Jahrgang XXIII. 1917. No. 5 u. 6.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**, von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von Professor **K. Schwab**, Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule in Frankfurt am Main unter Mitwirkung von Dr. **A. Maurer**, Direktor des Kgl. Realgymnasiums in Wiesbaden.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle fachwissenschaftl. Mitteilungen und Sendungen werden an Prof. K. Schwab, Frankfurt a. M., Günthersburgallee 33 erbeten. Mitteilungen u. Sendungen über Schul- u. Unterrichtsreform wolle man dagegen direkt an Direktor Dr. A. Maurer, Wiesbaden, Riederbergstr. 1, richten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 8 Nummern ist 4 Mk. pränum., für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift kostenlos; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhandlung zu beziehen.

Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Nachdruck der einzelnen Artikel ist, wenn überhaupt nicht besonders ausgenommen, nur mit genauer Angabe der Quelle und mit der Verpflichtung der Einsendung eines Belegexemplars an den Verlag gestattet.

Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten und die Ausbildung der Mathematiklehrer.

Es wird nicht leicht eine Frage geben, die für die Geltung der Mathematik im Unterrichtsplan der höheren Schulen Deutschlands bedeutungsvoller ist, als die Frage der Ausbildung der Lehrer für diesen Unterricht. Mag die Unentbehrlichkeit eines gewissen Maßes mathematischer Bildung in unsrer Zeit auch erwiesen sein, mag die Bedeutung der Mathematik für die Naturwissenschaften und die Technik auch allgemein anerkannt werden, maßgebend für die Wertung der Mathematik als Unterrichtsfach wird die Freude sein, die sie bei der strebsamen Jugend erweckt, die Schätzung, die sie in der Erinnerung an die Schule bei den Gebildeten genießt, und das Ansehen, das ihr nicht nur für die Bedürfnisse des praktischen Lebens, sondern für die gesamte geistige Entwicklung unsres Wissens zukommt. Da stehen als Träger ihres Ansehens die Lehrer an den höheren Schulen neben den Forschern an den Hochschulen, und das rechte Lehren der Mathematik auf höheren und auf Hochschulen wird zu einer Aufgabe von hoher Bedeutung. Damit wird aber auch die Pflicht, die Lehrer für diese Aufgabe wohl auszurüsten, geadelt, und darf nicht hinter die zweite Aufgabe der Hochschule, der reinen Forschung zu dienen, als etwas nebensächliches oder untergeordnetes oder als etwas, das sich aus der akademischen Freiheit von allein ergäbe, zurückgestellt werden. Wie man noch vor etwa zwei bis drei Dezennien auch auf den höheren Schulen unter der Führung der Altphilologen alles Pädagogische und Methodische mit einem gewissen geistigen Hochmut zur Seite schob und sich mit wegwerfender Gebärde von den Bestrebungen abwandte, die zur Voraussetzung eines guten Unterrichts nicht bloß die Wissenschaft von der Sache, sondern auch die Kenntnis von der Psyche des Schülers machen wollten, so steht es heute noch vielfach auf den Hochschulen, wo man das Heil allein von dem wissenschaftlichen Forschen erwarten zu können glaubt und die Stellung des Lehrers an der Universität nur insofern schätzt, als er Schule macht, d. h. sich Gehilfen und Nachfolger in dem eignen Forschungsgebiet heranzieht.

Gewiß ist in den letzten Zeiten manches besser geworden. Und gerade wir Mathematiker dürfen uns freuen, wie ernsthaft unter der Führung von Felix Klein die Fragen über Ziel und Methode der Ausbildung der Oberlehrer in Angriff genommen worden sind, und wieviel besser es heute mit dem Studium der Mathematik aussieht als etwa in den 70er und 80er Jahren. Aber gelöst ist das Problem der Lehrerbildung noch lange nicht. Ob es überhaupt mit der Devise der Lehr- und Lernfreiheit, jenem Schibboleth der alten Schule gelöst werden kann, ob innerhalb des weiten Rahmens der philosophischen Fakultät eine Lösung möglich ist, ob nicht schließlich neben die „oberen" Fakultäten, die der Ausbildung der Theologen, Juristen und Mediziner dienen, eine Fakultät zu begründen wäre, die der Ausbildung der Lehrer diente — das sind Fragen, die noch der Lösung harren. Aber man bedenke nur die gewaltige Entwicklung, die der Stand der Oberlehrer seit dem Ende des 18. Jahrhunderts, wo er anfing in die Erscheinung zu treten, durchgemacht hat, man mache sich die große Bedeutung eines wissenschaftlich und pädagogisch wohlgeschulten Lehrerstands für die ganze kulturelle Entwicklung Deutschlands klar, seine großen erzieherischen Aufgaben, die ja mit den wissenschaftlichen aufs engste verknüpft sind, und seine Stellung im öffentlichen Leben, um die er freilich noch sehr durch innere Standeshebung bemüht sein muß, dann wird man zu der Ueberzeugung kommen, daß der alte Weg, der den Kandidaten des höheren Schulamts lediglich durch wissenschaftliche Spezialstudien führte, nicht mehr gangbar ist. Redet man seit langem schon so viel von der Reform der Schulen, so wird man im neuen deutschen Reich auch von einer Reform der Universitäten und insbesondere der philosophischen Fakultät reden müssen.

Da kommt gerade zur rechten Zeit ein Buch, das in wundervoller Weise die Geschichte des Studiums der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts behandelt.* Als letzte Abhandlung aus der langen Reihe der deutschen IMUK-Abhandlungen ist es nach jahrelangen Vorarbeiten erschienen, ein Werk deutschen Fleißes eines wissenschaftlich geschulten Mathematikers, das berufen scheint, die Frage der Lehrerbildung wesentlich zu fördern, indem es in einem lebensvollen Bild zeigt, wie sich das Studium der Mathematik mit seinen Licht- und Schattenseiten seither gestaltet hat.

* Wilhelm Lorey, Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts. Aus Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission, herausgegeben von F. Klein. Bd. III, Heft 9. Mit 13 Abbildungen (XVI u. 440 S.) Leipzig 1916, Teubner. geh. M 12.—, geb. M. 14.—.

Selten habe ich ein Buch nicht nur mit mehr Interesse, sondern geradezu mit größerem ästhetischen Genuß gelesen. Da werden die Erinnerungen lebendig an die eigne Studienzeit, da treten die großen Vertreter der „reinen" Mathematik wieder vor die Augen, zu deren Füßen man einst gesessen und versucht hat, ihren abstrakten Gedankengängen zu folgen, da liest man von den persönlichen Erlebnissen ehemaliger Studenten und den Eindrücken, die berühmte Forscher auf sie gemacht haben, da werden kulturgeschichtliche Bilder von alten und neueren Zeiten erweckt, zahllose Biographien bekannter Männer gegeben, ihre wissenschaftliche Richtung, die Gedankenkreise, in denen sie sich bewegten, die Hochschuleinrichtungen, Verordnungen der Ministerien, die Seminare, mathematische Gesellschaften, die mathematische Literatur besprochen, kurzum eine große Stoffülle geboten, und das alles so übersichtlich und anmutig geordnet, mit soviel Liebe für die Sache zusammengestellt, daß einen das Buch nicht leicht wieder losläßt. Es wird kaum einen Mathematiklehrer geben, in dem das Buch nicht zahlreiche Erinnerungen und Gedanken erweckt und dem es nicht die Anregung gibt, über das, was er erstrebt und erreicht hat, von neuem nachzudenken.

Denn das ist gerade der höhere Wert einer Geschichte der Vergangenheit, wenn sie zugleich die Grundlagen gewährt für die Gestaltung der Zukunft, indem sie die Probleme aufzeigt, die der Gegenstand in sich birgt. Und das mächtige Zukunftsproblem aller Erziehung, ohne dessen Lösung alle Reformpläne auf dem Papier stehen werden, betrifft die Heranbildung eines wissenschaftlich hochstehenden und zugleich pädagogisch gebildeten Lehrerstands. Durch das ganze Buch zieht sich wie ein roter Faden die Frage nach der rechten Ausbildung der Mathematiker für höhere Schulen. Und in der Tat, es muß von einer so kostspieligen Einrichtung, wie sie unsre Universitäten darstellen, und von der vorsichtigen Auswahl der an ihnen wirkenden Gelehrten verlangt werden, daß dort nicht bloß in vornehmer Abgeschlossenheit der Forschung gelebt wird, unbekümmert um die Anforderungen an die praktisch verwertbare Ausbildung der höheren Berufskreise, sondern daß die Universität ihre Stellung als Hochschule festhält, deren gleichwichtiger Zweck es ist, dem Staate tüchtig vorgebildete Beamte, dem höheren Berufsleben geistig hochstehende Mitglieder und der bürgerlichen Gesellschaft die rechten Führer zu erziehen. Hat man allmählich in den höheren Schulen eingesehen, daß neben den Fragen der Wissenschaft auch die der Unterrichtsbehandlung von Bedeutung sind, und hat sich der gelehrte Gymnasialprofessor von ehemals aus der vornehmen Abgeschlossenheit seines Katheders heraus und mitten unter die Jugend stellen müssen, so wird auch die Hochschule sich dem Gedanken einer Reform ihres Studienbetriebs nicht entziehen können. Nicht daß man nun in den umgekehrten Fehler verfalle, in der Organisation und Methode das einzige Heil zu sehen. Aber daß insbesondere die philosophische Fakultät, die ja erst zuletzt gleichberechtigt neben die andren getreten ist, einer Neugestaltung bedürftig ist, in der die wichtige Aufgabe der Heranbildung tüchtiger Lehrer ebenso hoch gewertet wird wie die reine Forschung, dürfte eine natürliche Folge der Entwicklung sein, die das gesamte Unterrichtssystem genommen hat.

Man soll in einer systematischeren Bildung des Gymnasiallehrers keine Verflachung sehen, gegen die gewiß mit allen Kräften angekämpft werden muß. Es ist ja nicht zu leugnen, daß die gelehrte Spezialforschung in ihren Kreisen schon heute wohl weniger vertreten ist wie früher. Aber man bedenke, wie ungeheuer die Wissenschaft in die Breite gegangen ist und wie die Aufgabe des Lehrers auch nach der erzieherischen Seite gewachsen ist. Der Lehrer muß heute meistens zwei oder drei und mehr Fächer verwalten, das Fachlehrersystem ist durch das Klassenlehrersystem abgelöst, ja die Ansprüche an den Lehrer werden hier schon vielfach übertrieben und führen zu dem umgekehrten Fehler enzyklopädischer Oberflächlichkeit. Daneben melden sich aber Pädagogik und Psychologie, Hygiene und Körperpflege, Politik und Volkswirtschaft mit dem Verlangen berücksichtigt zu werden. Das läßt sich nicht leisten ohne eine straffere Ausnutzung der kostbaren Studentenzeit, ohne eine systematischere Gestaltung des Studiums. Natürlich soll kein Seminarbetrieb eingerichtet werden. Aber mit der absoluten Lernfreiheit, die doch auch in sehr vielen Fällen eine große Zeitvergeudung bedeutet, ist es heute nicht mehr getan. Dazu ist zuviel kostbares Gut in die Hand der Lehrer gegeben. Sie müssen sich daher beizeiten auf ihren Beruf besinnen und sich prüfen können, ob sie dafür die natürlichen Anlagen und das geistige Interesse mitbringen, nicht aber umgekehrt ein wissenschaftliches Fach studieren, um es schließlich in Ermanglung eines Besseren im Unterricht recht und schlecht zu verwerten.

Selbst ein Mann wie Kummer, der in seinen Vorlesungen, wie den älteren unter uns erinnerlich sein wird, keineswegs zu hohe Anforderungen stellte, betont in seiner Rektoratsrede aus dem Jahre 1848 (Lorey, S. 12) den rein wissenschaftlichen Zweck der Universitäten gegenüber der Aufgabe, dem Staate und der bürgerlichen Gesellschaft Beamte zu erziehen. Und es ist charakteristisch, daß er, der selbst vom Gymnasiallehrer zum ordentlichen Professor in Breslau berufen wurde, unter diesen Staatsbeamten die Gymnasiallehrer nicht erwähnt. Und Crelle hat 1830 in einem dem Kultusministerium eingereichten Reisebericht über eine Reise nach Frankreich den wahren Zweck der Mathematik darin gefunden, daß sie zur innersten Aufhellung des Verstandes und zur Uebung der Geisteskräfte das Mittel sei (S. 45). Lorey macht mit Recht darauf aufmerksam, wie sich hier und in der weiteren Entwicklung des mathematischen Studiums das neuhumanistische Ideal der „formalen Bildung", das bis in unsre Zeit hinein eine so große Rolle gespielt hat, bemerkbar macht. Diese Entwicklung geht ja wesentlich von Jakobis Einfluß aus und die Königsberger Schule wurde für die jüngeren Dozenten der 60er Jahre maßgebend. Clebsch, der als Lehrer hochgeschätzt war, ging von der Meinung aus, daß man die reiferen Studenten, unbekümmert um die Bedürfnisse des Berufs, zur Mitarbeit bei dem jeweiligen weiteren Ausbau der Wissenschaft heranziehen solle. Seinen äußeren Ausdruck fand diese Auffassung in der preußischen Prüfungsordnung vom Jahre 1866, die in der Forderung gipfelte, daß „nur die Kandidaten für den mathematischen Unterricht in den oberen Klassen für befähigt zu erachten sind, die sich als ausgebildete Mathematiker zeigen und in die höhere Geometrie, die höhere Analysis und Analytische Mechanik soweit eingedrungen sind, daß sie auf diesen Gebieten eigene Untersuchungen mit Erfolg anstellen können."

Wer, wie der Verfasser, in den 70er Jahren in Berlin studiert hat, wird sich erinnern, zu welchen Verstiegenheiten dieser abstrakte Betrieb der reinen Mathematik führte und wie sich daraus eine Entfremdung zwischen Schule und Universität entwickelte, eine Kluft, die für die meisten unüberbrückbar war, oft schon beim Eintritt in die Universität, leider aber auch vielfach beim Uebergang ins Lehramt, wo der Weg nicht mehr zurückgefunden wurde zu den Stoffen, die die Bildung der Schüler verlangte und sie interessierte, und die den Mathematiker am Gymnasium einer kleineren Stadt befähigt haben würde, als Kenner der Anwendungen der Mathematik dem Publikum seines Wirkungskreises etwas zu bieten. Auf diese Entfremdung von der angewandten Mathematik weist besonders Schlömilch in Sachsen hin, der 1865 mit einem den Forderungen der Praxis gerecht werdenden Plan hervortrat und wo am Polytechnikum zu Dresden eine besondere Abteilung zur Heranbildung von Lehrern der Mathematik, Naturwissenschaft und Technik gebildet worden war, die aber später durch Harnack und Voß wieder stark nach den Bedürfnissen der reinen Mathematiker orientiert wurde. Auch die polytechnische Hochschule in München hatte das Recht, Lehramtskandidaten auszubilden. Hier hat auch F. Klein einige Jahre gelehrt, und als er 1880 eine Professur an der Universität in Leipzig übernahm, knüpfte er an diese Tätigkeit wieder an in einer Rede, die den Titel führte „Die Beziehungen der neuen Mathematik zu den Anwendungen“. In Preußen aber blieb die Entfremdung von den Anwendungen; astronomische Kenntnisse z. B. wurden in der genannten Prüfungsordnung von 1866 nicht verlangt, Männer, wie Schellbach in Berlin und Heis in Münster, gewannen keinen Einfluß auf die Entschließungen im Kultusministerium. Aeltere Anregungen, von denen Lorey berichtet, wie die Idee Crelles zur Gründung eines polytechnischen Instituts nach dem Muster der École polytechnique und ein Plan Schellbachs zur Gründung eines mathematischen Instituts, das als Hauptzweck die Ausbildung der Lehrer der Mathematik und Physik betonte, waren schon früher der Vergessenheit anheimgefallen.

Wie die für die Entwicklung der Kultur so hoch bedeutsamen Anwendungen der Mathematik, zunächst die Astronomie, die Nautik und die Geodäsie unter dieser formalen Ausbildung verkümmern mußten, haben wir Aelteren miterlebt. Aber auch die darstellende Geometrie, das numerische Rechnen und der Rechenschieber, ganz zu schweigen von der technischen Mechanik, alle diese wertvollen Dinge blieben infolgedessen im Unterricht der höheren Schulen vielfach vernachlässigt und sind es heute noch, weil es an der Ausbildung der Lehrer fehlt, die hier, wo nicht bloß Bücher gewälzt, sondern die Dinge durch Meßapparate in jedem einzelnen Fall selbständig gemeistert werden müssen, doppelt entbehrt wird. Und wie viele haben daher nie den Mut gefunden, an diese Dinge heranzugehen, weil ihnen die praktische Fertigkeit abging und es ihnen später an Anleitung fehlte. Wohl haben sich unter der Führung Einzelner, die sich nicht genierten auch als Lehrer von andren lernen zu wollen, hie oder da die Mathematiker einer Schule zusammengetan, um sich bei einem Landmesser in den Elementen der praktischen Feldmeßkunde, bei einem Ingenieur in darstellender Geometrie zu üben, und vereinzelt ist besonders noch in älterer Zeit von einem astronomisch gebildeten Gymnasialprofessor manche wertvolle Anregung durch Gründung einer bescheidenen Sternwarte in weiteren Kreisen verbreitet worden, aber das waren Ausnahmen. Die Quelle der Bildung, die besonders von den isolierten Gymnasien in kleineren Städten hätte ausgehen können, die Pflege wertvoller Beziehungen zwischen der Schule und dem Publikum, war auf lange Zeit hinaus verschüttet.

Lorey erzählt in anregender Weise, wie schließlich der Widerstand gegen die abstrakte Behandlung der Mathematik lebendig wurde, als man zur Erkenntnis der Unzulänglichkeiten in der Lehrerausbildung gelangt war. Aus drei Quellen, so setzt er in dem Kapitel VI seines Buches auseinander, kam die Reaktion, einmal aus den Kreisen der Oberlehrer unter Führung unsres Vereins, dann aus den Kreisen der Ingenieure und schließlich aus den Kreisen der Hochschullehrer selbst, die sich den freien Blick für die Bedeutung der Mathematik im Rahmen der Kultur der Gegenwart bewahrt hatten. Hier steht das Verdienst von Felix Klein für alle Zeiten fest, und wenn ihm in diesen Tagen die Ehrenmitgliedschaft des Förderungsvereins angetragen wurde, wenn er ferner den Titel eines Dr. ing. trägt, so wird damit zum Ausdruck gebracht, wie meisterhaft er es verstanden hat, die Bestrebungen der drei genannten Gruppen zu verbinden und zunächst zu fördern durch die eingehenden Berichte, welche unter seinem Präsidium in der IMUK in 38 Abhandlungen von dem deutschen Unterausschuß niedergelegt worden sind, denen sich die Berichte der andren Kulturnationen zur Seite stellen sollten, um einen umfassenden Ueberblick über den Stand des mathematischen Unterrichts und daraus die Grundlagen für seine zukünftige Weiterentwicklung zu gewinnen. Fürwahr ein umfassendes Unternehmen, das mit der Schrift Loreys für Deutschland einen vortrefflichen Abschluß gefunden hat. Mit Recht hat sich daher unser Verein das Ziel gesetzt, auf dieser Grundlage weiter arbeiten zu wollen (Vorwort zu Nr. 3 dieser Zeitschrift).

Unter der Fülle des interessanten Stoffes, in dem Lorey nunmehr die neuere Entwicklung des mathematischen Unterrichts auf den deutschen Universitäten im letzten Kapitel seines Buches schildert, interessiert uns noch besonders, was er in § 3 desselben über die Beziehung zwischen Schulmathematik und Universitätsmathematik berichtet. Ich möchte mir ein weiteres Eingehen hierauf wie überhaupt auf die neuere Entwicklung des mathematischen Unterrichts auf den höheren Schulen und Hochschulen für die nächste Nummer der Unterrichtsblätter versparen. Jemehr indessen die Stimmen laut werden, welche auf umfassende Reformen des gesamten Schulunterrichts hindrängen, umsomehr ist es die Pflicht unsrer Mitglieder, die große Bedeutung der mathematischen Fächer zu betonen und die grundlegenden Fragen ihrer unterrichtlichen Ausgestaltung zu erörtern. Das Loreysche Buch wird dazu vielerlei Anregung auch zu persönlichen Erinnerungen und Darstellungen geben, und wir können unsren Lesern nur empfehlen, sich eifrig damit zu befassen wie überhaupt die Veröffentlichungen der IMUK zu studieren. Wir erhoffen davon auch eine eifrige Mitarbeit in den Unterrichtsblättern. Maurer.

Veranlagung und chemischer Unterricht.

Von R. Winderlich, Oldenburg i. Gr.

Unsere Unkenntnis von den Anlagen und Entwicklungsmöglichkeiten einer einzelnen Kindesseele führt zusammen mit rein äußeren Beweggründen für die Wahl der Lehranstalt dazu, daß in den verschiedenen Schulen niemals eine Auslese derer vorhanden ist, welche nach Fähigkeit und Neigung für die jeweilige Schulgattung am geeignetsten wären. Es ist nicht zu leugnen, daß aus der notwendig entstehenden Mischung ungleichartig veranlagter Kinder sich vielerlei Hemmnisse ergeben, die einem Lehrer großen Verdruß bereiten können. Es darf jedoch nicht vergessen werden, daß ein Nebeneinander verschiedenartiger Begabungen auch Vorteile mit sich bringt, weil es vor der Gefahr des Einseitigwerdens bewahrt. Würden die Lehrfächer sich frei und unbehindert entwickeln können, so entstünde schnell die verderbliche Gefahr, daß jedes einzelne völlig unbewußt und triebhaft darnach strebte sich in den Vordergrund zu schieben und auf ein Fachstudium vorzubereiten. Von einer harmonischen Persönlichkeitsbildung wäre dann nicht mehr die Rede. Unter den bestehenden Verhältnissen ist solche Verirrung so gut wie ausgeschlossen; jeder Lehrer steht vor der Notwendigkeit, sich der Schule und den Schülern anzupassen. Für alle Fächer ist die Grundfrage zu lösen: Mit welchen Mitteln ist es möglich, auf die verschiedenartig veranlagten Naturen erfolgreich einzuwirken?

In den Naturwissenschaften ist der bemerkenswerteste Fortschritt zur Lösung dieser Grundfrage in der allgemeinwerdenden Durchführung von Schülerübungen zu sehen. Am frühesten begann damit die Chemie, und sie ist auch bisher am weitesten mit dem Uebungsbetrieb gelangt. Gewöhnlich wird bei der Begründung und Verteidigung der praktischen Betätigung der Hauptnachdruck darauf gelegt, daß zur Erreichung eines tieferen Verständnisses die Laboratoriumsarbeit ebenso notwendig sei wie der Aufenthalt und die Bewegung im Wasser für jemanden, der schwimmen lernen will. Einen solchen Vergleich dürfte man nicht an die erste Stelle rücken, denn unsere Schüler sollen doch keine Chemiker werden, sie sollen vielmehr der eigentümlichen Bildungs- und Erziehungswerte des chemischen Unterrichts teilhaftig werden. Hierzu ist allerdings der mit Uebungen durchsetzte Demonstrationsunterricht besser geeignet als dieser allein, weil im Laboratorium unwillkürlich eine größere Rücksicht auf die Veranlagung der Schüler genommen wird. Zunächst fallen sofort die Geschickten und die kläglich Ungeschickten auf. Unter jenen sind sehr häufig Faulpelze, mit denen vorher nicht viel zu erreichen war. Stachelt man ihren Ehrgeiz, indem man sie vor immer neue Aufgaben stellt, bei denen sie mit ihrer Handfertigkeit glänzen können, so lassen sich ungeahnte Fortschritte mit ihnen erzielen. Allmählich ist zu merken, daß die Vertreter dieser Gruppe mancherlei Unterschiede aufweisen. Es gibt da Nachahmer und Erfinder. Die einen leisten Hervorragendes, wenn sie einen etwas verwickelten Versuch nachmachen dürfen, versagen indessen, wenn sie selbständig handeln sollen. Es sind das Leute mit vorwiegend visuellem Gedächtnis, blendender Auffassungsgabe und leichter Hand. Hingegen basteln die Erfinder am liebsten ohne Anleitung allein. Sieht das oft auch nicht schön aus, was sie zusammenbauen, so verrät es doch eigene Gedanken und führt zum Ziel. Von diesen erfinderischen Naturen, die im Gegensatz zu den bloßen Nachahmern eine wahrhaft praktische Veranlagung und eine erfreuliche Kombinationsgabe besitzen, gibt es mehr, als man ahnt. Ihnen kommt in erster Linie der praktische Unterricht zugute. — Schlimm steht es andrerseits mit den heillos Ungeschickten. Nicht selten sind feine Köpfe darunter, die unter der Tücke des Objektes leiden. Haben sie mit vieler Mühe und Geduld eine Wägung oder Messung ausgeführt, so haben sie bei ihren mangelhaften Assoziationen für konkrete Dinge irgend etwas falsch gemacht, oder es zerspringt oder zerbricht ihnen sicherlich ein Glasteil, bevor sie ihren Versuch zu Ende gebracht haben. Falls sie wirklich einmal ohne Fährlichkeit bis zum Schluß gelangt sind, dann haben sie vor lauter Sorge um das äußere Drum und Dran das Wesentliche überhaupt nicht beachtet. Widmet man sich diesen Unglücklichen, die tröstlicherweise gewöhnlich nur in kleiner Zahl vorhanden sind, so erfährt man bald, daß sie zu ängstlich sind, zu viel bedenken, und daß sie erleichtert aufatmen, wenn man die Vorgänge eingehend mit ihnen theoretisch erörtert, die sie praktisch nicht bewältigen konnten. Ihnen liegt das Formalistisch-Logische mehr als das Reale, sie bilden ein nützliches Gegengewicht gegen die Nur-Praktiker. Ein Forschergenie, das naturgemäß selten ist, würde die praktische und theoretische Begabung vereinigt zeigen. Für die Mehrzahl der Schüler findet man auch im Praktikum, genau wie im althergebrachten Klassenunterricht, daß sie Durchschnittsmenschen sind, die weder einer fortbildungsfähigen praktischen Veranlagung noch einer formalistisch-logischen Begabung ermangeln; aber keine von beiden tritt irgendwie zu besonderen Hoffnungen berechtigend hervor.

Der Laboratoriumsunterricht gestattet auch einen Einblick in die Charakterveranlagung. Es gibt da immer einige, die sich nicht scheuen, ihre Versuchsergebnisse mit Hilfe befreundeter Nachbarn oder durch Rechnung zu verbessern, während andere ehrlich genug sind, ihre Mißerfolge unumwunden zu bekennen, teils mit

Bedauern über ihr Mißgeschick, teils völlig gleichgültig gegen Lob und Tadel. Hier kann durch Ueberführung der Sünder und durch ruhigen, väterlichen Zuspruch manch schwankender Mensch auf die richtige Bahn gewiesen werden.

Sind die Uebungen quantitativer Art, und erstrebenswert ist es jedenfalls, daß man zum Quantitativen vordringt, so erfordern sie eine Kontrolle durch Rechnung. Seltsamerweise scheint diese theoretische, rechnerische Seite der Uebungen bei den Lehrern der Chemie nicht sonderlich beliebt zu sein: es gibt jedenfalls viele Lehrbücher, die keinerlei Aufgaben enthalten, und die Jahresberichte der Schulen führen unter den chemischen Aufgaben für die Reifeprüfungen recht selten solche mit Rechnungen an. Zur Verteidigung dieser Art von Uebungen ließe sich vielerlei sagen; hier mag es genügen, daß es nicht mehr als recht und billig ist denen ein Betätigungsfeld zu bieten, die mehr für die Theorie veranlagt und interessiert sind, wenn man den Praktikern mit dem Laboratoriumsunterricht entgegenkommt. Es ist für den Lehrer ein Leichtes, aus der überreichen Literatur Beispiele herauszufinden, die eine willkommene Ergänzung des eigenen Unterrichts bieten, Aufgaben über die Bestimmung von Atomgewichten, Dampfdichten, Molekulargewichten, Wärmetönungen usw., Aufgaben, die sich bloß in Ausnahmefällen auf eigene Messungen gründen können, die aber zum Verständnis des theoretischen Gebäudes der chemischen Wissenschaft für unumgänglich gelten sollten. Wie anders kann man z. B. die Formeln für die Reihen der Kohlenwasserstoffe begreiflich machen, wenn man nicht einige Analysen durchrechnen läßt? „0,353 g Substanz gaben 0,453 g Wasser und 1,1 g Kohlensäure. . . . . Gewichtsüberschuß des mit Dampf erfüllten Ballons über den mit Luft gefüllten 0,510 g. Kapazität des Ballons 171 ccm. Temperatur des Dampfes 337⁰. Barometerstand 0,762 m. Temperatur der Luft 20⁰. Luftrückstand 9,9 ccm.“ [1] Aus diesen Angaben Dumas' über das Ceten finden die Schüler selbst die Formel C_{16} H_{32}, und dieses Selbstfinden gewährt mindestens den spekulativen Köpfen mehr Befriedigung als irgendeine zum Auswendiglernen mitgeteilte Formel. Den Bedürfnissen der Denklustigen hat man mehr noch Rechnung zu tragen als den bloßen Gedächtnismenschen, aber es müssen wie gesagt wirkliche Messungen zugrunde gelegt werden, nicht etwa am Schreibtisch ausgeklügelte Aufgaben.

Das hierdurch nötig werdende Eindringen in die Literatur sollte man grundsätzlich pflegen, auch die Schüler sollte man nach Dannemanns Vorgang dazu anhalten auf die Quellen zurückzugehen; damit würde der ganze Schulbetrieb an Einheitlichkeit und Geschlossenheit außerordentlich gewinnen. Wir müssen eine Schulung der Sinnesorgane, der Anschauung und Beobachtung, eine Schulung der Sprache, eine Schulung des Denkens und eine Schulung des sittlichen Handelns und Wollens erstreben. Hierbei haben alle Fächer mitzuwirken, auch die exakten Wissenschaften haben sich an der Schulung der Sprache zu beteiligen. Es darf nicht vorkommen, daß ein Mathematiker oder Naturwissenschaftler sich sprachliche Ungeheuerlichkeiten leistet wie den Satz: „Das Verhalten der Salze des Ammoniumradikals NH_4 nach ihren krystallographischen Eigenschaften, ihrem physikalischen und chemischen Verhalten ist vollkommen analog denen des Kaliums und Rubidiums.“ [2] Neben der steten Rücksicht auf Sprachreinheit kann der naturwissenschaftliche Unterricht die Sprache noch durch Aufsätze und Vorträge pflegen. Durch geeignete Wahl der Aufgaben für diese Aufsätze und Vorträge werden die Schüler, welche Begabung und Neigung für die exakten Wissenschaften haben, veranlaßt, ihren Redefluß zu üben; sie dürfen schreiben und sprechen über etwas, was ihnen liegt, was sie nicht abstößt und anwidert wie manches Thema aus dem deutschen Unterricht. Historisch Veranlagte wiederum, die zum realen Gehalt der Naturwissenschaften vielleicht keine rechte Stellung gewinnen können, finden sich bald in den Stoff hinein, wenn ihnen Gelegenheit geboten wird, ihren Anlagen entsprechend sich zu betätigen. In Kriegszeiten bietet sich von selbst das Thema, wie die fortschreitende Kenntnis der Explosivstoffe umgestaltend auf die Kriegführung gewirkt hat. Die Beziehungen zwischen Wissenschaft und Kultur liefern zahlreiche fesselnde Aufgaben: das Problem der Heizung, die Kohle und ihre Verwendung, das Eisen, das Glas usw. Philosophischen Köpfen gewährt es Befriedigung und Genuß, den wunderbaren Wegen der Forschung nachzugehen; dabei nehmen sie als Zugabe einen ganz ansehnlichen Posten realer Kenntnisse mit in Kauf. Die Untersuchung der Luft zeigt z. B., daß mit dem bloßen Denken garnichts zu erreichen ist, daß nur die planmäßige experimentelle Forschung zu einem Ziele führen kann, und daß mit verfeinerten Untersuchungsmethoden das Ziel immer weiter hinausgesteckt werden muß. Insbesondere hatte die Entdeckung und Trennung der Edelgase sowohl die Ausarbeitung der Spektralanalyse zur Voraussetzung, als auch die Möglichkeit, alle Gase zu verflüssigen und durch stufenweises Verdampfen zu trennen. Cavendish hatte bei seinen ausgedehnten Luftuntersuchungen stets eine kleine Gasblase übrig behalten, die er im elektrischen Funkenstrom nicht durch Sauerstoff zum Verschwinden bringen konnte, „so

[1] Journal für praktische Chemie (1836) 9, 289.

[2] Nachrichten zu den Göttinger Gelehrten Anzeigen 1906, S. 100.

that, if there is any part of the phlogisticated air of our atmosphere, which differs from the rest and cannot be reduced to nitrous acid, we may safely conclude, that it is not more than $\frac{1}{120}$ part of the whole." [3] Die Münchener Akademie stellte für das Jahr 1803 die Preisfrage: „Sind wohl die durch so viele ganz unähnliche Mittel und auf verschiedenen Wegen erzeugten Arten von Stickgas in allen ihren chemischen Eigenschaften und ihrer Grundlage (dem einfachen Stickstoff) noch vollkommen die nämlichen mit dem der atmosphärischen Luft? Und hat die Salpetersäure mit dem atmosphärischen Stickgas den nämlichen Stickstoff zu ihrer säurebildenden Grundlage? . . . Diese für das gegenwärtige Jahr schon einmal aufgegebene Preisfrage wird, weil nur eine Abhandlung darüber eingelaufen ist, auf 1803 erneuert". [4] Aber die Beobachtung Cavendishs und die Vermutung der Münchener Akademie allein nützten nichts, bis die Hilfsmittel zur Untersuchung vorhanden waren. Erst die genauen Wägungen Rayleighs — Litergewicht des atmosphärischen Stickstoffs 1,2572 g, des Stickstoffs aus chemischen Verbindungen 1,2507 g [5] — brachten den Stein ins Rollen, und die gemeinsamen Arbeiten Ramsays und Rayleighs führten zu einem neuen Ergebnis. Für die Verfeinerung im Gebrauch unserer Sinne und für die zielsicheren Gedankengänge hegen auch Laien die gebührende Bewunderung, und gar mancher von ihnen weiß den Erkenntniswert solcher Forschungen mit Verständnis zu würdigen. Der Schreiber dieser Zeilen hat es erfahren, daß ihm Schüler, die im Laboratorium wenig leisteten, für die Aufgabe dankbar waren über solche Untersuchungen zu berichten. Wie Scheeles klassische Arbeit von der Luft und dem Feuer durch Ostwalds Klassiker leicht zugänglich ist, so ist auch für jede Schule das schöne Buch von Ramsay „Vergangenes und Künftiges aus der Chemie" leicht zu beschaffen, das an mehreren Stellen [hauptsächlich S. 21 ff.] einen Bericht über die Edelgase enthält. Noch lehrreicher ist freilich die Originalarbeit. [6]

Mit den praktischen Arbeiten im Laboratorium, den Rechenaufgaben, den Aufsätzen und Vorträgen sind die Möglichkeiten wohl erschöpft, die Schüler zur Selbstbetätigung heranzuziehen, aber für die Berücksichtigung der verschiedenen Begabungen gibt es noch ein Förderungsmittel, das in den biologischen Wissenschaften seit langem Verwendung findet, in der Chemie jedoch bei weitem nicht ausgiebig genug benutzt wird. Es besteht in wohlvorbereiteten Lehrausflügen, bei denen hauptsächlich die künftigen Techniker, die kaufmännisch veranlagten Naturen und die volkswirtschaftlich Interessierten auf ihre Kosten kommen. Nach den Anweisungen der Lehrpläne hat der Unterricht auch auf die technische Seite der Chemie einzugehen. Diese Forderung ist überhaupt nur dann sinngemäß zu erfüllen, wenn die Schüler mit eigenen Augen technische Betriebe in Tätigkeit sehen. Ein Junge, der noch nie eine Gasfabrik besucht hat, kann sich schlechterdings gar keine rechte Vorstellung von ihren Einrichtungen bilden, selbst wenn er die trockene Destillation der Steinkohle eigenhändig ausgeführt hat. Die technische Wirklichkeit zeigt ein ganz anderes Gesicht als all die kleinen Schulversuche, und sie verfehlt niemals den allertiefsten Eindruck zu machen. Der Besuch eines Hochofenwerkes wirkt viel nachdrücklicher als die Reduktion eines Metalloxydes im schwerschmelzbaren Rohr; die überwältigenden Eindrücke werden niemals wieder vergessen. Die Greifer, welche die Rohstoffe vom Schiff zum Lager schaffen, die Förderwagen, welche von der Wage und Ueberwachungsstelle her die Erze, Kohlen und Zuschläge zur Gicht hinauffahren, der Trichterverschluß der Gicht, der sich dreht, sobald ein Wagen seinen Inhalt ausgekippt hat, der Deckel, der zum Schutz der Arbeiter gegen das giftige Cyan und Kohlenoxyd zur sicheren Dichtung niedergeht, bevor die Möllerung in den Ofen einsinkt, die Ableitung und Reinigung der Gichtgase, ihr Brennen in den Cowpern unter steter Kontrolle durch Fernthermometer, das Tosen des heißen Windes durch die wassergekühlten Bronzeformen, der Druckverschluß der Abstichöffnung, der Abstich selbst mit dem Schlackenfluß und dem Glutstrom des feurigflüssigen Eisens, das die Schwerarbeiter in die Sandformen leiten, die gewaltigen Maschinen zum Ansaugen und Treiben des Windes, all diese Einzelheiten wirken zu einer lebhaft bewegten Einheit vereinigt unmittelbar verständlich und nachhaltig belehrend, wenn sie wirklich geschaut werden, während durch den gedruckten Bericht eines Buches oder die mündliche Erzählung des Lehrers nur ein schattenhaftes, verschwommenes, in kurzer Zeit völlig verblassendes Bild in den Köpfen der noch so eindringlich Unterrichteten entsteht. Aus dem Besuch eines größeren Werkes zieht jeder einen geistigen Gewinn: nicht allein die künftigen Techniker, sondern alle praktisch Veranlagten merken fast unmittelbar eine Förderung ihres anschaulichen Denkens, sie sehen die Dinge ineinandergreifen, sie sehen die Vor-

[3] Phil. Trans. (1788) **78**, 271.

[4] Gilberts Annalen (1802) **10**, 118.

[5] Proc. Roy. Soc. (1893) **53**, 134; (1894) **55**, 340.

[6] Die Preisarbeit: Smithsonian Contributions 1033 „Argon, a new constituant of the atmosphere" by Lord Rayleigh and Professor William Ramsay. City of Washington: published by the Smithsonian Institution 1896 wird in vielen größeren Bibliotheken zu finden sein, denn mit amerikanischer Freigebigkeit sind diese und ähnliche Veröffentlichungen unentgeltlich geliefert worden.

gänge zwischen den Stoffen zwangsläufig geleitet und gebändigt durch den kundigen Menschen, sie sehen keine Einzeltatsachen, sondern lebendig bewegte Wirklichkeit; die kaufmännischen Naturen sehen mit Staunen, wie sorgfältig der Betrieb alle Verluste vermeidet, wie er darauf ausgeht mit den geringsten Mitteln den größtmöglichen Erfolg zu erringen, wie durchweg das Bestreben herrscht, keinen Abfall entstehen zu lassen — die Eisenhochofenschlacken werden auf Zement verarbeitet, das Gas der Kokerei dient als Kraftgas, Heizgas und Leuchtgas, der Teer, die Teeröle und das Ammoniak sind Kostbarkeiten —; wem in der Seele der Keim zu volkswirtschaftlichem und politischem Denken schlummert, dem wird er zum Leben erweckt, und der schon Treibende findet einen fruchtbaren Nährboden, denn es ist in einem Werte schaffenden Betriebe unmittelbar ersichtlich, daß der Mensch ein Gemeinschaftswesen ist, einer auf den andern angewiesen, daß jegliche Arbeit nur dann von Erfolg gekrönt sein kann, wenn jeder einzelne aus der Gesamtheit auf seinem Posten, auch auf dem allerbescheidensten, mit unbedingter Zuverlässigkeit seine Pflicht erfüllt, daß für die mannigfach abgestuften Zweige der Verwaltung und Ausführung alles überschauende Führer vorhanden sein müssen, deren Verantwortung mit der Größe ihres Wirkungskreises und ihrer Machtbefugnis wächst, daß aber auch die niedersten Arbeiter in der allgemeinen Wertschätzung nicht zu bloßen Händen oder Maschinen herabsinken dürfen, wenn nicht eine Entwürdigung der Menschheit eintreten soll, daß zur Erhaltung der Gesundheit und zur Erleichterung der schweren Arbeit für alle Beteiligten hygienische Maßnahmen getroffen werden müssen, daß ein arbeitsgewohntes und arbeitsfreudiges Volk eine gewaltige Macht darstellt, und daß unsere Bodenschätze in richtiger Verwertung und unsere Industrie im innigen Zusammenhange mit der Wissenschaft Quellen des Reichtums sind. Den geistigen Anlagen entsprechend wird der Besuch eines Großbetriebes auf den einen mehr in dieser, auf den andern mehr in jener Richtung wirken, im ganzen wird der Erfolg einer vorzüglichen staatsbürgerlichen Belehrung gleichzusetzen sein, die eine wertvolle und wünschenswerte Ergänzung zur staatsbürgerlichen Erziehung in den Arbeitsgemeinschaften der Schule, besonders der Uebungssäle bildet.

Wenn heute stärker denn je der Ruf ertönt: Freie Bahn jedem Tüchtigen! so wird jeder Lehrer von neuem sich die Frage vorlegen, ob er seinen Unterricht so gestaltet, daß er den verschiedenartigen Anlagen seiner Schüler vollauf gerecht wird. Weil wir alle Menschen sind mit menschlichen Schwächen, so wird wohl überall etwas zu bessern sein.

Kristallographische Meßübungen und Rechenaufgaben.

Von Dr. Julius Ruska, a. o. Professor an der Universität Heidelberg.

Wer Gelegenheit hat, die Art und Weise, wie die Anfänge der Wissenschaften auf den Schulen gelehrt und ihre Anwendungen im Unterricht behandelt werden, mit der wirklichen Wissenschaft und Praxis zu vergleichen, wird fast überall die Beobachtung machen, daß die schulmäßige Behandlung Gefahr läuft, in Scholastik auszuarten, indem sie Dinge wichtig nimmt und breit tritt, die für den wissenschaftlichen Standpunkt, d. h. für die Erkenntnis der wesentlichen Zusammenhänge gleichgültig sind, indem sie an Auffassungen festhält und weiterbaut, die wissenschaftlich überwunden sind, indem sie Aufgaben stellt oder gar bevorzugt, die praktisch wertlos sind und von den wirklich wichtigen Fragen abführen. Besonders groß ist die Gefahr solcher Abwege, wenn es sich um Schulfächer mit alten Ueberlieferungen handelt, um methodische Verfahren, die von einer Generation zur andern bei Lehrern und Schülern weitergegeben werden. Aber auch dann ist der Fortschritt gehemmt, wenn ein Unterrichtsstoff ein Grenzgebiet darstellt, dem nur wenige Fachleute methodisches Interesse entgegenbringen. Es muß verarmen und verkümmern, wenn ihm nicht von der fortschreitenden Wissenschaft von Zeit zu Zeit neue Antriebe zukommen, oder wenn nicht methodische Besinnung auf die Grundaufgaben zu neuen Wegen der didaktischen Behandlung führt.

Als ich vor einiger Zeit an dieser Stelle meine kritischen Bemerkungen zu „kristallographischen“ Aufgaben veröffentlichte, die in Aufgabensammlungen geboten werden*, leitete mich vor allem der Gedanke, solche Auswüchse der Scholastik zu bekämpfen und die Aufgaben auf den realen Boden zurückzuführen, den die Mineralogie und Kristallographie dem Mathematiker bereitstellt. Es schien mir wichtig und notwendig, der Zeitvergeudung entgegenzutreten, die darin besteht, daß man lieber Phantasieaufgaben ausheckt, als die wirklich vorkommenden, grundlegenden Aufgaben der Kristallographie behandelt. Auch wollte ich die Aufmerksamkeit auf ein Meßinstrument — das vereinfachte Anlegegoniometer — lenken, dessen Einführung in die Stereometrie bei der Ausmessung von Polyedern aller Art zu einer Fülle von wertvollen Aufgaben Gelegenheit gäbe. Ich hoffe diese Gedanken weiter zu fördern, wenn ich zeige, wie man in planmäßiger Verknüpfung von

* Ueber merkwürdige Mineralien und eine neue Methode der spezifischen Gewichtsbestimmung. Unterrichtsblätter 1916 Nr. 5. — Trotz wiederholter Korrekturvermerke ist Fig. 12 beim Druck des Aufsatzes verkehrt eingesetzt; ich bitte die Leser um Entlastung in diesem Punkte.

Messung und Rechnung eine Schulkristallographie aufbauen kann, die eher ein kleines Abbild der wirklichen Kristallbestimmung darstellt, als es das rein deduktive Lehrverfahren zu geben pflegt.

Wenn man, wie gewöhnlich, eine möglichst lückenlose Ableitung der Formenreihen der sechs oder sieben Kristallsysteme zur Hauptsache macht oder gar die neuere Systematik mit ihren 32 Symmetrieklassen der Darstellung zugrundelegt, so vergißt man über der mathematisch eleganten Deduktion zu sehr, daß die Kristallographie von Haus aus eine Erfahrungswissenschaft ist, daß erst zahllose immer wiederholte Messungen die empirischen Daten für die systematische Behandlung geliefert haben, und daß in jedem konkreten Fall immer wieder Messungen nötig sind, um die Lage und die Symbole der Flächen von gegebenen Kristallen zu bestimmen. Es ist aber sehr wohl ein Unterrichtsgang durchführbar, bei dem das Schwergewicht auf der Messung und Berechnung der kristallographischen Elemente liegt und die Systematik erst am Schluß als Zusammenfassung der Ergebnisse erscheint. Mindestens sollte die geometrische Kristallographie soweit mit praktischer, messender Kristallographie durchsetzt sein, daß die Schüler erkennen, wieviel mehr es auf diese Messungen ankommt, als auf allgemeine Betrachtungen.

Schon die Definition der Kristallsysteme durch ihre kristallographischen Elemente gibt Gelegenheit, auf diese Ergänzung von Theorie und Praxis hinzuarbeiten. Ist der auf dem allgemeinen Gesetz des Kristallwachstums beruhende Grundsatz im sichern Besitz der Schüler, daß nicht nur alle geometrisch ähnlichen, sondern auch die durch Parallelverschiebung von Flächen aus ihnen hervorgehenden Körper als kristallographisch identisch zu gelten haben — er muß natürlich durch Beispiele, etwa verschieden große oder verzerrte Alaun- und Granatkristalle, Quarze und Steinsalzspaltstücke veranschaulicht und physikalisch erläutert sein — so kann man natürliche Kristalle und Holz- oder Pappmodelle nebeneinander verwenden. Die Natur bietet uns kein System, sondern Einzelformen und Kombinationen, die wir nach ihren mehr oder weniger übereinstimmenden Symmetrieeigenschaften rein empirisch in Gruppen bringen können. Eine kleine Auswahl von rundum ausgebildeten Kristallen von Alaun, Flußspat, Schwefelkies, Granat, Zirkon, Kalkspat, Quarz, Schwefel, Schwerspat, Gips, Augit, Kupfervitriol usw. in Verbindung mit geeigneten großen Pappmodellen führt die wichtigsten Gruppen vor Augen: asymmetrische, einfach, dreifach, fünffach, siebenfach, neunfach symmetrische Körper. Wir konstruieren uns leicht für fünf dieser Gruppen die zugehörigen Elementarkörper, das asymmetrische und monosymmetrische Parallelflach, den Quader, das quadratische Prisma, den Würfel, für zwei andere das hexagonale Prisma und das Rhomboeder. Der strenge Nachweis, daß hievon wesentlich verschiedene Fälle nicht vorkommen und nicht vorkommen können, überschreitet die der Schule gesteckten Grenzen. Die Vergleichung der Grundkörper zeigt, daß die Zahl der willkürlichen Bestimmungselemente umso kleiner wird, je mehr die Symmetrie zunimmt. Der Würfel ist schon durch seine Definition bestimmt, das quadratische, trigonale, hexagonale Prisma durch ein Streckenverhältnis, das Rhomboeder durch einen Winkel, der Quader durch zwei Streckenverhältnisse, die schiefen Parallelflache außerdem durch einen oder drei Winkel. Eine leichte Ueberlegung zeigt, daß jedes Streckenverhältnis auch durch Winkel, jeder Winkel durch geeignete Streckenverhältnisse ersetzbar ist, das Streckenverhältnis des hexagonalen Prismas z. B. durch den Winkel der Diagonalen auf der Prismenfläche, der Winkel des Rhomboeders durch das Verhältnis der Kante zur Achse oder durch das Verhältnis der Flächendiagonalen. Könnten wir die Abstände der Kristallmolekel selbst unmittelbar beobachten und ausmessen, so würden sie uns zugleich den einfachsten Ausdruck für den Kristallbau liefern. Wären die Kristallformen nach allen Richtungen gleiche Vielfache der Elementarkörper, so könnten Kantenlängen zur Grundlage der Kristallbestimmung dienen. Die Willkür in den Abmessungen der prismatischen Körper zwingt aber bekanntlich zur Benützung von Grundformen und Kombinationen, bei denen Winkel gemessen werden können, und so kommen wir zur ersten Gruppe von kristallographischen Aufgaben.

I.

Man soll durch Winkelmessung an einfachen Formen oder Kombinationen die kristallographischen Konstanten eines gegebenen Minerals bestimmen.

Wir beginnen mit Beispielen aus dem regulären System. Es könnte scheinen, als ob hier überhaupt keine Messung vorzunehmen wäre. Aber woher wissen wir, daß der Alaun regulär kristallisiert, wenn nicht aus der Beobachtung, daß alle 12 Flächenwinkel der oktaederartigen Kristalle tatsächlich einander gleich sind und dem theoretisch für das reguläre Oktaeder gefundenen Wert $2\varphi = 109^0\,28'$ entsprechen? Wir werden also die erste Meßübung gerade zu diesem Nachweis benützen. Man kann sich die Arbeit erleichtern, indem man den Oktaederwinkel 2φ auf Karton konstruiert und mit scharfem Messer ausschneidet (Fig. 1). Die schmalen Dodekaederflächen, die an größeren Alaunkristallen die Stelle der Kanten einnehmen, stören nicht beim Anlegen. Man kann dasselbe Verfahren auch anwenden, um sich davon zu überzeugen, daß alle

Flächenwinkel des Rhombendodekaeders 120^0 messen, oder daß die Spaltflächen an den Ecken von Flußspatwürfeln dem Oktaeder angehören (der feste Winkel an der Kombinationskante ist $180^0 - \varphi = 125^0\,16'$).

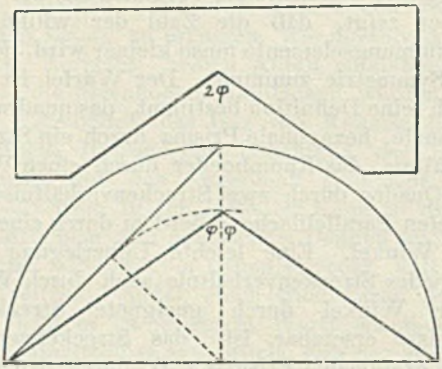


Fig. 1.

Der Substanz eigene kristallographische Konstanten sind erst vom quadratischen System an zu bestimmen. Es ist zu betonen, daß jedes Streckenverhältnis und jeder Winkel die pyramidale oder rhomboedrische Grundform eines im quadratischen oder im hexagonalen System kristallisierenden Körpers geometrisch bestimmt, und daß nur praktische Gründe maßgebend sind, wenn man als kristallographische Konstante das Verhältnis der Achsenlängen (oder mit $a = 1$ die Länge c der Hauptachse) benützt. Zu seiner Bestimmung genügt es, den Winkel 2φ an den Mittelkanten einer Pyramide erster Art oder die Winkel $180^0 - \varphi$ bezw. $90^0 + \varphi$ an den Kombinationskanten mit Basis und Prisma zu messen; auch kann man einen aus allen diesen Werten gewonnenen mittleren Wert zugrunde legen. Eine einfache Ueberlegung ergibt $c = \mathrm{tg}\,\varphi : \sqrt{2}$. Kann man den Winkel 2ψ an der Mittelkante einer Pyramide zweiter Art messen, so ist noch einfacher $c = \mathrm{tg}\,\psi$. Zur Berechnung des Achsenverhältnisses aus Polkantenwinkeln benützt man rechtwinklig sphärische Dreiecke.

Beispiel 1.

An einem pyramidalen Kristall von Scheelit sei der Winkel an den Mittelkanten aus einer Reihe von Messungen zu $130^0\,30'$ gefunden; welches ist das Achsenverhältnis des Minerals?

Wir finden $c = \mathrm{tg}\,\varphi : \sqrt{2}$ mit $\varphi = 65^0\,15'$.

$$\begin{aligned} \log\,\mathrm{tg}\,\varphi &= 10.3363 \\ \log\,\sqrt{2} &= 0.1505 \\ \hline \log\,c &= 0.1858,\quad c = 1.534. \end{aligned}$$

Die genaueren Werte sind nach dem Lehrbuch der Mineralogie von Klockmann $2\varphi = 130^0\,33'$ und $c = 1.5356$.

Beispiel 2.

Ein tafelförmiger Kristall von Wulfenit (Fig. 2) zeigt die Kombination einer quadratischen Pyramide mit der Endfläche. Man findet als Mittelwert aus den Messungen des Mittelkantenwinkels $2\varphi = 73.4^0$ oder $\varphi = 36.7^0$; aus Kontrollmessungen des stumpfen Winkels an der Kombinationskante $180^0 - \varphi = 143.4^0$ oder $\varphi = 36.6^0$. Wegen der größeren Unsicherheit des stumpfen Winkels nimmt man das Mittel aus 2φ der ersten und φ der zweiten Messung und erhält $\varphi = 36^0\,40'$. Wie groß ist der Wert der Hauptachse?

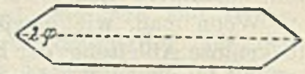


Fig. 2.

$$\begin{aligned} \log\,\mathrm{tg}\,36^0\,40' &= 9.8718 \\ \log\,\sqrt{2} &= 0.1505 \\ \hline \log\,c &= 9.7213,\quad c = 0.5264. \end{aligned}$$

Nach Klockmann ist $c = 1{,}577$. Die Vergleichung zeigt, daß das berechnete c rund $^1/_3$ des wahren Wertes ist. Also war die beobachtete Pyramide nicht die Grundpyramide, sondern die stumpfere Pyramide (113).

Beispiel 3.

An einem Kristall von Zinnstein, Kombination von Pyramide und Prisma, hat man den Winkel an der Kombinationskante zu $133^0\,30'$ gefunden. Man soll das Achsenverhältnis berechnen und ein Modell des Kristalls herstellen.

Der gemessene Winkel ist $90^0 + \varphi$, also ist $\varphi = 43^0\,30'$. Daraus wie vorher $c = 0{,}67$. Zur Herstellung des Modellnetzes müssen die Pyramidenkanten gegeben sein. Die Basiskante m ist $\sqrt{2} = 1.414$; die Polkante findet man aus $p = \sqrt{1 + c^2}$ zu $p = \sqrt{1.4489} = 1.2037$. Man zeichnet über und unter einem Rechteck, das den Prismenmantel darstellt, je vier gleichschenklige, durch das Streckenverhältnis $m:p$ bestimmte Dreiecke und klebt das Netz zusammen; die Länge der Prismenkante ist natürlich beliebig (Fig. 3).

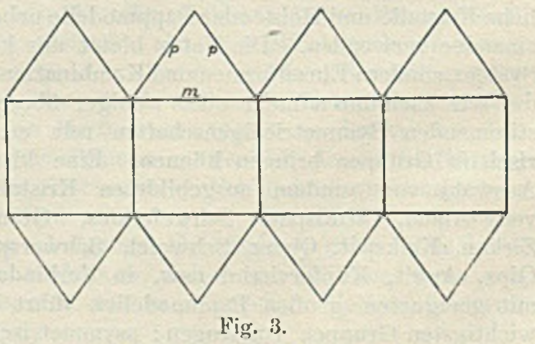


Fig. 3.

Beispiel 4.

An einem Kristall von Apophyllit (Fig. 4), Kombination der Grundpyramide mit dem Prisma zweiter Stellung, ist der Polkantenwinkel 2ϑ

mit 104^0 gefunden. Man soll das Achsenverhältnis, den Mittelkantenwinkel φ, den spitzen Winkel 2γ der rhombischen Pyramidenflächen und den Winkel μ an der Kombinationskante mit dem Prisma berechnen.

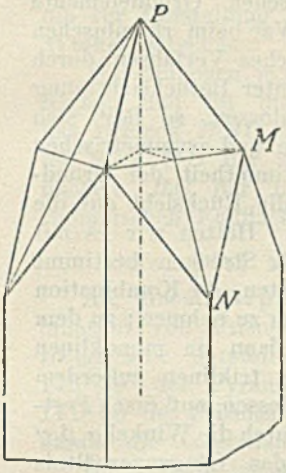


Fig. 4.

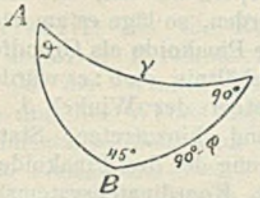


Fig. 5.

Man hat für die ersten drei Größen die Wahl zwischen zwei rechtwinklig sphärischen Dreiecken. Legt man eine Kugel um die Spitze P, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck zwischen Pyramidenfläche und Nebensymmetrieebene erster und zweiter Art (Fig. 5); man kennt die Winkel $A = \vartheta$ und $B = 45^0$ und berechnet

c aus: $\cos AB = \operatorname{cotg} \vartheta \cdot \operatorname{cotg} 45^0$

$$\log \cos AB = 9.8928$$
$$AB = 38^0\,37'$$
$$\log c = \log \operatorname{cotg} 38^0\,37' = 0.09758,$$
$$c = 1.252.$$

φ aus: $\cos 45^0 = \operatorname{cotg} AB \operatorname{tg} (90^0 - \varphi)$ oder

$$\operatorname{cotg} \varphi = \cos 45^0 : \operatorname{cotg} AB$$
$$\log \cos 45^0 = 9.8495$$
$$\log \operatorname{cotg} AB = 0.0976$$
$$\log \cos \varphi = 9.7519$$
$$\varphi = 60^0\,32',\ 2\varphi = 121^0\,(4').$$

γ aus: $\sin \gamma = \operatorname{cotg} \vartheta \cdot \operatorname{cotg} \varphi$

$\log \operatorname{cotg} \vartheta = 9.8928$

$\log \operatorname{cotg} \varphi = 9.7519$

$\log \sin \gamma = 9.6447,\ \gamma = 26^0\,10',\ 2\gamma = 52^0\,22'.$

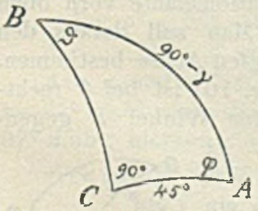


Fig. 6.

Legt man das Dreieck bei M in den Raum zwischen der Pyramidenfläche, Nebensymmetrieebene erster Art und Parallelebene zur Hauptsymmetrieebene (Fig. 6), so kennt man ϑ und die diesem Winkel gegenüberliegende Seite $AC = 45^0$; man findet leicht

c aus: $\sin BC = \operatorname{cotg} \vartheta \cdot \operatorname{tang} 45^0$

$$\log \sin BC = 9.8928$$
$$BC = 51^0\,23'$$

$c = \operatorname{tang} BC = \operatorname{cotg} (90^0 - BC) = \operatorname{cotg} 38^0\,37'$ wie oben.

φ aus: $\cos 45^0 = \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{tang} BC$ oder

$$\operatorname{cotg} \varphi = \cos 45^0 \operatorname{cotg} BC$$

$90^0 - \gamma$ aus: $\cos AB = \cos BC \cos 45^0$

$$\log \cos BC = 9.7953$$
$$\log \cos 45^0 = 9.8495$$
$$\log \cos AB = 9.6448$$

$AB = 90^0 - \gamma$, also $\log \cos AB = \log \sin \gamma$ wie oben.

Auch zur Bestimmung des Winkels μ an der Kombinationskante stehen zwei Wege frei, je nachdem man zur Bildung der rechtwinkligen Ecke außer der Prismen- und Kombinationskante noch die lange Diagonale der rhombischen Pyramidenfläche oder die vertikale Symmetrielinie der Prismenfläche hinzunimmt.

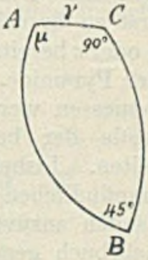


Fig. 7.

Im ersten Fall liegt der Scheitel der Ecke am spitzen Winkel N des Rhombus (Fig. 7), im zweiten am stumpfen Winkel M; die Bestimmungsgleichung für μ ist

für I:

$$\cos 45^0 = \sin \mu \cos \gamma,$$

für II:

$$\cos \mu = \operatorname{cotg} (180^0 - 2\gamma) \operatorname{tang} 45^0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt wegen des stumpfen Winkels $180^0 - 2\gamma$ ein negativer Wert für $\cos \mu$. Auch die unmittelbare Anschauung lehrt, daß μ ein stumpfer Winkel sein muß; der errechnete Wert kann mit dem Anlegegoniometer nachgeprüft werden.

Beispiel 5.

Der Polkantenwinkel am Spaltungsrhomboeder R des Kalkspats beträgt $105^0\,5'$; man soll das Achsenverhältnis und die übrigen Dimensionen des Rhomboeders bestimmen.

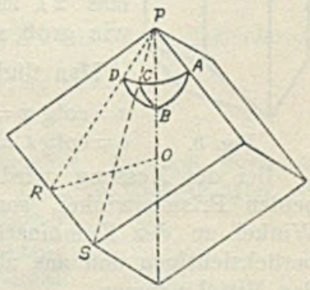


Fig 8.

Man berechnet zunächst die Neigung der Diagonale PS gegen die Hauptachse (Fig. 8) aus dem Dreieck ABC, in welchem $\sphericalangle A = \frac{\varphi}{2}$, $\sphericalangle C = 90^0$, $\sphericalangle B = 60^0$.

Es ist

$$\cos A = \sin B \cos BC \text{ oder}$$
$$\cos 52^0\,32.5' = \sin 60^0 \cos BC$$
$$\log \cos 52^0\,32.5' = 9.7840$$
$$\log \sin 60^0 = 9.9375$$
$$\log \cos BC = 9.8465;\ BC = 45^0\,23'.$$

Um zum Achsenverhältnis $PO : OR$ zu gelangen, benützen wir das benachbarte Dreieck BCD, das in C ebenfalls rechtwinklig ist und bei B einen Winkel von 30^0 hat.

Wir erhalten BD aus der Gleichung

$$\cos B = \operatorname{tang} BC \cdot \operatorname{cotg} BD, \text{ also}$$
$$\operatorname{cotg} BD = \cos 30^0 \operatorname{cotg} 45^0\,23'$$

und finden cotg $BD = 0.8543$. Dieser Wert ist, wie die Figur zeigt, das Achsenverhältnis $PO : RO$. Wie man die Kante, die Diagonalen und die Fläche der Rhomben oder den Inhalt des Rhomboeders bestimmt, bedarf keiner Erörterung.

Zur kristallographischen Bestimmung rhombischer Kristalle sind zwei unabhängige Messungen erforderlich, denn das Achsenverhältnis $a : b : c$ enthält zwei unabhängige Größen a und c (für $b = 1$). Aus Kombinationen, die das Hauptprisma enthalten, ergibt sich a, aus solchen, die das Längsprisma enthalten, c unmittelbar als Tangente des halben Prismenwinkels. Das Querprisma liefert $a : c$, ist also erst zu brauchen, wenn der absolute Wert von a oder c bereits feststeht. Kristalle mit herrschender Pyramide, an denen gleichzeitig drei Winkel gemessen werden können — der dritte zur Kontrolle der beiden andern — sind bekanntlich selten. Insbesondere ist abzuraten, die höchst empfindlichen Schwefelkristalle warmen Schülerhänden anzuvertrauen; hier mögen die aus dem Lehrbuch genommenen Werte zu Rechenübungen benützt werden.

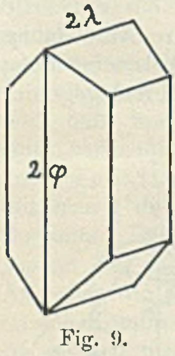


Fig. 9.

Beispiel 6.

An einem Kristall von Aragonit (Fig. 9), gewöhnliche Kombination (110) (011) (010), wurde der Prismenwinkel 2φ zu $116^0\ 10'$, der Winkel des Längsprismas 2λ zu $108^0\ 30'$ bestimmt; wie groß sind a und c?

Man findet

$$a = \text{cotg}\,\varphi = \text{cotg}\ 58^0\ 5' = 0.623;$$
$$c = \text{cotg}\,\lambda = \text{cotg}\ 54^0\ 15' = 0.720.$$

Bei der Messung wird man nicht nur die beiden Prismenwinkel, sondern auch die vier Winkel an den Kombinationskanten mit (010) berücksichtigen und aus allen guten Messungen das Mittel nehmen.

Beispiel 7.

Ein Topas, Kombination des Prismas mit einem Brachyprisma und der Grundpyramide, zeigte an den Polkanten die Winkel 141^0 (über a) und 102^0 (über b), an der Kombinationskante mit dem Prisma $135^0\ 35'$, am Prisma vorn $124^0\ 20'$. Man soll a und c auf doppelte Art berechnen und die Ergebnisse mit den genauen Werten $a = 0.5285$ und $c = 0.4769$ vergleichen.

Man kann a und b berechnen, indem man die rechtwinklige Ecke mit den Winkeln $70^0\ 30'$ und 51^0 benützt, die im Scheitel der Pyramide von den Symmetrieebenen und der Pyramidenfläche gebildet wird, oder man benützt für a den halben Prismenwinkel $62^0\ 10'$ und für c den Winkel an der Mittelkante $135^0\ 35' - 90^0 = 45^0\ 35'$.

Schwieriger gestalten sich die Verhältnisse im monoklinen und triklinen System. Denn es wird kaum noch möglich sein, Kristallkombinationen vorzulegen, an denen alle drei oder fünf kristallographischen Grundelemente leicht zu gewinnen sind. War beim rhombischen System ein allzu willkürliches Verfahren durch die dreifache Symmetrie unter Berücksichtigung der Kristalltracht ausgeschlossen, so läßt sich bei den monosymmetrischen und asymmetrischen Kombinationen die Unbestimmtheit der Grundelemente nur noch durch die Rücksicht auf die Kristalltracht einschränken. Hätten wir es mit Körpern zu tun, die durch Strecken bestimmt werden, so läge es am nächsten, die Kombination der Pinakoide als Grundform zu nehmen; zu dem Verhältnis $a : b : c$ würde dann im monoklinen System der Winkel β, im triklinen außerdem α und γ hinzutreten. Statt dessen muß (nach Festlegung der drei Pinakoide durch die Winkel α, β, γ des Koordinatensystems) das Längenverhältnis der Achsen durch die Lage einer alle Achsen schneidenden Pyramidenfläche oder durch das „Grundtetraeder", d. h. durch weitere zwei Winkel bestimmt werden; praktisch können auch zwei unabhängige Prismenflächen ihre Stelle vertreten. Es ist klar, daß diese Aufgaben vielfach oder ausschließlich auf schiefwinklige sphärische Dreiecke führen, und daß die Durchführung einer größeren Zahl solcher Aufgaben an ihrer Schwierigkeit und Umständlichkeit scheitert. Es kommt aber, wenn wir das Prinzip der kristallographischen Meß- und Rechenarbeit erläutern wollen, nicht so sehr darauf an — wie es leider oft der Ehrgeiz der Mathematiker ist — wenige recht schwere Aufgaben zu lösen, sondern Aufgaben von geringer und mittlerer Schwierigkeit in möglichst großer Auswahl darzubieten. Ich schließe den Abschnitt daher mit drei weiteren einfachen Beispielen.

Beispiel 8.

An einem Adular, Kombination von Prisma und schiefer Endfläche, ist der Prismenwinkel $2A$ an der Vorderkante mit $118^0\ 50'$ und der stumpfe Winkel B an der Kombinationskante vorn oben mit $112^0\ 13'$ gemessen. Man soll daraus den Neigungswinkel β der schiefen Achse bestimmen.

Das Dreieck ACB (Fig. 10) ist bei C rechtwinklig, die dem stumpfen Winkel B gegenüberliegende Kathete AC ist gleichfalls stumpfwinklig. Wir können das Dreieck durch ein Supplementardreieck DBC ersetzen, in welchem $\sphericalangle\, CBD = 67^0 47'$ und $\sphericalangle D = \sphericalangle A = 59^0 25'$; dann erhalten wir den Supplementwinkel x von β durch die Gleichung

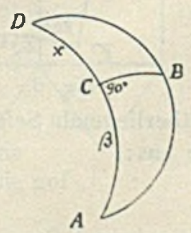


Fig. 10.

$$\cos 67^0\ 47' = \sin 59^0\ 25' \cos x$$

mit $x = 63^0\ 57'$; der stumpfe Achsenwinkel β ist daher $= 116^0\ 3'$.

Beispiel 9.

Man soll für den Adular des Beispiels 8 die zur Herstellung eines Netzes erforderlichen Winkel berechnen.

Wir brauchen je einen Winkel für die Seitenflächen und für die Endfläche. Benützen wir das Dreieck DBC der vorigen Aufgabe, so ist die Seite BD der spitze Winkel der Prismenflächen, BC der halbe stumpfe Winkel der rhombischen Endfläche.

Beispiel 10.

An einem Gipskristall, der die Kombination von Prisma, negativer Pyramide und Längsfläche darstellt, ist der Winkel $2C = 143^0\,30'$ der Pyramide und der Winkel $2A = 111^0\,30'$ des Prismas gemessen worden; man soll daraus die Achsenlängen bestimmen.

Die Aufgabe ist unvollständig; man muß auch den Achsenwinkel β kennen, den man zu rund 99^0 dem Lehrbuch entnimmt. Man erhält aus den gemessenen Winkeln nicht a und c, sondern ihre Projektionen a' und c', aus denen die Werte a und c gefunden werden können.

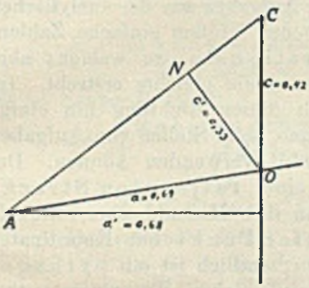


Fig. 11.

Nach der Zeichnung (Fig. 11) ist

$$a' : b = \operatorname{cotg} A, \text{ also}$$

$$\log a' = \log \operatorname{cotg} 55^0\,45' = 9.8331;$$

$$a' = 0.681.$$

Der Winkel zwischen a und a' ist 9^0, also ist

$$a = a' : \cos 9^0$$

$$\begin{array}{ll} \log a' & = 9.8331 \\ \log \cos 9^0 & = 9.9946 \\ \hline \log a & = 9.8385; \quad a = 0.6894. \end{array}$$

Ebenso ist

$$c' : b = \operatorname{cotg} C, \text{ also}$$

$$\log c' = \log \operatorname{cotg} 11^0\,45' = 9.5182;$$

$$c' = 0.3297.$$

Aus a und c' finden wir den Winkel AON zu $61^0\,25.5'$ und danach den Winkel NOC zu $37^0\,3.55'$; hieraus endlich c mittels der Gleichung

$$c' : c = \cos NOC \text{ oder } c = c' : \cos NOC.$$

$$\begin{array}{ll} \log c' & = 9.5182 \\ \log \cos NOC & = 9.8989 \\ \hline \log c & = 9.6193; \quad c = 0.4162. \end{array}$$

Wir finden also beim Gips $a : b : c = 0.6894 : 1 : 0.4162$; die genauen Werte sind nach Klockmann $a = 0.6896$ und $c = 0.4133$ mit $\beta = 98^0\,58'$.

II.

Das Gebiet der Aufgaben erweitert sich wesentlich, wenn die Grundelemente gefunden sind oder als gegeben in die Rechnung eingehen, und die Messungen den Zweck haben, die Symbole abgeleiteter Formen zu finden. Eine solche Aufgabe einfachster Art bot schon das zweite Beispiel; dankbaren Uebungsstoff kann man aber besonders aus den abgeleiteten Formen des regulären Systems gewinnen. Zwei Beispiele mögen das Verfahren veranschaulichen.

Beispiel 11.

An einem Flußspatkristall sind die Kanten des Würfels durch die Flächen eines Pyramidenwürfels zugeschärft. Die Messung ergibt einen Winkel $\varepsilon = 157^0\,20'$; welcher Pyramidenwürfel tritt in der Kombination auf?

Man hat festzustellen, in welchem Verhältnis eine Fläche des Pyramidenwürfels die Achsen schneidet. Die Aufgabe kann ohne weiteres bei genauer Zeichnung des Winkels durch Konstruktion gelöst werden (Fig. 12); die Rechnung ergibt

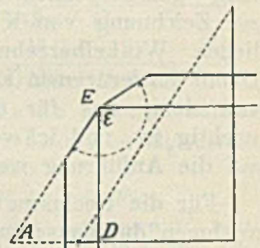


Fig. 12.

$n = ED : AD = \operatorname{cotg} \dfrac{\varepsilon - 90^0}{2}$. In unserm Fall ist $n = \operatorname{cotg} 33^0\,40' = 1.503 \sim \frac{3}{2}$; es liegt also die Form $\infty O \frac{3}{2}$ nach Naumanns Bezeichnung oder (320) nach Miller vor.

Beispiel 12.

Man soll das Symbol des am Granat häufig für sich allein oder in Kombination mit dem Rhombendodekaeder auftretenden Ikositetraeders aus dem Winkel an den längeren Kanten berechnen, der zu $131^0\,50'$ bestimmt wurde (Fig. 13).

Man legt ein sphärisches Dreieck an eine der Ecken, von denen vier lange Kanten ausgehen. Der Parameter m ist die Tangente des Winkels PAQ oder $C'AO$. Wir benützen die Gleichung $\sin PQ = \operatorname{cotg} P \operatorname{tg} QR$, die sich wegen $PQ = QR$ auf $\cos PQ = \operatorname{cotg} P$ reduziert.

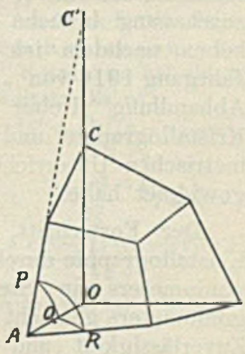


Fig. 13.

$$\cos PQ = \operatorname{cotg} 65^0\,55' = 0.447$$

$$PQ = 63^0\,27'.$$

$m = \operatorname{tang} PQ = 2$; das Ikositetraeder ist (211). Auch aus dem Winkel an den kurzen Kanten läßt sich das Symbol bestimmen, aber die Rechnung erfordert zwei Dreiecke.

III.

Schon in den bisher behandelten Aufgaben sind gelegentlich Fragen gestellt, die über das den Mineralogen Interessierende hinausgehen. Die Auswahl der Beispiele wird unermeßlich groß, sobald man die Bestimmung von ebenen Winkeln und Kantenlängen, Oberflächen und Rauminhalten hinzunimmt oder die gegebenen Stücke nicht auf Flächenwinkel beschränkt. Man kann natürlich auch fragen, welche Winkel, Kantenlängen usw. eine gegebene Form, etwa ein Hexakisoktaeder (321) oder eine biquadratische Pyramide oder ein bestimmtes Skalenoeder des Kalkspats besitzt, man kann Lage und Länge von Kombinationskanten unter bestimmten Bedingungen berechnen, man kann insbesondere die zur Zeichnung von Kristallnetzen erforderlichen Winkelberechnungen ausführen lassen. Damit entfernt man sich aber mehr und mehr von dem, was für die Kristallographie selbst wichtig ist, und ich verzichte aus diesem Grunde auf die Anführung weiterer Beispiele.

Für die Rechnung genügen vierstellige Logarithmen durchaus; auch wenn man die durch Messung gefundenen, bis zu 1^0 fehlerhaften Werte durch die Angaben der Lehrbücher ersetzt, braucht man keine genaueren Tafeln. Der Grundsatz, nicht mit mehr Stellen zu rechnen, als es die Beschaffenheit der gegebenen Stücke erfordert, ist ja endlich Gemeingut des mathematischen Unterrichts geworden — oder sollte es wenigstens geworden sein. Neben der Rechnung sollte auch womöglich eine sorgfältige Konstruktion der gesuchten Stücke ausgeführt werden. Wird sie groß genug und mit genauen Maßen ausgeführt, so kann sie jederzeit zur Kontrolle der Rechnungsergebnisse dienen; den Wert des kristallographischen Zeichnens für die Ausbildung der Raumanschauung brauche ich nicht weiter hervorzuheben, nachdem ich dieser Seite der Frage im Jahrgang 1916 von „Aus der Natur“ eine längere Abhandlung (Ueber die Darstellungsmittel der Kristallographie und ihre Anwendung im geometrischen Unterricht, S. 449, 512, 564, 617) gewidmet habe.

Der Fortschritt, den die wissenschaftliche Kristallographie durch Einführung des Reflexionsgoniometers an Stelle des einfachen Anlegegoniometers gemacht hat, betrifft nur die größere Zuverlässigkeit und Sicherheit der Messungen. Die „trigonometrische Methode“ der Berechnung der Flächen ist im wesentlichen dieselbe geblieben, und ist wenigstens in den Grundzügen durch die oben angeführten Beispiele dargestellt. Einen Fortschritt von prinzipieller Bedeutung brachte erst die zweikreisige Messung, welche die Lage der Flächen unmittelbar durch die Koordinaten der Flächennormalen darstellt, durch weitgehende Verwendung graphischer Methoden das Rechenwerk vereinfacht und die Feststellung bekannter Formen mit Hilfe von Tabellenwerken (vgl. Goldschmidt, Index der Kristallformen usw.) erleichtert. Die Kristallographie hat sich dadurch vollkommen der Astronomie angepaßt; denn wie diese die Oerter der Sterne an der Himmelskugel durch Länge und Breite oder andere sphärische Koordinaten bestimmt, so gibt der Kristallograph mit Hilfe der Winkel φ und ϱ die Durchstoßpunkte der Flächennormalen auf einer um den Kristall gedachten Einheitskugel an. Vielleicht findet sich Gelegenheit, auch über die schulmäßige Behandlung dieser neuen Methoden einmal in diesen Blättern zu reden.

Rationale Punkte und rationale Sehnen für Kegelschnitte.

Von Prof. Dr. E. Haentzschel (Berlin).

Gern pflegt man bei Aufgaben aus der analytischen Geometrie für die gegebenen Größen einfache Zahlenwerte, ganz besonders rationale, zu wählen; aber auch für das Ergebnis wird ein gleiches erstrebt. Im folgenden will ich nach dieser Richtung hin einige Formeln mitteilen, die man beim Stellen von Aufgaben sicherlich mit Erfolg wird verwenden können. Der Kürze wegen soll von einer rationalen Strecke gesprochen werden, wenn ihre Maßzahl eine rationale Zahl ist; ein rationaler Punkt hat Koordinaten mit rationalen Maßzahlen; endlich ist ein pythagoreischer Winkel ε ein solcher, der einem pythagoreischen Dreieck mit den Seiten $2pq$, $p^2 - q^2$, $p^2 + q^2$, wo p und q rationale Zahlenparameter sind, entnommen ist.

Man kann den folgenden Satz aussprechen:

Macht man einen rationalen Punkt P_1 auf dem Umfange eines Kegelschnitts zum Mittelpunkt eines Strahlenbüschels, von dem jeder Strahl die Hauptachse unter einem pythagoreischen Winkel ε schneidet, so verläßt jeder Strahl den Kegelschnitt in einem rationalen Punkte P_2, auch ist die Sehne $s = P_1 P_2$ rational, und ebenso sind es ihre beiden Abschnitte $P_1 E$ und $P_2 E$, in welche sie durch die Hauptachse geteilt wird.

Der Beweis ist elementar; ich gebe deshalb für jeden Kegelschnitt nur den Ausgangspunkt und das Ergebnis an.

A) Die Parabel

$$y^2 = 2px$$

enthält den Punkt P_1:

$$x_1 = \frac{p}{2}\lambda^2;\; y_1 = \pm p\lambda.$$

Von ihm geht der Strahl $P_1 - E - P_2$ aus:

$$y - y_1 = \operatorname{tg}\varepsilon\,(x - x_1).$$

Der Punkt P_2 hat die Koordinaten:

$$x_2 = \frac{p}{2}(\lambda \mp 2\operatorname{cotg}\varepsilon)^2,$$

$$y_2 = \mp p(\lambda \mp 2\operatorname{cotg}\varepsilon).$$

Die Sehne $P_1 P_2$ ist

$$s = \pm\frac{2p(\lambda \mp \operatorname{cotg}\varepsilon)}{\sin\varepsilon}.$$

Ist F der Brennpunkt, so ist das Dreieck $P_1 P_2 F$ ein heronisches; es hat rationale Seiten und rationalen Flächeninhalt, der gegeben ist durch:

$$\pm p^2 (\pm \lambda - \operatorname{cotg} \varepsilon) (-\lambda^2 \pm 2 \lambda \operatorname{cotg} \varepsilon + 1).$$

B) Die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kann entweder gegeben sein durch rationale Werte von

α) a und b; $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist irrational, oder durch rationale Werte von

β) a und e; $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ ist irrational.

α) Durch den Punkt P_1:

$$x_1 = \pm a \cdot \cos \varphi; \; y_1 = \pm b \cdot \sin \varphi,$$

wo φ ein pythagoreischer Winkel ist, geht der Strahl

$$y - y_1 = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot (x - x_1),$$

so daß

$$\frac{y_2 - y_1}{\sin \varepsilon} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \varepsilon} \; [= s]$$

ist. Diese Gleichung führt in Verbindung mit der Ellipsengleichung auf P_2:

$$x_2 = \pm \frac{a (a^2 \sin^2 \varepsilon \cos \varphi - a b \sin 2 \varepsilon \cdot \sin \varphi - b^2 \cos^2 \varepsilon \cos \varphi)}{a^2 \sin^2 \varepsilon + b^2 \cos^2 \varepsilon};$$

$$y_2 = \mp \frac{b (a^2 \sin^2 \varepsilon \sin \varphi + a b \sin 2 \varepsilon \cdot \cos \varphi - b^2 \cos^2 \varepsilon \sin \varphi)}{a^2 \sin^2 \varepsilon + b^2 \cos^2 \varepsilon}.$$

Es ist Sehne $P_1 P_2 =$

$$s = \pm \frac{2 a b (a \sin \varepsilon \sin \varphi + b \cos \varepsilon \cos \varphi)}{a^2 \sin^2 \varepsilon + b^2 \cos^2 \varepsilon}.$$

$$P_1 E = \pm \frac{y_1}{\sin \varepsilon}; \; P_2 E = \pm \frac{y_2}{\sin \varepsilon}.$$

β) Der rationale Punkt P_1 ist gegeben:

$$x_1 = \pm \frac{a (a^2 - e^2 - \lambda^2)}{a^2 - e^2 + \lambda^2};$$

$$y_1 = \pm \frac{2 \lambda (a^2 - e^2)}{a^2 - e^2 + \lambda^2}.$$

Die Koordinaten des Punktes P_2 sind:

$$x_2 = + \frac{a[(a^2 - e^2)^2 - (a^2 - e^2)(a^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon - 4 a \lambda \operatorname{tg} \varepsilon + \lambda^2) + a^2 \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon]}{(a^2 - e^2 + \lambda^2)(a^2 - e^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon)};$$

$$y_2 = + \frac{2 (a^2 - e^2)(a \operatorname{tg} \varepsilon - \lambda)(a^2 - e^2 + a \lambda \operatorname{tg} \varepsilon)}{(a^2 - e^2 + \lambda^2)(a^2 - e^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon)}.$$

Es ist die Sehne $P_1 P_2 =$

$$s = \mp \frac{2 a (a^2 - e^2)(a^2 - e^2 + 2 a \lambda \operatorname{tg} \varepsilon - \lambda^2)}{(a^2 - e^2 + \lambda^2)(a^2 - e^2 + a^2 \operatorname{tg} \varepsilon) \cos \varepsilon};$$

ihre Abschnitte sind unter α) angegeben. Auch die vier Brennstrahlen $P_1 F_1$, $P_1 F_2$, $P_2 F_1$, $P_2 F_2$ sind rational; z. B. ist

$$P_1 F_1 = \frac{(a + e)[\lambda^2 + (a - e)^2]}{a^2 - e^2 + \lambda^2},$$

$$P_1 F_2 = \frac{(a - e)[\lambda^2 + (a + e)^2]}{a^2 - e^2 + \lambda^2}.$$

Der Brennpunktsabstand $F_1 F_2$ wird durch E in zwei rationale Abschnitte zerlegt:

$$F_1 E = \frac{(a + e)\left[\lambda \pm (a - e) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}\right]\left[\lambda \mp (a - e) \operatorname{cotg} \frac{\varepsilon}{2}\right]}{a^2 - e^2 + \lambda^2};$$

$$F_2 E = \frac{(a - e)\left[\lambda \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \pm (a + e)\right]\left[\lambda \operatorname{cotg} \frac{\varepsilon}{2} \mp (a + e)\right]}{a^2 - e^2 + \lambda^2}.$$

Das Viereck $P_1 F_1 P_2 F_2$ hat demnach rationale Seiten und rationale Diagonalen, die sich gegenseitig in rationale Abschnitte zerlegen; ein solches Viereck heißt nach E. E. Kummer ein rationales Viereck; sein Inhalt ist

$$\triangle = \pm F_1 F_2 \cdot P_1 P_2 \cdot \sin \varepsilon = \pm 2 e \cdot s \cdot \sin \varepsilon,$$

also hier ebenfalls rational.

γ) Ist die Rationalität der Koordinaten von P_1 und P_2 und die von $\operatorname{tg} \varepsilon$ notwendig, um eine rationale Sehne s zu erhalten? Diese Frage muß verneint werden. Es dürfen y_1, y_2 und $\sin \varepsilon$ auch irrational sein, doch müssen sie dieselbe Irrationalität besitzen. Insofern sind die Resultate in β) ein besonderer Fall eines von E. E. Kummer (Ueber die Vierecke, deren Seiten und Diagonalen rational sind. Crelle's Journal f. Mathem., 37, S. 18; Berlin 1848) gefundenen Satzes, der in unserer Bezeichnung lautet: Es ist

$$P_1 F_2 = \frac{\xi^2 + k^2}{2 \xi}; \; P_1 F_1 = \frac{\eta^2 + k^2}{2 \eta}; \; F_2 E = \frac{(\xi + c)^2 - 1}{2 \xi};$$

$$F_1 E = \frac{(\eta - c)^2 - 1}{2 \eta}; \; P_1 E = 1 = \text{Längeneinheit};$$

$$P_2 E = \frac{(\xi \eta - 2 c \xi + k^2)(\xi \eta + 2 c \eta + k^2)}{(\xi \eta + (1 + c)^2)(\xi \eta + (1 - c)^2)};$$

$$P_2 F_1 = \frac{\eta^2 (\xi \eta - 2 c \xi + k^2)^2 + k^2 (\xi \eta + 2 c \eta + k^2)^2}{2 \eta (\xi \eta + (1 + c)^2)(\xi \eta + (1 - c)^2)};$$

$$P_2 F_2 = \frac{\xi^2 (\xi \eta + 2 c \eta + k^2)^2 + k^2 (\xi \eta - 2 c \xi + k^2)^2}{2 \xi (\xi \eta + (1 + c)^2)(\xi \eta + (1 - c)^2)}.$$

Hierin sind ξ, η und $\cos \varepsilon = c$ rationale Zahlenparameter, während $k = \sqrt{1 - c^2} = \sin \varepsilon$ im allgemeinen irrational ist. Die Tatsache, daß hier

$$P_1 F_1 + P_1 F_2 = P_2 F_1 + P_2 F_2$$

ist, die Kummer, wie es scheint, entgangen ist, weist diesem Satze an dieser Stelle seinen Platz an. Die Forderung der Rationalität einer Ellipsensehne $P_1 P_2$ ist demnach durchaus vereinbar mit der Irrationalität der Ordinaten von P_1 und P_2 und derjenigen von $\sin \varepsilon$, denn es ist:

$$s = \frac{x_2 - x_1}{\cos \varepsilon} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \varepsilon}.$$

C) Für den Kreis

$$x^2 + y^2 = a^2$$

gehen die Formeln von B) α) über in:

$$x_1 = \pm a \cos \varphi; \; y_1 = \pm a \cdot \sin \varphi;$$

$$x_2 = \mp a \cos (2 \varepsilon - \varphi); \; y_2 = \mp a \sin (2 \varepsilon - \varphi).$$

$$P_1 P_2 = s = 2 a \cos (\varepsilon - \varphi).$$

Die Formeln von B) β) sind im wesentlichen dieselben. Die Bemerkung in B) γ) läßt die Frage entstehen nach dem allgemeinsten Ausdruck für die Seiten und die Diagonalen eines einem Kreise einzubeschreibenden Vierecks. Kummer hat sie am oben angegebenen Orte beantwortet. Es ist:

$$AB = \frac{\xi^2 + k^2}{2 \xi}; \; BC = \frac{\eta^2 + k^2}{2 \eta}; \; CD = \frac{(\xi^2 + k^2)((\eta - c)^2 - 1)}{4 \xi \eta};$$

$$DA = \frac{(\eta^2 + k^2)((\xi + c)^2 - 1)}{4 \xi \eta}; \; AE = \frac{(\xi + c)^2 - 1}{2 \xi}; \; BE = 1;$$

$$CE = \frac{(\eta - c)^2 - 1}{2 \eta}; \; DE = \frac{((\xi + c)^2 - 1)((\eta - c)^2 - 1)}{4 \xi \eta}.$$

Soll auch der Inhalt des Vierecks rational werden, so setze man

$$c = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}; \; k = \frac{2 \lambda}{\lambda^2 + 1}.$$

Für den besonderen Fall, in welchem eine Seite oder eine Diagonale des Sehnenvierecks zugleich der Durchmesser des Kreises ist, habe ich zwei Typen von Formeln entwickelt in der Studie: Eine von Newton gestellte Aufgabe über Sehnenvierecke. (Zeitschr. für math. u. naturw. Unterricht. 46. Jahrgang. S. 190–194. Leipzig 1915, Teubner.)

Wünscht man bizentrische Kreisvierecke oder Sehnentangentenvierecke zu besitzen, so habe ich Formeln für diese entwickelt in: Ueber Sehnentangentenvierecke mit rationalen Maßzahlen der Seiten, der Diagonalen, der beiden Kreisradien und des Flächeninhalts, und über die durch die Ankumsche Methode aus ihnen hergeleiteten rationalen Tetraeder. (Sitzungsber. d. Berliner Math. Gesellsch. 14. Jahrgang 1915. S. 85—94.)

D) Die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kann entweder gegeben sein durch rationale Werte von

α) a und b; dann ist $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ irrational, oder durch rationale Werte von

β) a und e; es ist $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ irrational.

α) Durch den Punkt P_1:

$$x_1 = \pm \frac{a}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right);\ y_1 = \pm \frac{b}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

geht der Strahl

$$y - y_1 = \operatorname{tg} \varepsilon\, (x - x_1).$$

Diese Gleichung führt in Verbindung mit der Hyperbelgleichung auf P_2:

$$x_2 = \pm \frac{a\left\{u^2 (a \operatorname{tg} \varepsilon - b)^2 + (a \operatorname{tg} \varepsilon + b)^2\right\}}{2\, u\, (a^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon - b^2)};$$

$$y_2 = \mp \frac{b\left\{u^2 (a \operatorname{tg} \varepsilon - b)^2 - (a \operatorname{tg} \varepsilon + b)^2\right\}}{2\, u\, (a^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon - b^2)}.$$

Es ist Sehne $P_1 P_2 =$

$$s = \mp \frac{a\, b\left\{u^2 (a \operatorname{tg} \varepsilon - b) - (a \operatorname{tg} \varepsilon + b)\right\}}{u \cos \varepsilon\, (a^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon - b^2)}.$$

β) Der rationale Punkt P_1 ist gegeben:

$$x_1 = \pm\, a \frac{(e^2 - a^2 + \lambda^2)}{e^2 - a^2 - \lambda^2};\ y_1 = \pm \frac{2 \lambda\, (e^2 - a^2)}{e^2 - a^2 - \lambda^2}.$$

Diese Formeln entstehen aus den entsprechenden in α), indem man dort

$$u = \frac{b + \lambda}{b - \lambda}$$

setzt.

Die Koordinaten des Punktes P_2 sind:

$$x_2 = \pm \frac{a\left[(e^2 - a^2 - \lambda\, a \operatorname{tg} \varepsilon)^2 + (e^2 - a^2)(a \operatorname{tg} \varepsilon - \lambda)^2\right]}{(e^2 - a^2 - \lambda^2)(a^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon - e^2 + a^2)};$$

$$y_2 = \pm \frac{2\, (e^2 - a^2)(a \operatorname{tg} \varepsilon - \lambda)(e^2 - a^2 - \lambda\, a \operatorname{tg} \varepsilon)}{(e^2 - a^2 - \lambda^2)(a^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon - e^2 + a^2)}.$$

Es ist die Sehne $P_1 P_2 =$

$$s = \pm \frac{2\, a\, (e^2 - a^2)(e^2 - a^2 - 2 \lambda\, a \operatorname{tg} \varepsilon + \lambda^2)}{\cos \varepsilon\, (e^2 - a^2 + \lambda^2)(a^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon - e^2 + a^2)};$$

ihre Abschnitte sind:

$$P_1 E = \pm \frac{y_1}{\sin \varepsilon} \text{ und } P_2 E = \pm \frac{y_2}{\sin \varepsilon},$$ also rational.

Auch die vier Brennstrahlen $P_1 F_1$, $P_1 F_2$, $P_2 F_1$ und $P_2 F_2$ sind rational auf Grund der Formel: $\frac{ex}{a} \pm a$; der Brennpunktsabstand $F_1 F_2$ wird durch E ebenfalls in zwei rationale Abschnitte zerlegt. Das Viereck $P_1 F_1 P_2 F_2$ ist demnach ein rationales oder Kummersches Viereck.

E) In B) β) und in D) β) haben wir erkannt, daß es Kummersche Vierecke gibt, deren eine Diagonale der Brennpunktsabstand $F_1 F_2$ und deren andere Diagonale die von uns gesuchte rationale Sehne $P_1 P_2 = s$ ist, wo P_1 und P_2 rationale Punkte sind; in B) γ) sahen wir, daß diese Eigenschaft aufgegeben werden kann, ohne die Rationalität von $P_1 P_2$ zu vernichten. Gerade diese Seite unserer Aufgabe gestattet noch eine Vertiefung. Wenn das Viereck $P_1 F_1 P_2 F_2$ ein Parallelogramm ist, so können F_1 und F_2 sowohl die Brennpunkte einer Ellipse sein, da $P_1 F_1 + P_1 F_2 = P_2 F_1 + P_2 F_2$ ist, als auch die einer Hyperbel, da $P_1 F_1 - P_1 F_2 = P_2 F_2 - P_2 F_1$ ist. Ein Kummersches Viereck, das im besonderen ein rationales Parallelogramm, oder, wenn auch sein Inhalt rational, ein Heronisches Parallelogramm ist, kann deshalb in doppelter Hinsicht für die Lösung der Aufgabe, Kegelschnitte mit rationalen Sehnen anzugeben, benutzt werden. Die notwendigen Formeln hier niederzuschreiben, würde zu weit führen, deshalb verweise ich auf meine Aufsätze, wo sich auch die Literatur angegeben findet: Theorie der Heronischen Parallelogramme (Sitzungsber. d. Berlin. Math. Gesellsch. 1914); Das Rationale in der algebraischen Geometrie (Unterrichtsbl. 1915); Ueber die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2 + u^2$ (Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. 1916, S. 132—150).

Die Polaren in bezug auf das Dreiseit.

Von Oberlehrer Dr. A. Krusche (Lüben i. Schl.)

Ueber die Polaren einer Kurve n. Ordnung bestehen bekanntlich folgende Sätze:

1. Liegt ein Punkt Q auf der r. Polaren eines Punktes P, so geht seine $(n - r)$. Polare durch P.

2. Ein r-facher Punkt der Grundkurve ist $(r - s)$-fach für die s. Polare eines beliebigen Pols.

Im folgenden soll das Dreieck als Kurve dritter Ordnung aufgefaßt werden, so daß man es am besten als Dreiseit bezeichnen dürfte. Hierbei kommen nur zwei Polaren in Betracht: die erste Polare Π_1 ist ein Kegelschnitt, die zweite Polare Π_2 eine Gerade. Da jede Ecke einen Doppelpunkt darstellt, so gehört jeder dieser Punkte auch der ersten Polaren an: alle Π_1 gehen durch die Ecken des Dreiseits. Um eine Π_1 festzulegen, braucht man also nur noch zwei Punkte derselben zu bestimmen. Hierfür eignen sich besonders die Schnittpunkte der Π_1 mit einer Geraden durch Pol und Ecke.

I. Der Pol O liegt auf einer Seite.

O sei auf AC gelegen. Man legt durch O eine beliebige Gerade und sucht den Schnittpunkt P der ersten Polaren Π_1 mit dieser Geraden. Die Gerade durch O schneidet die beiden anderen Seiten in den Punkten D und E (Fig. 1). Zwischen den Punkten O, D, E und P besteht dann die Beziehung:

$$OO \cdot PD \cdot PE + OD \cdot PE \cdot PO + OE \cdot PD \cdot PO = 0$$

$$PO \cdot (OD \cdot PE + OE \cdot PD) = 0.^*$$

---

* Die Polare zu einem Punkte O in bezug auf einen Kegelschnitt findet man, indem man auf allen Geraden durch O zu O und den Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt die vierten harmonischen Punkte bestimmt. Die Gesamtheit dieser Punkte bildet die Polare zu O in bezug auf den Kegelschnitt. Zwei Geraden genügen bereits zur Bestimmung der Polare. Wenn eine der Geraden des Büschels O den Kegelschnitt in den Punkten A und B trifft und P ihr Schnittpunkt mit der gesuchten Polare ist, so besteht die Beziehung

$$\frac{OA}{OB} : \frac{PA}{PB} = -1 \quad \text{oder} \quad \frac{OA}{PA} + \frac{OB}{PB} = 0.$$

Handelt es sich um eine Kurve dritter Ordnung, so ergeben sich auf jeder Geraden durch den Pol O drei Schnittpunkte A, B, C mit der Kurve. In diesem Falle nimmt die Beziehung die Gestalt an

$$\frac{OA}{PA} + \frac{OB}{PB} + \frac{OC}{PC} = 0$$

oder $OA \cdot PB \cdot PC + OB \cdot PA \cdot PC + OC \cdot PA \cdot PB = 0.$

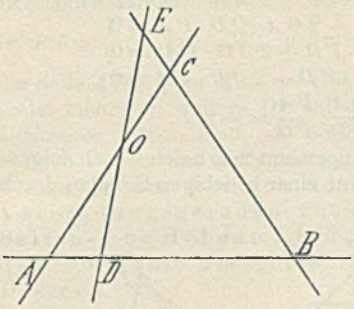


Fig. 1.

Daraus folgt $PO = 0$, d. h. die Π_1 geht durch den Punkt O. Da sie auch durch A und C geht, so muß AC zur ersten Polare gehören; der Rest muß ebenfalls eine Gerade sein. Diese ergibt sich aus:

$$OD \cdot PE + OE \cdot PD = 0.$$

$$\frac{OD}{OE} : \frac{PD}{PE} = -1,$$

d. h. DE wird durch die Punkte O und P harmonisch geteilt. Alle Punkte der zu O gehörigen Π_1 ergeben sich, wenn man auf allen Strahlen durch O diese vierten harmonischen Punkte herstellt. Wenn sich nun die Gerade um O dreht, so bleibt das Büschel $B(EDOP)$ harmonisch, und da die drei Strahlen BE, BD und BO unverändert bleiben, so muß auch der Strahl BP seine Lage beibehalten: P bewegt sich auf einer Geraden durch B.

Die zu einem Punkte O auf AC gehörige Π_1 besteht aus der Seite AC und dem Strahle BP des harmonischen Strahlenbüschels $B(CAOP)$.

Fällt O mit C zusammen, so deckt sich der Strahl BO mit BC. Mithin rückt BP nach BC, und die Π_1 setzt sich nunmehr aus den Geraden AC und BC zusammen. Liegt O in der Mitte von AC, so wird BP zur Parallelen durch B zu AC.

II. Der Pol O hat eine beliebige Lage.

Es soll der Schnittpunkt der Π_1 mit der Ecktransversalen OA bestimmt werden (Fig. 2). Es gilt die Beziehung:

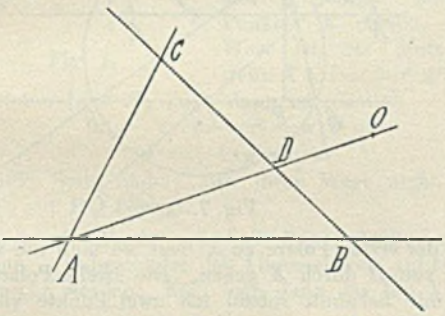


Fig. 2.

$$OA \cdot PA \cdot PD + OA \cdot PA \cdot PD + OD \cdot PA^2 = 0$$
$$2\,OA \cdot PA \cdot PD + OD \cdot PA^2 = 0$$
$$PA \cdot (2\,OA \cdot PD + OD \cdot PA) = 0.$$

$PA = 0$ sagt aus, daß die Π_1 durch A geht. Ein zweiter Schnittpunkt ergibt sich aus

$$2\,OA \cdot PD + OD \cdot PA = 0 \text{ oder}$$

(1) $$\frac{OA}{OD} : \frac{PA}{PD} = -\frac{1}{2}.$$

Die Zeichnung dieses Punktes P gestaltet sich folgendermaßen (Fig. 3):

Man zieht durch O eine beliebige Gerade, auf der man nach verschiedenen Seiten die Strecken $OE = 1$ und $OF = 2$ Längeneinheiten abträgt. EA und FD schneiden sich im Punkte G. Die Parallele durch G zu EF trifft AD in dem gesuchten Punkte P.

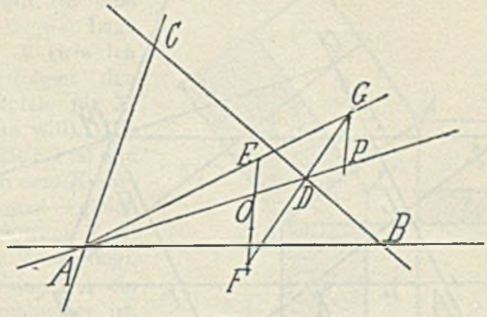


Fig. 3.

[Beweis: $\frac{DP}{DO} = \frac{PG}{FO}$; $\frac{AP}{AO} = \frac{PG}{EO}$;

$$\frac{DP}{DO} : \frac{AP}{AO} = \frac{AO}{DO} : \frac{AP}{DP} = \frac{EO}{FO} = \frac{1}{2}\Big].$$

Das Doppelverhältnis (1) lautet in anderer Form:

$$\frac{OA}{OD} = -\frac{PA}{2\,PD}.$$

Hieraus ergibt sich für die Lage des Punktes P folgendes:

1. Liegt O in der Mitte von AD, so liegt P auf der Verlängerung von $\overrightarrow{AD}$ um AD.
2. Liegt O näher an A, so ist $PA < 2\,PD$, d. h. P rückt aus der doppelten Entfernung nach dem Unendlichen zu und erreicht das Unendliche, wenn $OA = \frac{1}{2}\,DO$ ist. Wird $OA < \frac{1}{2}\,DO$, so nähert sich P dem Punkte A auf der Verlängerung von $\overrightarrow{DA}$
3. Liegt O näher an D, so ist $PA > 2\,PD$, d. h. P rückt aus der doppelten Entfernung auf D zu.
4. Liegt O auf der Verlängerung von $\overrightarrow{AD}$, so ist $PA > 2\,PD$, d. h. P liegt auf der Strecke KD, wo K die Strecke AD im Verhältnis $\frac{KA}{KD} = \frac{2}{1}$ teilt.
5. Rückt O in das Unendliche, so wird $PA = 2\,PD$, d. h. P fällt in den Punkt K.
6. Bewegt sich O auf der Verlängerung von $\overrightarrow{DA}$, so ist $PA < 2\,PD$, d. h. P bewegt sich auf A zu.

Aus diesen Lagenbeziehungen folgt, daß eine Ellipse als Π_1 nur auftreten kann, wenn der Pol O innerhalb eines bestimmten Gebietes im Dreiseit liegt. Man erhält die Umgrenzung desselben, wenn man zu jeder Seite die Parallele zieht, die ein Drittel dieser Seitenlänge beträgt (Fig. 4). Solange sich der Pol innerhalb des Sechsecks $FGHIKL$ befindet, ergibt sich als erste Polare eine Ellipse. Für jeden Punkt außerhalb des Sechsecks entsteht eine Hyperbel. Liegt insbesondere O im Schnittpunkte M von FG und IH, so geht sowohl BM als auch CM nach einem unendlich fernen Punkte der Π_1, d. h. beide Geraden sind den Asymptoten parallel. Kommt O innerhalb des Dreiseits auf eine Parallele zu liegen, so erhält man als erste Polare eine Parabel.

Liegt nun im besonderen der Pol auf der Kurve selbst, so wird O zu einem Schnittpunkt, und die Gleichung heißt dann:

$$OO \cdot PD \cdot PE + OD \cdot PE \cdot PO + OE \cdot PD \cdot PO = 0.$$

Da $OO = 0$ ist, so erhält man:

$$OD \cdot PE \cdot PO + OE \cdot PD \cdot PO = 0$$
$$PO \cdot (OD \cdot PE + OE \cdot PD) = 0.$$

III. Die erste Polare des Schwerpunkts.

Auf den ersten Blick erscheint der Schwerpunkt vor allen andern Punkten der Ebene bevorzugt, inso-

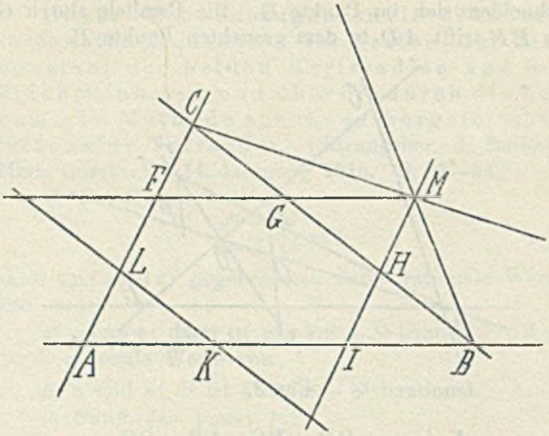


Fig. 4.

fern, als er durch seine Lage sich dem der ersten Polare eigentümlichen Doppelverhältnis am leichtesten anpaßt. In der Beziehung $\frac{OA}{OD} : \frac{PA}{PD} = -\frac{1}{2}$ nimmt $\frac{OA}{OD}$ für den Schwerpunkt den Wert -2 an, so daß $\frac{PA}{PD} = 4$ ist. Mithin liegt P auf der Verlängerung von $\overrightarrow{AD}$, und O halbiert die Strecke AP. Die Fig. 3 vereinfacht sich in diesem Falle bedeutend (Fig. 5). Man benutzt als

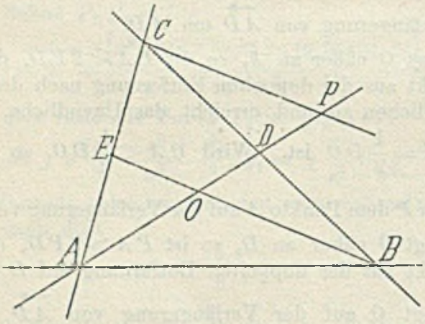


Fig. 5.

beliebige Gerade durch O eine der Seitenhalbierenden, z. B. BO; dann ergibt sich P als Schnittpunkt der Geraden AO mit der Parallelen durch C zu BO.

Verlängert man jede Seitenhalbierende eines Dreiecks um das von Schwerpunkt und Seite begrenzte Stück, so liegen die drei Endpunkte auf einer Ellipse, der ersten Polaren zum Schwerpunkt in bezug auf das Dreieck.

Während im allgemeinen der Mittelpunkt der H_1 nicht mit dem Pole identisch ist, ist der Schwerpunkt zugleich Mittelpunkt seiner ersten Polare. Infolgedessen rückt seine zweite Polare, d. h. seine Polare in bezug auf seine erste Polare ins Unendliche.

Die zweite Polare des Schwerpunkts in bezug auf das Dreiseit ist die unendlich ferne Gerade.

IV. Die zweite Polare zu einem beliebigen Pole.

Die Punkte, in denen die zweite Polare H_2 eines Pols O eine durch O gehende Gerade schneidet, werden gefunden mit Hilfe der Beziehung:

$$OA \cdot OA \cdot PD + OA \cdot OD \cdot PA + OA \cdot OD \cdot PA = 0$$
$$OA^2 \cdot PD + 2\,OA \cdot OD \cdot PA = 0$$
$$OA \cdot (OA \cdot PD + 2\,OD \cdot PA) = 0$$
$$OA \cdot PD + 2\,OD \cdot PA = 0$$
$$\frac{OA}{OD} : \frac{PA}{PD} = -2.$$

Den Schnittpunkt gewinnt man zeichnerisch folgendermaßen (Fig. 6): Auf einer beliebigen Geraden durch

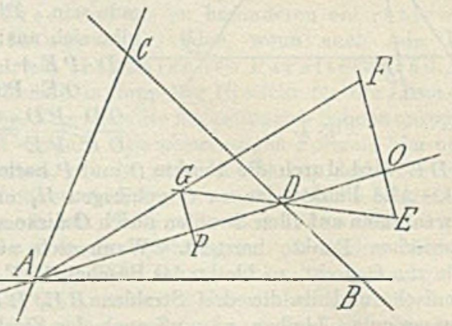


Fig. 6.

O trägt man nach verschiedenen Seiten die Strecken $OE = 1$ und $OF = 2$ Längeneinheiten ab. Die Geraden AF und DE schneiden sich im Punkte G, und die Parallele durch G trifft die Gerade AD im Punkte P.

V. Der Pol zu dem Umkreise des Dreiecks (Fig. 7).

Um den Pol X zu dem Umkreise des Dreiecks festzustellen, betrachte man den Punkt H, in dem die Parallele durch C zu AB den Umkreis schneidet. Da

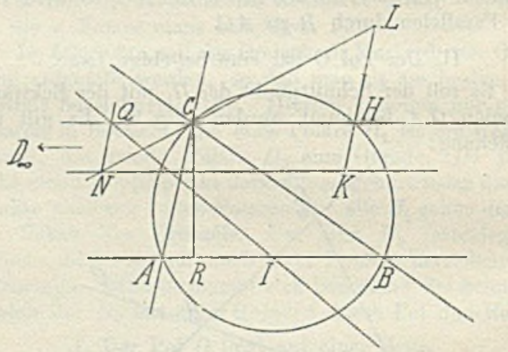


Fig. 7.

H auf der ersten Polare zu X liegt, so muß die zweite Polare von H durch X gehen. Die zweite Polare von H ist mir bekannt, sobald ich zwei Punkte von ihr kenne. Als solche will ich mir die Schnittpunkte der H_2 mit den Geraden AB und HC herstellen. Weil H auf der H_1 zu dem Mittelpunkte I der Strecke AB liegt, so geht die H_2 von H durch I. Nun ziehe ich durch H die Parallele zu AC und trage auf ihr nach entgegengesetzten Richtungen die Strecken $HK = 1$ und $HL = 2$ Längeneinheiten ab. Die Gerade LC trifft die Parallele durch K zu HC im Punkte N. Die Parallele durch N zu KL schneidet HC in dem Punkte Q der H_2.

[Beweis: $\frac{HC}{QC} = \frac{HL}{QN}$; $\frac{HD}{QD} = 1$;

$$\frac{HC}{QC} : \frac{HD}{QD} = \frac{HL}{QN} = 2; \quad \frac{HC}{HD} : \frac{QC}{QD} = 2 \Big].$$

Somit ist die Gerade QI die H_2 zum Punkte H. Man kann die Lage dieser Geraden noch in anderer Weise definieren. Es ist nämlich $QC = \frac{1}{2}\,CH = \frac{1}{2}\,(p - q)$.

Bezeichnet R den Fußpunkt der Höhe von C aus, so ist $RI = \frac{1}{2}(p-q)$. Mithin verbindet QI die Mitte der Seite AB mit der Mitte der Höhe CR. Entsprechend findet man zwei weitere H_2, auf denen der Pol X des Umkreises liegen muß, als Verbindungsgeraden der übrigen Seiten- und Höhenmitten.

In jedem Dreieck schneiden sich die Verbindungsgeraden zusammengehöriger Seiten- und Höhenmitten in einem Punkte, dem Pole zum Umkreise in bezug auf das Dreieck.

Verallgemeinerungen des Pythagoreischen Lehrsatzes und Verwandtes.

Von Professor Dr. Oskar Herrmann
(Leipzig-Marienbrunn).

In den folgenden Ausführungen werde ich die beiden von mir in Nr. 4, Jahrg. 1917, d. Zeitschr. unter dem Titel „Aus dem Gebiete des Pythagoreischen Lehrsatzes" entwickelten Sätze weiter verallgemeinern. Dabei wird sich ergeben, daß sie in engerer Beziehung zu einander stehen, als dies damals zum Ausdruck kam.

I. Verallgemeinerung des Pythagoreischen Lehrsatzes. Der Punkt A habe die rechtwinkeligen Koordinaten a und b und den Abstand c vom Nullpunkte O des Koordinatensystems. Dann ist natürlich (Fig. 1)

$$a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c. \qquad (1a)$$

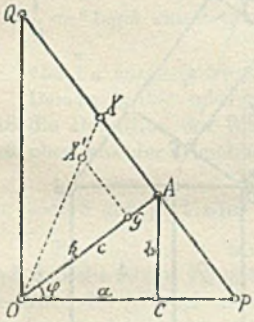


Fig. 1.

Es fragt sich nun, welchen Wert die linke Seite dieser Gleichung erhält, wenn man die zweiten Faktoren a und b durch die Koordinaten x und y eines beliebigen Punktes X ersetzt. Dieser Wert ist am einfachsten, wenn X auf dem in A auf OA errichteten Lote PQ liegt, dann ist nämlich

$$(y-b):(a-x) = a:b \text{ oder}$$
$$a \cdot x + b \cdot y = c \cdot c. \qquad (2a)$$

Die linke Seite ändert also ihren Wert nicht, wenn X sich auf PQ bewegt.

Liegt der Punkt außerhalb PQ (er heiße dann X'), so kann er unbeschadet der Allgemeinheit auf OX angenommen werden. Fällt man dann das Lot $X'G$ auf OA und bezeichnet man OG mit k, so ist $x = x' \cdot \frac{c}{k}$, $y = y' \cdot \frac{c}{k}$ und 2a geht über in

$$ax' + by' = c \cdot k. \qquad (3a)$$

Diese Gleichung gibt die allgemeine Lösung der oben gestellten Frage.

Der hiermit gefundene Satz wird in Fig. 2 so dargestellt, daß die Produkte $a \cdot x'$ usw. als Flächen gedeutet sind, und kann folgendermaßen ausgesprochen werden: Zieht man durch einen beliebigen Punkt Lote zu den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks, so wird jedes der drei Quadrate über den Seiten in zwei Rechtecke R und S so geteilt, daß

$$R_1 + R_2 = R_3 \text{ und } S_1 + S_2 = S_3.$$

In der Figur ist der Punkt so gewählt, daß alle Rechtecke positiv zu rechnen sind.

Der Uebergang über die Formel 2a ist zum Beweise von 3a nicht nötig, wenn X' auf OA liegt. Dann sind die drei Rechtecke R und ebenso die Rechtecke S einander ähnlich.

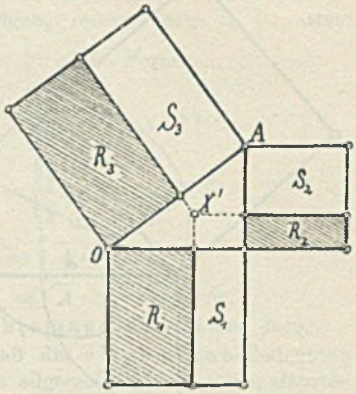


Fig. 2.

Die Formel 3a gilt für eine beliebige Lage von X (wie ich im folgen den Beispiele für X' sagen will). Die Größe $c \cdot k$ ist nun nach dem Kathetensatze gleich OX^2, wenn X auf dem Kreise liegt, für den OA ein Durchmesser ist. Dann ist $OX^2 = ax + by$, und dies gibt eine neue Verallgemeinerung des Pythagoreischen Lehrsatzes. Fällt nämlich X bei seiner Wanderung auf dem Kreise mit A zusammen, so geht die genannte Gleichung in die Gleichung 1a über. Ich habe den Satz auf doppelte Weise durch Zeichnung dargestellt. In Fig. 3a sind

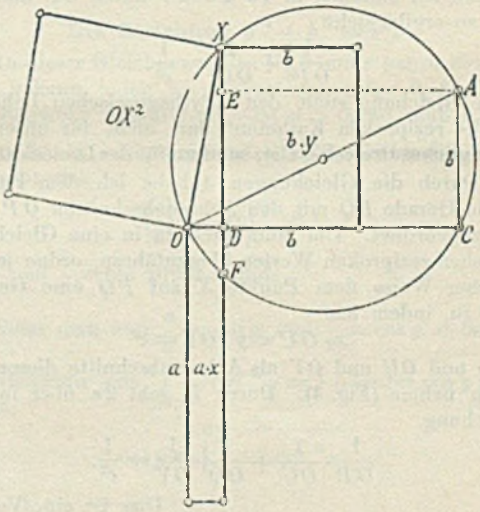


Fig. 3a.

das Quadrat und die beiden Rechtecke über den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks konstruiert, während sie in Fig. 3b über den drei Strecken des gebrochenen Linienzugs $XOCA$ errichtet sind, der sich erst schließt, wenn X auf A fällt.

Der Beweis des Satzes ist oben mit Hilfe der Formel 3a geführt worden. Er folgt aber auch ohne weiteres aus der Gleichung $x^2 + y^2 = ax + by$ des Kreises, auf dem X wandert, und kann schließlich auch mit Hilfe des Sehnensatzes in folgender Weise geführt werden:

$$OD \cdot DC = FD \cdot DX = EX \cdot DX$$
$$x \cdot (a-x) = (y-b) \cdot y$$
$$ax + by = x^2 + y^2 = OX^2.$$

Eine weitere Verallgemeinerung, die fast ebenso einfach ist, ergibt sich, wenn X auf dem Kreise $x^2 + y^2 = a^2 + by$ oder auf dem Gegenstück dazu

$x^2 + y^2 = ax + b^2$ wandert, was ich aber nicht weiter ausführen will. Auch hier ist ein Beweis mit Hilfe des Sehnensatzes möglich.

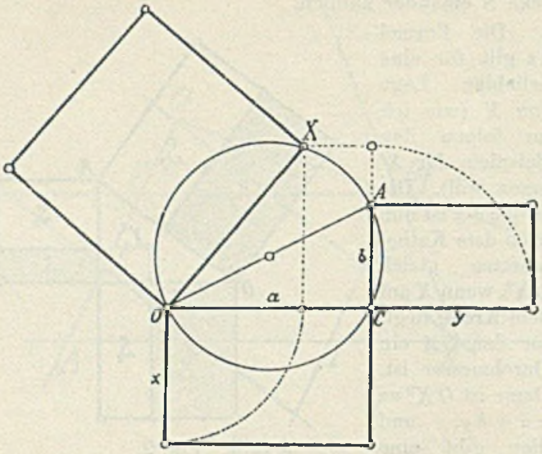


Fig. 3 b.

II. Der Satz für die reziproken Werte der Katheten und seine Verallgemeinerungen. Nach der Bezeichnung in Fig. 1 ist

$$a \cdot OP = b \cdot OQ = c^2. \qquad (4)$$

Drücke ich hiernach in 1a a und b durch OP und OQ aus, so ergibt sich

$$\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} = \frac{1}{c^2}. \qquad (1\text{b})$$

Diese Gleichung stellt den „Pythagoreischen Lehrsatz für die reziproken Katheten“ dar, nicht für unser ursprüngliches Dreieck OCA, sondern für das Dreieck OPQ.

Durch die Gleichungen 4 habe ich dem Punkte A die Gerade PQ mit den Achsenabschnitten OP und OQ zugeordnet. Um nun auch 2a in eine Gleichung zwischen reziproken Werten überzuführen, ordne ich in gleicher Weise dem Punkte X auf PQ eine Gerade UV zu, indem ich

$$x \cdot OU = y \cdot OV = c^2 \qquad (5)$$

setze und OU und OV als Achsenabschnitte dieser Geraden nehme (Fig. 4). Durch 5 geht 2a über in die Gleichung

$$\frac{1}{OP} \cdot \frac{1}{OU} + \frac{1}{OQ} \cdot \frac{1}{OV} = \frac{1}{c^2}. \qquad (2\text{b})$$

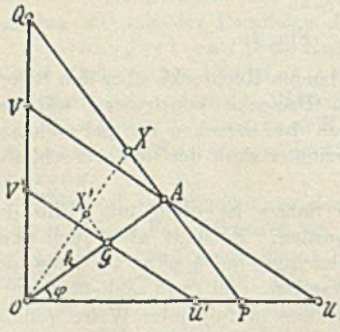


Fig. 4.

Dies ist eine Verallgemeinerung von 1b. Wesentlich ist dabei, daß UV durch A geht, wovon man sich durch Einsetzen der Koordinaten von A in die Gleichung $\frac{\xi}{OU} + \frac{\eta}{OV} = 1$ der Geraden UV überzeugt. Man erhält nämlich dann die Gleichung 2a.. Eine einfachere Konstruktion von UV, als dies mit Hilfe von 5 geschehen kann, ergibt sich, wenn man außerdem beachtet, daß $UV \perp OX$.

Die Verallgemeinerung von 2b endlich in demselben Sinne, wie 3a eine solche von 2a ist, finde ich, indem ich dem Punkte X' eine Gerade $U'V'$ mit Hilfe der Gleichungen

$$x' \cdot OU' = y' \cdot OV' = k^2 \qquad (6)$$

zuordne, wobei k dieselbe Bedeutung wie oben hat. Durch Einsetzen ergibt sich

$$\frac{1}{OP} \cdot \frac{1}{OU'} + \frac{1}{OQ} \cdot \frac{1}{OV'} = \frac{1}{c \cdot k}. \qquad (3\text{b})$$

Diese Gleichung gilt für zwei ganz beliebige gerade Linien PQ und $U'V'$. $OA = c$ ist das Lot vom Nullpunkte auf die eine Gerade, und k bedeutet die Länge OG, wenn G der Schnittpunkt der andern Geraden mit diesem Lote ist. Daß $U'V'$ durch G hindurchgeht, ergibt sich aus der Gleichung $\xi x' + \eta y' = k^2$ dieser Geraden. Auch sieht man leicht, daß $U'V' \perp OX'$.

Die Gleichung 3b kann auch aus 2b gewonnen werden. Ist $U'V'$ eine beliebige Gerade, so ziehe man durch A die Parallele UV dazu. Dann ist $OU = OU' \cdot \frac{c}{k}$ und $OV = OV' \cdot \frac{c}{k}$. Setzt man diese Werte in 2b ein, so erhält man 3b.

Deutet man die Produkte von Strecken wieder als Flächen, so ergibt sich ein Satz, der durch Fig. 5 zur

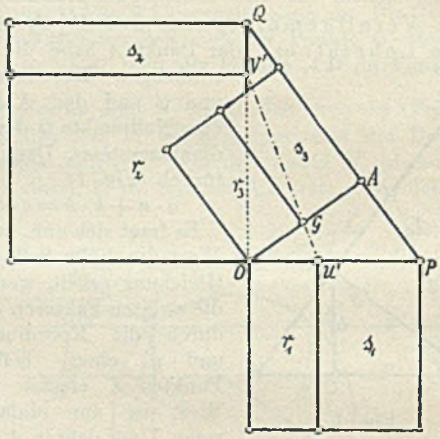


Fig. 5.

Anschauung gebracht ist. In dem rechtwinkeligen Dreieck QOP ist eine beliebige Transversale $U'V'$ gelegt, und durch die Schnittpunkte dieser Transversalen mit den Katheten und mit der Höhe auf die Hypotenuse sind Lote auf diesen Strecken errichtet: dadurch werden von den Quadraten über diesen drei Strecken Rechtecke r_1, r_2, r_3 abgeschnitten, für die die Gleichung

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_3}$$

gilt.

Für die Ergänzungsrechtecke s_1, s_2, s_3 gibt es bei der allgemeinen Lage keine so einfache Beziehung. Wenn aber die Transversale parallel zu PQ ist, so sind die r einerseits und die s andrerseits einander ähnlich, und deshalb gilt dann auch die Gleichung

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{s_3}.$$

Kleinere Mitteilungen.

Die Bezeichnung der Wurzel.

Von Prof. Dr. Karl Doehlemann (München).

Die von dem deutschen Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht herausgegebenen „Vorschläge zur Vereinheitlichung der mathematischen Bezeichnungen im Schulunterricht“ (Heft 17, Leipzig 1913, Teubner), scheinen sich im allgemeinen der Zustimmung der Fachgenossen zu erfreuen. Ein Punkt scheint mir aber doch verbesserungsbedürftigt: es ist die Bezeichnung der Wurzel. Wir lesen auf Seite 4 dieser Schrift:

$\sqrt[n]{a}$ *n te* Wurzel aus a.

Bemerkung 5. $\sqrt[n]{a}$ bedeutet, wenn a reell und positiv ist, die positive, reelle Zahl, deren *n te* Potenz a ist. Wenn a reell und negativ, der Wurzelexponent n ungerade ist, so bedeutet $\sqrt[n]{a}$ diejenige reelle Zahl, deren *n te* Potenz a ist.

Erläuterung. Die durch die Bemerkung 5 festgelegte Eindeutigkeit des Wurzelsymbols scheint allein die Möglichkeit zu bieten, Ungenauigkeiten im Schulunterricht zu vermeiden. Beachtenswert ist also, daß die Gleichungen $a^3 = 1$ und $a = \sqrt[3]{1}$, ebenso $a^2 = 1$ und $a = \sqrt{1}$ darnach nicht identisch sind. Die ersten Gleichungen sind jeweils mehrdeutig, die andern eindeutig. Die Verwirrung ist besonders verhängnisvoll bei der Einführung der Logarithmen, wenn man $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ setzt und dann $a^{\frac{1}{n}} = b$ in $\frac{1}{n} = {}^a\log b$ umsetzt, ohne vorher die Eindeutigkeit von $\sqrt[n]{a}$ ausgesprochen zu haben.

Demgegenüber muß man doch darauf hinweisen, daß die Definition der Wurzel in der Weise geschieht, daß eben aus der Gleichung

$$1)\qquad x^n = a$$

die andere gefolgert wird

$$2)\qquad x = \sqrt[n]{a}$$

und daß die obige Festsetzung eine Beschränkung des Begriffes der Wurzel in sich schließt. Man ist dann überhaupt nicht mehr imstande, die Gleichung 1) nach x aufzulösen, was doch in vielen Fällen notwendig ist. Es wird also dadurch eine Verminderung der Ausdrucksmöglichkeiten, eine Verarmung des Begriffes herbeigeführt. Andererseits ist zuzugeben, daß man den reellen Wert der Wurzel einer reellen Zahl auch häufig einzuführen hat. Ein Ausweg aus diesen Schwierigkeiten ließe sich vielleicht in der Weise finden, daß man für die in den „Vorschlägen“ gemeinte Wurzel ein eigenes Zeichen einführt, das sich von der allgemeinen Wurzel etwas unterscheidet. Man könnte z. B. daran denken, den ersten Strich des Wurzelzeichens zu krümmen, so daß man schreiben würde:

$$\sqrt{a}$$

Es wäre also dann $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{4} = \pm 2$.

Bemerkung der Schriftleitung.

Wir stellen vorstehenden Vorschlag des Herrn Prof. Dochlemann zur Besprechung und bemerken noch folgendes. Die Verwirrung im Gebrauche des Wurzelzeichens ist öfter Veranlassung zu Verbesserungsvorschlägen gewesen. Zuerst hat wohl J. Helmes in seiner Elementar-Mathematik einen brauchbaren Vorschlag gemacht, nur verfährt er umgekehrt wie Herr D. Er verändert das übliche Wurzelzeichen durch einen vorgesetzten Bogen oder Haken ($\smile\!\!\sqrt{\ }$) nur dann, wenn es den allgemeinen, vieldeutigen Wert angeben soll; dagegen behält er das gewöhnliche Zeichen ($\sqrt{\ }$) für den reellen Wert bei. (Vergl. auch Emsmann, höhere algebr. Gleichungen, Halle 1867, S. 32.) Man könnte hiernach recht gut den Vorschlag des „DAMNU“ festhalten und zugleich der Dochlemannschen Anregung folgen, indem man z. B. setzt: $\smile\!\!\sqrt{4} = \pm 2$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt[3]{8} = 2$. Ferner

$$\smile\!\!\sqrt[3]{+1} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\smile\!\!\sqrt[3]{-1} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\smile\!\!\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{A} \cdot \smile\!\!\sqrt[n]{1}$$

$$\smile\!\!\sqrt[n]{-A} = \sqrt[n]{A} \cdot \smile\!\!\sqrt[n]{-1} \quad \text{usw.}$$

Herr Prof. Dochlemann schreibt uns dazu:

Ich bemerke, daß die allgemeine Bedeutung der Wurzel auch dem allgemeinen, bisher eingeführten Zeichen $\sqrt{\ }$ entsprechen soll, der besondere Wert aber dem besonderen Zeichen $\sqrt{\ }$. Das Zeichen $\smile\!\!\sqrt{\ }$ von Herrn Helmes ist übrigens sehr häßlich und unpraktisch, weil es viel Raum beansprucht, so daß alle Formeln dadurch unnötig erweitert werden.

Die Gleichung $a^n + b^n = c^n$.

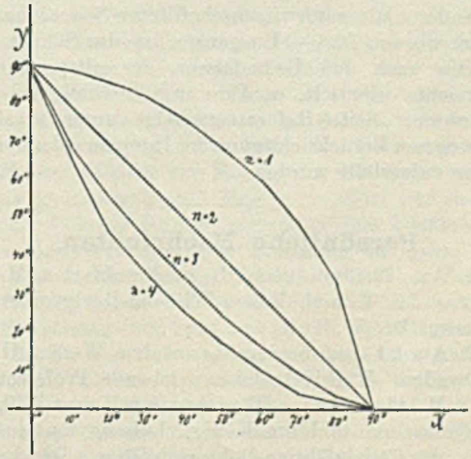
In dieser Gleichung sollen a, b und c ganze Zahlen sein, n kann jeden Wert annehmen außer 0, für den die Gleichung ungültig ist. Ist $n > 0$, so muß $c > a$ und $> b$ sein. Dividieren wir die Gleichung durch c^n, so ergibt sich

$$\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n = 1,$$

wo $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ echte Brüche sind.

Setzt man nun $\frac{a}{c} = \cos x$ und $\frac{b}{c} = \cos y$, so lautet die Gleichung $\cos^n x + \cos^n y = 1$ oder für $\cos y$ aufgelöst:

$$\cos y = \sqrt[n]{1 - \cos^n x}.$$



Wählt man für die graphische Darstellung ein Achsensystem mit Winkelgraden, so ergeben sich für

$n \neq 2$ krumme Linien, für $n = 2$ eine gerade Linie, so daß also der Fall $n = 2$ eine besondere Stellung unter allen möglichen Fällen einnimmt.

Schotten (Halle).

Zur Unterrichts- und Schulreform.

Vorschläge zu einer Neuordnung unseres höheren Schulwesens sind von W. Vilmar, Direktor des R.-G. und G. i. E. in Berlin-Grunewald veröffentlicht worden. (Leipzig u. Frankfurt a. M., Kesselring, 57 S., M 1.20). Es findet sich darin der nicht üble Vorschlag, daß VI und V der höheren Lehranstalten mit den entsprechenden Klassen der Mittelschule gleiche Lehraufgaben erhalten, und daß nach deren Durchlaufen den Eltern eröffnet werden soll, ob der Schüler für die höhere Schule geeignet oder besser der Mittelschule zuzuführen ist. Die Entscheidung soll bei den Lehrern des Deutschen, Französischen und des Rechnens liegen. Auch hier zeigt sich, wie zeitgemäß unsere neue Preisaufgabe ist, die das Rechnen als Mittel der Intelligenzprüfung ins Auge faßt. Die U III und O III sind noch für G. und R.-G. gemeinsam und haben nur zwei Fremdsprachen, so daß der Mathematik am G. die längst ersehnten vier Stunden zugewiesen werden können. Erst in U II beginnt am G. das Griechische, am R.-G. das Englische, dafür ist auf der Oberstufe des G. die Zahl der Mathematikstunden auf drei vermindert! Wir müssen dagegen Einspruch erheben, daß mit solcher Willkür gegen den altbewährten Besitzstand der Mathematik am Gymnasium vorgegangen wird. Mit einer besser ausgesiebten Schülerschaar muß es möglich sein, die Ziele des Sprachunterrichts auch ohne den übermäßigen Aufwand an Zeit zu erreichen, der heute dafür erforderlich ist. Aus dem weiteren Inhalt sei hervorgehoben, daß für die beiden Primen eine weitgehende Wahlfreiheit vorgesehen ist, derart, daß am G. nur 19 Pflichtstunden, am R.-G. 15, an der O.-R. 17 übrig bleiben. Zu diesen gehören am G. und R.-G. zwei Stunden Mathematik, an der O.-R. je nach der Art der Gabelung zwei oder sechs oder Null Stunden Mathematik. Man kann darüber streiten, ob das zweckmäßig ist; unzweifelhaft aber ist, daß auch eine gewisse Zahl naturwissenschaftlicher Stunden zu den Pflichtfächern gezählt werden müßte, was auch von anderer als naturwissenschaftlicher Seite schon gefordert worden ist. — Im ganzen ist die Schrift allzu einseitig nach den Bedürfnissen des altsprachlichen Unterrichts orientiert, es wäre zu wünschen, daß auch von unserer Seite Reformvorschläge unter sorgfältig abgewogener Berücksichtigung der Interessen der übrigen Fächer aufgestellt würden.

P.

Persönliche Nachrichten.

1. Am 22. Juni verstarb zu Frankfurt a. M. der Direktor des Königl. Kaiser-Wilhelm-Realgymnasiums zu Berlin, Dr. W. Schjerning.

2. Am 24. Juni beging der auf dem Weißen Hirsch bei Dresden als Privatgelehrter lebende Professor Dr. Felix Müller, früher Oberlehrer am Kaiser-Wilhelm-Realgymnasium und am Königl. Luisengymnasium zu Berlin, das fünfzigjährige Doktorjubiläum. Der Jubilar ist in weiteren Kreisen durch seine reiche und vielseitige fachliterarische Tätigkeit bekannt. Neben seinen Arbeiten zur Theorie der elliptischen Funktionen hat er die Geschichte und Terminologie der Mathematik zum Gegenstand eindringender Studien und zahlreicher Veröffentlichungen gemacht. An der Herausgabe des mit K. Ortmann 1869 begründeten „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" ist er vierzig Jahre lang beteiligt gewesen. 1892 veröffentlichte er seine sehr brauchbaren „Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie", 1900 sein „Mathematisches Vokabularium" (deutsch und französisch), 1909 seinen „Führer durch die mathematische Literatur". Sein „Gedenktagebuch für Mathematiker" liegt bereits in dritter Auflage vor.

Veranstaltungen der Königlichen Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht.

Winter 1917/18.

A. Veranstaltungen für Lehrer und Lehrerinnen an den Schulen Groß-Berlins.

1. Das Zeichnen im erdkundlichen Unterricht. (Vorlesungen und Uebungen.)
   Vortragender: Prof. Dr. Lampe.
2. Der Betrieb der erdkundlichen Ausflüge.
   Leiter: Direktor Prof. Heinrich Fischer.
3. Volkswirtschaftliches Rechnen.
   Vortragender: Rektor Karselt.
4. Euklids Elemente.
   Leiter: Direktor Prof. Dr. Tropfke.
5. Die Krankheiten und Schädlinge unserer heimischen Nutzpflanzen.
   Leiter: Dr. Ulbrich.
6. Uebungen in der Mineralogie.
   Leiter: Prof. Dr. Böttger.
7. Galileo Galileis Entdeckungen auf den Gebieten der Mechanik und der Astronomie.
   Leiter: Prof. Dr. Poske.
8. Versuche zur methodischen Einführung in die Chemie.
   Leiter: Prof. Ohmann.
9. Uebungen in der wissenschaftlichen Lichtbildkunst.
   Leiter: R. Schnehlik.
10. Uebungen in der mechanischen Werkstatt.
    Leiter: Mechaniker und Optiker Hintze.

B. Besondere Veranstaltungen für Lehrer und Lehrerinnen an den höheren Schulen Groß-Berlins.

11. Erdkundliche Uebungen.
    Leiter: Oberlehrer Urbahn.
12. Uebungen in der Sternforschung.
    Leiter: Dr. Kritzinger.
13. Arithmetik des heutigen Geld- und Zahlungsverkehrs.
    Vortragender: Oberlehrer Dr. Lötzbeyer.
14. Uebungen über den Bau und das Leben der Pflanzen.
    Leiter: Prof. Dr. Kolkwitz.
15. Verfahren des mikroskopischen Beobachtens, Messens und Zeichnens unter Benutzung selbsthergestellter und fertiger Präparate.
    Leiter: Direktor Prof. Dr. Röseler in Verbindung mit Oberlehrer Lamprecht.
16. Ausgewählte Abschnitte aus der Didaktik des physikalischen Unterrichts.
    Vortragender: Prof. Dr. Poske.

17. Die wichtigsten Schulversuche aus der Lehre vom Licht.
   Leiter: Dr. Volkmann in Verbindung mit Oberlehrer Dr. Kurt Fischer.
18. Physikalische Schülerversuche.
   Leiter: Prof. Hahn in Verbindung mit Oberlehrer Dr. Kurt Fischer.
19. Chemische und elektrochemische Schulversuche.
   Leiter: Prof. Dr. Böttger in Verbindung mit Prof. Schwarz.
20. Schulversuche aus der organischen Chemie.
   Leiter: Oberlehrer Dr. Franz.

C. Besonderer Unterricht in Mikroskopie und Mikrophotographie für kriegsverletzte Lehrer, die zu einem Berufswechsel gezwungen sind.

Der Lehrgang dauert zwei Monate und ist gebührenfrei. Zur Zeit werden nur acht Teilnehmer zugelassen. Melden sich mehr Herren, so werden die nicht zugelassenen Herren für den nächsten Lehrgang vorgemerkt.

21. Leiter: R. Schnehlik.

Bücher-Besprechungen.

Schmiedeberg, W., Wetzstein G. und Klatt, G., Die Bedeutung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts für die Erziehung unserer Jugend. Preisschrift des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Berlin, Otto Salle. M 4,50.

Der Plan des Vorstandes unseres Vereins, in Preisschriften die Bedeutung der mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer darstellen zu lassen, mag zwei Ziele verfolgen. Zum ersten soll die Anregung gegeben werden, den großen Gehalt dieser Fächer für die Bildung und Erziehung immer besser in lebendige Wirklichkeit umzusetzen, zum andern soll dadurch für die Wertschätzung dieses Bildungsguts in den weiteren Kreisen aller an der Erziehung Beteiligter und Interessierter gewirkt werden. Der Verein hat damit neben der früheren Arbeit, auf den Jahresversammlungen und in dieser Zeitschrift die Bedeutung von Mathematik und Naturwissenschaften zu pflegen, einen neuen Weg beschritten, der wertvolle Ergebnisse zeitigen kann. Als das erste dieser Ergebnisse liegt jetzt die in der Ueberschrift genannte Preisschrift vor, welche „Beiträge“ zur Lösung der Frage liefert, „wie der Unterricht in Mathematik und Naturwissenschaften nach dem Kriege zu gestalten sein wird, um an seinem Teil an der Erziehung unserer Jugend mitzuarbeiten“. (Vorwort des Vorsitzenden F. Poske.)

Ueberall, in Politik und Wirtschaft, in Kirche und Schule, in Familie und Gesellschaft ist ein Suchen nach neuen Wegen der Erkenntnis und des Wollens wahrnehmbar, vielfach noch dunkel und unklar, verdeckt durch die gewaltigen Ereignisse, die uns in Atem halten, verborgen in dem Gestrüpp der egoistischen Triebe, das üppig gedeiht und die guten Keime in dem Pflanzgarten des neuen Deutschland überwuchert. Aber wenn erst die harte Zeit der Prüfung vorüber sein wird, wenn durch die Beendigung des Krieges all dem Unkraut selbstiger Triebe, leidenschaftlicher Gefühle und unklarer Gedanken der Nährboden entzogen sein wird, dann werden die edlen Keime, die in den gewaltigen äußeren und inneren Erfahrungen dieses Krieges entstanden sind, sich entwickeln können, weil das stolze Bewußtsein der gebrachten Opfer und der geleisteten Taten dem deutschen Volk nicht mehr verloren gehen kann.

Unter dem Eindrucke der Gegenwart widmet der erste der drei Verfasser denn auch den ersten Teil seiner Ausführungen allgemeinen Betrachtungen über die Ziele, zu denen die Erziehung der deutschen Jugend hinstreben müsse. Und diese Ziele findet er nicht in der Ausbildung der Einzelpersönlichkeit, sondern er entnimmt sie dem nationalen Leben und den Aufgaben, welche die Zukunft der Gesamtheit des deutschen Volkes stellt. Seine Erziehungslehre trägt also soziologischen Charakter, wie denn im Grunde alle Erziehung in dem Zusammenhang des Individuums mit der Umwelt wurzelt. Er verlangt die Erziehung nicht bloß zu persönlicher körperlicher Tüchtigkeit, sondern zur Wehrkraft, er verlangt von frühe an Erziehung zu ernster Arbeit und treuer Pflichterfüllung nicht bloß für den Einzelnen, sondern durch Pflege der Arbeitsgemeinschaft, und er verlangt schließlich die Erziehung zur nationalen Zusammengehörigkeit und zum Verständnis der großen nationalen Aufgaben des künftigen Deutschland. Er streift dabei die meisten der pädagogischen Fragen, die schon vor dem Krieg und noch lebhafter im Krieg Politiker und Pädagogen beschäftigt haben, wobei naturgemäß die von ihm vorgetragenen Meinungen persönlicher Art sind und nicht etwa als Ansichten des Vereins oder seines Vorstands gelten können, wie das in dem Vorwort noch ausdrücklich betont ist. Schmiedeberg sieht aber in der Vergangenheit keineswegs bloß Fehler. Zwar lehnt er die Gedankengänge als Gedankengänge der Beharrung ab, welche aus der Bewährung unseres Heeres folgern wollen, daß seither alles gut und schön in unserem Erziehungswesen gewesen sei; ebensowenig aber hält er die Schaffung eines ganz neuen Bildungszustands in der Zukunft für erforderlich.

Aber eine schwere Versäumnis glaubt er der Schule zuweisen zu müssen, daß sie nichts getan habe für die Entfaltung des nationalen Lebens im deutschen Volke. Die Feindschaft weiter Kreise gegen das bestehende Staatswesen, die Teilnahmlosigkeit der Gebildeten am politischen Leben, die Oekonomisierung der politischen Parteien zu wirtschaftlichen Gruppen will er daraus erklären, daß die Schule auf das heranwachsende Geschlecht einen zu geringen Einfluß in vaterländischem Sinne ausgeübt habe. Man wird hier widersprechen dürfen. Von all dem waren ganz andere Dinge die Ursache als die Schule, von der man seit dem Worte von der durch den Schulmeister gewonnenen Schlacht von Königgrätz viel mehr verlangt als sie je leisten kann. Man überschätzt nur zu leicht den Einfluß der Schule gegenüber den Einflüssen all der andern Faktoren der Erziehung in Haus, Beruf und öffentlichem Leben. Vielleicht ist eher das richtig, daß die Schule viel zu bewußt und absichtlich auf die Erweckung patriotischer Stimmung hingearbeitet hat, viel zu laut und einseitig eine bestimmte nationale Gesinnung betont hat, statt das stille heilige Feuer inniger Liebe zum Vaterland zu pflegen, das sich dann in großen Zeiten von selbst zu lodernder Flamme vaterländischer Begeisterung entzündet. Aber wir haben doch auch keinen Grund an der Größe der vaterländischen Begeisterung zu zweifeln, die das deutsche Volk im August 1914 durchglühte. Da hat das deutsche Volk seine vaterländische Aufgabe wohl erkannt (S. 36), die Aufgabe, für seine Freiheit und sein Leben mit all seiner Kraft einzustehen. Die nationale Aufgabe aber, die in die Zukunft weist, die Schm. nicht näher erläutert, kann in der Erziehung der Schule nicht anders erfüllt werden, als durch die Pflege aller guten Eigenschaften zu immer besserer Verwirklichung charaktervoller deutscher Eigenart.

An der Hand seiner allgemeinen Betrachtungen kommt nun der Verfasser im zweiten Teil, der sich mit der Mathematik beschäftigt, zu dem Ergebnis, daß der mathematische Unterricht für die Erziehung zur Arbeit hervorragenden Anteil gehabt, für die Erziehung zum vaterländischen Bewußtsein dagegen nichts geleistet habe. Daß diese Auffassung von der erzieherischen Bedeutung der Mathematik sowohl nach der positiven wie nach der negativen Seite zu eng ist, liegt auf der Hand. Indem nun der Verfasser die Mathematik in den Dienst vaterländischer Erziehung stellen will, kommt er zu dem Ergebnis, insbesondere die Anwendungen der Mathematik hervorzuheben und deren besonderen Wert für die Erziehung zu beleuchten.

Hierin liegt nun der praktische Wert der Abhandlung. Den Vorwurf des Utilitarismus weist Schm. mit guten Gründen ab, indem er das „Nützliche" veredelt wissen will durch das soziale Erziehungsideal, das die Jugend zu fähigen und tüchtigen Mitarbeitern an der Größe und Zukunft der Nation erziehen will. Nicht das formale, sondern das materiale Prinzip sei daher maßgebend, es gelte die mathematischen Gesetze auf die Gegenstände der Außenwelt anzuwenden. Was er weiter über die methodische Behandlung der Anwendungen sagt, ist wertvoll durch die von ihm angeführten Beispiele, wenn dem erfahrenen Lehrer auch große Bedenken kommen mögen, ob die Zeit ausreichend sein wird in solcher Breite auf die Dinge einzugehen, wie es die Gründlichkeit erfordert, und ob nicht durch eine zu einseitige Betonung der Anwendungen eine zu große Zersplitterung des Lehrstoffes und eine zu geringe, sagen wir doch formale mathematische Ausbildung erreicht wird. Jedenfalls aber bieten die angeführten Beispiele dem Lehrer mancherlei Anregung, insbesondere auch überall da, wo Schm. praktisch die Arbeitsteilung in der Arbeitsgemeinschaft einer Klasse zur Darstellung bringt. Der wertvolle erzieherische Gedanke, der hierin liegt, verdient Beachtung. Er setzt freilich fleißige und umsichtige Lehrer von praktischer und organisatorischer Veranlagung voraus.

Wie reich im übrigen das Gebiet der angewandten Mathematik ist, läßt der Ueberblick erkennen, den Schm. zum Schluß gibt. Ne quid nimis möchte man freilich dabei ausrufen. Und der Gedanke verstärkt sich, daß in der einseitigen Pflege der Anwendungen die Gefahr einer großen Zersplitterung des Unterrichts liegt; denn wer alles will, wird nichts gewinnen. Mit den Anwendnngen kommt man gewiß am meisten dem natürlichen Interesse der Schüler entgegen, man darf aber auch darin des guten nicht zuviel tun, wenn man nicht zu einer Fachbildung kommen will, die nicht in der Richtung der erzieherischen Aufgabe unserer höheren Schulen liegt.

Ueber den physikalischen Unterricht schreibt Georg Wetzstein, der dafür von dem Vorstand gewonnen worden war. Dieser Teil der Preisschrift stellt sich als ein Abschnitt aus der Didaktik und Methodik der Physik dar, worin der Verfasser, ohne sich vorher mit allgemeineren Betrachtungen lange aufzuhalten, an der Hand vortrefflich durchgeführter Beispiele zeigt, was der physikalische Unterricht 1) für die Erziehung zur Beobachtung von Naturvorgängen, 2) für die Erziehung zum funktionalen Denken, 3) für die Erziehung zum logischen Denken leistet. Und der Verfasser behauptet in der Tat nicht zuviel, wenn er (S. 146) sagt, daß durch die von ihm empfohlene Behandlung physikalischer Fragen, durch die innige Verbindung des Klassenunterrichts mit physikalischen Uebungen das Denken der Schüler in einer Ausdehnung und Tiefe gepflegt werden kann, wie es in einem anderen Unterrichtsfach sicher nicht besser möglich ist. Wir möchten hinzusetzen, daß induktive Logik überhaupt in keinem Unterrichtsfach so gepflegt werden kann wie in der Physik. Und wie nötig ist gerade uns Deutschen eine solche Erziehung, die wir so leicht geneigt sind im politischen Leben nach Prinzipien zu urteilen und nach Grundsätzen zu handeln, deren subjektive Geltung wir nur zu oft übersehen.

Gegenüber den vortrefflichen Darlegungen W.'s kann ich mich darauf beschränken, alle Lehrer der Physik zu ihrer Lektüre aufzufordern. Auch der Erfahrene wird davon Genuß und Gewinn haben und wird mit W. übereinstimmen, wenn er verlangt, daß gerade in der Unterstufe verbindliche Uebungen zur Grundlage des Unterrichts gemacht werden müssen. Durch seine der Praxis entnommenen Beispiele weist er in überzeugender Weise die Berechtigung der Forderung nach, den Naturwissenschaften und unter diesen wiederum der Physik eine zentrale Stellung im Unterricht zuzuweisen. Daß das nur unter Zurückdrängung des fremdsprachlichen Unterrichts möglich ist, ist klar. Aber gerade hierin werden wir nach dem Kriege mit der Vergangenheit brechen müssen, um für eine glückliche Zukunft der deutschen Erziehung Raum zu schaffen.

An dritter Stelle handelt Georg Klatt über den chemischen und biologischen Unterricht. Seine Arbeit bildet eine wertvolle Ergänzung zu den beiden vorhergehenden. Einmal betont sie eine Erziehung zur freien charaktervollen Persönlichkeit gegenüber der einseitig nationalistischen Auffassung Schmiedebergs, dann aber vermeidet sie Einzelheiten der Unterrichtsmethode — die nur den Fachmann interessieren — und wendet sich somit auch an weitere Kreise, um zu zeigen, was die Naturwissenschaften, insbesondere Chemie und Biologie zur Erziehung der neudeutschen Jugend beitragen können. Das prächtige Wort von Treitschke ist ihm Leitmotiv: „Was du auch tust, um reiner, reifer, freier zu werden, du tust es für dein Volk". Ein erfreulicher Geist des Fortschritts, eine weitherzige Würdigung der neueren Bestrebungen (Kerschensteiner, Förster u. a.), die Jugend freier und selbständiger zu machen, ein warmes Verständnis für die Jugend und ihr Streben nach Selbstbetätigung und Freiheit, ein offener Sinn für einen neuen Geist des Verkehrs von Lehrern und Schülern und für die rechte Freude an der Schule durchweht die Schrift, der wir gern eine weitere Verbreitung wünschten.

Kl. behandelt in vier Abschnitten die Erziehung zum Wirklichkeitssinn, die Bildung des Willens, die körperliche Erziehung in ihrer Beziehung zur Willens-bildung und die staatsbürgerliche Erziehung. Das Wissen von Dingen, nicht von Worten, ist das eine wertvolle Ziel der Naturwissenschaft. Der Grundsatz der Anschauung soll sich auswirken (wie oft betont und wie wenig erreicht!) aber in Verbindung mit einer geistigen Betätigung selbständiger Denkarbeit. Die Erziehung zum Wirklichkeitssinn soll weiter ihre Ergänzung finden in der Erziehung zur Tatkraft durch die Verbindung der Arbeit der Hände mit der Arbeit des Verstandes (praktische Uebungen). Die Erziehung schließlich zu schöner edler Körperlichkeit steht mit der Naturwissenschaft in engster Verbindung (Gesundheitslehre, Ernährungslehre, Alkoholfrage, sexuelle Erziehung'. Und die Individualethik, die so gewonnen wird, mündet zuletzt in die Sozialethik der Eingliederung eines Jeden in die große Gemeinschaft des Volkes und des Staates (Selbstverwaltung in der Schule, Volkswirtschaftslehre, Natur- und Heimatschutz, Technik und Arbeiterfrage.) Ueber alles das spricht Klatt in einer feinen, von eignem Denken und Empfinden getragenen Form, die sich von einer allzu engen Auffassung nationaler Erziehung erfreulich durch die Weite des Blickes und den Sinn für charaktervolle Persönlichkeit abhebt. Wir wünschen der Schrift recht viele Leser auch unter den Lehrern anderer Fächer.

Es muß in den Schulen ein neuer Geist einziehen des Vertrauens, des freundschaftlichen Verkehrs von Lehrern und Schülern und einer größeren Selbstverantwortung beider. Das kann nicht befohlen werden, das muß sich entwickeln und muß werden! Was die Naturwissenschaften aber dazu beitragen können, hat die Preisschrift unsres Vereins in vielseitiger und erfreulicher Weise beleuchtet. Die Klage ist freilich allgemein, daß die erzieherischen Werte dieser Wissenschaften nicht oder nur sehr unvollkommen zur Geltung kommen können, solange sie im Lehrplan der Schulen eine so untergeordnete Rolle spielen. Wir brauchen neben dem sprachlichen Gymnasium das naturwissenschaftliche Gymnasium (vergl. dazu den fortschrittlichen Lehrplan der bayrischen Oberrealschulen), wenn sich die Naturwissenschaften in ihren so wertvollen Bildungszielen sollen ausleben können. Mr.

* * *

Bayerischer Mathematiker-Verein: Sammlung mathematischer Formeln. Ausg. A.: Für Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. — Ausg. B.: Für Oberrealschulen. Vom Königl. Bayer. Staatsministerium zum Gebrauch an den höheren Lehranstalten zugelassen. München 1915. J. Lindauers Univ.-Buchhandlung.

Die beiden hübsch ausgestatteten Heftchen stimmen in Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie und mathem. Geographie überein. In analyt. Geometrie, Algebra und Differential-Rechnung enthält Ausg. B erheblich mehr als Ausg. A, dazu treten noch in Ausg. B. drei Seiten Formeln aus der Integral-Rechnung. So kommt es, daß Ausg. A. einen Umfang von 35 Seiten, Ausg. B. von 52 Seiten hat. Die von dem „DAMNU“ vorgeschlagenen Bezeichnungen sind fast überall angewandt. Eine Abweichung findet sich in der Verwendung des Wurzelzeichens. Es scheint uns, als wenn auch hier die Formel-Sammlung dem „DAMNU“ folgen dürfte; als Bezeichnung für die allgemeine, vieldeutige Wurzel könnte das bereits von J. Helmes und Emsmann (vergl. des letzteren Höhere algebr. Gleichungen, Halle 1867, S. 32) vorgeschlagene Zeichen $\sqrt[n]{a}$ benutzt werden. — Es fällt auf, daß die Sammlung nicht die grundlegenden Sätze der Potenz-, Wurzel- und Logarithmenrechnung enthält; auch aus der sphär. Trigonometrie für Ausg. B. vermißt man einiges; da ein Vorwort fehlt, so kann man über die Gründe nur Vermutungen haben. Bei dem Dreieck ziehen wir es vor, die Grundseite mit a, die Schenkelseiten mit b und c zu bezeichnen. Die Volumformel für den Pyramidenstumpf und ähnliche faßt man besser so: $V = \frac{1}{3} h (G_1 + G_2 + \sqrt{G_1 G_2})$. Für den Mantel des Kegels und Kegelstumpfs empfehlen wir noch die Formel: $M = 2 p \pi \cdot h$, worin p die Maßzahl des sogen. Seiten-Mittellots angibt. Als Sammelformel für die Reduktion trigonometrischer Funktionen schlagen wir vor: $f(n R \pm a) = | f(a) |$ wenn n gerade, $= | \mathrm{cof}(a) |$, wenn n ungerade; das Vorzeichen bestimmt sich aus dem betreffenden Quadranten. Alle diese Bemerkungen berühren übrigens nur Nebensächliches. Das Ganze ist eine recht brauchbare Zusammenstellung, an der sich andere Bundesstaaten ein Muster nehmen können. Dr. C. H. Müller (Frankfurt a. M.)

* * *

Wildbrett, Adolf, Algebraische Analysis und Infinitesimalrechnung. Bd. I. u. II, je M 3,80. Analytische und projektive Geometrie. Bd. I u. II, je M 2,90. Darstellende Geometrie. Bd. I M 3,20, Bd. II M 2,—. Analytische Geometrie und Elemente der Differentialrechnung. M 2,—. Kornsche Buchhandlung, Nürnberg.

Die ersten drei Lehrbücher zu je zwei Bänden sind als Unterrichtswerk für die Oberklassen der bayrischen Oberrealschulen gedacht, während das vierte — im wesentlichen ein Auszug aus den andern — für die Oberklasse von Gymnasien und Realgymnasien bestimmt ist. Geleitet hat den Verfasser bei seiner Arbeit der Gedanke, dem Schüler ein Buch in die Hand zu geben, das alles enthält, was für seine häusliche Arbeit notwendig ist, das ihm also ermöglicht, beim Unterricht von allem Nachschreiben abzusehen und alle seine Aufmerksamkeit auf den Vortrag des Lehrers zu richten. Es soll hier nicht untersucht werden, ob ein solches Buch wünschenswert ist. Viele Stimmen werden meinen, daß bei solchem Ziel die Ausarbeitung des Lehrstoffs so ins einzelne werde gehen müssen, daß der Freiheit des Lehrenden zu enge Schranken gezogen würden. Das hat der Verfasser auch selbst gefühlt und ausdrücklich ausgesprochen, daß der Gang des Lehrbuchs nicht bindend zu sein brauche. Jedenfalls muß anerkannt werden, daß er alles getan hat, das oben genannte Ziel zu erreichen. Die Darstellung des Lehrstoffs zeigt überall die Hand des erfahrenen Schulmanns, der den Leser unvermerkt vom Leichten zum Schweren zu leiten weiß. Das Verständnis der Darlegungen wird dem Lernenden sehr durch zahlreiche klar gezeichnete, zum Teil vortreffliche Figuren erleichtert. Besondere Sorgfalt ist auch auf die Auswahl der Aufgaben verwandt worden. Sie sind in großer Zahl vorhanden und, wie der Verfasser mitteilt, sämtlich im Unterricht erprobt worden. — Auf den Inhalt näher einzugehen verbietet sich in einer kurzen Anzeige von selbst. Er entspricht dem Lehrplan der bayrischen Oberrealschulen, der bekanntlich in der Infinitesimalrechnung und der darstellenden Geometrie, die in die Pflichtstunden einbezogen ist, die Grenzen ziemlich weit steckt. Beide Gebiete sind denn auch sehr ausführlich behandelt. Merkwürdigerweise wird in der darstellenden Geometrie der Hauptnachdruck darauf gelegt, daß der Schüler die Aufgaben über Geraden und Ebenen in allen möglichen Lagen dieser Gebilde zueinander beherrsche, während z. B. Schattenkonstruktionen, die ihn viel mehr interessieren und auch recht wohl geeignet sind, die räumliche Anschauung zu entwickeln, stark zurücktreten. Die Sätze der neueren Geometrie sind teils der analytischen, teils der projektiven Geometrie zugeteilt. Dabei könnte es fraglich erscheinen, ob der Schüler bei den bekannten Schwierigkeiten, die er hier zu überwinden hat, auf diesem Wege bei der knapp zugemessenen Zeit zur wirklichen Beherrschung dieser schönen Sätze gebracht werden kann. Die Lösung der Gleichungen höheren Grades geschieht nur auf graphischem Wege, was die immerhin auffallende Tatsache zur Folge hat, daß die Cardanische Formel überhaupt nicht erwähnt wird. Die sphärische Trigonometrie und ihre Anwendung auf mathematische Geographie und sphärische Astronomie sind anscheinend einem besonderen Lehrbuch vorbehalten, sie fehlen ganz.

Was der Verbreitung des schönen Werkes als Schulbuch, die ihm wohl zu wünschen wäre, hauptsächlich hindernd im Wege stehen wird, ist der teure Preis. Deshalb sei noch besonders darauf aufmerksam gemacht, daß der Verfasser von vornherein auch an seine Verwendung zum Selbststudium gedacht hat, und daß es hierzu hervorragend geeignet ist.

Ernst Diehl (Frankfurt a. M.).

* * *

Valentiner, S., Die Grundlagen der Quantentheorie in elementarer Darstellung. Sammlung Vieweg. Heft 15. 67 S. 8 Abb. Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn. M 2.60.

Der Verfasser widmet das kleine Heft seinen beiden, 1911 und 1914 geborenen Söhnen, weil er der Ansicht ist, daß die Quantentheorie die Anschauungen der zukünftigen Generation darstellt. Daß sie das aber in der jetzigen Form noch nicht sein kann, zeigen die vielen noch ungelösten Schwierigkeiten der Theorie, auf die der Verfasser in seiner Arbeit hinweist. Jedenfalls gibt das Heft eine gute Vorstellung von den vorliegenden Problemen. P. Riebesell (Hamburg).

* * *

Weber, R. H., und **Gans, R.**, Repertorium der Physik. 1. Bd. Mechanik und Wärme. 1. Teil (Mechanik, Elastizität, Hydrodynamik und Akustik). 434 S. 126 Fig. Leipzig 1915, Teubner. geb. M 8.—.

Das Buch war von der Verlagsbuchhandlung als ein physikalisches Seitenstück zu dem mathematischen Repertorium von Pascal gedacht. Die Verfasser betonen jedoch, daß eine Gestaltung des Werkes genau nach dem Pascalschen Vorbild sich nicht durchführen ließ, da sich die physikalischen Gesetze nicht in so knapper Form darstellen lassen wie die mathematischen. Das Buch soll ein Führer für denjenigen sein, der selbständig zu arbeiten beginnt, und dem Spezialisten die Möglichkeit bieten, sich auf ferner liegenden Gebieten zu orientieren. Durch Angabe der wichtigsten Literatur und eine nicht zu gedrängte Darstellung werden diese Ziele erreicht. Der vorliegende erste Teil des ersten Bandes, der von Gans und F. A. Schulze bearbeitet ist, läßt durch seinen Umfang darauf schließen, daß die Verfasser besser getan hätten, eine Einteilung in zahlreichere Teile vorzunehmen. Durch die Heranziehung von nur wenigen Mitarbeitern ist zwar eine größere Einheitlichkeit des ganzen Werkes erzielt, aber die Fertigstellung ist auf längere Zeit hinausgerückt. Hoffentlich erscheint der zweite Band, bevor der erste veraltet ist. Vermißt man doch schon heute in ihm die Relativitätstheorie und ihren Einfluß auf das Gravitationsproblem.

P. Riebesell (Hamburg).

* * *

Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. 8. Aufl. von F. Dingeldey. Erster Teil 452 S. Leipzig 1915, Teubner. geb. M 12.—.

Eine ausführliche Besprechung des jedem Mathematiker bekannten vorzüglichen Buches ist unnötig. Die neue Auflage enthält alle Vorzüge der älteren. Eine neue elegante Behandlung haben die Kapitel über Pol und Polare, sowie die Transformationsgleichungen der Kegelschnitte erfahren, indem der Mittelpunkt als Pol der unendlich fernen Geraden aufgefaßt und von den Sätzen über konjugierte Durchmesser Gebrauch gemacht wird. Das Literaturverzeichnis ist korrigiert und ergänzt, ebenso sind in stilistischer Hinsicht Verbesserungen getroffen.

P. Riebesell (Hamburg).

* * *

Stiasny, Dr., Gustav, Das Plankton des Meeres. Sammlung Göschen. Berlin u. Leipzig, Göschen. M —.90.

Das kleine Bändchen behandelt das Plankton in klarer Sprache und sucht seinem Thema nach allen Seiten gerecht zu werden. Indem es sich auf das Plankton des Meeres beschränkt, bietet es eine wohlgelungene und treffliche Ergänzung zu ähnlichen Veröffentlichungen Zacharias u. a., die sich vorwiegend mit dem Plankton der Binnengewässer beschäftigen. Besonders vorteilhaft ist dem Werkchen die eingehende und übersichtliche Gliederung. Dadurch nur ist es möglich, auf so beschränktem Raume den weitschichtigen Stoff eingehender und anregend darzustellen, wobei allerdings schon einige Kenntnisse in den biologischen Wissenschaften vorausgesetzt werden.

O. Rabes (Halle a. S.).

* * *

Steinmann, Dr., P., und **Breßlau, Dr., E.**, Die Strudelwürmer (Turbellaria). Bd. 4 der Monographien einheimischer Tiere, herausgegeben von Prof. Dr. F. E. Ziegler und Prof. Dr. Woltereck. Klinkhardt, Leipzig 1913. M 9.—.

Von den Naturfreunden sind die Strudelwürmer meist recht wenig in den Kreis ihrer Beobachtungen aufgenommen, und doch sind sie so dankbare Objekte einmal dadurch, daß sie (wie die Trikladen) das ganze Jahr über zu erhalten und zu sammeln, zum andern dadurch, daß sie leicht zu studieren sind, da für die meisten eine starke Lupe ausreicht. Wo das Mikroskop benutzt werden muß (bei den Rhabdocoelen), da ist die Behandlung zur mikroskopischen Beobachtung so einfach, daß selbst der Anfänger sie ausführen kann, und die mikroskopische Untersuchung kann an den meist durchscheinenden Geschöpfen so fruchtbar und vielseitig gestaltet werden, wie bei wenigen anderen heimischen Objekten aus der Tierwelt.

Das angezeigte Buch füllt nun eine tatsächlich vorhandene „Lücke" aus, wenn es sich angelegen sein läßt, das Studium der Turbellarien weiteren Kreisen zugänglich zu machen. Besonders angenehm berührt dabei die einfache, klare und verständliche Schreibweise, sowie die sorgfältige und übersichtliche Gruppierung des Stoffes. Anatomie und Systematik der Gruppe sind keineswegs vernachlässigt, und doch liegt das Hauptgewicht auf der Biologie der Tiere, und diese bietet im Verhalten gegen Licht und Wärme, gegen Nahrungsmangel, bei Verletzungen, Teilung, Regeneration, in der Bewegung und Ernährung soviel Interessantes, so viele auch durch leicht anzustellende Versuche selbst zu beobachtende Tatsachen, daß jeder, der nach dieser Anleitung arbeitet, recht befriedigt werden muß.

Steinmann hat die Einleitung und die Trikladen, Breßlau die Rhabdocoelen bearbeitet; das Schlußkapitel „Entwicklung und Stammesgeschichte der Turbellarien" ist von beiden Autoren gemeinschaftlich behandelt. Eine farbige und eine schwarze Tafel, sowie eine reiche Fülle anschaulicher Textfiguren helfen dem leichteren Erfassen und Behalten des Stoffes. Ein entsprechendes Literaturverzeichnis und Sachregister fehlen nicht. So ist alles geschehen, um das Buch so auszustatten, daß es die Aufgabe gut und mehr als ausreichend erfüllen kann, die die Verfasser selbst angeben: es soll „lediglich als Einführung in die Turbellarienkunde dienen." O. Rabes (Halle a. S.).

* * *

Hahn, Hermann, Physikalische Freihandversuche. II. Teil. Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase. 2. Auflage. Berlin 1916, Salle.

Das Hahnsche Werk hat sofort nach seinem Erscheinen eine außerordentlich günstige Aufnahme gefunden, füllte es doch damals eine Lücke in unserer physikalischen Literatur aus, da uns im Gegensatz zu den Franzosen, Engländern und Amerikanern eine einigermaßen vollständige Zusammenstellung von einfachen Freihandversuchen fehlte. In erster Linie hat aber die Hahnsche Enzyklopädie der Freihandversuche ihren Erfolg der geschickten Auswahl und Anordnung der Aufgaben und der außerordentlichen Klarheit der Darstellung zu verdanken. Zudem wird das Verständnis durch sorgfältig gezeichnete Figuren unterstützt. Fast jeder Aufgabe ist eine Abbildung beigegeben. Ueberall hat man die Ueberzeugung, daß die Versuche wirklich bis in das Kleinste ausprobiert und nicht etwa nur am Schreibtisch entstanden sind. Da der Verfasser nur mit den allereinfachsten Mitteln arbeitet, kann jeder Schüler der Mittelklassen die Versuche ohne jede Schwierigkeit wiederholen. Die vorliegende zweite Auflage des zweiten Bandes ist etwa um ein Drittel des ursprünglichen Umfangs erweitert. So ist den Bewegungen fester Körper in Flüssigkeiten und Gasen größere Beachtung geschenkt. Vor allem ist es zu begrüßen, daß eine Reihe von Aufgaben, die das Flugproblem behandeln und die Jungen mit am meisten interessieren, neu aufgenommen sind. Gerade sie bieten auch dem Handfertigkeitsunterricht vortreffliches Material. — Der Verfasser hat sich mit der Neuherausgabe dieses Bandes, der längere Zeit vergriffen war, ein wirkliches Verdienst erworben. Gerade jetzt während des Krieges, besonders aber nach dem Kriege, wo die Mittel zur Anschaffung physikalischer Apparate spärlicher fließen werden und sich jeder selbst helfen muß, dürfte das Buch jedem Lehrer der Physik an höheren Schulen wie an Volksschulen ein wertvoller Berater sein. Lischner (Frankfurt a. M.).

Grimsehl, E., Lehrbuch der Physik zum Gebrauche beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. 2 Bde. Leipzig 1914 u. 1916, Teubner.

Die dritte Auflage des bekannten Grimsehlschen Lehrbuchs liegt jetzt abgeschlossen vor. Der Umfang ist so stark gewachsen, daß der Stoff diesmal auf zwei Bände verteilt ist. Besonders der erste Teil (Mechanik, Akustik, Optik), der schon vor dem Kriege erschienen ist, hat eine wesentliche Umgestaltung erfahren. Abgesehen von kleineren Aenderungen sind hier vor allem die Kapitel über das Flugproblem, die beiden Hauptsätze der Wärmetheorie, Photometrie, geometrische Optik und Interferenzerscheinungen bedeutend erweitert worden. Nach Grimsehls Tode haben befreundete Fachgenossen den zweiten Teil (Magnetismus und Elektrizität) herausgegeben. Hier hat Geitel das Kapitel über Luftelektrizität, Hillers die Abschnitte über Röntgenstrahlen, Radioaktivität und Funkentelegraphie neu bearbeitet. Endlich hat Classen das letzte Kapitel über die historische Entwickelung der Elektrizitätslehre ergänzt und darin auch das Relativitätsprinzip kurz gestreift. Die Vorzüge der Grimsehlschen Darstellung sind ja allgemein bekannt. Auch die Aenderungen des zweiten Bandes bringen überall die neuesten Ergebnisse der physikalischen Forschung und zeichnen sich durch eine kaum zu übertreffende Klarheit aus. Das Buch dürfte in seiner jetzigen Gestalt dem Studierenden als Führer durch das Studium der Experimentalphysik und dem Lehrer als Nachschlagewerk unentbehrlich sein.

Lischner (Frankfurt a. M.)

* * *

Schöndorf, Friedrich, Wie sind geologische Karten und Profile zu verstehen und praktisch zu verwerten? Braunschweig 1916, Vieweg & Sohn.

Das kleine Büchlein enthält das Wichtigste aus der tektonischen Geologie. Die verschiedenen Grundbegriffe werden an der Hand gut ausgewählter und sorgfältig ausgeführter Zeichnungen trefflich erläutert. Während es aber die gebräuchlichen Lehrbücher der Geologie dabei bewenden lassen, wird hier vor allem ausgeführt, wie die Begriffe im geologischen Kartenbild zur Darstellung gelangen. Das Buch kann daher als Ergänzung der üblichen Lehrbücher gelten. Da die Störungen und ihre Bedeutung für die Praxis ganz ausführlich behandelt werden, dürfte das Werkchen besonders dem jungen Bergbaubeflissenen willkommen sein. Dr. Lischner (Frankfurt a. M.).

* * *

Fuß, Konrad, und Hensold, Georg, Lehrbuch der Physik für den Schul- und Selbstunterricht. Allgemeine Ausgabe. 13. u. 14. vermehrte und verbesserte Auflage. XXIV. u. 608 S. mit zahlreichen Schülerübungen und Rechenaufgaben, einer Spektraltafel in Farbendruck und 491 Textbildern. Freiburg i. Br. 1915, Herdersche Verlagsbuchhandlung. M 7.20.

Das sorgfältig gearbeitete, für Lehrerseminare gedachte und dort gewiß recht brauchbare Lehrbuch der Physik von Fuß und Hensold kann aus zwei Gründen leider nicht zum Gebrauch an Realanstalten und Gymnasien empfohlen werden. Der eine Grund ist rein äußerlicher Art: der Preis ist für Schüler unverhältnismäßig hoch. Der andere Grund liegt in der gänzlichen Vernachlässigung der Mathematik. Eine exakte Durcharbeitung der Gesetze ist grundsätzlich vermieden; wo eine Ableitung gegeben ist, da ließe sich mancherlei einwenden. Die vielen durchgeführten Rechenbeispiele — man vergl. etwa das Boyle-Mariottesche Gesetz, das Gay-Lussacsche Ausdehnungsgesetz der Gase, die Linsen — grenzen in ihrer Weitläufigkeit fast ans Lächerliche. Von Sekundanern und Primanern kann man füglich andere mathematische Vorkenntnisse verlangen. Hier ist auf Quartaner und Quintaner Rücksicht genommen. Das Buch würde nachdenklichen Schülern der höheren Lehranstalten keine Befriedigung gewähren.

R. Winderlich (Oldenburg i. Gr.).

* * *

Thomas, Dr. **K.**, Assistent am Physiologischen Institut der Königl. Universität Berlin, Nahrung und Ernährung. Grundzüge der Nahrungsmittelchemie und Ernährungsphysiologie. Zugleich Erläuterungsschrift zu Rubners Nahrungsmitteltafel für Schulen und Haushaltungsschulen und für den praktischen Gebrauch. Mit einer Tabelle und einer mehrfarbigen Tafel, 56 Seiten. Leipzig und Berlin 1914, B. G. Teubner. M 1,50.

In vier Abschnitten behandelt der Verfasser gemeinverständlich auch für den gebildeten Laien die Grundzüge der Nahrungsmittelchemie und der Ernährungsphysiologie; ein fünfter Abschnitt gibt eine Beschreibung von Rubners Nährwerttafel, ihre methodische Behandlung und rechnerische Verarbeitung in den Schulen und Haushaltungsschulen. In dem ersten Abschnitt, der Einleitung, werden die Methoden erläutert, deren sich die Ernährungslehre bedient; die Bedeutung des Experiments und der Statistik im Dienst der Ernährungslehre wird hervorgehoben; der zweite Abschnitt beschäftigt sich eingehend mit den Nährstoffen und ihrer Umarbeitung im Stoffwechsel, z. B. des Wassers und die in ihm gelösten Salze oder Alkalien und alkalischen Erden, der Fette, der Kohlehydrate, das Eiweiß werden chemisch definiert; die Aufgaben für den Körper und ihr Verhalten in demselben, die stoffliche Verwertung eingehend erörtert. Der dritte Abschnitt ist dem Kraftwechsel, dem Energieumsatz, der in Zahlen ausgedrückt wird, gewidmet. Am umfangreichsten ist der Teil der Arbeit, der die Wirkung der Nahrung auf den Menschen beleuchtet; hier werden die vegetarischen Bestrebungen kritisiert und die Alkoholfrage eingehend erörtert; das erste Kapitel wird abgeschlossen durch eine Aufzählung der wichtigsten Nahrungsmittel pflanzlicher und tierischer Art und ihre Wertung für die Ernährung des Menschen. Die Arbeit ist vor Ausbruch des Weltkrieges erschienen; ohne Zweifel wird sie in einer zweiten Auflage nach den Lehren, die der Krieg gegeben hat, Umänderungen erfahren müssen.

Prof. Dr. W. Hirsch (Berlin-Lichterfelde).

* * *

Migula, Prof. Dr. **W.**, Pflanzenbiologie. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. II. Blütenbiologie mit 28 Figuren, 86 Seiten. M —,90. Sammlung Göschen. Berlin und Leipzig 1914, G. J. Göschensche Verlagshandlung, G. m. b. H.

In dritter, verbesserter und vermehrter Auflage liegt Teil II (Blütenbiologie) der Pflanzenbiologie Migulas vor; in knapper, kurzer Fassung werden die Theorien über die Entstehung der Arten vorgetragen; im zweiten und dritten Kapitel charakterisiert der Verfasser an besonders günstigen Blütenbeispielen die verschiedenen Möglichkeiten der Befruchtung (Kreuzung und Selbstbefruchtung); die Fremdbestäubung hat die Uebertragung des Pollens als Voraussetzung; der Leser lernt Windblüten von Insektenblüten unterscheiden, erfährt von den Nahrungsschätzen und den Lockmitteln der Blüten und ihrer Anpassung an die sie besuchenden Insekten, den Schutzeinrichtungen der Blüten, die in sinnreicher Weise getroffen sind, um die Befruchtung zu sichern und Schädlingen zu wehren. Wer sich über blütenbiologische Fragen schnell unterrichten will, dem kann das Büchlein dazu verhelfen.

Prof. Dr. W. Hirsch (Berlin-Lichterfelde).

Verzeichnis der zur Besprechung eingegangenen Bücher.

NB. Die Verpflichtung zu einer Besprechung von unaufgefordert eingehenden Werken kann nicht übernommen werden; auch liegt es nicht in der Möglichkeit, solche zurückzusenden.

Henniger, K. A., Lehrbuch der Chemie und Mineralogie. Ausgabe B. 2. Aufl. Mit 168 Abb. Stuttgart 1916, Fr. Grub. geb. M 3.—.

Heß, A., Trigonometrie für Maschinenbauer und Elektrotechniker. 2. neubearb. Aufl. Mit 112 Fig. Berlin 1916, Springer kart. M 3. —.

Jakobsthal, W., Mondphasen, Osterrechnung und Ewiger Kalender. Ebenda. M 2.—.

Kerst, B., Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Mit 136 Aufg. u. 46 Fig. (Aus „Mathematische Bibliothek" 26). Leipzig 1916, Teubner. M —.80.

Kriegs- und volkswirtschaftliche Rechenaufgaben. Eine Ergänzung zu Thaer und Rouwolf. Breslau 1917, Hirt. M —.25.

Küspert, Vorstufe zum Lehrgang der Chemie und Mineralogie für höh. Schulen. Nürnberg 1916, C. Koch. geb. M 1.30.

Legahn, A., Physiologische Chemie. I. Teil: Assimilation. 2. Aufl. Mit 2 Tafeln (Sammlung Göschen Nr 240). Leipzig 1916, Göschen. geb. M 1.—.

Lietzmann, W., Riesen und Zwerge im Zahlenreich. Mit 18 Fig. (Aus „Mathematische Bibliothek" 25). Leipzig 1916, Teubner. M 1.80.

Lorey, W., Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts. Mit 13 Abb. (Aus „Abhandlg. über den mathemat. Unterricht in Deutschland." Band III, Heft 9). Ebenda. M 12.—.

Lübsen, H. B., Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung. 9. Aufl. Mit 63 Fig. Leipzig 1916, Brandstetter. M 8.—.

Mikrokosmos, Jahrg. 1916/17 (12 Hefte u. 2 Sonderbeilagen). Stuttgart, Franckh. M 7,20, einz. Hefte M —.60.

Ohmann, O., Leitfaden der Chemie und Mineralogie. Mit 157 Abb. 6. Aufl. Berlin 1916, Winckelmann & Söhne. geb. M 2.20.

Reinhardt, Mannheimer, Zeisberg, Lehr- u. Uebungsbuch für den mathematischen Unterricht. Ausg. B. Teil I. Geometrie u. Arithmetik zum Gebrauch in der 4. u. 3. Kl. der Lyzeen u. in der Untertertia der Studienanst. 2. Aufl. Mit Fig. u. Dreieckstafel. geb. M 2.40. — Teil V. Geometrie und Arithmetik zum Gebrauch in der Prima der Studienanst. 2. Aufl. Mit Fig. u. 4 Taf. Frankfurt a. M. 1917, Diesterweg. geb. M 3.60.

Ruttmann, W. J., Berufswahl, Begabung u. Arbeitsleistung. Mit 7 Abb. (Aus „Natur u. Geisteswelt" Nr. 522). Leipzig 1916, Teubner. geb. M 1.50.

Sachs, H., Bau u. Tätigkeit des menschlichen Körpers. 4. Aufl. Mit 34 Abb. (Aus „Natur u. Geisteswelt" Nr. 32). Ebenda. geb. M 1.50.

Schaffer, F. X., Grundzüge der allgem. Geologie. Mit 1 Tafel u. 480 Abb. Wien 1916, Deutike. geb. M 17.—.

Schmidt, N., Aufgaben aus der technischen Mechanik. I. Bewegungslehre, Statik. II. Dynamik (Aus „Natur u. Geisteswelt" Nr. 558 u. 559). Leipzig 1916, Teubner. geb. à M 1.50.

Trabert, W., Meteorologie. 4. umgearb. Aufl. v. Dr. A. Defant. Mit 46 Abb. (Sammlung Göschen Nr. 54). Leipzig 1916, Göschen. geb. M 1.—.

Voigt, M., Das Winterplankton unserer Binnengewässer. Mit 73 Abb. Leipzig 1916, Th. G. Fisher & Co. M —.50.

Voss, A., Der Botanikerspiegel von 1905 und 1910 unwissenschaftl. u. zweckwidrig, weil weder denk- noch folgerichtig. Eine Erinnerungsschrift zur 10. Jährung des Todestages Dr. Otto Kuntzes. Mit seinem Bildnis. Berlin 1917, Vossianthus-Verlag. M 2.—.

Warburg, O., Die Pflanzenwelt. Mit 12 farb. Taf., 22 schwarz. Taf. 292 Abb. Leipzig 1916, Bibliogr. Institut. geb. M 17.—.

Wolletz, K., Arithmetik und Algebra. Mit 66 Fig. Wien 1917, A. Pichler. geb. M 3.25.

Abschluß dieser Nummer am 30. August 1917.