Jahrgang XIX. 1913. No. 2.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**,
von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von
Prof. Dr. **A. Thaer**,
Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentore in Hamburg.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Dir. Thaer, Hamburg 36, erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 8 Nummern ist 4 Mk. pränum., für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift kostenlos; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Nachdruck der einzelnen Artikel ist, wenn überhaupt nicht besonders ausgenommen, nur mit genauer Angabe der Quelle und mit der Verpflichtung der Einsendung eines Belegexemplars an den Verlag gestattet.

Inhalt: Vereins-Angelegenheiten (S. 21). — Ueber eine leicht beobachtbare Luftspiegelung bei Hamburg und die Erklärung solcher Erscheinungen. Von Dr. W. Hillers in Hamburg (S. 21). — Zum Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes. Von H. Detlefs in Frankfurt a. M. (S. 39). — Kleinere Mitteilungen [Zum Peripheriewinkelsatz. Von Ingenieur Rudolf Hennig in Hamburg (S. 39)]. — Vereine und Versammlungen [Ferienkurse in Planktonkunde (S. 40)]. — Bücherbesprechungen (S. 40). — Zur Besprechung eingetroffene Bücher (S. 40). — Anzeigen.

Vereins-Angelegenheiten.

Auf eine Eingabe des Vorstandes an Seine Exzellenz den Minister der geistlichen und Unterrichts-Angelegenheiten Herrn v. Trott zu Solz wurde dem Vorsitzenden folgende Abschrift eines Erlasses an die königlichen Provinzialschulkollegien zur Kenntnisnahme mitgeteilt:

Der Minister
der geistlichen und Unterrichts-
Angelegenheiten.
U II, Nr. 61,1.

Berlin W 8, den 5. Februar 1913.

Der Deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts wird seine diesjährige Hauptversammlung in der Pfingstwoche vom 12. bis 15. Mai in München abhalten.

Wie im Jahre 1910 (Erlaß vom 27. April 1910 — U II Nr. 886 II und III) will ich auch in diesem Jahre das Königliche Provinzialschulkollegium ermächtigen, die Direktoren der höheren Lehranstalten Seines Aufsichtsbezirkes anzuweisen, daß sie den ihnen unterstellten Lehrern, welche der bezeichneten Hauptversammlung beiwohnen wollen, den zu diesem Zwecke etwa nötigen Urlaub bewilligen, sofern dies ohne Nachteil für die betreffende Lehranstalt geschehen kann.

(Unterschrift.)

An die Königlichen Provinzialschulkollegien.

Ueber eine leicht beobachtbare Luftspiegelung bei Hamburg und die Erklärung solcher Erscheinungen.

(Vortrag, gehalten in der physikalischen Gruppe des Naturw. Vereins zu Hamburg, im Oktober 1912.)

Von Dr. W. Hillers (Hamburg).

Meine Herren! Ihre Aufmerksamkeit wage ich heute zu erbitten, um Ihnen über eine leicht beobachtbare Luftspiegelung vor den Toren Hamburgs zu berichten, die einen Schulfall für die ganze Klasse dieser Erscheinungen darstellt.

Die Beobachtung.

Gelegentlich eines Spazierganges wurde ich zufällig auf sie aufmerksam und habe sie seitdem zu den verschiedensten Zeiten und unter den mannigfachsten Umständen wiederfinden können. Trotz ihrer Auffälligkeit, wenn man einmal gelernt hat sie zu sehen, scheint sie fast gänzlich unbekannt zu sein. Das liegt an ihrer ziemlich versteckten Lage. Die Luftspiegelung, von der wir uns unterhalten wollen, ist nämlich nicht ein Schauspiel derart, wie man es sich

zunächst beim Klang dieses Wortes vorzustellen pflegt, ein in der Luft hängendes, geheimnisvolles, zauberhaftes Bild einer fernen Stadt oder eines Schiffes, sondern es gehört zu den bescheidenen Vorkommnissen dieser Art, die man in nächster Nähe einer erwärmten Wand hier und dort schon gefunden hat. Wandert man nämlich auf dem bekannten Strandwege am Elbufer von Blankenese aus Hamburg zu, so führt der Pfad am Freibade vorbei an der über 2 m hohen Granitmauer entlang, die den Abhang mit den Parkanlagen darauf nach unten hin abstützt. In schwach gekrümmtem Bogen läuft sie am Bade vorbei und hat gerade hinter dem Badeplatze eine Ecke. Von hier aus erstreckt sie sich dann geradlinig auf eine Entfernung von 188 m in ungefähr ost-westlicher Richtung. Ist nun die Mauer durch Sonnenschein einige Grade über die Temperatur der Umgebung erwärmt, so kann man von der Ecke aus, wenn man das Auge in nächste Nähe der Wand bringt, an ihr die Erscheinung der Luftspiegelung beobachten.

Die Mauer erscheint dann nämlich von einer gewissen Entfernung vom Beobachter an mit einem undurchsichtigen, wogenden und zitternden, metallisch reflektierendem Belage verdeckt. Befinden sich jenseits des zugewandten Endes dieses Belages Gegenstände in der Nähe der Mauer, so sind in der widerspiegelnden Schicht ihre Bilder gut zu erkennen, und zwar desto vollständiger, je weiter diese Gegenstände entfernt sind. Personen z. B., die gerade um die andere 188 m entfernte Ecke herumgehen, erscheinen in vollständiger Größe abgebildet, sowie sie sich der Wand entsprechend genähert haben. Bei Beobachtung mit beiden Augen gleichzeitig hat man den Eindruck, als ob die reflektierende Haut sich in großer Zartheit in einem gewissen Abstande von der Wand befindet, so daß man sogar meint, man könnte am zugewandten Ende noch ein Stück zwischen diese Schicht und die Wand hineinsehen. Bei einäugigem Sehen, besonders unter Zuhilfenahme eines Feldstechers verschwand indessen an einem Beobachtungstage diese Erscheinung; die Schicht schien damals unmittelbar an der Wand in einem Abstande anzuliegen, der 2 cm nicht überschritt. Die Grenze des zugewandten Endes bemerkte ich auch nicht scharf geradlinig abgeschnitten, sondern wie die ganze Schicht in ewiger Unruhe, sich windend und wälzend, manchmal hier, manchmal dort eine Zunge vorstreckend. Einzelne inselartige Gebiete schnürten sich ab, die zum Teil die Umrisse gewisser Granitquadern der Mauer genau wiederholten. Die Entfernung dieses zugewandten Endes wächst außerordentlich rasch, sowie man das Auge von der Wand entfernt. In einem Abstande von etwa 35 cm des Auges ist es bei der anderen Grenze der Mauer verschwunden. Der Beobachter muß also innerhalb dieser Entfernung bleiben, wenn er die Erscheinung sehen will. Schreitet man vorwärts, so bewegt sich auch das Ende des Spiegels in gleichem Maße vorauf.

Erklärung durch Totalreflexion.

Alle diese Erscheinungen sind typisch für Luftspiegelungen. Sie sind seit mehr als 100 Jahren untersucht worden. Als früheste Untersuchungen sind besonders die von Monge bekannt geworden, der im Gefolge Napoleons auf seiner ägyptischen Expedition vielfach Gelegenheit hatte, Luftspiegelungen auf dem heißen Wüstenboden zu beobachten. Bis vor kurzem war auch in den Schulbüchern der Physik die einfachste Erklärung der Luftspiegelung nach diesem Forscher üblich. Er führte sie auf Totalreflexion zurück. Unmittelbar dem heißen Wüstensande, bei uns der Parkmauer, anliegend befindet sich eine Schicht warmer Luft. Ihr Brechungsvermögen ist kleiner als das der Umgebung. Daher muß an ihr Totalreflexion eintreten, sowie ein Lichtstrahl auf sie unter einem Winkel auffällt, der größer als der Grenzwinkel ist. Strahlen, die unter kleinerem Winkel auffallen, werden nicht total reflektiert. Somit ist die Grenze der reflektierenden Schicht durch den Grenzwinkel der Totalreflexion bestimmt.

Bei unseren einfachen Verhältnissen bietet sich nun eine gute Gelegenheit die Zulässigkeit dieser nächstliegenden Erklärung durch Nachmessung zu prüfen. Deshalb bestimmte ich verschiedentlich die Temperatur der Mauer und die der Umgebung. Ein Thermometer wurde auf die Mauer gehängt, andere in weiteren Abständen davon befestigt. Dabei konnte festgestellt werden daß die Temperaturdifferenz der Mauer gegenüber der Außentemperatur sich von dieser als ziemlich unabhängig erwies. Sie wurde meist in der Gegend von $4{,}5^0$ C gefunden. Sank die Außentemperatur, so sank die der Mauer entsprechend. Damit stimmt überein, daß an der Mauer die Spiegelungen vom Frühsommer bis weit in den Herbst hinein, an Vor- und Nachmittagsstunden, ja sogar noch einige Zeit nach Sonnenuntergang scheinbar in gleicher Entwicklung beobachtet werden konnten.

Es ist nun nicht schwer, aus der beobachteten Temperaturdifferenz den zu erwartenden Grenzwinkel zu berechnen.

Legen wir die Y-Achse eines Koordinatensystems in die Längsrichtung der Mauer, die X-Achse senkrecht zu ihr (s. Fig. 1), sind α und α_1 der Einfalls- und Brechungswinkel für einen Strahl, der auf eine der Mauer parallele Schichtgrenze der Luft fällt, n und n_1 die zugehörigen Brechungsexponenten, so gilt

1) $$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} = \frac{n_1}{n}.$$

Rechnen wir die Winkel vom Lichtstrahl nicht gegen das Einfallslot, sondern gegen die Richtung der Y-Achse, so sind ihre Komplemente φ einzusetzen und wir erhalten

2) $$\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1} = \frac{n_1}{n}.$$

Es sei nun φ_0 der Grenzwinkel der Totalreflexion, n_0 der Brechungsexponent der Luft von der Temperatur der Wand, so ist $\varphi_1 = 0$ und

$$\cos \varphi_0 = \frac{n_0}{n}.$$

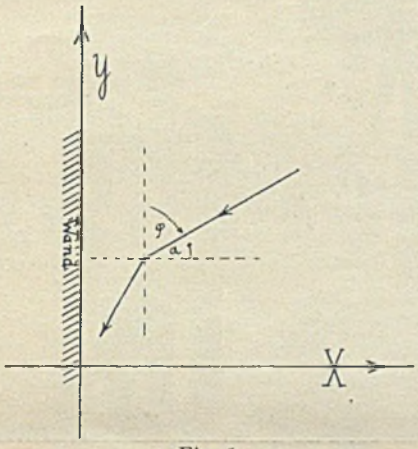


Fig. 1.

Nun gilt für Gase sehr weitgehend die Beziehung

$$\frac{n-1}{d} = \text{const},$$

wenn n den variablen Brechungsexponenten des Gases in Abhängigkeit von seiner Dichte d bedeutet. Da für das Verhältnis der Dichten in diesem Falle das umgekehrte Verhältnis der absoluten Temperaturen gesetzt werden darf, ist

3) $$(n-1) \cdot T = \text{const}.$$

Eine kleine Temperaturveränderung $\triangle T$ steht sonach mit einer kleinen zugeordneten Differenz des Brechungsexponenten $\triangle n$ in der Beziehung

3a) $$\triangle n = -\frac{\triangle T (n-1)}{T}.$$

Ist nun

$$n_0 = n + \triangle n = n - \frac{\triangle T (n-1)}{T},$$

so wird

$$\cos \varphi_0 = 1 - \frac{\triangle T (n-1)}{T \cdot n}.$$

Da $(n-1)$ stets sehr klein ist, dürfen wir offenbar $\cos \varphi_0$ auf das erste Glied entwickeln. Damit wird

4) $$\varphi_0 = \sqrt{\frac{2(n-1)\triangle T}{n \cdot T}}.$$

Hiermit ist T die absolute Temperatur der gleichtemperierten Umgebung, die in einem Falle zu 28,5° C bestimmt war, $\triangle T = 4{,}5^0$ C und n der Brechungsexponent bei 28,5° C. Genügend genau ist $T = 300$ zu setzen. Der Faktor $n = 1{,}00026$ ist zu vernachlässigen. Dann wird

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}00026 \cdot 4{,}5}{300}} = 0{,}0029 = 10'$$

Der Grenzwinkel wurde nun mehrfach aus der Spiegelgrenze noch einmal direkt bestimmt. Bei einem Augenabstande von 7 cm konnte diese einmal in einer Entfernung von 23 m festgestellt werden. Daraus folgt

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{7}{2300}, \quad \varphi_0 = 10{,}5'.$$

An einem anderen Tage wurde das Thermometergefäß zum Zwecke besseren Temperaturausgleichs mit Glaserkitt an die Mauer geheftet. Es war $\triangle T = 4{,}1^0$ C. Mit 4) folgt daraus $\varphi_0 = 9{,}5'$.

Die Entfernung der Spiegelgrenze wurde an diesem Tage möglichst genau so bestimmt, daß 62,65 m vom Beobachter eine Marke an der Mauer befestigt war. Nun wurde das Auge in einen solchen Abstand von der Mauer gebracht, daß sich die Marke gerade in der Grenze befand. Dann mußte das Auge auf (14,5 ± 1) cm von der Wand entfernt werden. Damit wird

$$\varphi_0 = \frac{14{,}5 \pm 1}{6265} = 8' - 7{,}5'.$$

Schließlich folgt aus dem Verschwinden des Bildes bei 35 cm Augenabstand in 188 m Entfernung $\varphi_0 = 6{,}4'$ und bei 30 cm Augenabstand in 150 m Entfernung $\varphi_0 = 6{,}5'$.

Der Vergleich dieser Zahlen lehrt, daß die Spiegelungen tatsächlich alle innerhalb eines recht kleinen Winkelraumes stattfinden und daß die aus den Temperaturen berechneten und die beobachteten Zahlen für den Grenzwinkel einigermaßen zu einander stimmen. Offensichtlich tritt aber eine unerwartete gesetzmäßige Abweichung auf. Die beobachteten Grenzwinkel werden nämlich desto kleiner, je weiter die Spiegelgrenze sich entfernt, d. h. die Spiegelgrenze wandert mit wachsender Entfernung des Auges von der Wand rascher als dieser Abstand wächst. Das ist aber auf keine Weise nach dem Ansatz unserer Erklärung einzusehen. Ist die Wand, was wir natürlich annehmen müssen, in ihrer Längsausdehnung überall gleich warm, so ist auch überall der Grenzwinkel derselbe. Dann aber müßte das Bild erst bei einem viel größeren Abstande als 35 cm, nämlich etwa 55 cm, verschwinden. Die Beobachtung aber, daß jenseits 35 cm niemals mehr eine Andeutung des Spiegels vorhanden ist, war stets eine der sichersten. Somit müssen wir zu dem Schlusse kommen, daß unsere einfachste Erklärung der Erscheinung durch Totalreflexion wohl in erster Annäherung als richtig gelten kann, daß sie aber für eine genauere Darstellung nicht ausreicht.

Die Lichtbilder der Luftspiegelung, mehrfache Bilder.

Um der Sache mehr auf den Grund zu gehen, war es ein lebhafter Wunsch von mir,

die Erscheinung im Lichtbilde festzulegen. Bei dieser Absicht sind besonders zwei störende Schwierigkeiten zu überwinden, die in der Natur der Sache liegen. Einmal nämlich ist ja die Größe der ganzen spiegelnden Fläche mitsamt ihren Bildern außerordentlich klein, nämlich etwa von der scheinbaren Größe 10′; dann aber steht das Bild wegen der wallenden Bewegung nicht einen Augenblick ruhig. Es kommen daher nur sehr kurz belichtete Augenblicksaufnahmen in Frage. Ich hatte das Glück, in Herrn Dr. Max Wagner aus Hamburg, einem erfahrenen Photographen, bereitwillige Unterstützung zu finden. Bei hellem Sonnenschein nahmen wir die Mauer, neben der in gewisser Entfernung von der Linse ein Knabe als Objekt stand, von der Wegbiegung aus auf. Die so gewonnenen Bilder zeigen wegen der Kleinheit von der Erscheinung außerordentlich wenig. Um Ihnen einesteils die besprochene Mauer und ihre Umgebung vor Augen zu führen, dann aber auch, um Ihnen das Erkennen in den folgenden vergrößerten Bildern zu erleichtern, da ich die Erfahrung gemacht habe, daß Beschauer sich in diese manchmal nicht recht hineinzudenken vermögen, sei Ihnen als erstes Lichtbild die beste unvergrößerte Aufnahme vorgeführt. (Fig. 2).

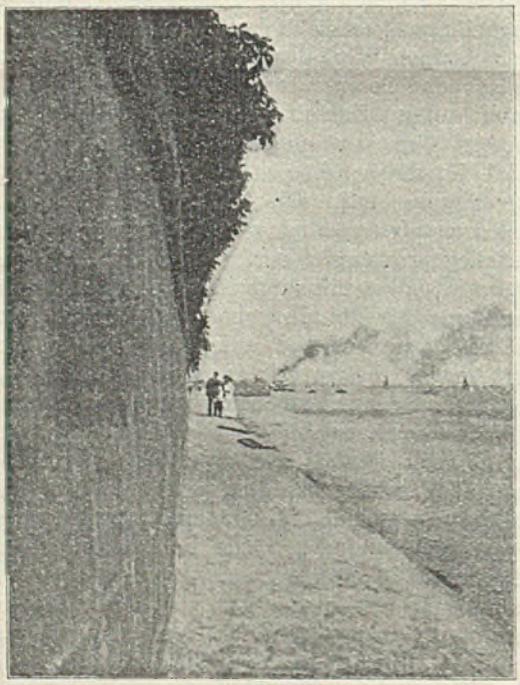


Fig. 2.

Wir sehen rechts den Elbstrom, links die von Parkbäumen überhangene Mauer und zwischen beiden den Strandweg. Die Mauer in ihrer ganzen Länge von 188 m erscheint uns stark verkürzt, da wir von ihrem Ende aus in ihrer Richtung blicken. Wir erkennen die Biegung des Endes linker Hand im Vordergrunde mit den einzelnen Granitquadern. Auf dem Strandwege befindet sich zufällig eine Gruppe von Personen. Blicken wir nun links an dieser Gruppe vorbei auf das ferne Ende der Mauer, so erkennen wir einen kleinen weißen Fleck auf ihr, in ihm das Spiegelbild eines mit weißer Bluse bekleideten Knaben, der an der Mauer lehnt. Dieser Fleck ist der reflektierende Belag der Mauer, wie Sie sehen, von einer zu winzigen Kleinheit, um genauere Einzelheiten zu unterscheiden. Das nächste Bild (Fig. 3)

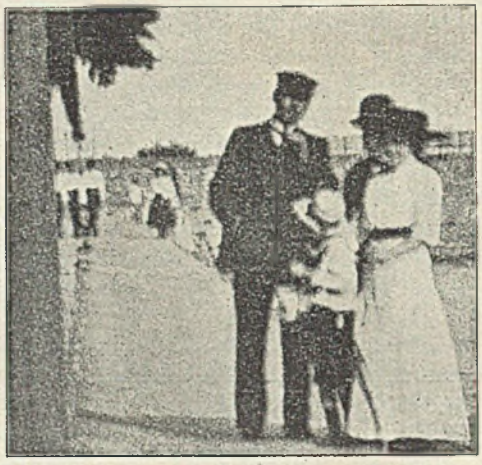


Fig. 3.

zeigt Ihnen nun die photographische Vergrößerung dieser Aufnahme. Da bietet sich sich eine außerordentliche Ueberraschung dar. Wir sehen deutlich den Knaben, der das linke Bein über das rechte geschlagen hat und unten mit dem linken Fuße ebenso wie mit dem rechten Arme die Mauer berührt. In der Mauer erscheint zunächst das zu diesem Objekte symmetrisch liegende Spiegelbild in voller Größe. Aber neben diesem ersten Spiegelbilde liegt ein zweites Spiegelbild und zwar symmetrisch zum ersten, das unmittelbare Bild des Knaben also in seitlicher Verschiebung wiederholend. Allerdings ist es nicht vollständig entwickelt. Vielmehr wird es durch die vordere Spiegelgrenze abgeschnitten, so daß etwa $^2/_3$ des ganzen Bildes erscheinen. Es fehlen die rechte Schulter mit dem Arme und der überschlagene Fuß. Uebrigens ist auch das erste Spiegelbild nicht vollständig. Der linke Arm wird zum Teil nicht abgebildet. Die Symmetrielinien der Bilder stehen nicht senkrecht, sondern sind etwas geneigt. Das nimmt nicht wunder, denn auch die Mauer ist geneigt. Während das zweite Bild (erste Spiegelbild) gegenüber dem ersten (unmittelbaren Bilde) merklich von gleicher Größe erscheint, ist das dritte (zweite Spiegelbild) offenbar stark verschmälert. Ich darf Sie vielleicht noch darauf aufmerksam machen, daß der Spiegelbelag auf dem oben vorspringenden

Sockel scharf seine Grenze abzeichnet. Ueber dem dritten Bilde biegt diese Grenze um, so daß man sich einbilden könnte, dieses Bild komme nicht auf der an der Mauer fortlaufenden Spiegelfläche zustande, sondern zu einem Querstücke dazu.

Wegen der starken Vergrößerung, die das Bild erfahren hat, zeigt es keine feineren Einzelheiten. Deshalb auch sind die Umrisse etwas verschwommen. Diese Fehler machen sich nun leider noch bedeutend bemerkbarer bei den weiteren Aufnahmen die ich Ihnen zeigen möchte. Wir sehen in dem nächsten Lichtbilde (Fig. 4)

Fig. 4.

Fig. 5.

den Knaben in derselben Entfernung vom Beobachter mit dem Oberkörper gegen die Mauer gelehnt und mit erhobenem linken Arme. Es erscheint, nicht sehr deutlich, das erste Spiegelbild, das zweite ist nur in einer geringen Andeutung vorhanden. Die nächste Aufnahme (Fig. 5), bei der der Knabe sich in geringerem Abstande vom Beobachter aufhält, ist auch nicht deutlich, und war in seiner Erscheinung zunächst nicht recht verständlich. Es sieht so aus, als hätten wir ein Spiegelbild des Knaben ohne Kopf. Die richtige Deutung ist aber die, daß auch hier zwei Bilder auftreten. Wegen der größeren Nähe zum Beobachter und dem größeren Abstande von der Wand wird aber nur die rechte Schulter und das rechte Bein abgebildet, diese aber zweimal in symmetrischer Lage der Spiegelbilder zueinander. Weitere Aufnahmen, die ich an einem anderen Tage unter etwas anderen Umständen machte, zeigten nur auf einer Platte in einem schmalen Streifen Andeutungen eines zweiten Spiegelbildes.

Die dreifache Abbildung bei Luftspiegelungen, bei denen das mittlere Bild umgekehrt zu den beiden anderen liegt, ist nun keineswegs eine neue Entdeckung. Vielmehr ist ihr Vorkommen schon vielfach beschrieben worden. Allerdings muß die Beobachtung eines solchen „dreifachen" Bildes stets zu den Seltenheiten gezählt werden. Als Beleg mag Ihnen die Tatsache dienen, daß alle Lehrbücher und Abhandlungen, die ich daraufhin eingesehen habe, immer dieselben Abbildungen enthalten, Zeichnungen, die der Engländer Vince im Jahre 1799 nach Beobachtungen mit dem Fernrohre angefertigt hat. Als einziges neueres Bild fand ich eine Skizze nach einer Beobachtung aus dem Jahre 1885 an der australischen Küste, die ich Ihnen hier im Bilde (Fig. 6) vorführe. Mein Bemühen,

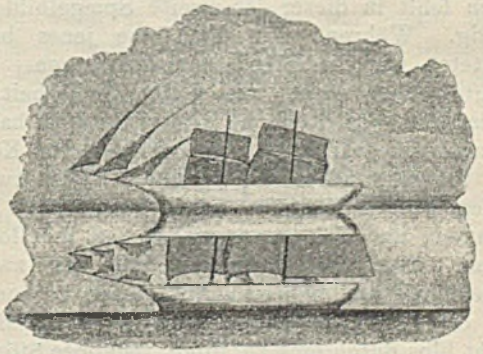


Fig. 6.

in der einschlägigen Literatur die photographische Aufnahme einer mehrfachen Luftspiegelung zu finden, war vergeblich, so daß wir zweifellos in den eben gesehenen Bildern die ersten photographischen Aufnahmen dieser Erscheinung überhaupt haben. Man könnte vielleicht meinen, unsere Beobachtung sei keine „eigentliche"

Luftspiegelung, vergleichbar mit den oft beschriebenen, besonders auf Polarreisen und an den Küsten bemerkten Beispielen dieser Art. Wie aber Gleichung 4) sicher in erster Annäherung lehrt, können der Winkelgröße nach sehr viel größere Bilder überhaupt nicht auftreten, wenn wir in der Luft nicht zu ganz unmöglichen Temperaturunterschieden kommen wollen. Ferner müssen auf dem Meere die Bilder stets in der Nähe des Horizontes liegen. Man erblickt daher Spiegelbilder ausgedehnter Gegenstände lediglich deshalb, weil man größere Entfernungen zur Verfügung hat. Die Zeichnungen solcher Bilder sind immer nach Beobachtungen mit dem Fernrohre angefertigt und in den Größenverhältnissen zur Umgebung unbewußt stark übertrieben. Ebenso wie die Bilder unserer Beobachtung in lebhafter Unruhe sind, dem durch ewige Mischung warmer und kalter Luftströmungen schlierigen Zustande der Luft entsprechend, können auch bei den angeführten Verhältnissen die Bilder nicht von dauernder Beständigkeit sein. Ist diese vielleicht auch größer als bei uns, so wird bei der Fernrohrbeobachtung doch das eine Mal dieser Teil, das andere Mal jener deutlicher gesehen werden. So erscheint in der Zeichnung ein Bild, das niemals gleichzeitig empfunden wurde. Die Schwierigkeiten einer photographischen Aufnahme sind die gleichen wie bei uns. Eine geglückte stark vergrößerte Aufnahme würde also auch bei den Seebildern mit den sauberen Zeichnungen an „Bildmäßigkeit" kaum in Wettbewerb treten können.

Offenbar hatten gerade bei uns schon kleine Zustandsänderungen der Luftschichten, in denen die Erscheinung zustande kommt, großen Einfluß auf das Bild. Die Aufnahmen 3 und 4 wurden kurz hintereinander gewonnen, und doch fehlt in dieser das zweite Spiegelbild fast völlig. Während der Aufnahme jenes beobachteten wir die Wand mit den Augen. Wir wagten aber nicht mit voller Sicherheit zu behaupten, das dreifache Bild erkannt zu haben. Einmal sah man zwei, dann wieder drei Köpfe in fortwährendem Schwanken. Das zweite Spiegelbild schrumpfte rasch zum ersten zusammen, um sich dann wieder von ihm loszulösen. Nur die Tatsache, daß das zweite Spiegelbild auf mehreren Aufnahmen vorhanden ist, beweist seine Gesetzmäßigkeit und daß es nicht blos durch eine zufällige, regellose Störung des Luftzustandes verursacht wurde.

Die bestgelungene Aufnahme ist nun von mir durchgemessen worden. Dabei stellt sich heraus, daß das erste (unmittelbare) Bild offenbar auch schon von der warmen Luft beeinflußt wurde. Seine Breite erweist sich nämlich gegenüber der Länge und den natürlichen Maßen des Knaben etwas vergrößert.

Nehmen wir die Frage nach dem Grenzwinkel wieder auf, so können wir diesen auch aus dem Lichtbilde feststellen. Ist (Fig. 7)

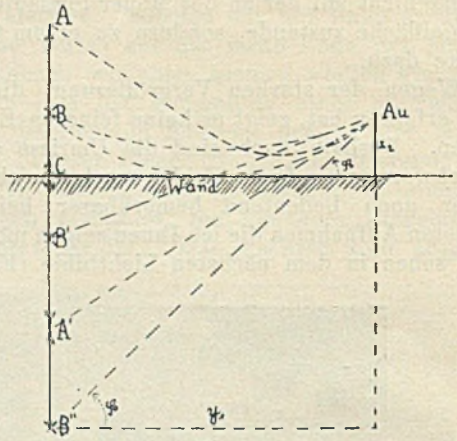


Fig. 7.

x_2 der Augenabstand von der Wand, B'' der äußerste Bildpunkt des Gegenstandes ABC, y_1 die Entfernung des Beobachters vom Objekte, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_2 + CB''}{y_1}.$$

Für Fig. 3 und 4 war $y_1 = 162{,}54$ m, für Fig. 5 $y_1 = 112{,}86$ m. x_2 wurde nach ausgeführten Aufnahmen, allerdings nicht ganz sicher, zu 16 cm bestimmt. Die Breite des Knaben war 38 cm. Davon kommen in Fig. 3 für AC zur Abbildung etwa 34 cm, auf Fig. 4 etwa 30 cm und Fig. 5 38 cm. Das Verhältnis von $AC : CB''$ wurde auf den Lichtbildern gemessen; es ist in Fig. 3 etwa 32 : 35. Damit erhält man aus den drei Bildern entsprechend

$$\varphi_0 = 11{,}6'; \ 10{,}6' \text{ und } 14'.$$

Die Werte sind etwas größer, als wie wir sie früher gefunden haben. Die beiden ersten müssen als die zuverlässigsten gelten; der letzte leidet vielleicht an einer erheblichen Unsicherheit von x_2. Die Abweichung der Werte voneinander wird teilweise wirklich sein, den ungleichen Zuständen in den Augenblicken der Aufnahme entsprechend.

Da unsere Erklärung der Bildentstehung, auf denen die Ableitung der Gleichung 4) beruhte, sicher nicht den Kern der Sache trifft, umsomehr, da es völlig unmöglich ist, mit Hilfe einfacher Totalreflexion ein zweites Spiegelbild zu deuten, so muß gefragt werden, ob denn überhaupt dem Grenzwinkel noch die ihm früher zugeschriebene Bedeutung bei der Bildentstehung zukommt. Es ist daher ein allgemeines Eingehen auf das Zustandekommen des zweiten Spiegelbildes notwendig.

Gekrümmte Lichtstrahlen.

In dem Gedankengange, der uns bisher zur Erklärung der Luftspiegelung diente, haben

wir die Annahme gemacht, als ob bis in nächste Nähe der Mauer die Temperatur konstant gleich der der „Umgebung“ sei, daß aber der Mauer eine Luftschicht von der um $\triangle T$ höheren Temperatur unmittelbar aufliege. Rohe thermometrische Untersuchungen zeigen nun allerdings, daß die gegenüber der Umgebung merklich erwärmte Luft sich keinesfalls weiter als einige Zentimeter von der Mauer nachweisbar ist. Immerhin haben wir aber eine Unstetigkeit in den Temperaturgang eingeführt, die in der Natur nicht vorkommt. Vielmehr wird von vielleicht einer dünnen Schicht merklich konstanter Temperatur unmittelbar an der Mauer ab die Temperatur nach außen hin stetig abnehmen. Denken wir uns daher die Luft in unendlich dünne der Mauer parallele Schichten konstanter Temperatur zerlegt (Fig. 8), so muß an jeder

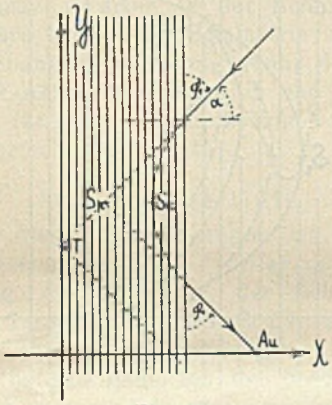


Fig. 8.

Schicht eine Ablenkung des einfallenden Lichtstrahles erfolgen. Dieser wird also stetig gekrümmt sein. Dann aber muß er in einem Punkte, seinem Scheitel *Sc*, parallel den Schichten sein. Halten wir an der mathematischen Fiktion des „Lichtstrahles“ fest, so müßte er nach dem Brechungsgesetz in dieser Richtung ungekrümmt seinen Weg fortsetzen. Da es in der Natur aber keine „Strahlen“, mathematische Linien, sondern nur endlich geöffnete Büschel gibt, so wird von einem solchen Büschel höchstens die Krümmung in einer einzigen mathematischen Richtung unstetig. Die dem Büschel zukommende endliche Wellenfläche wird im ganzen also wegen des einzigen unstetigen Punktes stetig bleiben, d. h. sie krümmt sich um den Scheitelpunkt herum. Dann muß aber der „Strahl“ symmetrisch zum Scheitel und der *X*-Richtung noch einmal die Schichten durchwandern. So hat er also vom Eintritt bis zum Austritt in die ebenen Schichten eine symmetrische krumme Linie mit einem Scheitel *Sc* beschrieben. Je steiler er von außen her auf die Schichten auffällt, desto tiefer dringt er in die Schichten ein, bis er seinen Scheitelpunkt erreicht. Eine „Spiegelung“ mit unstetiger Richtungsänderung findet nun überhaupt nicht mehr statt. Als Spiegelpunkt *Sp* könnten wir vielleicht jenen Punkt bezeichnen, in dem sich die Tangenten des ein- und austretenden Strahles schneiden. Es ist der Punkt, an dem ein den Schichten paralleler ebener Spiegel anzubringen wäre, um bei homogener überall gleichtemperierter Luft außerhalb des Gebietes der Inhomogenität denselben Strahlengang hervorzurufen. Da keine „Spiegelung“ eintritt, ist auch von einem Grenzstrahl im alten Sinne nicht mehr die Rede. Allerdings kommen nicht alle in die erwärmte Luft eintretenden Strahlen wieder zurück. Da der Scheitel *Sc* immer näher an der Wand liegt, je steiler der Strahl aus der Umgebung auf die Schichten auftrifft, so muß bei einem gewissen Grenzwinkel φ_0 der Scheitel gerade in die Wand fallen. Für jeden Winkel, der größer als φ_0 ist, würde er jenseits der Wand liegen, d. h. der Strahl müßte die Wand durchdringen. Er wird dann von der Wand absorbiert, bezw. diffus reflektiert, und findet dort sein Ende. Somit gibt es also auch hier einen Grenzstrahl, einen Strahl größter Neigung gegen die *Y*-Achse, der unter demselben Winkel von der warmen Luft zurücktritt, d. h. gewissermaßen „gespiegelt“ wird. Nun gilt für aufeinanderfolgende Schichten nach 1)

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = n_3 \sin \alpha_3 = \text{const.}$$

Ist n der laufende Brechungsexponent, α der laufende Neigungswinkel des Strahles, so ist also

$$n \cdot \sin \alpha = \text{const}$$

oder, wenn wir für α das Komplement φ einführen,

$$n \cdot \cos \varphi = \text{const.}$$

Von Schicht zu Schicht ändert sich φ. Wird n stetig kleiner, so muß auch φ stetig abnehmen. In einer bestimmten Schicht ist $\varphi = 0$ geworden, der Strahl hat seinen Scheitel erreicht. Dann hat er aber im ganzen die Ablenkung φ_1 erhalten, wenn φ_1 der Winkel war, unter dem er die äußere Grenze der Temperaturschicht traf. Hat er dabei das Gebiet $\triangle n$ des Brechungsexponenten durchwandert, so gilt

$$n_1 \cos \varphi_1 = (n_1 + \triangle n) \cos 0^0.$$

Alle in Betracht kommenden Winkel sind klein. Daher dürfen wir nach φ_1 entwickeln und erhalten

$$\varphi_1 = \sqrt{-\frac{2 \triangle n}{n_1}}$$

und mit 3 a)

5) $$\varphi_1 = \sqrt{\frac{2 \triangle T (n_1 - 1)}{n_1 \cdot T_1}}.$$

Damit ist Formel 4) wiedergewonnen; allerdings hat sie eine andere Bedeutung. Es ist in ihr φ_1 die Richtungsänderung, die der Strahl erleidet, wenn er das Temperaturgebiet $\triangle T$ bis zum Scheitel durchwandert. Für den Grenzstrahl φ_0 ist für $\triangle T$ das gesamte vorhandene Temperaturgebiet t_0 einzusetzen. Daher ist

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{2\,t_0\,(n_1 - 1)}{T_1 \cdot n_1}}.$$

Das ist aber die frühere Beziehung in alter Bedeutung. Die Neigung des „Grenzstrahles" ist also auch nach der neuen Betrachtung genau dieselbe wie die, die der Grenzstrahl an einer total reflektierenden Fläche haben würde, die zwei Gebiete der durchwanderten Temperaturdifferenz trennt. Die Neigung ist gänzlich unabhängig von der Dicke der Temperaturschicht selbst.

An der Spitze dieser Untersuchung stand die Beziehung

$$n \cos \varphi = n_1 \cos \varphi_1.$$

Sie gilt gänzlich unabhängig von der besonderen Art des Lichtweges. In einem beliebigen Punkte der Temperaturschicht ist somit die Neigung des Lichtstrahles allein bestimmt durch die in diesem Punkte herrschende Temperatur sowie die Anfangsneigung φ_1 des Strahles. Für die einzelnen individuellen Strahlen ist somit allein φ_1 der unterscheidende und bestimmende Parameter.

Wir könnten vielleicht noch fragen, was denn nun inbezug auf den austretenden Strahl gegenüber der Totalreflexion geändert sei. Eine Betrachtung der Fig. 8 lehrt uns sofort einen wesentlichen Unterschied kennen. Während der Strahl im Scheitel *Sc* tatsächlich seine tiefste Stelle erreicht, scheint er in *Sp* gespiegelt zu werden. Ein jeder Strahl von veränderlichem Parameter φ_1 hat daher seinen Scheitelpunkt *Sc* und seinen Spiegelpunkt *Sp* in verschiedenen Tiefen liegen; *Sp* und *Sc* liegen desto tiefer, je größer φ_1 ist. Bei Totalreflexion hingegen würden alle Strahlen verschiedener φ_1 an einer Fläche, etwa an der Wand selbst, reflektiert werden. Der Reflexpunkt sei *T* (Fig. 8). Dann hat also der austretende Strahl jetzt zwar dieselbe Neigung wie bei der Totalreflexion, aber er ist gegenüber diesem Strahlengange parallel verschoben. Diese Verschiebung ist für jedes φ_1 von anderem Betrage.

Die Möglichkeit mehrfacher Abbildung.

Wir betrachten (Fig. 9) zwei von einem leuchtenden Punkte *P* außeinanderlaufend in das geschichtete brechende Mittel eintretende Strahlen. Ihre Anfangsneigungen seien φ_1 und φ_2, wobei $\varphi_2 > \varphi_1$. Die Neigungen der Strahlen werden kleiner und kleiner werden, wenn sie in das Mittel eindringen. Der Strahl φ_1 erreicht zuerst seinen Scheitel S_1, später der andere S_2. Sie werden die Schichten dann rückwärts durchwandern. In jeder Schicht ist ihre veränderliche Neigung nunmehr gerade symmetrisch entgegengesetzt zu der, die sie beim Einwandern hatten. Betrachten wir die Strahlen zusammen in derselben Schicht, so sind sie jetzt um denselben Betrag zusammenlaufend geneigt, wie vorher beim Einwandern auseinanderstrebend. In jeder Schicht wird der Strahl des größeren φ weniger abgelenkt als der andere. Schichtweise verkleinert sich die gegenseitige Neigung immer mehr, verschwindet aber in der Endlichkeit nicht. Daher müssen beide Strahlen sich noch einmal wieder schneiden. Befindet sich nun in diesem Schnittpunkte das Auge *Au*, so empfängt es von *P* zwei Strahlen, d. h. es sieht von *P* zwei Bilder. Wir wollen nun den einen Strahl φ_2 festhalten und in *P* die Neigung des Strahles φ_1 ändern. Dann fällt der Schnittpunkt der Strahlen nicht mehr nach *Au*. Er wandert von *Au* auf dem Strahle φ_2. Dabei ist nicht ohne weiteres zu sagen, in welcher Richtung er sich entfernt. Das hängt ganz davon ab, wie sich

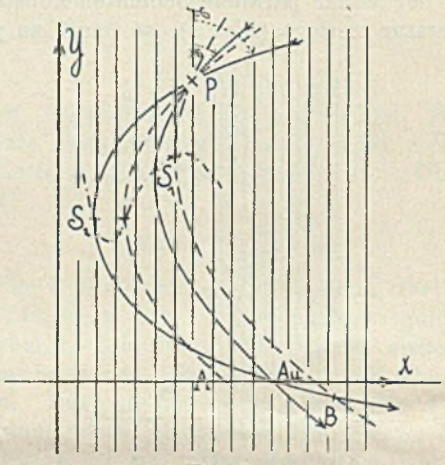


Fig. 9.

die Gestalt des Strahles ändert. Wandert der Scheitel S_1 nach unten, auf das Auge *Au* zu, von *P* fort, so verschiebt sich der Schnittpunkt auf dem Strahle φ_2 nach S_2 zu, etwa nach *A*; wandert hingegen S_1 nach oben, vom Auge fort, *P* zu, so verschiebt sich auch der Schnittpunkt von S_2 fort, etwa nach *B*. Welcher der beiden Fälle eintritt, hängt ganz davon ab, in welcher Weise der Brechungsexponent auf die Schichten verteilt ist, d. h. von der Abhängigkeit des n von der Abszisse x der Schicht, von der besonderen Form der Gleichung $n = f(x)$. Insbesondere ist denkbar und möglich, daß S_1 bei stetiger Aenderung von φ_1 im selben Sinne mehrmals aufs Auge zu und fort wandert. Dann kann der Schnittpunkt nicht nur einmal, sondern mehrfach nach *Au* fallen. Man erhält damit nicht nur zwei sondern mehr Bilder. Wir hätten sonach einen einfachen Beurteilungsgrund für die Zahl der möglichen Abbildungen. Es sind nämlich deren so viele, wie die Linie, auf der der Scheitel S_1 bei veränderlichem Parameter φ_1 gleitet, Hin- und Hergänge in der Richtung der Schichterstreckung zeigt. Maßgebend sind also die Anzahl der höchsten und tiefsten Stellen dieser Ortskurve in der Schichtrichtung. Die in der Figur an-

gedeutete Linie dieser „Scheitelpunktskurve“ zeigt drei solche Hin- und Hergänge. Danach würde also noch ein dritter Strahl ins Auge gelangen können.

Ueber die Art der Abhängigkeit des Brechungsexponenten von x ist dabei keine Voraussetzung gemacht. Hört die Veränderung von n von einer gewissen Schicht ab auf, d. h. wird hier das Mittel homogen, so bleibt die Betrachtung auch noch gültig.

Da weiter im Strahlengange P und Au vertauschbar sind, können wir auch das Auge in P denken. Dann schneiden die Strahlen durch das Auge P bei im selben Sinne stetig veränderlicher Neigung φ_1 die Punkte der X-Achse aus. Jeder Strahl liefert einen Bildpunkt dieser Geraden. Beschreibt dabei der Scheitel der Strahlen eine Linie mit verschiedenen größten und kleinsten Werten in der Schichtrichtung, so wandert wegen der Symmetrie der Gestalt der Lichtbahnen der Schnittpunkt der Strahlen mit der X-Achse auf dieser hin und her. Diese wird also für gewisse Teile mehrfach überfahren, d. h. mehrfach abgebildet.

Die Spiegellinie.

Nach diesen Betrachtungen ist für die in einem bestimmten Falle vorliegende Art der Abbildung die Ortskurve der Scheitel aller Strahlen durchs Auge maßgebend. Allgemeines läßt sich über sie nicht aussagen. Ihre Eigenschaften hängen ganz von der besonderen Art der Funktion $n = f(x)$, oder $t = f(x)$ ab, wenn t die im Punkte $x = \text{const}$ bestehende Temperaturdifferenz gegenüber der gleichtemperierten Umgebung ist. In der Tat sind die Untersuchungen über Luftspiegelungen, wie sie von Biot und Arago, von A. Schmidt, Tait u. a.*) geführt worden sind, so in Angriff genommen worden, daß man willkürliche für die Rechnung möglichst bequeme Annahmen über diese fraglichen Funktionen machte und dann als Hilfskurven die Scheitelpunktslinie oder andere Kurven behandelte. Erst nachträglich wird dann gefragt, ob die angesetzte Funktion x wohl mit der Wirklichkeit verträglich ist. In einer vollendeten experimentellen Arbeit stellen Macé de Lépinay und Perot die Natur solcher Hilfskurven an künstlichen geschichteten Medien fest, um daraus Rückschlüsse auf Luftspiegelungen zu ziehen.

Bei meinen eigenen Ueberlegungen zur Aufklärung der besprochenen Erscheinungen waren mir zunächst die Untersuchungen dieser Forscher gänzlich unbekannt. Ich suchte daher Aufklärung zu gewinnen dadurch, daß ich die Abbildungen mit solchen von Spiegeln verglich. Da in unseren Beobachtungen sicher das Auge sowie der größte Teil des Objekts sich außerhalb der veränderlichen Temperatur befanden, daher die Lichtstrahlen in der Nähe von Auge und Objekt geradlinig waren, wandte ich den Spiegelpunkten (Sp auf Fig. 8) meine Aufmerksamkeit zu. Sie haben eine große physikalische Anschaulichkeit, da wir uns in ihnen schichtenparallele ebene Spiegelchen denken können. Bei veränderter Neigung der Strahlen durch einen Punkt beschreibt ein solches Spiegelchen auch eine Linie, die wir Spiegellinie nennen wollen. An sie lassen sich dann ganz ähnliche Betrachtungen wie an die Scheitelkurve anknüpfen. So ist ein großer Teil der folgenden theoretischen Ergebnisse zunächst mit dem Begriff der Spiegellinie gewonnen worden. Mit einem wirklichen Spiegel hat sie gemein, daß an ihren Punkten Spiegelungen der auffallenden Lichtstrahlen stattfinden. Aber die Einfallslote stehen ungewohnterweise nicht senkrecht zu ihr, sondern sind alle einander parallel, nämlich senkrecht zu den Schichten gleicher Temperatur, parallel dem Objekt.

Es hat vielleicht schon an und für sich einen gewissen Reiz, die Bilder solcher eigenartigen Spiegel zu untersuchen. Für einige besondere Fälle lassen sich sofort einige Eigenschaften angeben. Bei Totalreflexion an einer Grenzschicht fällt die Spiegellinie mit der Schichtgrenze zusammen, alle Einfallslote stehen senkrecht zu ihr. Wir haben eine gewöhnliche Abbildung durch einen ebenen Spiegel vor uns. Das trifft auch dann immer zu, aber auch nur dann, wenn die Spiegellinie in die Schichtrichtung fällt. Da bei starker Temperaturdifferenz auf engem Gebiete die Verhältnisse sich der Totalreflexion nähern, so wird die Spiegellinie als nicht sehr verschieden von einer Geraden angenommen werden können. Der einfachste allgemeinere weitere Fall ist dann der, daß die Spiegellinie eine gegen die Temperaturschichten geneigte Gerade ist. Dieser Fall hat ein geometrisches Interesse. Man kann dann nämlich leicht einsehen, daß ein Gegenstand rein geometrisch zweimal abgebildet wird. Es seien in Fig. 10 Au das Auge, ADC der abgebildete Gegenstand, CP die Spiegelgerade, während die Temperaturschichten die Richtung des Lotes AuD von Au auf AC haben, die Einfallslote in P, R, P', Q also parallel zu AC sind. Dann fällt ein Bildpunkt C' von C mit C zusammen, während ein anderer nach C'' kommt, wobei $C''QAu$ und QPC symmetrisch zum Einfallslot in Q liegen. Ein anderer mit dem Objektpunkt zusammenfallender Bildpunkt ist der Fußpunkt D des Lotes von Au auf AC. Errichtet man auf DAu das Mittellot, so erhält man auf der Spiegellinie den Fußpunkt R des Einfallotes für einen Strahl, der ein zweites Bild D' von D liefert. Entsprechend kann man für jeden

*) Literaturnachweis s. Handb. der Physik, 1906: VI, 2, 558 ff. Autor Straubel oder Pernter-Exner, Lehrb. der metereol. Optik. 1910.

Objektpunkt A zwei Bildpunkte A' und A'' bestimmen. Durch nähere Betrachtung ergibt sich noch der interessante Satz, daß diese Strahlen AP, d. h. also die Strahlen der Objektpunkte, die nach der Reflexion ins Auge gelangen, als Tangenten einen Kegelschnitt einhüllen. Eine dieser Tangenten ist auch CQ, während das Objekt nicht zu den Tangenten gehört. Dadurch wird die zweifache Abbildung verständlich, denn durch jeden Objektpunkt gibt es zwei Tangenten AP und $A'P'$ an dem Kegelschnitt, denen dann die beiden Bildpunkte A' und A'' zugeornet sind.

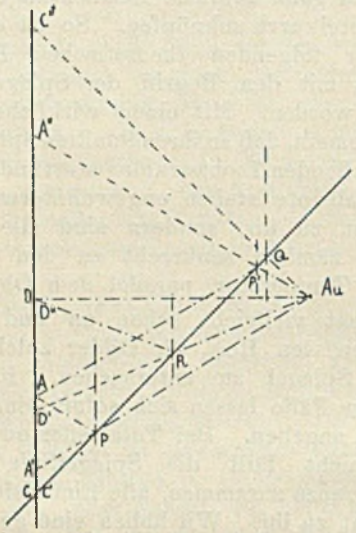


Fig. 10.

Wir sind schon ein wenig in die besonderen Untersuchungen über die Anzahl der Bilder hineingeraten und hätten also folgendes Resultat gewonnen: Ist ein Mittel so geschichtet, $n = f(x)$ so beschaffen, daß die Spiegelpunkte auf einer Geraden liegen, so gibt es allgemein zwei und nur zwei Abbildungen. Dabei ist für unsere Frage der Luftspiegelung allerdings noch die wichtige Untersuchung anzustellen, inwiefern dieser zweifachen Abbildung auch physikalische Bedeutung innewohnt; im allgemeinen wird allein das eine Bild physikalisch realisierbar sein.

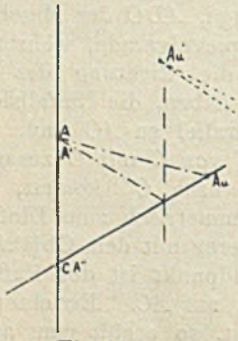


Fig. 11.

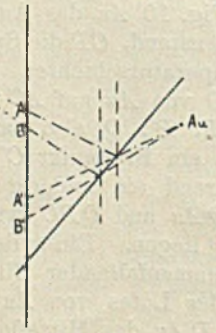


Fig. 12.

Nur zwei Bemerkungen sollen noch hieran geknüpft werden. Geht nämlich die Spiegelgerade durchs Auge hindurch (Fig. 11), so fällt das eine Bild mit dem Objekte zusammen, während die zweite Abbildung ganz zum Punkt C entartet. Schneiden sich auf dem Wege zum Auge die Strahlen benachbarter Objektpunkte A und B (Fig. 12) nicht, so ist das Bild $A'B'$ dem Objekt gleichsinnig; schneiden sie sich (Fig. 13), so liegen Objekt AB und Bild $A'B'$ ungleichsinnig.

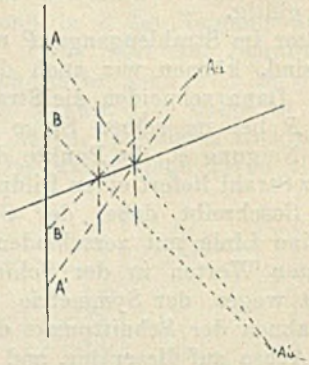


Fig. 13.

Wir haben bisher das Bild stets in derselben Entfernung mit dem Objekt vom Auge angenommen, die Bildpunkte durch die ins Auge gelangenden Strahlen auf die Objektgerade projiziert. Das ist für die meisten Zwecke zulässig (s. Fig. 7). Physikalisch ist aber der Bildpunkt nicht durch einen einzigen Strahl bestimmt, sondern er ist der Konvergenzpunkt eines schmalen ins Auge fallenden geöffneten Büschels. Vertauschen wir in Fig. 12 und 13 Auge und Objekt, fasse also das Auge AB ein schmales Büschel auf, das vom Objektpunkt Au ausgeht, so ist Au' der Konvergenzpunkt dieses Büschels. Es liegt in Fig. 12 der Bildpunkt in Wirklichkeit hinter dem Auge; nur ein übersichtiges Auge würde ihn scharf sehen können. In Fig. 13 liegt das Bild vor dem Auge, aber mit dem Objekt keineswegs im selben Abstande. Wann der eine oder der andere Fall eintritt, hängt von der gegenseitigen Lage von Spiegelgerade, Auge und Objekt ab.

Da wir ein kurzes Stück einer jeden Spiegellinie, wie sie auch sonst beschaffen sein mag, als gerade ansehen dürfen, haben dieses Bemerkungen eine allgemeinere Bedeutung.

Schauversuche.

Ehe wir nun nach diesen Vorbereitungen in die etwas trockenen analytisch-mathematischen genaueren Untersuchungen des Abbildungsproblems unserer Beobachtungen eintreten, möchte ich Ihnen an der Hand einiger, wie ich hoffe, leicht übersehbarer und einfach verständlicher Versuche noch einmal die physikalischen Verhältnisse vorführen. Ich werde Ihnen deshalb zunächst gekrümmte Strahlen zeigen, sodann an einer nachgeahmten inhomogenen Luftschicht

das dreifache Bild und schließlich eine wirkliche Luftspiegelung an warmer Luft.

1. Versuch. Sie sehen hier zunächst einen Glastrog aus dicken Spiegelglasplatten aufgebaut, von den Maßen 100 × 12 × 16 cm. Er ist unten (Fig. 14) mit Wasser *Wa*, darüber, vorsichtig

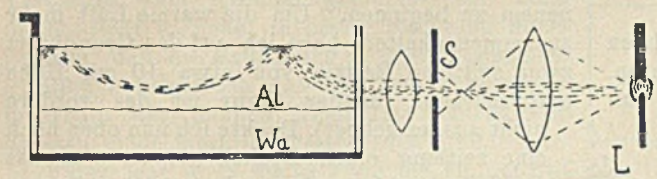


Fig. 14.

überschichtet, mit Alkohol *Al* gefüllt. Die beiden Flüssigkeiten sind etwa drei Stunden in Berührung, sind also zum guten Teil ineinander diffundiert. So ändert sich von oben nach unten allmählich der Brechungsexponent von dem des reinen Alkohols 1,36 zu dem des Wassers 1,33. Es entspricht also die Wasserseite unten der warmen Wand, der Alkohol oben der Umgebung von niedrigerer Temperatur. In den Alkohol habe ich nun einige Tropfen einer konzentrierten alkalischen Fluoreszeinlösung gemengt. Lasse ich jetzt von der Bogenlampe *L* durch den horizontal stehenden Spalt *S* ein Lichtbündel fallen, so sehen Sie überall im Saale deutlich in dem lebhaft grünen Fluoreszenslicht den gekrümmten Strahl innerhalb der Flüssigkeit. Auch wenn er horizontal eintritt, also parallel den Schichten von gleichem Brechungsverhältnis, so wird er rasch nach oben abgelenkt, erleidet nun an der Oberfläche wirkliche Totalreflexion, kehrt noch einmal in das inhomogene Mittel zurück, wird vollständig umgebogen und zum zweiten Male total reflektiert. Wir haben also ganz ähnliche Verhältnisse wie an der Mauer. Während aber hier im Versuch der Krümmungsradius etwa 1 m ist, beträgt sein Wert dort mehrere Kilometer. Es ist übrigens leicht, durch besonders vorsichtiges Arbeiten beim Ueberschichten kurz nach dem Ansetzen der Flüssigkeit so starke Krümmungen zu erzielen, daß man drei aneinandergehängte Bögen mit viermaliger Totalreflexion an der Oberfläche erhält.

2. Versuch. Es liegt nahe, mit der eben vorgeführten Versuchsanordnung auch nach „Luftspiegelungen" zu suchen. Für diesen Zweck habe ich Ihnen (Fig. 15) einen anderen Glastrog von Spiegelglas aufgestellt, der Maße 12 × 16 × 25 cm. Er ist ebenso mit vorsichtig überschichtetem Wasser und Alkohol gefüllt und steht schon vier Stunden in diesem Zustande. Hinter dem Glastroge sehen Sie eine Mattglasscheibe *M*, die ich von der Rückseite durch die Lampe *L* hell erleuchte. Zwischen diese Scheibe und den Trog habe ich eine Pappkarte gebracht, aus der ein F in der Größe von etwa 7 mm ausgeschnitten ist. Blicken wir nun von der anderen Seite aus einem gewissen Abstande (von *Au*) durch die Alkoholschicht, so sehen Sie zunächst das hellerleuchtete F „unmittelbar" durch den Alkohol hindurch. Etwas tiefer dem Wasser zu erblicken wir dann das „erste Spiegelbild" und noch tiefer das zweite. Damit Sie die richtigen Bilder nicht mit den anderen störenden Reflexen an den Glaswänden und der Oberfläche verwechseln, habe ich ein leeres Rohr aufgestellt, durch das Ihr Blick auf die drei Bilder geleitet wird (in der Figur nicht gezeichnet). Wir sehen das „erste Spiegelbild" umgekehrt zum unmittelbaren, das zweite gleichsinnig. Während das erste mit dem Objekt gleich groß, vielleicht noch etwas vergrößert erscheint, ist das zweite auffällig verkürzt. Das mittlere Bild, das erste Spiegelbild, ist mit der Stellung des Auges ungemein beweglich, während die beiden anderen ganz fest liegen. Durch geeignete Kopfstellung können wir erreichen, daß es das eine oder andere dieser beiden berührt. Dann bilden sich kurz vor der Berührung Lichtbrücken zwischen den Bildern, sie zerren sich auseinander. Während die beiden gleichsinnigen Bilder vollkommen scharfe Umrisse zeigen, so ist dieses unschärfer. Nähern sie das Auge dem Troge, so wird es schwieriger zu sehen, man fühlt deutlichen Akkommodationszwang der Augen bei dem Bemühen, es genau ins Auge zu fassen. Offenbar liegen also zweites und drittes Bild in ganz verschiedenen Entfernungen, und zwar das zweite in großer Augennähe.

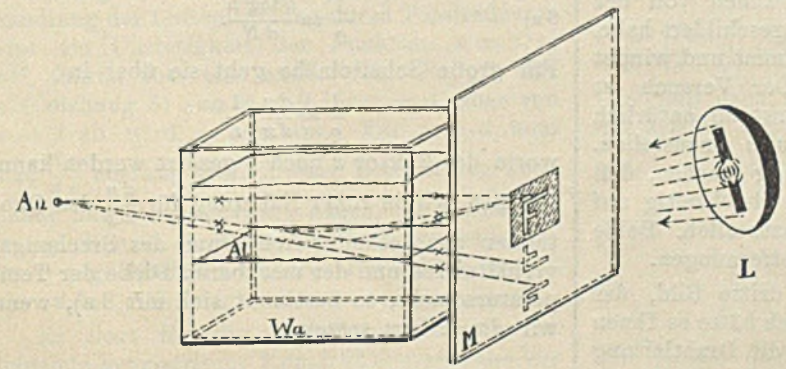


Fig. 15.

Wir haben somit in der dreifachen Abbildung ganz die früher beschriebenen Verhältnisse. Nur war dort an der warmen Wand der Grenzwinkel 10′, hier ist er von dem viel größeren Betrage von 12°. Daher können wir schon in diesen kleinen Maßstäben die Erscheinung so schön hervorrufen.

Wenn wir nach einer gewissen Zeit wieder nachschauen würden, vielleicht morgen, so

würden wir sehen, daß die Bilder viel näher aufeinandergerückt sind. Das Gefälle der Brechungsexponenten wird mit fortschreitender Mischung der Flüssigkeiten kleiner. Das Schauspiel verschwindet dann allmählich derart, daß das zweite Spiegelbild mit dem ersten verschmilzt, dann dieses mit dem unmittelbaren.

3. Versuch. Schließlich möchte ich Ihnen noch eine wirkliche Luftspiegelung vorführen. Ich habe hier (Fig. 16) ein 2 m langes und

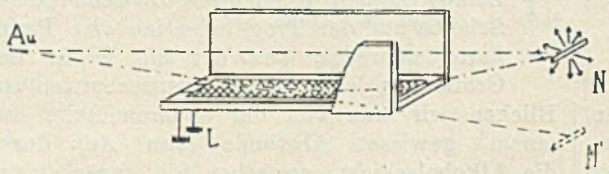


Fig. 16.

8 cm breites Brett, mit der Breitseite horizontal, auf dem zunächst eine Lage Asbestpappe befestigt ist. Auf dieser habe ich einen 12 m langen und 0,4 mm dicken Eisendraht hin- und hergespannt. Damit er von der Luft abgeschlossen ist, wurde er mit einer gut durchgerührten Pasta aus Mangnesiumoxyd und Wasserglas überdeckt. Diese Masse erhärtet rasch. Ihr wurde noch ein wenig Ruß beigemischt, um einen dunklen Hintergrund zu erzielen. Seit etwa 10 min schicke ich nun einen elektrischen Strom durch den Draht mit den Anschlußklemmen *L*. Ich habe 110 Volt der Starkstromleitung allmählich kurz angelegt. Dadurch erhalte ich einen Heizstrom von gegen 3 Ampere. Er hat, wie Sie sich durch Befühlen überzeugen können, die Pasta auf kaum noch erträgliche Temperatur von etwa 100° C gebracht. Blicken wir nun aus etwa 3 m Entfernung von dem Brett dicht über seine Längserstreckung nach dem hellglühenden Stift *N* der Nernstlampe, der wenig oberhalb der Brettebene sich befindet, so sehen wir deutlich in dem Brett ein ebenso glänzendes Reflexbild *N'*. Die beiden Bilder sind schätzungsweise um 6 cm voneinander entfernt; danach ist der Grenzwinkel etwa 40', was auch nach der Temperatur und Formel 5 zu erwarten ist.

Das Bild ist, wie ich es Ihnen von der Beobachtung an der Mauer her geschildert habe, in ewiger Unruhe; der Stift krümmt und windet sich, zittert und schwankt. Der Versuch ist statt des Nernststiftes als Gegenstand natürlich auch mit einem schmalen Spalte anzustellen. Dabei kann man die Beobachtung machen, daß es unmöglich ist, ein Fernrohr gleichzeitig auf Spalt und Spiegelbild scharf einzustellen. Beide liegen also in ganz anderen Entfernungen.

Vielleicht werden Sie das dritte Bild, das zweite Spiegelbild, vermissen. Ich hätte es Ihnen auch gern vorgeführt. Als ich die Drahtleitung mit 220 Volt kurz speiste, konnte ich in günstigen Stellungen beobachten, wie manchmal das Bild sich in zwei spaltete, die dann längere oder kürzere Zeit getrennt dicht nebeneinander in schätzungsweise einigen Millimetern Abstand ihre Verrenkungen ausführten, dann stellenweise oder ganz zusammenflossen, um das Spiel von neuem zu beginnen. Um die warme Luft mehr zusammenzuhalten, habe ich auf das Grundbrett zwei seitliche Bretter von etwa 10 cm Höhe aufgeschraubt (in der Figur ist das vordere nicht ausgezeichnet). Deckte ich nun oben noch eine zeitlang einen Deckel auf, so war das dreifache Bild besonders in den nächsten Augenblicken zu erkennen, nachdem der Deckel wieder abgehoben wurde. Es stieg dabei aber die Temperatur so hoch, daß das Holz anfing zu verkohlen. Auch brannte mir einmal der Draht durch. Daher muß ich leider auf die Vorführung der dreifachen Abbildung verzichten, um den Apparat nicht zu gefährden. Erwähnenswert für die Bedingungen der Bilderzeugung ist noch, daß an Stelle des Spiegelbildes eine einfache Verschiebung und Verzerrung des unmittelbaren Bildes trat, also nur eine „Kimmung", als ich das Brett umgekehrt, mit der Heizplatte nach oben und den Seitenbrettern nach unten auf den Tisch stellte. Dadurch wurde offenbar die Luftzirkulation stark gestört. In ursprünglicher Stellung ging das Schauspiel auch dann stark zurück, als das deckende Brett aufgelegt war, trotzdem innerhalb der prismatischen Luftsäule dadurch eine höhere Temperatur erzielt wurde. Wir sehen also, daß zur Bilderzeugung ein starkes Temperaturgefälle mit der Entfernung von der warmen Fläche notwendig ist.

Genauere analytische Untersuchung.

Das beherrschende Gesetz für eine eingehendere Untersuchung bleibt das Brechungsgesetz. In der differenzierten Form wird die Gleichung 1)

6) $$d n \sin \alpha + \cos \alpha \cdot n \cdot d \alpha = 0.$$

Ist ϱ der Krümmungsradius der Lichtbahn, dN ein unabhängiges Streckendifferential in der Richtung der Normalen, so kann man durch einfache Umformung erhalten*)

6 a) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{d \log n}{d N}.$$

Für große Scheitelnähe geht sie über in

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d n}{d x} \cdot \frac{1}{n},$$

worin der Faktor n noch 1 gesetzt werden kann. Nehmen wir in roher Näherung für $\frac{d n}{d x}$ den Quotienten aus gesamter Aenderung des Brechungsverhältnisses und der merkbaren Dicke der Temperaturschicht, so bestimmt sich mit 3 a), wenn wir $d x = 3\ cm$ setzen

*) S. Handb. der Physik l. c.

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{4{,}5 \cdot 0{,}00026}{3 \cdot 300} \sim 10^{-6} \text{ oder}$$

$$\varrho \sim 10^6 \sim 10\, km.$$

Innerhalb der Temperaturschicht sind die Bahnen sonach außerordentlich schwach gekrümmt. Da der Abstand der Bahnpunkte von der Wand im Verhältnis zum Krümmungsradius sehr klein bleibt, liegt es nahe, in erster Näherung anzunehmen, daß die Krümmung in diesem schmalen Streifen konstant ist, daß also die Bahnkurven innerhalb der dünnen Temperaturschicht von Kreisen nicht merklich verschieden sind.

Führt man in 1) die tg-Funktion ein, so gilt

$$\operatorname{tg} a = \pm \frac{n_1 \sin a_1}{\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 a_1}}.$$

Hierin seien a und n mit x stetig veränderlich, a_1 und n_1 bekannte Werte für x_1. Führt man für tg a den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ ein, so erhält man

$$7) \qquad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{n_1 \sin a_1}{\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 a_1}}.$$

Das ist die Differentialgleichung der Bahnkurve. Ihre Integration erfordert Kenntnis der Funktion $n = f(x)$. Die Integration wird sich aber nur in besonderen Fällen allgemein ausführen lassen.

Kreisförmige Lichtbahnen.

Die Lichtbahn sei innerhalb der Temperaturschicht ein Kreis der Gleichung:

$$(a - x)^2 + (y - \eta)^2 = r^2.$$

Dann ist mit 7)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - x}{\sqrt{r^2 - (a - x)^2}} = \frac{n_1 \sin a_1}{\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 a_1}} \text{ und}$$

$$8) \qquad n = \frac{n_1 \sin a_1 \cdot r}{a - x}.$$

Dieses „Kreisgesetz" gelte von $x = 0$ bis $x = d$, wobei d die merkliche Dicke der Temperaturschicht ist. Das Auge und der größte Teil des Objekts befinden sich außerhalb dieser Schicht. Die Strahlen müssen hier gerade sein. Da diese geraden Strahlen stetige Fortsetzungen der gekrümmten sein sollen, müssen sie in $x = d$ Tangenten an die Kreise sein (s. Strahlengang in Fig. 7, 8, 15 und 16). Wir geben durch die jetzigen Festsetzungen gegenüber der Behandlung der Luftspiegelung durch Totalreflexion also die Unstetigkeit der Funktion $n = f(x)$ auf, führen aber eine andere ein. Es gilt für n Gleichung 8) von $x = 0$ bis $x = d$, aber von $x = d$ ab wird n konstant. Für $x = d$ muß also $\frac{dn}{dx}$ unstetig sein. Unsere Betrachtung kann daher nur Näherungswert haben, da solche Unstetigkeiten in der Natur nicht vorkommen. Sie kann gegenüber der früheren Betrachtungsweise als zweite Näherung gelten.

Es liegt für die gemachten Festsetzungen folgende geometrische Konstruktionsaufgabe vor (Fig. 17). Zwei Punkte Au und P, Auge und Gegenstandspunkt, sollen durch einen Linienzug verbunden werden, der aus zwei Tangenten an einen Kreis und dem Bogenstück des Kreises zwischen den Berührungspunkten besteht. Diese sollen auf einer gegebenen Geraden G liegen,

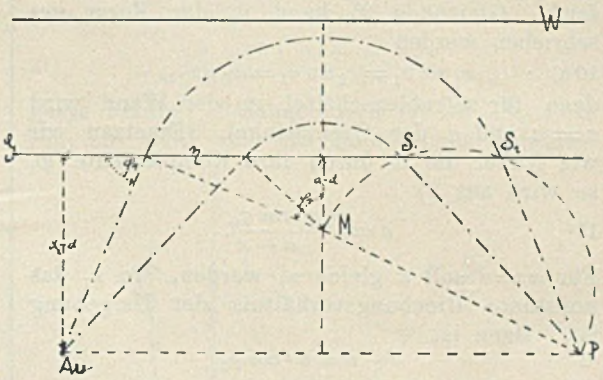


Fig. 17.

der Temperaturgrenze, im Abstande d von der Geraden W, der Wand. Es ist nun leicht einzusehen, daß diese Aufgabe noch unbestimmt ist. Haben die Punkte Au und P im besonderen Falle von G denselben Abstand, ziehen wir das Mittellot zu AuP, nehmen auf ihm einen beliebigen Punkt M an, so schneidet der Halbkreis über PMG nach zwei solchen Berührungspunkten S_1 und S_2. Dadurch sind zwei Kreise mit den Radien MS_1 und MS_2 der verlangten Eigenschaft bestimmt. Die Aufgabe hat also für den gewählten Punkt M zwei Lösungen. Wegen der Willkür des gewählten M ist sie unbestimmt.

In Gleichung 8) erscheint n als Funktion von x. Aber auch a und r brauchen keine Konstanten zu sein. Wir wissen, je kleiner der Neigungswinkel a_1 im homogenen Mittel ist (s. S. 28), desto tiefer dringt der Strahl in die Temperaturschicht ein. Mit a_1 werden also im allgemeinen auch a und r sich ändern. Wenn aber unsere Gleichung als Bestimmungsgleichung für die Abhängigkeit des n von x einen Sinn haben soll, so darf n nur von x, nicht von a_1 abhängen. Es muß also gelten

$$\frac{dn}{da_1} = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{d}{da_1}\left(\frac{r \sin a_1}{a - x}\right) = \frac{1}{a - x}\frac{d(r \sin a_1)}{da_1} - \frac{r \sin a_1}{(a - x)^2} \cdot \frac{da}{da_1} = 0.$$

Das muß ganz unabhängig von x gelten. Damit zerfällt die Gleichung in

$$9) \qquad \frac{d(r \sin a_1)}{da_1} = 0 \text{ oder}$$

$$r \sin a_1 = \text{const}$$

und

$$10) \qquad \frac{da}{da_1} = 0 \text{ oder}$$

$$a = \text{const}.$$

Das ist ein wichtiges Ergebnis. Gleichung 10)

lehrt: Ist ein inhomogenes parallelflächig geschichtetes optisches Mittel so beschaffen, daß die Lichtkurven Kreise sind, so haben die Mittelpunkte aller dieser Kreise von der ebenen Grenze des Mittels denselben Abstand. Dieser bemerkenswerte Satz ist schon bekannt,*) wie ich später fand. Gleichung 9) kann in der Form geschrieben werden

10 a) $$r_1 \sin \alpha_1 = r_2 \sin \alpha_2 = a \cdot \sin \alpha_0,$$

denn für Strahlenscheitel in der Wand wird $r = a$ und α der Grenzwinkel. Ersetzen wir wie früher die α durch ihre Komplemente φ, so wird aus 8)

11) $$n = \frac{n_1\, a \cdot \cos \varphi_0}{a - x}.$$

Für $x = d$ soll n gleich n_1 werden, wo n_1 das konstante Brechungsverhältnis der Umgebung ist. Dann ist

$$a - d = a \cdot \cos \varphi_0$$

oder nach φ_0 entwickelt

12) $$d = \frac{a \cdot \varphi_0^2}{2}, \quad a = \frac{2\,d}{\varphi_0^2}.$$

Damit gewinnt 11) die Form

13) $$n = \frac{n_1 (a - d)}{a - x}.$$

Unsere Kreisgleichung wird mit 10 a)

$$(a - x)^2 + (y - \eta)^2 = r^2 = \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_1}.$$

Für die Scheitelabszisse ξ folgt daraus

14) $$\xi = a - r = \frac{a (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0)}{\cos \varphi_1}$$

oder entwickelt

$$\xi = \frac{a}{2} (\varphi_0^2 - \varphi_1^2).$$

Die Kreisgleichung kann in der Form geschrieben werden

$$x^2 + (y - \eta)^2 = 2\,a\,x - (a - r)(a + r),$$

oder, da im Beobachtungsbereich x gegen a verschwindet, und a und r merklich gleich sind,

$$(y - \eta)^2 = 2\,a\,(x - \xi).$$

Wir dürfen unsere Kreisbögen nach Bedarf also auch als Parabelbögen ansehen. Der Spiegelpunkt ist der Schnitt der Tangenten in $x = d$. Nach einem bekannten Parabelsatze steht danach die Abszisse ξ' des Spiegelpunktes in der Beziehung

$$\xi - \xi' = d - \xi \quad \text{oder}$$

15) $$\xi' = 2\,\xi - d.$$

Ist x_2 die Abszisse des Auges Au, so liest man aus Fig. 17 ab

$$\eta = (x_2 - d) \cdot \cot \varphi_1 + (a - d) \operatorname{tg} \varphi_1$$

oder

16) $$\eta = \frac{x_2 - d}{\varphi_1} + a \cdot \varphi_1.$$

In diesen Beziehungen sind n_1, φ_0 allgemeine, φ_1 eine für jeden Strahl individuelle Konstante, der Strahlenparameter, während a und damit d als Funktionskonstante der Funktion $n = f(x)$ erscheint. Nach 13) soll bei kreisförmigen Bahnen genau gelten

17) $$\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\,x} = \text{const.}$$

Ist t die im Punkte x gemessene Temperaturdifferenz gegenüber der gleichtemperierten Umgebung, t_0 diejenige für $x = 0$, so gilt aus 13) mit 3) bei Vernachlässigung kleiner Größen wie früher

18) $$t = \frac{d - x}{d} \cdot t_0.$$

In der Temperaturschicht soll also die Temperatur mit dem Abstande von der Wand linear abfallen.

Geometrische Konstruktion der beiden Bilder (Fig. 18).

Nach 10) haben also alle Lichtbögen in Fig. 17 ihre Mittelpunkte auf einer Parallelen zu W im gegebenen Abstande a. Nehmen wir wieder zunächst Au und P in gleichem Abstande von G an, so schneidet der Kreisbogen über MPG zweimal, wobei M auf dem Mittellote von AuP liegt. Au erblickt danach zwei Bilder P' und P'' von P, die wir auf die Objektgerade, das Lot von P auf W, projizieren. Da von P

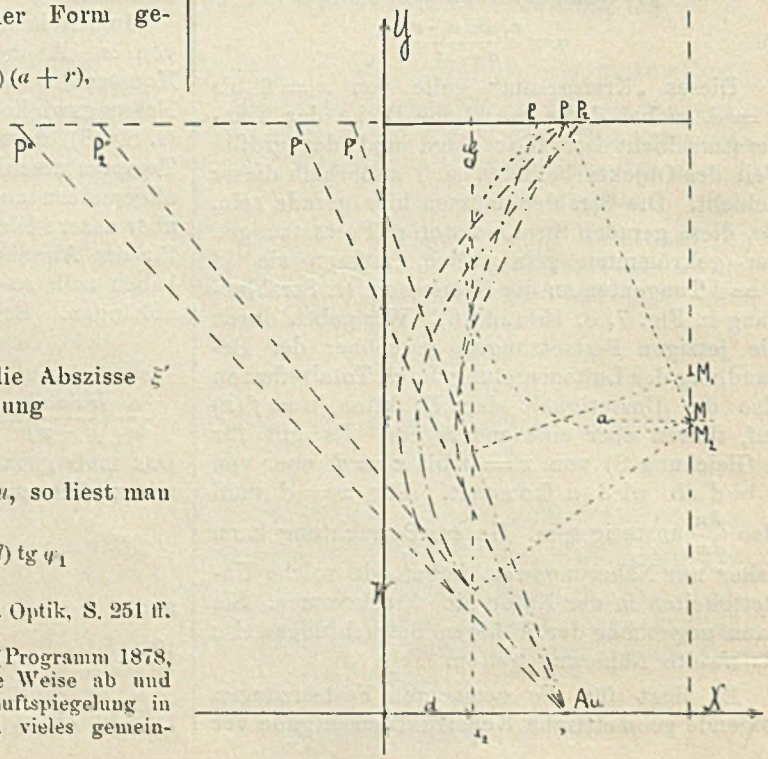


Fig. 18.

*) S. Garbasso 1908. Archiv f. Optik, S. 251 ff. Handb. d. Phys. VI, 2, S. 492.
Insbesondere leitet A. Schmidt (Programm 1878, Stuttgart) den Satz auf eigentümliche Weise ab und verwendet ihn zur Erklärung der Luftspiegelung in einer Art, die mit der vorliegenden vieles gemeinsam hat.

weiter ein geradliniger Strahl unmittelbar nach Au gelangen kann, so haben wir im ganzen drei Bilder P, P' und P''.

Ein dem Bildpunkte P'' benachbarter Punkt P_2'' bildet den Objektpunkt P_2 ab. Der zugehörige Mittelpunkt M_2 des Kreisbogens wird durch das Lot auf $Au\,P_2''$ in G bestimmt. Entsprechend bildet der P' benachbarte Bildpunkt P_1' den Punkt P_1 ab. Die Lichtbahnen PAu und $P_1\,Au$ schneiden sich. Daher liegt das Bild $P'P_1'$ ungleichsinnig zu PP_1. Die Strahlen P_2Au und der P'' abbildende Strahl PAu schneiden sich nicht. Das Bild $P''P_2''$ liegt also gleichsinnig zu PP_2. Eine kurze Strecke bei P wird danach zweimal abgebildet; von den drei Bildern, die Au davon erblickt, liegt das mittlere verkehrt zu den beiden anderen.

Abbildungsgleichung.

Hat das Auge Au die Koordinaten x_2, o, $P: x_1$, y_1, so setzt sich y_1 aus zwei Teilen zusammen, die durch den Scheiteldurchmesser der Lichtbahn getrennt werden. Nach 16) ist der eine

$$\eta = \frac{x_2 - d}{\varphi_1} + a \cdot \varphi_1,$$

entsprechend der andere

$$\frac{x_1 - d}{\varphi_1} + a\,\varphi_1.$$

Daher

$$y_1 = \frac{x_2 + x_1 - 2\,d}{\varphi_1} + 2\,a\,\varphi_1 \tag{19}$$

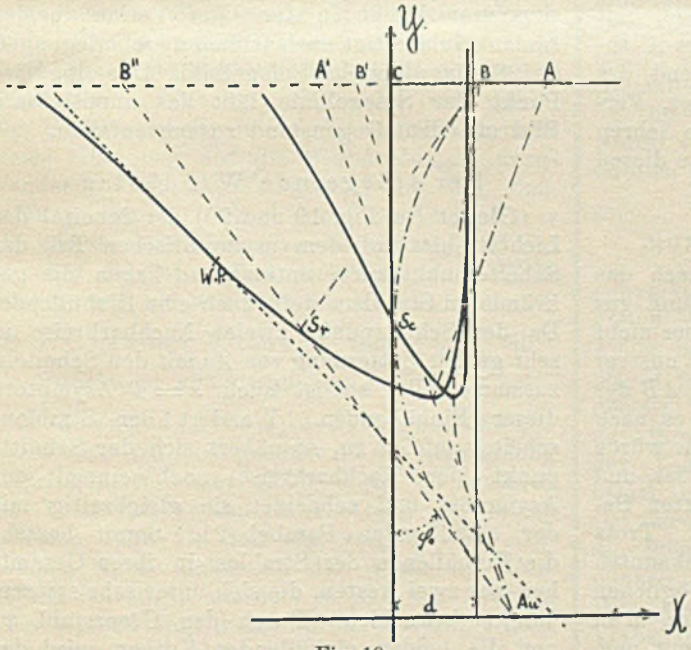


Fig. 19.

oder $$\varphi_1 = \frac{y_1}{4\,a} \pm \sqrt{\left(\frac{y_1}{4\,a}\right)^2 - \frac{x_1 + x_2 - 2\,d}{2\,a}}.$$

Ersetzt man hierin noch a nach 12), so folgt

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{y_1\,\varphi_0}{8\,d} \pm \sqrt{\left(\frac{y_1\,\varphi_0}{8\,d}\right)^2 - \frac{x_1 + x_2 - 2\,d}{4\,d}}. \tag{20}$$

Für jeden Gegenstandspunkt x_1, y_1 gibt es also Spiegelbilder, wenn

$$\left(\frac{y_1\,\varphi_0}{8\,d}\right)^2 - \frac{x_1 + x_2 - 2\,d}{4\,d} > 0.$$

Der äußerste abgebildete Punkt (A in Fig. 7) beschreibt bei veränderlichem y_1 und x_1 die Parabel

$$\left(\frac{y_1\,\varphi_0}{8\,d}\right)^2 = \frac{x_1 + x_2 - 2\,d}{4\,d}. \tag{21}$$

Diese Parabel (Parabel durch M, Au', A, P in Fig. 20) wird von den geradlinigen Strahlen,

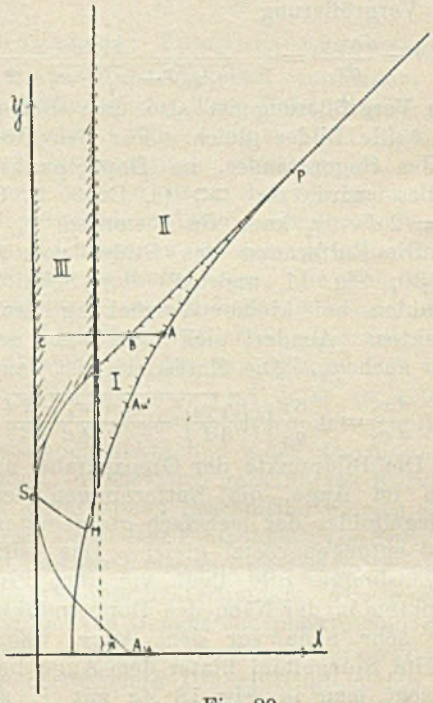


Fig. 20.

die von den Objektpunkten in die Temperaturschicht eintreten, der Gleichung 19) nach y_1 und x_1 als Veränderliche, und die dann ins Auge gelangen, eingehüllt.

Der Strahl dieses äußersten Punktes hat nach 20) die Neigung

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{y_1\,\varphi_0}{8\,d}. \tag{22}$$

Gegenstandspunkte zwischen der Parabel 21) und $x = d$ haben im allgemeinen zwei Spiegelbilder. Dieser mehrfachen Abbildung wird durch den Grenzstrahl φ_0 eine Grenze gesetzt. Er bestimmt (Fig. 7 und Fig. 20) denjenigen Punkt B des Gegenstandes, dessen Bildpunkt der äußerste Punkt B'' des Bildes ist. Der Grenzstrahl berührt die Parabel 21) in einem Punkte P (Fig. 20). Gegenstände jenseits von P werden allein in dem ersten Spiegelbild abgebildet. Aus 22) folgt für die Ordinate von P

23) $$y_1 = \frac{8\,d}{\varphi_0};$$

für einen mehrfach gespiegelten Punkt gilt also

$$y_1 < \frac{8\,d}{\varphi_0}.$$

Vergrößerung und Bildentfernung.

Ein Bildelement wird unter dem Gesichtswinkel $d\,\varphi_1$ gesehen. Da das zugeordnete Gegenstandselement die Größe dx_1 hat, also wegen der stets kleinen φ_1 unter $\frac{d\,x_1}{y_1}$ gesehen wird, ist die Vergrößerung

24) $$V = \frac{d\,\varphi_1\,y_1}{dx_1} = \pm \frac{y_1\,\varphi_0}{\sqrt{(y_1\,\varphi_0)^2 - (x_1 + x_2 - 2\,d)\,16\,d}}$$

Die Vergrößerung ist also dem Betrage nach für beide Bilder gleich. Für den Grenzpunkt A des Gegenstandes, im Doppelpunkt A' des Bildes wird sie ∞ (s. Beob. S. 37), für $x_1 = 2\,d - x_2$ kann sie 1 werden.

Die Entfernung des Bildes vom Auge ist (S. 30, Fig. 11 und 12) der Schnitt zweier Strahlen bei kleiner Verrückung des Augenpunktes. Aendert sich in 20) x_2, so ändert sich auch φ_1. Die Entfernung ist dann

25) $$\frac{d\,x_2}{d\,\varphi_1} = \pm \frac{8\,d}{\varphi_0}\sqrt{\left(\frac{y_1\,\varphi_0}{8\,d}\right)^2 - \frac{x_1 + x_2 - 2\,d}{4\,d}} = \frac{y_1}{V}.$$

Die Bildpunkte der Grenzparabel 21) liegen also im Auge, die Entfernungen der beiden Spiegelbilder der mehrfach gespiegelten Punkte sind entgegengesetzt gleich. Das mittlere ungleichsinnige Bild liegt vor dem Auge, mit Punkten in der Nähe des Doppelpunktes A' sogar sehr nahe vor dem Auge, während das zweite Spiegelbild hinter dem Auge liegt. Vertauscht man in Fig. 18 Au mit P, so lehren die Lichtwege der P benachbarten Punkte diesen Verhalt sofort durch Anschauung.

Vergleich mit der Beobachtung.

Unsere Betrachtungsweise gibt danach das allgemeine Verhalten unserer Beobachtung gut wieder. Ein sehr enger Anschluß ist aber nicht vorhanden. Besonders erweist sich auf unserer Aufnahme Fig. 3 ein viel größerer Teil AB des Gegenstandes mehrfach abgebildet, als es nach Gleichung 20) und 22) sein dürfte. Es würde Gleichung 23) verlangen, daß $d > 6\ cm$ ist, und zwar erheblich größer, was nach direkten Beobachtungen ausgeschlossen erscheint. Trotz vielfachen Bemühens habe ich die bekannten Größen y_1, x_2, x_1 und φ_0 mit einem möglichen d vergeblich nach den vorliegenden Formeln in Einklang zu bringen versucht. Daß mit dem genauen rechnerischen Ergebnis die Grundlagen der Beobachtungen in Widerspruch stehen, lehrt auch Gleichung 24). Ich habe ja schon früher darauf hingewiesen, daß das zweite Spiegelbild gegenüber dem ersten merklich verkleinert ist. Immerhin erhalten wir aber über die Art der Bildentstehung eine gute Aufklärung und einen gewissen Aufschluß. Die Betrachtungen sind einfach und führen gut in das allgemeinere Problem ein. Wir hätten nun vielleicht die Frage zu stellen, durch welche Aenderungen der Grundlagen eine bessere Uebereinstimmung zu erzielen wäre. Es seien zunächst aber noch einige Erörterungen allgemeinerer Bedeutung an unsere Betrachtungen angeschlossen.

Die Scheitelkurve und Spiegellinie.

Durch Elimination von φ_1 aus Gleichung 14) und 16) erhält man die Gleichung für den Ort der Scheitelpunkte aller Strahlen durch Au. Sie lautet

26) $$\eta\,\varphi_0 = (x_2 + d - 2\,\xi)\sqrt{\frac{d}{d - \xi}}.$$

Danach hat die Kurve (Fig. 19) die Gerade $x = d$ als Asymptote, ein Minimum für

$$\xi = \frac{3\,d - x_2}{2}$$

im Betrage von

$$\varphi_0\,\eta = 2\sqrt{2\,d\,(x_2 - d)}$$

und einen Wendepunkt für ein negatives ξ.

Daraus kann man die ähnliche Gleichung für die Spiegellinie mit 15) gewinnen

27) $$\varphi_0\,\eta = (x_2 - \xi')\sqrt{\frac{2\,d}{d - \xi'}}.$$

Die Linie (Fig. 19) hat ebenfalls $x = d$ als Asymptote, ein Minimum vom selben Betrage und einen Wendepunkt. Bemerkenswert ist ihr singulärer Punkt in Au. Der Verlauf beider Linien rechtfertigt nach früheren Ueberlegungen (S. 28) das doppelte Spiegelbild. Der singuläre Punkt der Spiegellinie läßt das unmittelbare Bild mit dem Gegenstand zusammenfallen.

Der spiegelnde Wandbelag.

Gleitet (in Fig. 19 und 20) der Scheitel des Lichtstrahles auf dem asymptotischen Teil der Scheitelpunktskurve entlang, so haben die gekrümmten Strahlenanteile auch eine Einhüllende. Da der Schnittpunkt zweier Nachbarkreise in sehr großer Entfernung von Au mit den Scheiteln zusammenfällt, so ist auch $x = d$ Asymptote dieser Einhüllenden. Wandert der Strahlenscheitel auf Au zu, so nähert sich der Schnittpunkt der Nachbarkreise noch einmal der Asymptote und schneidet sie gleichzeitig mit der einhüllenden Parabel 21. Somit besteht die Einhüllende der Strahlen in ihrer Gesamtheit aus zwei Aesten, die sich unter sehr spitzem Winkel schneiden. Durch den Grenzstahl φ_0 und die beiden einhüllenden Kurven wird der Raum vor der Wand in verschiedene Teile zerschnitten. Von jedem Punkte des Raumes I (s. Fig. 20, die die Verhältnisse für $abs\,\varphi_0$ etwa 1 wiedergibt), der von den drei Kurven allseitig eingeschlossen wird, sind an die Parabel zwei Tangenten möglich. Daher erblickt Au

von jedem dieser Punkte im ganzen drei Bilder. Der Raum *II* zwischen dem Grenzstrahl φ_0 und der Einhüllenden der Kreisbögen enthält Punkte, die nur je zwei Strahlen nach *Au* entsenden können, einen geraden und einen gebogenen, der zunächst tangential zur Parabel verläuft. Aus dem Raume *III* zwischen der Wand, dem Grenzstrahle und der Einhüllenden der Kreisbögen kann schließlich gar kein Licht nach *Au* gelangen. Die Wand ist also verdeckt. Statt Licht von den Wandpunkten her kommt diffuses Himmelslicht ins Auge, das an der Scheitelkurve (durch *Sc* und *M*) umgebogen wurde. Das dem Auge zugewandte Ende des Belages ist der Scheitel *Sc* des Grenzstrahles φ_0. Da der Grenzstrahl das Auge *Au* und das Ende *Sc* nicht geradlinig verbindet, ist die (auf S. 23) früher aus der gemessenen Entfernung der „Belaggrenze" auf Grund der Totalreflexionstheorie versuchten Berechnung des Grenzwinkels unzulässig. Man muß zu kleine Werte erhalten. In der zweiten dort angeführten besonders sorgfältigen Messung war diese Entfernung zu $\eta = 6265$ *cm* bestimmt worden, wobei $x_2 = 14{,}5 \pm 1$ *cm* war. Nach Gleichung 26) gilt für $\xi = 0$

$$\varphi_0 \eta = x_2 + d.$$

Setzen wir, was wir später rechtfertigen, $d = 3{,}3$ *cm*, so folgt

$$\varphi_0 = \frac{14{,}5 \pm 1 + 3{,}3}{6265} = 10' - 9{,}3'$$

nunmehr in bester Uebereinstimmung mit dem dort aus der Temperatur berechneten Werte 9,5′. Diese Berechnungsweise ergibt aber nicht die beobachtete starke Veränderlichkeit der berechneten φ_0 mit x_2. Das zeigt von neuem die Unzulässigkeit, unsere jetzige Erklärungsweise allzu eng auf die Beobachtungen anzuwenden. Fällt die Temperatur mit der Entfernung von der Wand nicht merklich linear ab, wie diese Erklärungsweise verlangt, so ist offenbar die Interpolationskonstante d in Wirklichkeit gar keine Konstante, sondern nach 18) als ein gewisser Mittelwert von $-t_0 \cdot \frac{dx}{dt}$ über die Strecke x_2 von x_2 abhängig.

Messung des Temperaturgesetzes.

Wollen wir also genauer in die Erscheinung eindringen, so bleibt nichts übrig, als zunächst den Temperaturverlauf zu ermitteln. An einem späteren Tage als dem der vorgeführten Aufnahmen wurde daher an der Wand ein Holzgestell befestigt, auf dem in je 1 cm Abstand Thermometer angebracht waren. Dadurch erhielt ich folgenden Verlauf

x	t	x	t
0	4.4	3	0.15
1	0.9	4	0.05
2	0.4		

mit einem Fehler von etwa $\pm$ 0.1° C.

Die nachweisbare Temperaturschicht reicht danach bis etwa 3.3 cm von der Wand. Der Temperaturabfall ist also nichts weniger als linear mit x, wie wir in unserer letzten Betrachtungsweise annahmen.

Die Temperaturfunktion läßt sich ungefähr durch die Gleichungen darstellen

$$28) \qquad t = \frac{4.4}{(x+1)^2}$$

oder besser durch

$$29) \qquad t = \frac{0.97}{x^2 + 0.22}.$$

Folgerungen des Temperaturgesetzes.

Wollen wir Unstetigkeiten vermeiden, so muß das veränderliche Temperaturbereich unendlich ausgedehnt sein, wenn es praktisch auch sehr rasch asymptotisch verschwindet. Die Lichtbahnen werden dann Kurven sein, die rasch sich geradlinigen Asymptoten anschmiegen. Unter den Lichtbahnen ist eine ausgezeichnet, deren Scheitel im Auge liegt. Die Neigungen ihrer Asymptoten sind die dem absoluten Betrage nach kleinsten möglichen. Die Scheitelkurve muß also stets durchs Auge gehen. Der Begriff der Spiegellinie wird jetzt in seiner Anwendung ein im allgemeinen recht verwickelter. Für Gegenstandspunkte und einen Augenpunkt, die nur noch von merklich geradlinigen Kurventeilen der Lichtbahnen geschnitten werden, gewinnt er eine besondere Einfachheit. Die Spiegellinie fällt dann zusammen mit dem geometrischen Orte der Asymptotenschnittpunkte. Dieser Fall ist für die meisten Gegenstandspunkte und den Augenpunkt unserer Beobachtung verwirklicht.

Die beherrschende Differentialgleichung 7) wurde von mir durch Vernachlässigung kleiner Größen auf die sehr einfache Form

$$30) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{\varphi_1^2 - \varphi_0^2 \left(\frac{t}{t_0}\right)}}$$

gebracht, worin der Strahlenparameter φ_1 die kleine Neigung der Asymptoten gegen die *Y*-Achse ist. Damit ergibt das Temperaturgesetz 28) Hyperbeln als Lichtbahnen. Wie man allgemein zeigen kann, müssen diese Hyperbeln mit ihren Mitten alle denselben Abstand von der *Y*-Achse haben, eine Tatsache, die ich bisher nicht verzeichnet gefunden habe. Der Ort der Asymptotenschnittpunkte oder praktisch die Spiegellinie für die meisten Gegenstandspunkte ist eine der Wand parallele Gerade. Wir haben also der Totalreflexion sehr ähnliche Verhältnisse und erhalten nur ein einziges Spiegelbild von derselben Größe wie das Objekt und zu ihm inbezug auf diese Gerade symmetrisch liegend. Damit stimmt auch der Verlauf der Scheitelkurven überein. Sie geht parallel zur *Y*-Achse durchs Auge, steigt steil bis zu einem sehr fernliegenden Maximum an und schneidet absteigend die *Y*-Achse ohne einen Minimumwert.

Ihre beiden durch das Maximum getrennten Aeste entsprechen der „unmittelbaren" Abbildung, die hier auch durch Hyperbeln, also mit geringen Verzerrungen erfolgt, und dem ersten Spiegelbild. Die Einhüllende ist die Asymptote der Hyperbel, deren Scheitel im Auge liegt. Es ist eine gegen die Y-Achse sehr schwach geneigte Gerade, die von dem Grenzstrahl als letzter Hyperbel berührt wird.

Das Temperaturgesetz 28) klärt uns also nicht über die dreifache Abbildung auf.

Das Temperaturgesetz 29) zeigt in unmittelbarer Nähe der Wand innerhalb des ersten Zentimeters einen von 28) abweichenden Verlauf. Während nach 28) t in beschleunigtem Anstieg der Wand zu wächst, wird nach 29) innerhalb des ersten Zentimeters das Temperaturgefälle in einem Punkte konstant, um von hier ab der Wand zu bis zu Null abzunehmen. Die Funktion t hat also einen Wendepunkt. Unmittelbar der Wand liegt eine äußerst dünne Schicht konstanter Temperatur an. Leider führt die Integration nach 30) auf nicht allgemein diskutierbare elliptische Integrale. Es gelingt aber, Gleichung 29) durch mit 30) integrierbare Exponentialfunktionen zu ersetzen. Während in weiterem Abstande von der Wand der Strahlenverlauf und die Strahlenanordnung ähnlich wie im letzten Falle ist, findet nunmehr in allernächster Wandnähe eine Aenderung statt. Die Scheitelpunktskurve hat hier ein Minimum und steigt dann asymptotisch zur Y-Achse in die Unendlichkeit, der Scheitel des Grenzstrahles (Sc in Fig. 20) fällt also in unendliche Ferne, die gekrümmten Teile der dem Grenzstrahl unmittelbar benachbarten Lichtbahnen sind sehr ausgedehnt. Der wiederaufsteigende Teil der Scheitelpunktskurve entspricht dem dritten Bilde. Da das Minimum der Kurve aber so sehr dicht an der Wand liegt, haben die Strahlen, die das erste Spiegelbild hervorrufen, mit ihren Scheiteln schon den weitaus größten Teil der Temperaturschicht besetzt, die Bildpunkte also den größten Teil des zur Verfügung stehenden Abbildungsraumes φ_0 erfüllt. Somit wird das zweite Spiegelbild außerordentlich schmal. In diesem schmalen Raume wird aber wegen der unendlichen Ferne des Scheitels vom Grenzstrahle das ganze Objekt von A bis C (s. Fig. 7 und 20) abgebildet, ein Raumgebiet mit nur zweifacher Bildentwicklung fehlt. Das zweite Bild ist also außerordentlich, bis zu einem schmalen Streifen verkleinert.

Damit geben weder 29) noch 30) die Temperaturverteilung, wie sie gerade im Augenblicke der Aufnahme (Fig. 3) herrschte. Wir bekommen durch diese Untersuchungen aber bestimmte Vorstellungen darüber. In großer Wandnähe innerhalb des ersten cm muß die Temperaturfunktion einen Wendepunkt gehabt haben, der aber etwa in der Mitte der der zur Verfügung stehenden Temperaturen bei 2,2° C liegt. Von da ab wurde das Gefälle der Wand zu kleiner, ohne jedoch in der Wand selbst zu verschwinden. Eine Funktion der Form

$$t = \frac{t_0 (1 + e^{-\alpha a})}{1 + e^{\alpha (x - a)}} \tag{31}$$

zeigt einen solchen Verlauf und ist mit 30) integrabel. Allerdings werden die erhaltenen Gleichungen außerordentlich zusammengesetzt. Es läßt sich aber die Gleichung der Scheitelpunktskurve bestimmen und untersuchen.

In Fig. 20 treten dadurch Aenderungen ein, die die Verhältnisse mit unseren Beobachtungen in bessere Uebereinstimmung bringen. Raum III wird außerordentlich viel schmaler und wird, wie wir bei der Hyperbelbetrachtung erfuhren, durch eine in größerem Abstande fast gerade Linie begrenzt, die sich mit wachsender Ordinate von der Y-Achse entfernt und zu der die Lichtbahn, deren Scheitel im Auge liegt, asymptotisch ist. Da die Scheitel aber nunmehr nach Erreichung des Minimums zurückwandern, tritt ein zweiter Ast der Einhüllenden auf, unserer früheren Parabel entsprechend. Der weniger ausgedehnten Krümmung in der Temperaturschicht entsprechend im Vergleich zu den Kreisbögen sind aus- und eintretender Strahl für kleine φ_1 einander näher gerückt. Dadurch erleiden die Punkte M der Scheitelkurve, Au' und A der Einhüllenden eine große Parallelverschiebung zur Y-Achse auf Au zu, während der Scheitel Sc des Grenzstrahles und damit B und P eine nicht so große Verschiebung erfahren. Denn die der Wand nächsten Schichten, zwischen Wand und Wendepunkt der Temperatur t, haben ja wieder geringeres Temperaturgefälle, die Lichtbahnen in ihnen also ausgedehntere Bögen. Dadurch erfährt aber AB im Vergleich zu AC eine Vergrößerung.

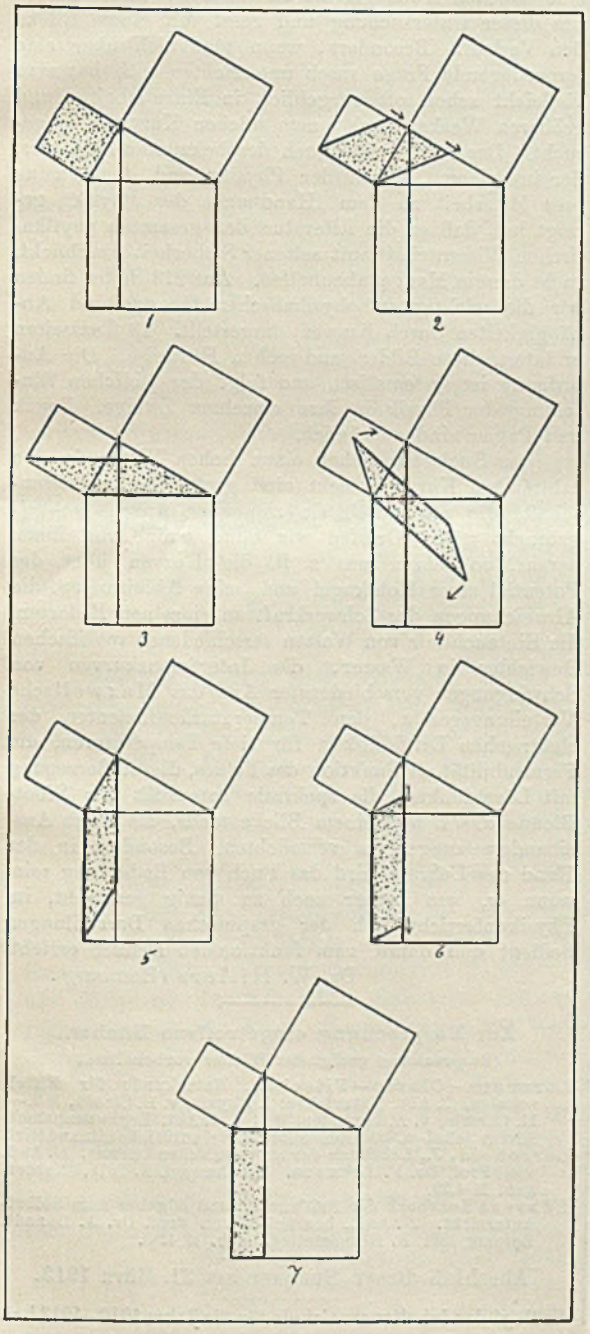
So dürfen wir also sagen, zu einer befriedigenden Erklärung unserer Beobachtungen gekommen zu sein und diese mit der beobachteten Temperaturfunktion in einige Uebereinstimmung gebracht zu haben.

Da für die Entstehung des dritten Bildes der Temperaturverlauf in nächster Nähe der Wand von so großem Einflusse ist, ist es nicht verwunderlich, daß wir die Erscheinung so wenig konstant fanden. Geringe Aenderungen in der Temperaturanordnung dieser Schichten müssen starke Störungen der Bilder hervorrufen. Schwache Luftbewegungen z. B., bei denen der Abhang und die Mauer im toten Winkel liegen, so daß wir an ihnen absteigende Strömungen haben, werden den aufsteigenden Strom warmer Luft stauen, dadurch Verteilung im günstigen Sinne bewirken. Deshalb wird die Entwicklung des dritten Bildes also nicht an allen Tagen gleich gut zu beobachten sein. Bei den instabilen Zuständen derartiger Luftverhältnisse wird besonders das dritte Bild aber auch bei guter Entwicklung fortwährend unregelmäßigen Schwankungen unterliegen.

Zum Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes.

Von H. Detlefs (Frankfurt a. M.).

Die vorjährigen Vorträge Münchs über die Anwendung des Kinematographen im geometrischen Unterricht haben den hohen didaktischen Wert der kinematographischen Vorführung geometrischer Figuren in überzeugender Weise dargetan. Besonderen Beifall dürfte u. a. die Veranschaulichung des euklidischen Beweises des phythagoreischen Satzes bei allen Zuhörern gefunden haben. Münch führt durch eine fast stetig erscheinende Verwandlung, Drehung und abermalige Verwandlung die Hälfte des einen Kathetenquadrates in die Hälfte des von der Hypotenuse und der Kathetenprojektion gebildeten Rechteckes über. Nun wird aber mancher Mathematiklehrer es als einen Uebelstand empfunden haben, daß bei dem euklidischen Beweise mit den halben Figuren operiert wird. Dem Beweise haftet dadurch selbst bei der kinematographischen Veranschaulichung immer noch etwas von dem Odium eines Mausefallenbeweises an. Daher mag es auch kommen, daß die Schüler die zu ziehenden Hilfslinien leicht wieder vergessen. Ich möchte deshalb vorschlagen, einen Schritt weiter zu gehen und einfach die ganzen Kathetenquadrate in die betreffenden Rechtecke zu verwandeln. Die überzeugende Wirkung des Beweises wird hierdurch entschieden erhöht und ich glaube, daß der Beweis dann vollkommen einwandfrei ist. Er setzt dann nur die Kenntnis des Satzes von der Gleichheit der Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe voraus, der ja auch leicht kinematographisch veranschaulicht werden kann.



Aus den beistehenden Figuren wird man den Gang des Beweises ohne Mühe erkennen. Die kinematographische Vorführung macht natürlich alles viel deutlicher und eindrucksvoller. Bei dieser wird man auch zweckmäßig die Verwandlung des zweiten Kathetenquadrates folgen lassen.

Es sei noch bemerkt, daß dieser Beweis unter anderem in den von mir im Verlage von Otto Salle (Berlin) soeben erscheinenden Kinoheften durchgeführt ist. Von diesen liegen die beiden ersten Reihen, die den geometrischen Anfangsunterricht umfassen, bereits fertig vor. Die Hefte gestatten ohne jeglichen Apparat die Vorführung beweglicher oder veränderlicher Figuren jeder Art.

Kleinere Mitteilungen.

Zum Peripheriewinkelsatz.

Von Ingenieur Rudolf Hennig (Hamburg).

Wird vorausgesetzt, daß $ABCD$ ein Sehnenviereck und die Sehnen AD und BC je konstante Länge besitzen, dann soll Winkelsumme $\sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB$ konstant sein. Nach Fig. 1 ist:

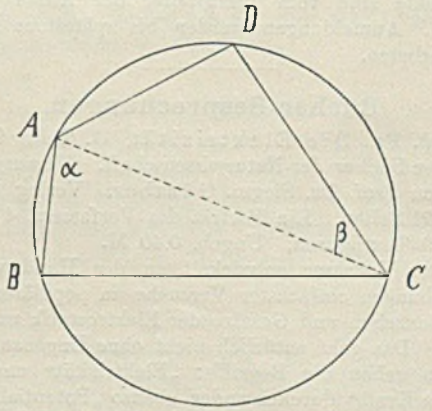


Fig. 1.

$$\sphericalangle CDA + \sphericalangle DAC = 180^0 - \beta$$
$$\sphericalangle CAB = \alpha,$$

woraus sich leicht ergibt:

$$\sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 180^0 + (\alpha - \beta) = \text{Const.},$$

da α und β Peripheriewinkel über je gleicher Sehne sind.

1. Zusatz. Die Winkeldifferenz $\sphericalangle BCD - \sphericalangle CDA = \text{Const.}$
2. Zusatz. Die Schenkel eines Peripheriewinkels eines Kreises, welcher mit einem anderen Kreise dieselbe gemeinschaftliche Sehne besitzt, schneiden in dem

anderen Kreise Sehnen von gleicher Länge ab (s. Fig. 2).

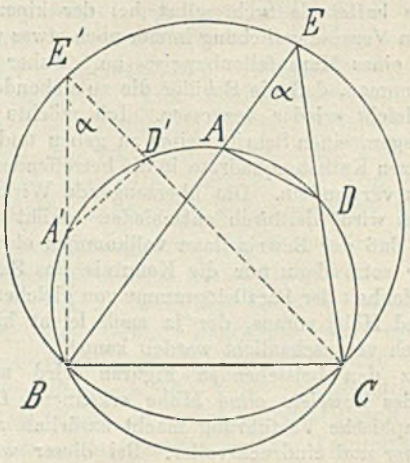


Fig. 2.

Vereine und Versammlungen.

Ferienkurse in Planktonkunde finden auch in diesem Sommersemester (1913) an der Biologischen Station bei Plön statt und werden vom Leiter dieses Instituts, Prof. Dr. Zacharias, persönlich abgehalten. Jeder Kursus dauert drei Wochen; der erste beginnt am 5. Juli, der zweite am 10. August. Hauptzweck dieser Kurse ist eine Einführung in die planktonische Tier- und Pflanzenwelt der großen ostholsteinischen Binnenseen. Bei den Praktikanten wird keinerlei spezielle Vorbildung vorausgesetzt; als selbstverständlich wird aber angenommen, daß jeder Kursist mit der Handhabung des Mikroskops vertraut ist, und daß er ein einfaches Präparat herstellen kann. Das Honorar für die täglich dreistündige Unterweisung beträgt 50 M. Ausführliche Prospekte sind vom Veranstalter der Kurse zu beziehen. Anmeldungen werden bis spätestens Anfang Mai erbeten.

Bücher-Besprechungen.

Adami, Fr., Die Elektrizität. 1. Teil. 9. Band der Bücher der Naturwissenschaft. Herausgegeben von Prof. Dr. Siegm. Günther. Verlag Reclam. 121 Seiten. Ein Porträt des Verfassers, 4 Tafeln, 29 Textfiguren. Ungeb. 0.40 M.

Der Verfasser entwickelt an der Hand von Beschreibungen einfachster Versuche in populärer Weise die Tatsachen und Gesetze der Elektrostatik und Magnetik. Das geht natürlich nicht ohne Ungenauigkeiten ab, so gehen die Begriffe: „Elektrizität“ und „elektrische Kraft“ durcheinander, ebenso „Potentialflächen“ und „Flächen gleicher Kraft“, „elektrische Spannung“ und „Dichte“. Wie bei allen solchen Darstellungen spielen mechanische Analogieen eine große Rolle. Er setzt „elektrische Spannung“ = „elektrische Dichte“ = „Druck“. Vieles wird auch nur dogmatisch behauptet. Ueberhaupt wird auf Kosten der Klarheit vielleicht für einen Lernenden, also Unkundigen, zuviel Physik schon auf den ersten Seiten herangezogen. So ist es auch zweifelhaft, ob dem Zwecke des Buches dadurch gedient wird, wenn der Verfasser Versuche von sich einflicht, die nach seiner Meinung unerklärbar sind. Anzuerkennen ist, daß er den einfachen und anschaulichen Begriff „Elektron“ nicht scheut und frühzeitig verwendet. Dr. W. Hillers (Hamburg).

Auerbach, Felix, Die Physik in graphischen Darstellungen. Quart. 213 Seiten Figurentafeln, 13 Seiten Text. Leipzig 1912, B. G. Teubner. geh. 9.— M.

Keiner anderen Wissenschaft ist in der Weise wie der Physik die Aufgabe gestellt, die Abhängigkeiten zweier Größen voneinander darzustellen. Nur in den einfachsten Fällen — denken wir an die elementaren Kraftgesetze — wird diese Abhängigkeit durch eine so durchsichtige Gleichung gegeben werden können, daß die funktionale Beziehung im ganzen Bereich sofort klar vor Augen steht. Meist aber sind komplizierte Formeln notwendig, z. T. rein empirischer Natur, deren Eigenschaften erst durch eingehende Untersuchungen zutage treten. Die graphische Darstellung einer solchen Abhängigkeit in ein Kurvenbild enthebt uns dieser Untersuchung und zeigt mit einem Blicke den Verlauf. Besonders, wenn man sich über eine fernerliegende Frage rasch unterrichten will, hat man vielleicht schon oft vergeblich in Einzelarbeiten und größeren Werken nach einem solchen Kurvenbilde gesucht. Das vorliegende Buch des bekannten Physikers, der in seinem „Kanon der Physik“ und durch seine rege Mitarbeit an dem „Handbuche der Physik“ gezeigt hat, daß er die Literatur der gesamten physikalischen Wissenschaft mit seltener Sicherheit überblickt, sucht diesem Mangel abzuhelfen. Auf 213 Seiten finden wir die wichtigsten physikalischen Gesetze und Abhängigkeiten durch Kurven dargestellt. 13 Textseiten erläutern diese Bilder und geben Hinweise. Die Anordnung ist systematisch und folgt der üblichen Einteilung der Physik in ihre einzelnen Zweige. Druck und Papier sind vorzüglich.

Das Buch hat sicher einen hohen Wert. In den zahlreichen Kurven steckt eine große Menge Wissenschaft, die uns durch sie zu voller Anschaulichkeit gebracht wird. Greifen wir blind einige von ihnen heraus, so lehren uns z. B. die Kurven über das Potential einer Hohlkugel und seine Ableitungen, die Abweichungen der Schwerkraft an einzelnen Erdorten, die Eintauchtiefe von Walzen verschiedenen spezifischen Gewichtes in Wasser, die Interferenzkurven von Schwingungen verschiedenster Art, das Maxwellsche Verteilungsgesetz, den Temperaturkoeffizienten der elektrischen Leitfähigkeit für tiefe Temperaturen, die Permeabilität als Funktion des Feldes, die Stoßerregung mit Löschfunken, die spektrale Intensität der Sidot-Blende u. s. f. mit einem Blicke mehr, als lange Auseinandersetzungen es vermöchten. Besonders in der Hand des Lehrers wird das Buch von Bedeutung sein, wenn er, was immer noch zu wenig geschieht, im Physikunterricht sich der graphischen Darstellungen bedient und damit zum funktionalen Denken erzieht.

Dr. W. Hillers (Hamburg).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Lorenzen—Clasen—Fitschen, Naturkunde für Mittelschulen. 2. Abt. Naturlehre: I. Physik, v. H. Clasen, M 2.—; II. Chemie, v. A. Lorenzen, M 1.—. 1. Abt. Ergänzungsheft: Kleine Schul- u. Exkursionsflora. Breslau 1911. Ferdinand Hirt.

Lorscheid, J., Lehrbuch der anorganischen Chemie. 19. Aufl. von Prof. Dr. F. Lehmann. Freiburg i. B. 1911, Herder. geb. M 4.20.

Lübsens Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. 27. Aufl., bearbeitet von Prof. Dr. A. Donadt. Leipzig 1911, F. Brandstetter. geb. M 4.50.

Abschluß dieser Nummer am 31. März 1913.

Es liegt das Inhaltsverzeichnis für die Jahre 1910—1912 bei.