u}_{n-2}), \tag{I.1}$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \frac{1}{(\Delta\tau)^2}(2\mathbf{u}_{n+1} - 5\mathbf{u}_n + 4\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-2}). \tag{I.2}$$

Macierzowe równanie ruchu układu o wielu stopniach swobody dla kroku czasowego $n+1$ ma postać:

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}, \tag{I.3}$$

gdzie $\mathbf{M}$ jest macierzą bezwładności, $\mathbf{C}$ jest macierzą tłumienia, $\mathbf{K}$ jest macierzą sztywności i $\mathbf{f}$ macierzą sił.

Równania (I.1) i (I.2) podstawiamy do równania (I.3) i przekształcamy do następującej postaci:

$$\Big[\frac{2}{(\Delta\tau)^2}\mathbf{M} + \frac{11}{6\Delta\tau}\mathbf{C} + \mathbf{K}\Big]\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}$$
$$+\Big[\frac{5}{(\Delta\tau)^2}\mathbf{M} + \frac{3}{\Delta\tau}\mathbf{C}\Big]\mathbf{u}_n - \Big[\frac{4}{(\Delta\tau)^2}\mathbf{M} + \frac{3}{2\Delta\tau}\mathbf{C}\Big]\mathbf{u}_{n-1} + \Big[\frac{1}{(\Delta\tau)^2}\mathbf{M} + \frac{1}{3\Delta\tau}\mathbf{C}\Big]\mathbf{u}_{n-2}. \tag{I.4}$$

Z powyższego układu równań wyznaczamy nieznane przemieszczenia $\mathbf{u}_{n+1}$ na podstawie przemieszczeń we wcześniejszych krokach czasowych.

Literatura

1. Aberson J.A., Anderson J.M., King W.W., Dynamic analysis of cracked structures using singularity finite elements, in *Mechanics of fracture, Vol.4 : Elastodynamic crack problems*, Ed. Sih G.C., Noordhoff International Publishing, Leyden, pp. 249-294, 1977.

2. Agnantiaris J.P., Polyzos D., Beskos D.E., Some studies on dual reciprocity BEM for elastodynamic analysis, *Comput. Mech.*, Vol. 17, pp. 270-277, 1996.

3. Albuquerque E.L., Sollero P., Fedeliński P., Analysis of anisotropic dynamic crack problems using the dual reciprocity boundary element method in Laplace domain, in Proc. *Boundary Element Method, BEM XXII* (w druku).

4. Aliabadi M.H., Boundary element formulations in fracture mechanics, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 50, No. 2, pp. 83-96, 1997.

5. Aliabadi M.H., A new generation of boundary element methods in fracture, *Int. J. Fracture*, Vol. 86, pp. 91-125, 1997.

6. Aliabadi M.H., Rooke D.P., *Numerical fracture mechanics*, Computational Mechanics Publications, Southampton, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1991.

7. Aoki S., Kishimoto K., Izumihara Y., Sakata M., Dynamic analysis of cracked linear viscoelastic solids by finite element method using singular element, *Int. J. Fracture*, Vol. 16, No. 2, 1980.

8. Aoki S., Kishimoto K., Sakata M., Finite element computation of dynamic stress intensity factor for a rapidly propagating crack using $\tilde{J}$-integral, *Comput. Mech.*, Vol. 2, pp. 54-62, 1987.

9. Atluri S.N., Path-independent integrals in finite elasticity and inelasticity, with body forces, inertia, and arbitrary crack-face conditions, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 16, No. 3, pp. 341-364, 1982.

10. Atluri S.N., Energetic approaches and path-independent integrals in fracture mechanics, in *Computational methods in the mechanics of fracture, Vol.2 in Computational methods in mechanics*, Ed. Atluri S.N., North-Holand, pp. 121-165, 1986.

11. Atluri S.N., Nishioka T., Numerical studies in dynamic fracture mechanics, *Int. J. Fracture*, Vol. 27, pp. 245-261, 1985.

12. Balaš J., Sládek J., Sládek V., *Stress analysis by boundary element methods, Studies in Applied Mechanics 23*, Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo 1989.

13. Barra Ł.P.S., Telles J.C.F., A hyper-singular numerical Green's function generation for BEM applied to dynamic SIF problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 23, pp. 77-87, 1999.

14. Beskos D.E., Boundary element methods in dynamic analysis, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 40, No. 1, pp. 1-23, 1987.

15. Beskos D.E., Boundary element methods in dynamic analysis: Part II (1986-1996), *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 50, No. 3, pp. 149-197, 1997.

16. Blanford G.E., Ingraffea A.R., Ligget J.A., Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 17, pp. 387-404, 1981.

17. Brebbia C.A., Nardini D., Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure, *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, Vol. 2, No. 4, pp. 228-233, 1983.

18. Broek D., *Elementary engineering fracture mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht-Boston-Lancaster 1987.

19. Bui H.D., Stress and crack-displacement intensity factors in elastodynamics, *Fracture 3, ICF4*, Waterloo, pp. 91-95, 1979.

20. Burczyński T., *Metoda elementów brzegowych w mechanice.* Wspomaganie komputerowe CAD-CAM, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1995.

21. Burczyński T., Bonnet M., Nowakowski M., Sensitivity analysis and indentification of material defects in dynamic systems, in Proc. 5th Conf. *Dynamical Systems Theory and Applications*, Eds Awrejcewicz J., Grabski J., Mrozowski J., Łodź, pp. 157-162, 1999.

22. Chen B., Gross D., Zhang Ch., Axisymmetric dynamic response of a penny-shaped crack to a pair of transient concentrated forces, *Int. J. Fracture*, Vol. 81, pp. 77-88, 1996.

23. Chen Y.M., Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a Lagrangian finite-difference method (the HEMP code), *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 7, pp. 653-660, 1975.

24. Chirino F., Dominguez J., Dynamic analysis of cracks using boundary element method, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 34, No. 5/6, pp. 1051-1061, 1989.

25. Chirino F., Gallego R., Saez A., Dominguez J., A comparative study of three boundary element approaches to transient dynamic crack problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 13, pp. 11-19, 1994.

26. Cruse T.A., Two-dimensional BIE fracture mechanics analysis, *Appl. Math. Model.*, Vol. 2, No. 4, pp. 287-293, 1978.

27. Cruse T.A., *Boundary element analysis in computational fracture mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London 1988.

28. Cruse T.A., BIE fracture mechanics analysis: 25 years of developments, *Comput. Mech.*, Vol. 18, pp. 1-11, 1996.

29. Cruse T.A., Rizzo F.J., A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. I, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 22, No. 1, pp. 244-259, 1968.

30. Das S., A numerical method for determination of source time functions for general three-dimensional rupture propagation, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, Vol. 62, pp. 591-604, 1980.

31. Das S., Kostrov B.V., On the numerical boundary integral equation method for three-dimensional dynamic shear crack problems, *J. Appl. Mech.-T. ASME*, Vol. 54, pp. 99-104, 1987.

32. Dominguez J., *Boundary elements in dynamics*, Computational Mechanics Publications, Southampton 1993.

33. Dominguez J., Chirino F., BEM for dynamic crack problems in two dimensions, in Proc. *BETECH 86*, Eds Connor J.J. Brebbia C.A., Computational Mechanics Publication, Southampton, pp. 619-631, 1986.

34. Dominguez J., Gallego R., Time-domain boundary element analysis of two-dimensional crack problems, in Proc. *Boundary Element Methods in Engineering*, Eds. Annigeri B.S., Tseng B.S., Springer-Verlag, pp. 362-368, 1990.

35. Dominguez J., Gallego R., The time domain boundary element method for elastodynamic problems, *Math. Comput. Model.*, Vol. 15, No. 3-5, pp. 119-129, 1991.

36. Dominguez J., Gallego R., Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 33, No. 3, pp. 635-647, 1992.

37. Durbin F., Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method, *Comput. J.*, Vol. 17, No. 4, pp. 371-376, 1974.

38. Erdogan F., Sih G.C., On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *J. Basic Eng.-T. ASME*, pp. 519-527, 1963.

39. Ewalds H.L., Wanhill R.J.H., *Fracture mechanics*, Edward Arnold, London, Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft 1985.

40. Fan T.Y., Hahn H.G., An application of the boundary integral equation method to dynamic fracture mechanics, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 21, No. 2, pp. 307-313, 1985.

41. Fedeliński P., The Fourier transform boundary element method for harmonic vibrations of cracked structures, *Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Technicznej*, Gliwice, Vol. 2, pp. 57-62, 1996.

42. Fedeliński P., Metoda elementów brzegowych w analizie dynamicznej szczelin, *Prace Naukowe Instytutu Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej Politechniki Wrocławskiej*, Wrocław, Vol. 57, s. 139-194, 1997.

43. Fedeliński P., The boundary element dynamic analysis of structural elements with cracks, *Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej*, Gliwice, Vol. 3, pp. 37-42, 1997.

44. Fedeliński P., Dynamic crack growth by time-domain boundary element method, in Proc. *XIII Polish Conf. Computer Methods in Mechanics*, Poznań, Vol. 1, pp. 363-370, 1997.

45. Fedeliński P., The boundary element method in three-dimensional dynamic fracture mechanics - Part I: Theory, *Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej*, Gliwice, Vol. 6, pp. 83-88, 1998.

46. Fedeliński P., The boundary element method in three-dimensional dynamic fracture mechanics - Part II: Examples, *Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej*, Gliwice, Vol. 6, pp. 89-94, 1998.

47. Fedeliński P., The three-dimensional boundary element method in dynamic analysis of cracks, *Building Research J.*, Vol. 46, No. 4, pp. 257-275, 1998.

48. Fedeliński P., The boundary element method in dynamic crack analysis, *J. Theor. Appl. Mech.*, Vol. 36, No. 2, pp. 403-421, 1998.

49. Fedeliński P., The three-dimensional dynamic crack analysis by the boundary element method, in Proc. *VII Inter. Conf. Numerical Methods in Continuum Mechanics*, Eds. Kompis V., et al., pp. 59-64, 1998.

50. Fedeliński P., Modelling of dynamic crack experiment by the boundary element method, *Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej*, Gliwice, Vol. 10, pp. 77-82, 1999.

51. Fedeliński P., Integral transform method in 3-D dynamic fracture mechanics, in Proc. *Advanced Mathematical and Computational Mechanics, Aspects of the Boundary Element Method*, Eds Burczyński T., Cruse T.A., Kluwer Academic Publishers, (w druku).

52. Fedeliński P., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The dual boundary method for cracked structures subjected to inertial forces, *Bound. Elem. Abstracts*, Vol. 4, No. 4, pp. 150-152, 1993.

53. Fedeliński P., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The dual boundary element method in dynamic fracture mechanics, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 12, No. 3, pp. 203-210, 1993.

54. Fedeliński P., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Dual boundary element method: inertial stress intensity factors, in Proc. *Boundary Element Technology VIII*, Eds Pina H., Brebbia C.A., Computational Mechanics Publications, Southampton, pp. 267-276, 1993.

55. Fedeliński P., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The dual boundary element method: $\tilde{J}$-integral for dynamic stress intensity factors, *Int. J. Fracture*, Vol. 65, No. 4, pp. 369-381, 1994.

56. Fedeliński P., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The dual boundary element method for dynamic analysis of cracked pin-loaded lugs, in Proc. *Localized Damage III, Computer Aided Assessment and Control*, Eds Aliabadi M.H. et al., Computational Mechanics Publications, Southampton, pp. 571-578, 1994.

57. Fedeliński P., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Dynamic stress intensity factors in mixed-mode: time-domain formulation, in Proc. *Boundary Elements XVI*, Ed. Brebbia C.A., Computational Mechanics Publications, Southampton, pp. 513-520, 1994.

58. Fedeliński P., Aliabadi M.H., Rooke D.P., A single-region time-domain BEM for dynamic crack problems, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 32, No. 24, pp. 3555-3571, 1995.

59. Fedeliński P., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Boundary element formulations for dynamic analysis of cracked structures, Chapter 2, in *Dynamic fracture mechanics*, Ed. Aliabadi M.H., Computational Mechanics Publications, Southampton, pp. 61-100, 1995.

60. Fedeliński P., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The Laplace transform DBEM method for mixed-mode dynamic crack analysis, *Comput. Struct.*, Vol. 59, No. 6, pp. 1021-1031, 1996.

61. Fedeliński P., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Boundary element formulations for dynamic analysis of cracked structures, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 17, pp. 45-56, 1996.

62. Fedeliński P., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The time-domain DBEM for rapidly growing cracks, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp. 1555-1572, 1997.

63. Freund L.B., *Dynamic fracture mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

64. Gallego R., Dominguez J., Dynamic crack propagation analysis by moving singular boundary elements, *J. Appl. Mech.-T. ASME*, Vol. 59, pp. 158-162, 1992.

65. Gallego R., Dominguez J., Hypersingular BEM for transient elastodynamics, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 39, pp. 1681-1705, 1996.

66. Gallego R., Dominguez J., Solving transient dynamic crack problems by the hypersingular boundary element method, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, Vol. 20, No. 5, pp. 799-812, 1997.

67. Gaul L., Fiedler C., Improved calculation of field variables in the domain based on BEM, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 11, pp. 257-264, 1993.

68. Gawroński W., Kruszewski J., Ostachowicz W., Tarnowski J., Wittbrodt E., *Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji*, Arkady, Warszawa 1984.

69. Gdoutos E.E. *Fracture mechanics. An introduction*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London 1993.

70. Gołaski L. *Elementy doświadczalnej mechaniki pękania*, Wydawnictwo Politechniki Świetokrzyskiej, Kielce 1992.

71. Gołaski L., Pilcer S., *Metody laboratoryjnych badań wytrzymałościowych, Część I. Mechanika pękania*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1979.

72. Guiggiani M., Hypersingular formulation for boundary stress evaluation, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 13, pp. 169-179, 1994.

73. Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolphi T.J., Rizzo F.J., A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, *J. Appl. Mech.-T. ASME*, Vol. 59, 604-614, 1992.

74. Hellan K., *Introduction to fracture mechanics*, McGraw-Hill Book Company, New York 1984.

75. Hirose S., Scattering from an elliptic crack by the time-domain boundary integral equation method, in Proc. *Advances in Boundary Elements, Vol. 3 Stress Analysis*, Eds Brebbia C.A., Connor J.J., Computational Mechanics Publications, Southampton-Boston, pp. 99-110, 1989.

76. Hirose S., Achenbach J.D., Application of BEM to transient analysis of a 3-D crack, in Proc. *Boundary Element Methods in Applied Mechanics*, Eds Tanaka M., Cruse T.A., Pergamon Press, pp. 255-264, 1988.

77. Hirose S., Achenbach J.D., Time-domain boundary element analysis of elastic wave interaction with a crack, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 28, No. 3, pp. 629-644, 1989.

78. Hirose S., Achenbach J.D., Acoustic emission and near-tip elastodynamic fields of a growing penny-shaped crack, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 39, No. 1, pp. 21-36, 1991.

79. Hirose S., Niwa Y., Scattering of elastic waves by three dimensional crack, in Proc. *Boundary Elements VIII*, Eds Tanaka M., Brebbia C.A., Springer-Verlag, pp. 169-178, 1986.

80. Israil A.S.M., Banerjee P.K., Two-dimensional transient wave-propagation problems by time-domain BEM, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 26, No. 8, pp. 851-864, 1990.

81. Israil A.S.M., Banerjee P.K., Advanced time-domain formulation of BEM for two-dimensional transient elastodynamics, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 29, 1421-1440, 1990.

82. Israil A.S.M., Banerjee P.K., Interior stress calculations in 2-D time-domain transient BEM analysis, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 27, No. 7, pp. 915-927, 1991.

83. Israil A.S., Dargush G.F., Dynamic fracture mechanics studies by time-domain BEM, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 39, No. 2, pp. 315-328, 1991.

84. Kanninen M.F., Popelar C.H., *Advanced fracture mechanics*, Oxford University Press 1985.

85. Kishimoto K., Aoki S., Sakata M., Dynamic stress intensity factors using $\hat{J}$-integral and finite element method, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 13, pp. 387-394, 1980.

86. Kishimoto K., Aoki S., Sakata M., On the path independent integral-$\hat{J}$, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 13, pp. 841-850, 1980.

87. Kishimoto K., Aoki S., Sakata M., Computer simulation of fast crack propagation in brittle material, *Int. J. Fracture*, Vol. 16, No. 1, 1980.

88. Kleiber M., Ed., *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych, Mechanika Techniczna*, Tom XI, Wydawnictawo Naukowe PWN, Warszawa 1995.

89. Klepaczko J.R., Ed., *Crack dynamics in metallic materials*, Int. Centre Mech. Sc., Courses and Lectures, No. 310, Springer-Verlag, Wien-New York 1990.

90. Kocańda S., *Zmęczeniowe pękanie metali*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1985.

91. Kocańda S., Szala J., Podstawy obliczeń zmęczeniowych, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997.

92. Koh H.M., Lee H.S., Haber R.B., Dynamic crack propagation analysis using Eulerian-Lagrangian kinematic descriptions, *Comput. Mech.*, Vol. 3, pp. 141-155, 1988.

93. Koller M.G., Bonnet M., Madariaga R., Modelling of dynamical crack propagation using time-domain boundary integral equations, *Wave Motion*, Vol. 16, pp. 339-366, 1992.

94. Krawczuk M., *Dynamika elementów konstrukcyjnych z pęknięciami zmęczeniowymi*, Wydawnictwo Instytutu Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk 1994.

95. Lin X., Ballmann J., Re-consideration of Chen's problem by finite difference method, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 44, No. 5, pp. 735-739, 1993.

96. Manolis G.D., Beskos D.E., *Boundary element methods in elastodynamics*, Unwin Hyman, London 1988.

97. Martinez J., Dominguez J., On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factors computations, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 20, No. 10, pp. 1941-1950, 1984.

98. Mettu S.R., Kim K.S., An application of the time-domain boundary integral equation method to dynamic crack propagation, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 39, No. 2, pp. 339-345, 1991.

99. Mettu S.R., Nicholson J.W., Computation of dynamic stress intensity factors by the time domain boundary integral equation method - II. Examples, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 31, No. 5, pp. 769-782, 1988.

100. Mi Y., Aliabadi M.H., Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 10, No. 2, pp. 161-171, 1992.

101. Mi Y., Aliabadi M.H., Three-dimensional crack growth simulation using BEM, *Comput. Struct.*, Vol. 52, No. 5, pp. 871-878, 1994.

102. Mróz Z., Seweryn A., Dylatacyjny model szczeliny, *Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Mechanika*, Vol. 16, s. 127-142, 1996.

103. Mróz Z., Seweryn A., Non-local failure and damage evolution rule: Application to a dilatant crack model, *J. Phys. IV France*, Vol. 8, pp. 257-268, 1998.

104. Murakami Y., *Stress intensity factors handbook*, Pergamon 1987.

105. Murti V., Valliappan S., The use of quarter point element in dynamic crack analysis, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 23, No. 3, pp. 585-614, 1986.

106. Nardini D., Brebbia C.A., A new approach to free vibration analysis using boundary elements, *Appl. Math. Model.*, Vol. 7, pp. 157-162, 1983.

107. Neimitz A., *Dynamika wzrostu pęknięć*, Monografie, Studia, Rozprawy, Politechnika Świętokrzyska, Kielce 1994.

108. Neimitz A., *Mechanika pękania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.

109. Nicholson J.W., Mettu S.R., Computation of dynamic stress intensity factors by the time domain boundary integral equation method - I. Analysis, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 31, No. 5, pp. 759-767, 1988.

110. Nishimura N., Guo Q.C., Kobayashi S., Boundary integral equation methods in elastodynamic crack problems, in Proc. *Boundary Elements IX, Vol. 2: Stress Analysis Applications*, Eds Brebbia C.A., Wendland W.L., Kuhn G., Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, pp. 279-291, 1987.

111. Nishimura N., Guo Q.C., Kobayashi S., Elastodynamic crack analysis by BIEM, in Proc. *Boundary Element Methods in Applied Mechanics*, Eds Tanaka M., Cruse T.A., Pergamon Press, pp. 245-254, 1988.

112. Nishioka T., Atluri S.N., Numerical modeling of dynamic crack propagation in finite bodies, by moving singular elements. Part 1: Formulation, *J. Appl. Mech.-T. ASME*, Vol. 47, pp. 570-576, 1980.

113. Nishioka T., Atluri S.N., Numerical modeling of dynamic crack propagation in finite bodies, by moving singular elements. Part 2: Results, *J. Appl. Mech.-T. ASME*, Vol. 47, pp. 577-582, 1980.

114. Nishioka T., Atluri S.N., Path-independent integrals, energy release rate, and general solutions of near-tip fields in mixed-mode dynamic fracture mechanics, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 18, pp. 1-22, 1983.

115. Nishioka T., Atluri S.N., A numerical study of the use of path independent integrals in elasto-dynamic crack propagation, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 18, pp. 23-33, 1983.

116. Nishioka T., Atluri S.N., On the computation of mixed-mode K-factors for a dynamically propagating crack, using path-independent integrals J'_k, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 20, No. 2, pp. 193-208, 1984.

117. Partridge P.W., Brebbia C.A., Wrobel L.C., *The dual reciprocity boundary element method*, Computational Mechanics Publications, Southampton Boston, Elsevier Applied Science, London New York 1992.

118. Pekau O.A., Batta V., Seismic crack propagation analysis of concrete structures using boundary elements, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 35, No. 8, pp. 1547-1564, 1992.

119. Polyzos D., Stamos A.A., Beskos D.E., BEM computation of DSIF in cracked viscoelastic plates, *Commun. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 10, No. 1, pp. 81-87, 1994.

120. Portela A., *Dual boundary element analysis of crack growth, Topics in Engineering*, Vol. 14, Computational Mechanics Publications, Southampton-Boston 1993.

121. Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The dual boundary element method: effective implementation for crack problems, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 33, No. 6, pp. 1269-1287, 1992.

122. Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Dual boundary element incremental analysis of crack propagation, *Comput. Struct.*, Vol. 46, No. 2, pp. 237-247, 1993.

123. Rakowski G., Kacprzyk Z., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993.

124. Rooke D.P., Acors S., Fedeliński P., Dynamic effects of breaking stiffeners in cracked structures, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 52, No. 5, pp. 811-820, 1995.

125. Rooke D.P., Cartwright D.J., *Compendium of stress intensity factors*, London HMSO 1976.

126. Rusiński E., *Metoda elementów skończonych. System COSMOS/M*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1994.

127. Rusiński E., Czmochowski J., Smolnicki T., *Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.

128. Rykaluk K., *Pęknięcia w konstrukcjach stalowych*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 1999.

129. Seelig T., Gross D., Analysis of dynamic crack propagation using a time-domain bounadry integral equation method, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 34, No. 17, pp. 2087-2103, 1997.

130. Seweryn A., *Kumulacja uszkodzeń i pękanie elementów konstrukcyjnych w złożonych stanach obciążeń*, Wydawnictwa Politechniki Białostockiej, Białystok 1997.

131. Sih G.C., Ed., *Mechanics of fracture, Vol. 4: Elastodynamic crack problems*, Noordhoff International Publishing, Leyden 1977.

132. Sládek J., Sládek V., Dynamic stress intensity factors studied by boundary integro-differential equations, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 23, No. 5, pp. 919-928, 1986.

133. Sládek J., Sládek V., A boundary integral equation method for dynamic crack problems, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 27, No. 3, pp. 269-277, 1987.

134. Sládek J., Sládek V., Fedeliński P., Contour integrals for mixed-mode crack analysis: effect of nonsingular terms, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, Vol. 27, pp. 115-127, 1997.

135. Sládek J., Sládek V., Fedeliński P., Integral formulation for elastodynamic T-stresses, *Int. J. Fracture*, Vol. 84, pp. 103-116, 1997.

136. Sládek J., Sládek V., Fedeliński P., Computation of the second fracture parameter in elastodynamics by the boundary element method, *Adv. Eng. Softw.*, Vol. 30, pp. 725-734, 1999.

137. Smith R.N.L., From rags to riches?- Developments in the BEM for the solution of elastic fracture problems, in Proc. *Boundary Elements X, Vol. 3, Stress Analysis*, Ed. Brebbia C.A., Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, pp. 155-176, 1988.

138. Smith R.N.L., The solution of mixed-mode fracture problems using the boundary element method, *Eng. Anal.*, Vol. 5, No. 2, pp. 75-80, 1988.

139. Smith R.N.L., *Basic fracture mechanics*, Butterworth-Heinemann, Oxford 1991.

140. Snyder M.D., Cruse T.A., Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates, *Int. J. Fract. Mech.*, Vol. 11, No. 2, pp. 315-328, 1975.

141. Swenson D.V., Ingraffea A.R., Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using finite elements: Theory and applications, *Comput. Mech.*, Vol. 3, pp. 381-397, 1988.

142. Tanaka M., Nakamura M., Aoki K., Matsumoto T., Computation of dynamic stress intensity factors using the boundary element method based on Laplace transform and regularized boundary integral equation, *JSME Int. J.*, Vol. 36, No. 3, pp. 252-258, 1993.

143. Tanaka M., Matsumoto T., Nakamura M., Aoki K., SIF computation in 2-D transient elastodynamic problems using Laplace transform and regularized boundary integral equation, in *Boundary Element Methods*, Eds Tanaka M., Du Q., Honma T., Elsevier Science Publishers, pp. 11-20, 1993.

144. Tanaka M., Sládek V., Sládek J., Regularization techniques applied to boundary element methods, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 47, No. 10, pp. 457-499, 1994.

145. Telles J.C.F., Castor G.S., Guimaraes S., A numerical Green's function approach for boundary element applied to fracture mechanics, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 38, pp. 3259-3274, 1995.

146. Telles J.C.F., Barra L.P.S., Guimaraes S., A hypersingular numerical Green's function generation for BEM applied to general fracture mechanics problems - elastodynamics, in Proc. *Boundary Elements XIX*, Eds Marchetti M., Brebbia C.A., Aliabadi M.H., Computational Mechanics Publications, Southampton-Boston, pp. 257-266, 1997.

147. Thau S.A., Lu T.H., Transient stress intensity factors for a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 7, pp. 731-750, 1971.

148. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., A fictitious stress and displacement discontinuity method for dynamic crack problems, in Proc. *Boundary Elements XVI*, Ed. Brebbia C.A., Computational Mechanics Publications, Southampton, pp. 469-476, 1994.

149. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., An approximate analysis of dynamic contact between crack surfaces, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 16, pp. 41-46, 1995.

150. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., An indirect boundary element method for three-dimensional dynamic fracture mechanics, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 16, pp. 351-362, 1995.

151. Wen P.H., *Dynamic fracture mechanics: displacement discontinuity method, Topics in engineering, Vol. 29*, Eds Brebbia C.A., Connor J.J. Computational Mechanics Publications, Southampton-Boston 1996.

152. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Application of the weight function method to two-dimensional elastodynamic fracture mechanics, *Int. J. Fracture*, Vol. 76, pp. 193-206, 1996.

153. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The influence of elastic waves on dynamic stress intensity factors (two-dimensional problems), *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 66, pp. 326-335, 1996.

154. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The influence of elastic waves on dynamic stress intensity factors (three-dimensional problems), *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 66, pp. 385-394, 1996.

155. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., A weight function technique in three - dimensional fracture mechanics: static and dynamic, *Int. J. Fracture*, Vol. 78, pp. 101-115, 1996.

156. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Three-dimensional dynamic weight functions for mixed-mode crack problems, in Proc. *Boundary Elements XVIII*, Eds Brebbia C.A., Martins J.B., Aliabadi M.H., Haie N., Computational Mechanics Publications, Southampton-Boston, pp. 419-428, 1996.

157. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Dynamic analysis of mode III cracks in rectangular sheets, *Int. J. Fracture*, Vol. 80, R37-R41, 1996.

158. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., A contour integral method for dynamic stress intensity factors, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, Vol. 27, pp. 29-41, 1997.

159. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Cracks in three-dimensions: a dynamic dual boundary element analysis, in Proc. *Boundary Elements XIX*, Eds Marchetti M., Brebbia C.A., Aliabadi M.H., Computational Mechanics Publications, Southampton-Boston, pp. 327-337, 1997.

160. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Cracks in three-dimensions: a dynamic dual boundary element analysis, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 167, pp. 139-151, 1998.

161. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., A variational technique for three-dimensional fracture mechanics weight functions: dynamic, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 42, 1425-1439, 1998.

162. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., A mass-matrix formulation for three - dimesional dynamic fracture mechanics, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 173, pp. 365-374, 1999.

163. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Three-dimensional dynamic fracture analysis with the dual reciprocity method in Laplace domain, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 23, pp. 51-58, 1999.

164. Wen P.H., Aliabadi M.H., Young A., A time-dependent formulation of dual boundary element method for 3D dynamic crack problems, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 45, pp. 1887-1905, 1999.

165. Williams M.L., Knauss W.G., Eds, *Dynamic fracture*, Martinus Nijhoff Publishers, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht-Boston-Lancaster 1985.

166. Wnuk P.W., *Podstawy mechaniki pękania*, Skrypty Uczelniane Akademii Górniczo-Hutniczej, Nr 882, Kraków 1981.

167. Yin J., Ji X., Numerical computation of dynamic stress intensity factors by the boundary element method, *Eng. Anal.*, Vol. 5, No. 3, pp. 140-145, 1988.

168. Zhang Ch., Dynamic stress intensity factors of an inclined surface-breaking crack, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 37, No. 1, pp. 7-14, 1990.

169. Zhang Ch., A novel derivation of non-hypersingular time-domain BIEs for transient elastodynamic crack analysis, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 28, No. 3, pp. 267-281, 1991.

170. Zhang Ch., Achenbach J.D., Time-domain boundary element analysis of dynamic near-tip fields for impact-loaded collinear cracks, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 32, No. 6, pp. 899-909, 1989.

171. Zhang Ch., Achenbach J.D., A new boundary integral equation formulation for elastodynamic and elastostatic crack analysis, *J. Appl. Mech.-T. ASME*, Vol. 56, pp. 284-290, 1989.

172. Zhang Ch., Gross D., 3D elastodynamic crack analysis by a non-hypersingular BIEM, *Comput. Mech.*, Vol. 9, No. 2, pp. 137-152, 1992.

173. Zhang Ch., Gross D., A non-hypersingular time-domain BIEM for 3-D transient elastodynamic crack analysis, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 36, No. 17, pp. 2997-3017, 1993.

174. Zhang Ch., Gross D., *On wave propagation in elastic solids with cracks*, Computational Mechanics Publications, Southampton-Boston 1997.

175. Zhang Ch., Savaidis A., Time-domain BEM for dynamic crack analysis, *Math. Comput. Simulat.*, Vol. 50, pp. 351-362, 1999.

176. Zhang X., Lee J.S., Zhang Y., Dynamic analysis of three-dimensional crack problems, In Proc. *Computational Engineering with Boundary Elements, Vol. 2 Solid and Computational Problems*, Eds Cheng H.D., Brebbia C.A., Grill S., Computational Mechanics Publications, Southampton, pp. 77-88, 1990.

Metoda elementów brzegowych w analizie dynamicznej układów odkształcalnych z pęknięciami

Streszczenie

W pracy przedstawiono sformułowanie i zastosowanie dualnej metody elementów brzegowych w zagadnieniach dynamiki pęknięć. Spośród znanych sformułowań metoda dualna jest najbardziej ogólna i uniwersalna. W metodzie stosuje się brzegowe równanie całkowe przemieszczeń i sił dla węzłów należących do powierzchni pęknięć. Sformułowanie dualne umożliwia analizę ciał z pęknięciami w wyniku dyskretyzacji wyłącznie brzegu zewnętrznego ciała i powierzchni pęknięć. Nieznane przemieszczenia i obciążenia we wszystkich węzłach brzegowych oblicza się bezpośrednio poprzez rozwiązanie układu równań. Za pomocą zaprezentowanej metody można wyznaczyć także przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia w dowolnym punkcie ciała.

W pracy przedstawiono brzegowe równania całkowe przemieszczeń i sił powierzchniowych, i ich szczególne formy dla pęknięcia. Omówiono sformułowanie, zalety i wady trzech podstawowych metod analizy pęknięć: metody podziału na podobszary, metody nieciągłości przemieszczeń i metody dualnej. Wielkości brzegowe: geometrię, przemieszczenia i siły brzegowe, aproksymowano za pomocą elementów kwadratowych dla zagadnienia dwu- i trójwymiarowego. Opisano szczegółowo obliczanie całek hiperosobliwych, występujących w równaniu całkowym sił brzegowych. Przedstawiono pola przemieszczeń i naprężeń wokół dynamicznie wzrastającego pęknięcia. Dynamiczne współczynniki intensywności naprężeń wyznaczono za pomocą całek niezależnych od konturu całkowania i rozwarcia wierzchołka pęknięcia. Przedstawiono sposób określania kierunku wzrostu pęknięcia na podstawie maksymalnego naprężenia obwodowego. Zagadnienia dynamiczne analizowano stosując sformułowanie dualne w połączeniu z metodą transformacji całkowych Fouriera i Laplace'a, metodą rozwiązań w dziedzinie czasu i metodą podwójnej zasady wzajemności. Porównano trzy różne sformułowania, biorąc pod uwagę formę rozwiązań podstawowych i ich całkowanie, macierzowe sformułowanie i rozwiązanie równań ruchu, wymaganą pamięć, prędkość obliczeń, dokładność i możliwe zastosowania. Wykorzystano metodę rozwiązań w dziedzinie czasu do analizy dynamicznego wzrostu pęknięcia. Wzrost pęknięcia modelowano, dodając nowe elementy brzegowe przy wierzchołku pęknięcia. Analizowano trójwymiarowe elementy konstrukcyjne za pomocą metody transformacji całkowej. Przedstawiono rozwiązania podstawowe stosowane w poszczególnych sformułowaniach.

W pracy przedstawiono rozwiązania numeryczne, które porównano z innymi, uznanymi rozwiązaniami numerycznymi i analitycznymi, otrzymując zgodność rozwiązań. Pokazano wpływ rozkładu obciążenia na powierzchniach pęknięcia i jego zmienności w czasie, wymiarów i położenia pęknięcia, sposobu zamocowania ciała, prędkości wzrostu pęknięcia na dynamiczne współczynniki intensywności naprężeń i przemieszczenia konstrukcji. Opisano nowe, techniczne przykłady zastosowania opracowanych metod analizy dynamicznej elementów konstrukcyjnych z pęknięciami.

The boundary element method in dynamic analysis of deformable structures with cracks

Summary

In this work the formulation and application of the dual boundary element method for dynamic crack problems are presented. Among known formulations, the dual method is considered as the most general and versatile. In this method the displacement and traction boundary integral equations are used for nodes on crack surfaces. The dual formulation allows the analysis of cracked structures by discretizing the external boundaries and crack surfaces only. The unknown displacements and tractions at all boundary nodes are calculated directly by the solution of the system of equations. The method can be used to calculate displacements, strains and stresses at an arbitrary point.

The displacement and traction boundary integral equations, and their particular forms for cracks are presented. The formulations, advantages and drawbacks of three basic methods used to analyze cracks: the subregion method, the displacement discontinuity method and the dual method are discussed. The boundary quantities: geometry, displacements and tractions are approximated by quadratic elements for two- and three-dimensional problems. The integration of hipersingular integrals which appear in the traction boundary integral equations is described in detail. The displacement and stress fields at the tip of the dynamically growing crack are presented. The dynamic stress intensity factors are computed using path independent integrals and crack opening displacements. The method of predicting the direction of crack growth using the maximum circumferencial stress is presented. The dynamic problems are analyzed using the dual formulation, which is combined with the Fourier and Laplace integral transform method, the time-domain method and the dual reciprocity method. The three approaches are compared taking into account the fundamental solutions, and their integration, the matrix formulation and solution of the system of equations of motion, memory requirements, speed, accuracy and possible applications. The time-domain method is used to analyze dynamic crack growth. The crack growth is modelled by adding new boundary elements at the crack tip. The three-dimensional problems are analyzed by the integral transform method. The fundamental solutions used in each formulation are given.

In the work numerical solutions are presented and compared with other well established analytical and numerical solutions, showing good agreement. The influence of the load distribution on crack faces and its time variation, the dimension and position of the crack, displacement constraints, velocity of the crack growth on dynamic stress intensity factors and displacements of the structure are presented. New technical examples demonstrate applications of the developed methods for dynamic analysis of structural elements with cracks.