Jahrgang XIX. 1913. No. 7.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.
Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**,
von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von
Prof. Dr. **A. Thaer**,
Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentore in Hamburg.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Dir. Thaer, Hamburg 36, erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 8 Nummern ist 4 Mk. pränum., für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift kostenlos; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Inhalt: Die Veranschaulichung von veränderlichen Figuren im Unterricht. Von Prof. H. Detlefs in Frankfurt a. M. (S. 121). — Zur Einführung in die Elemente der Differential- und Integralrechnung auf den höheren Schulen. Von Prof. Dr. Pyrkosch in Breslau (S. 124). — Zur Konstruktion der Ellipse aus zwei Punkten, aus dem Mittelpunkt und der Länge der großen Achse. Von Dr. Karl Wörner in Frankfurt a. M. (S. 130). — Analoga zu den „pythagoreischen" Dreiecken. Von Dr. H. Böttcher in Leipzig (S. 132). — Die Löslichkeit von Ozon in Wasser. Von Otto Bürger in Kirn, Nahe (S. 133). — Kleinere Mitteilungen [Bemerkungen zu dem Aufsatz „Zur Dreiecksgeometrie". Von W. Weber in Schöneberg (S. 134); — Von B. Kerst in Zwickau (S. 135)]. — Vereine und Versammlungen [Mathematik und Naturwissenschaften auf der 52. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Marburg a. L. Von Prof. Dr. Poske in Berlin (S. 135). — Aufforderung betreffend Meldung von Unfällen (S. 136). — Teilnehmerliste der XXII. Hauptversammlung (S. 137)]. — Bücherbesprechungen (S. 138). — Zur Besprechung eingetroffene Bücher (S. 140). — Anzeigen.

Die Veranschaulichung von veränderlichen Figuren im Unterricht.

Von Prof. H. Detlefs (Frankfurt a. M.)

Vortrag, gehalten auf der 38. Hauptversammlung des Philologenvereins für Hessen-Nassau und Waldeck am 13. Mai 1913.

Es ist wohl unbestritten, daß der mathematische Unterricht die Pflicht hat, die abstrakten Lehren der Mathematik besonders den kleineren Schülern in einer möglichst konkreten und faßlichen Form darzubieten. Hierdurch wird am besten der immer wieder auftauchenden und den mathematischen Unterricht so sehr schädigenden Ansicht entgegenarbeitet, daß zum Verstehen der Mathematik eine besondere Begabung nötig sei. Als ein besonderes wichtiges Mittel, die Aufmerksamkeit der Schüler zu erregen, ihr Interesse wach zu erhalten und sie allmählich an das für später so wichtige funktionale Denken zu gewöhnen, wird in der neueren Zeit die Bewegung angesehen. Alles, was sich bewegt oder Leben zeigt, lenkt natürlich die Aufmerksamkeit des Kindes viel mehr auf sich, als das Starre und Unbewegliche. Es sei mir gestattet, dies an einigen einfachen Beispielen aus dem mathematischen Unterricht zu erläutern. Der Beweis für die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck wurde früher mittels eines Kongruenzsatzes geführt. Wieviel einleuchtender wird aber den Schülern der Satz, wenn man ihn direkt durch Umklappen um die Symmetrieachse beweist, unter Benutzung eines von den Schülern selbst hergestellten Papiermodells! Ein anderes Beispiel: es soll gezeigt werden, daß der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Radius, die eine Gerade berühren, eine Parallele zu der Geraden ist. Ein rollendes Rad zeigt dies besser als alle Worte. Oder es sollen die Sätze von der Tangente bewiesen werden. Sie leuchten ohne lange Beweise ohne weiteres ein, wenn man sie aus den vorher bewiesenen Sehnensätzen herleitet, indem man einfach die zur Sekante verlängerte Sehne durch Verschiebung oder Drehung in eine Tangente übergehen läßt. Aehnlich verfährt man bei den Sätzen über die Berührung zweier Kreise, die man zuerst einander schneiden läßt und dann aus- oder ineinander verschiebt, bis sie sich berühren. Ein anderes Bild: ein n-Eck soll in ein $(n-1)$-Eck verwandelt werden. Man schneidet durch eine Diagonale ein Dreieck ab und verwandelt dies nicht sprunghaft, sondern allmählich durch Verschiebung der Spitze parallel zur Diagonale, bis sie in die Verlängerung einer der Nachbarseiten fällt.

Diese einfachen Beispiele, die sich beliebig vermehren ließen, mögen genügen. Es zeigt sich, daß die Schüler willig, ja freudig auf solche Betrachtungen eingehen. Den Begabteren fällt es auch ohne besondere Hilfsmittel meistens nicht schwer, sich die Sache richtig vorzustellen. Sie sind aber leider fast immer in der Minderzahl. Den Schwächeren wird es trotz allem Interesse und gutem Willen nicht immer gelingen, zu folgen. Damit sie nicht versagen und verzagen, muß man ihnen durch geeignete Anschauungsmittel zu Hilfe kommen und versuchen, ihr mathematisches Vorstellungsvermögen allmählich zu verbessern, so daß sie schließlich auch ohne solche Mittel auskommen, was natürlich immer das Ideal bleiben muß.

Es entsteht nun die Frage: was hat man denn für Mittel, um das angegebene Ziel zu erreichen, also um die allmählichen Aenderungen einer Figur anschaulich zu machen?

Das Nächstliegende sind allerhand bewegliche Modelle aus Papier, Pappe, Holz und Metall, die teils vom Lehrer oder von den Schülern selbst angefertigt werden können, teils von der Lehrmittelindustrie auf den Markt gebracht werden. Wir können sie unter dem Namen mechanische Hilfsmittel zusammenfassen. Je einfacher sie sind, desto besser. So genügt oft ein Stock, einige Fäden und Drähte und eine Anzahl von Pappscheiben. Nützlich erweist sich auch in vielen Fällen ein Zollstock, wie F. Wiemer (Meldorf) in den „Unterrichtsblättern für Mathematik und Naturwissenschaften" sehr hübsch auseinandergesetzt hat. Für schwierigere Fälle sind besondere Modelle erfunden worden. Ich erwähne z. B. die mir in den letzten Jahren aus Zeitschriften bekannt gewordenen Modelle von C. Hildebrandt (Braunschweig), H. Dreßler (Dresden-Plauen), Wienecke (Berlin), Koepp (Bensheim), K. Schorer (Metz), G. Haffner (Erlangen), W. Rottsieper und R. Schimmack († Göttingen) und G. Noodt (Berlin).

Es zeigt sich aber bald, daß für schwierigere Fälle die Modelle immer schwerer herzustellen sind, ja, daß für manche Veränderungen sich mechanische Modelle überhaupt nicht machen lassen. Sodann ist jedes Modell nur für einen ganz bestimmten Zweck brauchbar. Wenn wir auf diesem Wege weitergehen wollten, würden wir zu einer großen, teueren und schwer in Ordnung zu haltenden Modellsammlung kommen, wozu bei den vielen bereits bestehenden Schulsammlungen, glaube ich, wenig Neigung vorhanden sein wird. Bei vielen Modellen liegt auch die Gefahr nahe, daß ihr mechanisches Beiwerk die Schüler mehr fesselt als ihr eigentlicher Zweck, und daß sie diesen ganz übersehen. Manche wirken auch zu grob sinnlich, um den Feinheiten einer geometrischen Figur gerecht werden zu können.

Es gibt nun noch einen zweiten, nach meinem Gefühl feineren Weg zur Veranschaulichung, nämlich durch optische Hilfsmittel. Sie machen sämtlich von der Tatsache Gebrauch, daß die Lichtempfindung im Auge nach dem Aufhören des Lichtreizes noch etwa $^1/_7$ Sekunde anhält. Auf diesem einfachen Prinzip beruhen bekanntlich die auch für den Projektionsapparat abgeänderte stroboskopische Scheibe von Plateau, der stroboskopische Zylinder von Horner, der Schnellseher von Anschütz, das Mutoskop und schließlich der Kinematograph. Das Prinzip ist auch schon längst für Unterrichtszwecke verwendet worden, zunächst, wie es ja natürlich ist, von Physikern zur Veranschaulichung von physikalischen Bewegungsvorgängen. Die Bilder von Müller und von Quincke sind wohl allgemein bekannt. Sie veranschaulichen mittels des Stroboskops Schwingungs- und Wellenbewegungen, sind aber wegen der Eigenart der erforderlichen Apparate für den Klassenunterricht wenig geeignet.

Durch ein anderes Verfahren hat Prof. Papperitz (Freiberg) seit 1909 zuerst die Veränderungen geometrischer Figuren dargestellt. Es erinnert an die Lissajoussche Methode und wird vom Erfinder als „kinodiaphragmatische Projektion" bezeichnet. Durch einen Projektionsapparat werden feste und mittels eines besonderen Mechanismus bewegte Diaphragmen oder Blenden projiziert und die Lichtfiguren entweder auf einem ebenen Schirm oder auf durch Rotation von Drahtmodellen erzeugten „Scheinkörpern" aufgefangen. So gelingt es, nicht nur veränderliche Figuren in der Ebene, sondern auch im Raum herzustellen, die auch noch den Vorzug haben, daß die Bewegungen vollkommen stetig sind.

Den nächsten Schritt tat im vorigen Jahre Geheimrat Münch (Darmstadt). Er benutzte gleich den vollendetsten und populärsten Apparat, den Kinematographen und wies in überzeugendster Weise nach, wie man mittels desselben die mannigfaltigsten und verwickeltsten Veränderungen geometrischer Figuren mit handgreiflicher Deutlichkeit darstellen kann.

Die beiden letzten Methoden haben unzweifelhaft große Vorzüge, wenn es sich um Vorführungen vor einem großen Auditorium oder um besonders komplizierte Vorgänge handelt. Wenn sie aber für die einfachen Dinge benutzt werden, die im Schulunterricht vorkommen, hat man das Gefühl einer gewissen Energieverschwendung. Die Apparate sind für die meisten Schulen zu kostspielig und ihre Anwendung ist umständlich und zeitraubend. Ein Anschauungsmittel aber, das sich einbürgern soll, muß billig und einfach sein und muß jederzeit zur sofortigen Benutzung bereit stehen. Zum Glück gibt es ein solches von beinahe lächerlicher Einfachheit, so daß man sich wundern muß, daß es nicht schon längst benutzt worden ist. Offenbar ist, aber sehr mit Unrecht, gerade seine Unscheinbarkeit Schuld daran, daß es so ganz übersehen ist. Ich meine die als niedliche Spielerei seit etwa 15 Jahren, vielleicht aber auch schon viel länger bekannten mutoskopischen Heftchen. Wenn ich mich nicht irre, tauchten sie auf der Pariser Weltausstellung auf, wurden dann auch in Deutschland nachgemacht, scheinen aber seit einiger Zeit wieder verschollen zu sein. Ich habe versucht, diese Hefte unserem Zweck dienstbar zu machen und bereits einige davon unter der Phantasiebezeichnung Kinohefte veröffentlicht. Ich glaube, daß der Versuch mir einigermaßen geglückt ist und daß diese Hefte für Schulzwecke in allen Fällen ausreichen.

Die Herstellung der Hefte ist sehr einfach. Man macht von den aufeinanderfolgenden Bewegungszuständen eine Reihe von Zeichnungen und vereinigt diese zu einem Heft. Blättert man dieses schnell durch, so hat man den Eindruck einer beinahe stetigen Bewegung. Die Wirkung ist für jemand, der sie zum ersten Male sieht, beinahe verblüffend. Ich war selbst überrascht, als ich vor einem Jahre den ersten Versuch machte, von dem ich mir vorher gar nicht viel versprochen hatte. Ich fand bald, daß es kaum eine Bewegung in der Ebene und im Raum gibt, die sich nicht auf diesem Wege vollkommen anschaulich darstellen ließe. Auf den Rat mehrerer Kollegen, denen die Hefte sofort gefielen, entschloß ich mich, sie zu veröffentlichen, wozu mich auch die im Unterricht mit ihnen angestellten Versuche ermutigten.*)

Merkwürdig ist im Vergleich mit dem Kinematographen die geringe Zahl von nur 48 Blättern, die in den meisten Fällen genügt. Ein gewöhnlicher Zeichenbogen reicht für ein Heft aus. Mitunter genügen sogar 24 Blätter und nur in einzelnen Fällen, wie für den vollständig durchgeführten Beweis des Pythagoras oder für die Darstellung der goniometrischen Funktionen durch alle vier Quadranten habe ich 96 Blätter gebraucht. Die Herstellung der Zeichnungen ist nicht so mühsam, wie sie vielleicht auf den ersten Blick erscheint. Sie wird sehr vereinfacht, wenn man ein Reißbrett benutzt, dessen Ränder mit einer Millimeterteilung versehen sind. Ich empfehle sogar, einer Anregung von Herrn Geheimrat F. Klein folgend, die Herstellung von Kinoheften als eine neue reizvolle Art von Schüleraufgaben. Probleme aus der Mathematik und Physik in allen Schwierigkeitsgraden bieten sich in Hülle und Fülle. Die nötige praktische Anleitung kann im Handfertigkeits- und Linearzeichenunterricht leicht gegeben werden. Ohne auf Vollständigkeit Anspruch zu erheben, möchte ich Ihnen eine kleine Uebersicht von Aufgaben geben, die für Kinohefte geeignet sind:

1. Die einfachen Bewegungen: Verschieben, Drehen, Umklappen.
2. Uebergänge von Figuren in andere, wobei die Grenzfälle sehr schön hervortreten.
3. Flächenverwandlungen.
4. Geometrische Oerter: Gerade, Kreis, Kegelschnitte und sonstige Kurven aller Art.
5. Graphische Darstellungen von Funktionen.
6. Projektivische Beziehungen.
7. Pol und Polare.
8. Abbildungen, z. B. mittels reziproker Radien.
9. Entstehung von Körpern, z. B. von Rotationskörpern.
10. Ebene Körperschnitte.
11. Die in der darstellenden Geometrie vorkommenden Bewegungen usf.

Sehr zahlreiche Beispiele bietet sodann die Physik und schließlich auch die Biologie. Bei der letzteren wird man allerdings zur Herstellung der Bilderreihen von der Photographie Gebrauch machen müssen, wie es für den Kinematographen ja bereits geschehen ist.

Diese kleine Uebersicht dürfte hinreichen, um zu zeigen, daß die Kinohefte ein geradezu universelles Hilfsmittel für die Veranschaulichung aller Arten von Bewegungen sind, das zugleich in bezug auf Billigkeit und Einfachheit von keinem anderen übertroffen oder auch nur erreicht wird.

Ich möchte Ihre Aufmerksamkeit auch noch auf einige andere Vorzüge lenken:

1. Die Hefte sind fast unverwüstlich. Höchstens können sie sich durch vielmaliges Durchblättern etwas verbiegen, sie strecken sich aber durch umgekehrtes Durchblättern und nach einigem Liegen von selbst wieder gerade.
2. Sie sind leicht aufzubewahren und in Ordnung zu halten, da sie ja fast keinen Platz beanspruchen und leicht in einem Schrankfach oder einer Schublade des Lehrerzimmers untergebracht werden können. So sind sie jederzeit jedem Lehrer zur Hand.
3. Ihre Vorführung im Unterricht nimmt wenig Zeit in Anspruch. Man wird sogar durch ihre Anwendung viel Zeit sparen, da sie manches auf einen Blick aufklären, was sonst nur durch viele Worte und Zeichnungen verständlich gemacht werden kann.
4. Die Aufmerksamkeit der Schüler wird durch keinerlei störendes Beiwerk abgelenkt, sie sehen nur das, was sie sehen sollen.

*) Die Hefte sind nur direkt zu beziehen von Otto Salle, Berlin W 57, Elßholzstraße 15.

5. Man kann die Bewegung nach Belieben langsam, schnell und auch umgekehrt vor sich gehen und dabei jedes beliebige Blatt stillstehen lassen. Dies empfiehlt sich besonders bei den Blättern, die einen Grenzfall oder eine Aenderung der Bewegung oder sonst etwas Bemerkenswertes darstellen. Solche Blätter sind mit einem Stern (*) versehen.
6. Die Anschaffung der Hefte bedeutet unter Umständen auch eine Geldersparnis, da sie viele Modelle und physikalische Apparate überflüssig machen, von denen leicht ein einziger mehr kostet, als die ganze Sammlung von Kinoheften.
7. Die Hefte können unbedenklich den Schülern in die Hand gegeben werden, damit sie sie selbst durchblättern. So wird vermieden, daß sie sich völlig passiv verhalten.

Zum Schlusse möchte ich noch einige Mitteilungen über die Aufnahme machen, die die Hefte in Fachkreisen bisher gefunden haben. Viel vermag ich darüber allerdings noch nicht zu sagen, da sie noch zu neu sind. Aus den bisher vorliegenden Zuschriften geht hervor, daß sie, wie wohl jede Neuerung, sowohl begeisterte Freunde, als auch entschiedene, sogar prinzipielle Gegner finden. Ich hoffe, daß mancherlei Vorurteile, die noch bestehen, im Laufe der Zeit schwinden werden. Ein Urteil sollte sich meines Erachtens nur der erlauben, der die Hefte im Unterricht praktisch erprobt hat. Von einer Seite ist der Einwand erhoben, daß fast alles, was in den bisher erschienenen Kinoheften dargestellt sei, sich mit viel einfacheren Mitteln veranschaulichen lasse. Dagegen möchte ich bemerken, daß der Nutzen der Hefte um so sichtbarer wird, je schwieriger die dargestellten Veränderungen sind. Es ist ja ganz natürlich, daß die ersten für den Anfangsunterricht bestimmten Hefte nur die allereinfachsten Veränderungen enthalten, die sich oft durch noch einfachere Mittel veranschaulichen lassen. Ich habe diesen Einwand vorausgesehen und mich trotzdem entschlossen, gerade die einfachsten Serien zuerst zu veröffentlichen, und zwar aus folgenden Gründen: zunächst der Vollständigkeit wegen und weil ich doch nicht gut in der Mitte anfangen konnte. Sodann führen gerade die ersten Hefte die Schüler am besten in ihr Wesen ein und eignen sich als Muster für die Selbstanfertigung. Sie sollen keineswegs die bisher von den Schülern selbst gemachten Modelle verdrängen, sondern zur Abwechselung neben ihnen gebraucht werden. Die Berechtigung hierzu haben sie, weil sie, wie eine nun schon einjährige Erfahrung gezeigt hat, bei allen Schülern lebhaftes Interesse, bei den kleineren helle Freude erwecken, wohl der beste Beweis, daß sie ein dem kindlichen Geiste angepaßtes Lehrmittel sind. Gerade diese Freude scheint mir ein wichtiger pädagogischer Faktor zu sein, der meines Erachtens in dem oft als trocken und langweilig verschrieenen mathematischen Unterricht gar nicht genug gewürdigt werden kann.

Zur Einführung in die Elemente der Differential- und Integralrechnung auf den höheren Schulen.*)

Von Prof. Dr. Pyrkosch (Breslau).

Meine Herren! Die Ansicht, daß eine Einführung in die Elemente der Differential- und Integralrechnung in den mathematischen Lehrplan der Oberstufe unserer höheren Schulen aufzunehmen sei, bricht sich immer mehr Bahn und wird aller Wahrscheinlichkeit nach den Sieg über die Bedenken davontragen, die sich ihr zurzeit noch entgegenstellen mögen. Dafür spricht zu beredt der hohe Bildungswert, der einer näheren Beschäftigung mit den Dingen innewohnt, auf denen sich eine jede mathematische Naturbetrachtung aufbaut und die als Grundpfeiler der modernen Naturwissenschaft und Technik betrachtet werden müssen, und ein immer fühlbarer werdendes praktisches Bedürfnis für viele, man denke z. B. an Mediziner, Chemiker und Biologen, die mit der Reifeprüfung ihren eigentlichen mathematischen Bildungsgang abschließen, aber während ihres folgenden Berufsstudiums in engerer Berührung mit Wissenschaftsgebieten bleiben, die in ihren Darstellungen analytische Formulierungen nicht immer entbehren können. Dazu kommt, daß die auf der Schule, besonders auf den Realgymnasien und Oberrealschulen dem mathematischen Unterricht zur Verfügung stehende Stundenzahl ein Eingehen auf den Gegenstand wohl gestattet, falls man Unwesentliches wegläßt, das sich an manchen Stellen der traditionellen Schulmathematik eingenistet und breit gemacht hat, weil es in bequemer Weise die Zeit ausfüllte und vielleicht Gelegenheit zu zahlreichen Aufgaben bot, die sich in der Hauptsache stets um denselben Punkt drehen und eine willkommene Vorbereitung für die drohende schriftliche Reifeprüfung abgeben, in Wirklichkeit aber die mathematische Bildung nur wenig fördern.

Doch ist es nicht ganz leicht, die weitere Frage zu beantworten, in welchem Umfange der Gegenstand zu betreiben und wie und wann er dem bestehenden Lehrplan einzufügen ist. Nach meiner Ansicht ist dabei die Forderung an die Spitze zu stellen, daß, wenn in dieser Richtung etwas geschieht, dem Schüler ein trotz aller weisen Beschränkung abgerundetes klar zusammenhängendes Ganzes dargeboten werden müsse. Sonst läuft man Gefahr, Unklarheit und Verwirrung da anzurichten, wo gerade das Gegenteil erstrebt wird. Diese Forderung zieht aber sofort eine zweite nach sich, und diese heißt reichliche Bemessung der Zeit. Wer nicht etwa $^3/_4$ Jahre lang wöchentlich der Sache zwei Stunden widmen kann, wird schwerlich von seinem Erfolge rechte Befriedigung haben können.

Da eine gewisse mathematische und überhaupt intellektuelle Reife für die begrifflichen Schwierigkeiten, die der Gegenstand dem Schüler zumutet, Bedingung ist, erscheint es mir wünschenswert, nicht zu zeitig damit zu beginnen, sondern die Oberprima dafür zu wählen. Es hat ja gewiß manches für sich, früher an-

*) Vortrag, gehalten am 22. April 1913 bei einer Sitzung der Ortsgruppe des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts zu Breslau.

zufangen; man hat z. B. betont, daß man dann schon in der Physik wie auch auf manchen mathematischen Gebieten die Früchte ernten könne, die man in der Mathematik gesäet hat. Doch möchte ich dieses Argument nicht als zu schwerwiegend betrachten. Denn es ist mir kein Fall der Schulphysik bekannt, wo man nicht ganz befriedigend ohne Differential- und Integralkalkül auskäme. Ich möchte vielmehr den Spieß umkehren: gerade die Physik bereitet auf das Beste die Begriffe der Funktion und des Differentialquotienten vor, auf denen sich dann die Elemente der Funktionenlehre als Abschluß und Krönung des mathematischen Unterrichts aufzubauen haben.

Es ist Ihnen bekannt, daß die Bestrebungen der sogenannten Reformbewegung darauf hinzielen, auch im mathematischen Unterricht und zwar schon auf der Mittelstufe den Funktionsbegriff in den Vordergrund zu stellen und besonders durch das Mittel der graphischen Darstellung zu pflegen. Ich glaube indessen nach dem, was man aus Lehrbüchern und Aufgabensammlungen der letzten Zeit ersehen kann, daß hier des Guten etwas zu viel getan wird. Denn man zwingt dem Lehrstoff, zum mindesten auf der Mittelstufe, ein Element auf, das ihm im großen und ganzen fremd ist. Funktionsbetrachtungen drängen sich auf der Mittelstufe nur auf bei der Einführung in die Lehre von den Logarithmen und bei den Realanstalten im trigonometrischen Vorkursus, und da es sich hier vorläufig mehr um die Erwerbung einer Rechentechnik handelt, wird man mit Wenigem auskommen können. Jedenfalls sollte man stets im Auge behalten, daß auf der Mittelstufe die grundlegenden geometrischen Sätze und Konstruktionen und die Technik des algebraischen Rechnens zum sicheren Besitz des Schülers werden müssen, weil ohne diese eine gedeihliche mathematische Entwicklung in der Oberstufe nicht möglich ist. Alles andere ist gegen dieses Ziel zurückzustellen.

Gestatten Sie mir noch kurz zu bemerken, wie ich mir die Verteilung des Lehrstoffes in der Oberstufe denke, und zwar habe ich im folgenden den Lehrplan der Realanstalten im Sinne. Bekanntlich ist für die Obersekunda durch die amtlichen Pläne ein Abschnitt aus der Geometrie der Ebene vorgesehen, den man zum größten Teil als Geometrie des Teilverhältnisses bezeichnen könnte, ferner der systematische Betrieb der Trigonometrie und Stereometrie, die Einführung in die Lehre von den komplexen Zahlen, die arithmetische und geometrische Reihe und die Zinseszinsrechnung. Es empfiehlt sich, außer der schrägen Parallelprojektion, die man wohl allgemein an die Stereometrie anschließen wird, auch von der darstellenden Geometrie in zwei Projektionsebenen, die eigentlich der Prima zugewiesen ist, den ersten Teil, nämlich die Darstellung des Punktes, der Geraden und der Ebene mit in die Obersekunda zu übernehmen und auf diese Weise für die in der Stereometrie durchgenommenen Lagenbeziehungen dieser Raumelemente ein sehr geeignetes Uebungsgebiet zu schaffen; die Lehre von den dreiseitigen Ecken wird man dafür in die Kugelgeometrie der Prima verweisen.

Die Verteilung des Lehrstoffes der Prima auf die beiden Jahre wird wohl verschieden gehandhabt. Wenn man zuletzt in Obersekunda darstellende Geometrie getrieben hat, wird man etwa in Unterprima diesen Gegenstand zuerst zu Ende führen, wobei das Grund- und Aufrißverfahren auf die einfachen eben- und krummflächigen geometrischen Körper mit ihren ebenen Schnitten ausgedehnt und dann zur Zentralprojektion und Perspektive übergegangen wird. Die Darstellung der ebenen Schnitte eines Kreiskegels mit ihren Umlegungen leitet bequem zur projektiv-synthetischen Behandlung der Kegelschnitte über, in der ihre wichtigsten projektiven und affinen Eigenschaften erledigt werden. Daneben kann man die Geometrie auf der Kugel, die dreiseitige Ecke und die sphärische Trigonometrie mit den Anwendungen auf die mathematische Himmelskunde vornehmen. Leitet man die projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte aus der Tatsache ab, daß sie als Zentralprojektionen eines Kreises angesehen werden können, so treibt man während dieser ganzen Zeit im wesentlichen Raumgeometrie, so daß in Verbindung mit dem Stereometriesemester der Obersekunda etwas Tüchtiges in der wichtigen Ausbildung der Raumanschauung des Schülers geleistet werden kann.

Ist man mit diesen Gebieten fertig, so kann man vielleicht wieder nebeneinander analytische Geometrie und algebraische Gegenstände behandeln. Die erstere wird in Unterprima noch bis zu den Kegelschnitten gefördert werden können. Auch von den algebraischen Abschnitten, es handelt sich in der Hauptsache um die Ebene der komplexen Zahlen, den Moivreschen Satz, die reine Gleichung $n$ten Grades und die Haupteigenschaften der allgemeinen, die kubische Gleichung, das einfachste aus der Kombinatorik und den binomischen Satz für ganze positive Exponenten, wird es wahrscheinlich nötig sein, einen Teil mit in die Oberprima zu übernehmen. Der Hauptsache nach bleibt aber dann für diese Klasse der zweite Teil der analytischen Geometrie und die Funktionenlehre übrig, in die natürlich die von den Lehrplänen vorgeschriebene Lehre von den extremen Werten einer Funktion und die von den elementaren Reihen gehören. Mit der analytischen Geometrie der Kegelschnitte wird man, wie üblich, die sogenannte elementar synthetische Theorie dieser Kurven in geeigneter Weise verknüpfen, und während in der früheren projektiven Darstellung ihre projektiven und affinen Eigenschaften im Vordergrunde standen, jetzt vorzüglich die eigentlichen metrischen Eigenschaften wie z. B. die mit den Brennpunkten zusammenhängenden betonen.

Ich komme nun zur Einführung in die Differentialrechnung und damit zum Hauptgegenstande meines Vortrages. Die Abbildung des Zahlenkontinuums auf einer Geraden ist durch die Koordinatengeometrie und auch bei anderen Gelegenheiten auseinandergesetzt worden. Doch empfiehlt es sich, am Ende des algebraischen bezw. arithmetischen Pensums bei einem Rückblick auf den Aufbau des Zahlbegriffes, wie ihn ja die Lehrpläne vorschreiben, auf das Wesen der Irrationalzahl etwas näher einzugehen und z. B. zu prüfen, mit welcher Berechtigung auch einer Zahl wie π ein bestimmter Punkt auf der Zahlengeraden zuzuweisen ist. Der für das Folgende wichtige Begriff eines Intervalls einer veränderlichen Größe bereitet dann keine Schwierigkeit mehr. An irgend einer oder der anderen bekannten Funktion werden die im wesentlichen schon bekannten Begriffe der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen und der Konstanten sowie der letzteren verschiedene Bedeutung erläutert. Wir brauchen aber für Betrachtungen allgemeinerer Art auch eine allgemeinere Definition dessen, was wir im folgenden unter einer Funktion verstehen wollen. Es liegt nahe, eine Funktion y der unabhängigen Veränderlichen x einfach als einen beliebigen aus x und

Konstanten gebildeten mathematischen Ausdruck zu erklären. Nach unseren bis jetzt gemachten Erfahrungen würde dann als geometrisches Bild in der (x, y) Ebene einer Funktion eine Kurve entsprechen, doch könnten wir den Satz nicht umkehren, da es unwahrscheinlich ist, daß einer beliebigen willkürlichen Kurve auch ein bestimmter mathematischer Ausdruck entspricht, und doch erheischt es die Natur der Sache, gelegentlich auch solche willkürliche Kurven als Funktionskurven zu betrachten, wie z. B. bei den Temperatur- oder Luftdruckkurven, die die meteorologischen Registrierapparate im Laufe eines Tages verzeichnen. Es erscheint also richtiger, weil allgemeiner zu sein, wenn man eine Funktion als die mathematische Zuordnung der y-Werte zu den x-Werten erklärt, die durch irgend eine Kurve in der (x, y) Ebene festgelegt wird. Aber auch hier zeigt sich eine Schwierigkeit, wenn wir z B. einen Kreis und irgend eine der oben erwähnten Registrierkurven vergleichen, denn während bei der letzteren notwendig zu jedem Wert von x nur ein einziger von y gehört, entsprechen einer Abszisse x, wenn überhaupt, im allgemeinen zwei Ordinaten, ein Uebelstand, der sich aber beseitigen läßt, wenn wir den Kreis durch den zur x-Achse parallelen Durchmesser in zwei Halbkreisbogen zerschneiden und durch jeden von ihnen eine besondere Funktion in dem Intervall darstellen, das durch die Projektion dieses Durchmessers auf die Abszissenachse gegeben ist. Auf diese Weise gelangen wir zu einer für unsere Zwecke brauchbaren und ausreichenden Definition, nämlich: Eine Funktion y von x wird für uns in einem Intervall von x_1 bis x_2 $(x_1 < x_2)$ gegeben durch einen Kurvenbogen, der sich zwischen den in den Abständen x_1 und x_2 zur Ordinatenachse gezogenen Parallelen stetig erstreckt und der durch jede Parallele zur Ordinatenachse, die zwischen diesen Grenzen liegt, in einem und nur einem Punkte geschnitten wird. Wir rüsten diesen Kurvenbogen noch mit einer weiteren Eigenschaft aus, die vielleicht zunächst überflüssig und selbstverständlich erscheint, indem wir verlangen, daß er in jedem Punkte auch eine bestimmte Tangente besitzen soll.

Nachdem so der Funktionsbegriff festgestellt ist, werden die von früher bekannten Arten von Funktionen, soweit sie durch mathematische Ausdrücke gegeben sind, die aus x und Konstanten bestehen, der Reihe nach durchgegangen. Die einfachsten sind die rationalen Funktionen, die durch eine endliche Zahl von rationalen Rechenoperationen aus x und Konstanten zusammengesetzt sind und in ganze und gebrochene zerfallen; und die letzteren lassen sich stets als Quotienten zweier ganzen rationalen Funktionen schreiben, die der Schüler schon von der Algebra her als Polynome kennt. Alle Funktionen, bei deren Darstellung man mit einer endlichen Zahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen nicht auskommt, nennen wir irrationale Funktionen. Ist bei einer von ihnen außer den rationalen Rechnungsarten nur noch das Wurzelziehen zum Aufbau notwendig, so bezeichnen wir sie als eine algebraische irrationale Funktion*); genügt auch dieses nicht, so heißt die betreffende irrationale Funktion transzendent; die uns bekannten Transzendenten $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ geben schon durch das dem x vorangehende Symbol zu erkennen, daß sie durch einen geschlossenen, mit den algebraischen Rechnungsarten hergestellten Ausdruck nicht wiedergegeben werden können. Bei den irrationalen algebraischen Funktionen haben wir, um Uebereinstimmung mit dem oben festgesetzten Funktionsbegriff zu erhalten, darauf zu achten, daß wir Intervalle der unabhängigen Variablen auswählen, in denen die Radikanden etwa vorhandener Wurzeln mit geradem Exponenten positiv sind und dann bei jeder solchen Wurzel unter den beiden an und für sich statthaften Vorzeichen uns für ein bestimmtes zu entscheiden.

Man gelangt nunmehr zur Einführung des Differentialquotienten einer gegebenen Funktion, der übrigens auch von der analytischen Geometrie und Mechanik her kein unbekannter Begriff mehr sein wird. Das geometrische Bild, das wir einer Funktion vorgeschrieben haben, macht die Betrachtung leicht, indem wir einen festen Punkt (x_1, y_1) auf dem Kurvenbogen mit einem beweglichen (x_2, y_2) verbinden und die Sekante um den ersteren drehen, bis der zweite Kurvenschnittpunkt mit ihm und die Sekante mit der Tangente im Punkte (x_1, y_1) zusammenfällt. Dann ist klar, daß auch der Richtungskoeffizient der Sekante, der durch den Differenzenquotienten $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ gegeben wird, für $x_2 = x_1$ einen bestimmten hinter der nichtssagenden Form $\frac{0}{0}$ verborgenen Grenzwert erreicht, der gleich dem Richtungskoeffizienten der Tangente im Punkte (x_1, y_1) ist und der Differentialquotient der gegebenen Funktion an der Stelle x_1 fortan heißt. Läßt man diese Stelle x_1 veränderlich sein, so gilt dies auch vom Differentialquotienten, der somit im allgemeinen auch als eine Funktion von x in dem betrachteten Intervalle erkannt ist. Setzen wir, wie oben geschehen ist, voraus, daß dem Kurvenstück in jedem Punkte eine bestimmte Tangente zukommt, so ist es auch selbstverständlich, daß die ihm entsprechende Funktion an jeder Stelle des Intervalls einen Differentialquotienten hat, doch ist es noch nicht sicher, daß diese Eigenschaft auch bei den Kurven zutrifft, die sich als geometrische Bilder der uns bekannten Funktionen ergeben, doch werden wir diesen Zweifel beseitigen, indem wir im folgenden zeigen, daß bei den oben aufgezählten Funktionen in der Tat der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert und wie man ihn zu bilden hat.

Dies wird man nun gleich an einigen Beispielen klar machen, nachdem noch an den Zusammenhang des Differentialquotienten mit dem Geschwindigkeitsbegriff erinnert worden ist, und den Grenzübergang vom Differenzenquotienten zur Ableitung etwa an einer einfachen ganzen und gebrochenen rationalen, einer einfachen irrationalen algebraischen und der Sinusfunktion ausführen. Diese Beispiele zeigen, daß es zu mühsam wäre, die notwendigen Schritte bei jeder besonderen Funktion im einzelnen wieder zu tun, und daß es allgemeinere Gesichtspunkte geben dürfte, die die Rechnung erheblich erleichtern werden und die wir jetzt aufsuchen wollen. Wir bilden zunächst die vielgebrauchte Ableitung von x^n, wo n eine ganze positive Zahl ist, etwa mit Hilfe des binomischen Satzes und finden die fundamentale Formel

$$\frac{d\,(x^n)}{d\,x} = n \cdot x^{n-1}.$$

Dann beweist man in bekannter Weise ohne Schwierigkeit, daß der Differentialquotient einer Konstanten für jeden Wert von x gleich Null, der des Produkts einer

*) Die richtige Bezeichnung „entwickelte algebraische Funktion" erscheint für den vorliegenden Zweck zu schwerfällig und unnötig.

Funktion mit einer Konstanten gleich dem Produkt der Konstanten mit der Ableitung der Funktion ist, daß der Differentialquotient einer algebraischen Summe von Funktionen gebildet wird, indem man dieselbe algebraische Summe ihrer Ableitungen herstellt, und ist nun im stande, eine beliebige ganze rationale Funktion überhaupt zu differenzieren. Ebenso verursacht es keine Schwierigkeit, die Regeln für die Differentiation eines Produkts oder Quotienten zweier Funktionen abzuleiten, und mit der letzteren ist nun auch die Differentiation einer beliebigen gebrochenen rationalen Funktion im Prinzip geleistet. Eine entsprechende Betrachtung, wie die früher bei der Sinusfunktion durchgeführte, läßt auch den Differentialquotienten der Cosinusfunktion und damit nach der Quotientenregel auch den der Tangens- und Cotangensfunktion gewinnen.

Um weiter zu kommen, hat man sich jetzt mit dem wichtigen Begriff der Umkehrfunktion einer gegebenen Funktion zu beschäftigen, den man zunächst an einfachen Beispielen erläutern wird. Dabei ist Gelegenheit, die Exponentialfunktion als Umkehrung der logarithmischen und die Arkusfunktionen als Umkehrungen der trigonometrischen einzuführen, ohne an dieser Stelle auf sie näher einzugehen. Vielmehr handelt es sich hier um die Frage, wie man den Differentialquotienten der Umkehrfunktion aus dem der gegebenen folgern könne. Sie ist bekanntlich leicht dahin zu beantworten, daß die beiden Differentialquotienten reziproke Werte sind, wenn man den die Funktion darstellenden Kurvenbogen nicht auf die Abszissenachse, sondern auf die Ordinatenachse bezieht und die Beziehung zwischen den beiden Richtungsfaktoren benutzt. Doch ist ein Punkt dabei zu beachten. Der Differentialquotient der gegebenen Funktion darf nämlich im betrachteten Intervall nicht gleich Null werden, denn dann würde es, wie leicht einzusehen, zur Abszissenachse parallele Geraden geben, die das Kurvenstück in mehr als einem Punkte schneiden, so daß dieses in bezug auf die Ordinatenachse zur Darstellung einer Funktion im früher bezeichneten Sinne nicht geeignet wäre. Daraus folgert man leicht, daß bei der Betrachtung der Umkehrfunktion das Intervall der gegebenen derart zu beschränken ist, daß die Funktion in ihm bei wachsendem x beständig wächst oder abnimmt. Die Bedeutung dieser allgemeinen Ausführungen zeigt sich sofort bei ihrer Anwendung auf die Arkusfunktionen als Umkehrungen der trigonometrischen, deren Besprechung man jetzt am besten folgen läßt und deren Differentialquotienten dabei gewonnen werden. Ferner ergibt unsere Regel den Differentialquotienten der $n$ten Wurzel aus x, die die Umkehrfunktion von $x = y^n$ vorstellt, und die für die Ableitung von x^n früher für ganzzahlige n nachgewiesene Fundamentalformel zeigt sich auch für einen Exponenten richtig, der der reziproke Wert einer ganzen Zahl ist.

Zur Vervollständigung des Apparates an Differentiationsregeln allgemeineren Charakters fehlt nun nur noch die wichtige für die Differentiation einer mittelbaren Funktion, d. h. einer Funktion einer Veränderlichen, die selbst wieder eine Funktion der unabhängigen Variablen ist. Die Ableitung dieser Regel

$$\frac{d f[u(x)]}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

die man ja wohl auch als Kettenregel bezeichnet, hat keine Schwierigkeiten. Sie ermöglicht es sofort, die Formel für die Ableitung einer Potenz von x auf den Fall auszudehnen, daß der Exponent eine beliebige rationale Zahl bedeutet, und ferner ist leicht einzusehen, wie man durch Beispiele verdeutlichen wird, daß mit den jetzt zu Gebote stehenden Hilfsmitteln jede Funktion zu differenzieren ist, die durch eine endliche Zahl von rationalen Rechenoperationen und Radizierungen aus der unabhängigen Veränderlichen und Konstanten aufgebaut erscheint.

Demnach bleibt nur noch die Ableitung von $\log x$ und der Exponentialfunktion als Umkehrung übrig. Bekanntlich ergibt sich leicht

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \log \lim_{m=\infty} \left[\left(m + \frac{1}{m}\right)^m\right],$$

und es handelt sich folglich um die Ermittlung des Grenzwerts von $\left(m + \frac{1}{m}\right)^m$ für unbegrenzt wachsendes m. Es ist ohne Schwierigkeit zu zeigen, daß der Ausdruck mit m beständig wächst, wenn m die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchläuft, und man wird also auf die Existenz eines Grenzwertes schließen können, wenn es gelingt, den Nachweis zu führen, daß der Ausdruck dabei immer unter einer bestimmten Zahl bleibt.*) Auch ist dies für die Zahl 3 leicht einzusehen, und da $m + \frac{1}{m}$ für $m = 1$ gleich 2 ist, so hat sich ergeben, daß ein zwischen 2 und 3 gelegener Grenzwert tatsächlich vorhanden ist, den wir mit e bezeichnen und an späterer Stelle berechnen werden. Wir nehmen das Resultat voraus und geben ihn etwa auf 5 Dezimalen an. Der Differentialquotient von $y = \log x$ ist demnach gleich $\frac{1}{x} \log e$ bestimmt. Daran schließt sich von selbst die Einführung der natürlichen Logarithmen und ihre Beziehung zu den gemeinen, sowie die Differentiation der Exponentialfunktion als Umkehrung der logarithmischen an.

Nachdem wir so gezeigt haben, daß die uns bekannten Funktionen sämtlich differenzierbar sind, und ihre Ableitungen aufgestellt worden sind, wenden wir uns wieder Betrachtungen allgemeineren Charakters zu und fragen uns, was aus dem Vorzeichen der Ableitung einer gegebenen Funktion an einer bestimmten Stelle für die Funktion selbst zu erschließen ist. Mit Hilfe des geometrischen Bildes der Funktion und der Tatsache, daß die Ableitung gleich dem Richtungskoeffizienten der Tangente im betreffenden Kurvenpunkte ist, ergibt sich leicht, daß y an der betrachteten Stelle mit x im Wachsen begriffen ist, wenn die Ableitung dort einen positiven Wert hat, daß y dagegen an der Stelle mit wachsendem x abnimmt, wenn die Ableitung negativ ist. Dabei findet man zugleich den Satz, daß eine Funktion y an einer bestimmten Stelle x nur dann einen größten oder kleinsten Wert annehmen kann, wenn ihre Ableitung an dieser Stelle gleich Null ist. Bevor man aber auf die Lehre von den größten und kleinsten Werten einer Funktion näher eingeht, sind noch die zweiten und höheren Ableitungen einzuführen, was keine Schwierigkeiten verursacht. Aehnlich wie bei der ersten Ableitung erledigt man auf anschauliche Weise an der Funktionskurve die Bedeutung des Vorzeichens der zweiten Ableitung und gewinnt den Satz: Ist der zweite Differentialquotient einer gegebenen Funktion an einer bestimmten Stelle positiv, so verläuft die Kurve der Funktion bei der üblichen Lage

*) Vergl. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik. Bd. I, S. 434 ff.

des Achsensystems im entsprechenden Punkte konkav nach oben, dagegen konvex nach oben, wenn er negativ ist. Ist er gleich Null, so hat die Kurve an der Stelle im allgemeinen einen sogenannten Wendepunkt, d. h. sie tritt hier von der einen Seite der Tangente zur andern über. Wir sind jetzt instand gesetzt, das geometrische Bild einer durch einen mathematischen Ausdruck in x und Konstanten gegebenen Funktion hinreichend zu diskutieren und zu zeichnen, was an einfachen Beispielen durchgeführt wird. Auch ist hier die Stelle, wo das Newtonsche Näherungsverfahren zur Auflösung numerischer Gleichungen besprochen werden kann. Als wichtigste Frucht aber gewinnen wir den Satz, der die Lehre von den größten und kleinsten Werten beherrscht: Ist die erste Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ an einer bestimmten Stelle x gleich Null und ist die zweite an derselben Stelle positiv, so hat die Funktion an dieser Stelle einen kleinsten Wert, ist dagegen die erste Ableitung gleich Null und die zweite negativ, einen größten Wert erreicht. Mit Hilfe dieses Satzes ist es nun im allgemeinen leicht, die extremen Werte einer gegebenen Funktion und die Stellen, wo sie eintreten, zu bestimmen.

Es bleibt jetzt noch die Entwicklung der elementaren transzendenten Funktionen in Potenzreihen übrig. Die Ableitung der Taylorschen Formel, aus der sich die einzelnen Reihenentwicklungen leicht ergeben, ist bekanntlich ein Schmerzenskind des Unterrichts. Denn wenn auch diese Formel für eine ganze rationale Funktion mit Leichtigkeit aufzustellen ist und es dann nahe liegt, etwas ähnliches für eine anders geartete Funktion zu versuchen, so ist eben der Unterschied der, daß man im Gegensatz zur ganzen rationalen Funktion eine nicht abbrechende Entwicklung erhält, und es ist nun die Frage, wie groß der Fehler ist, den man begeht, wenn man trotzdem bei der Berechnung eines Funktionswertes nur eine bestimmte endliche Zahl von Gliedern der Reihe berücksichtigt. Dieser Fehler wird bekanntlich durch das sogenannte Restglied abzuschätzen erlaubt, aber eben mit der Aufstellung und Begründung des Restgliedes hapert es wegen der damit verbundenen Schwierigkeiten. Man hat sich durch eine Art von Empirie zu helfen gesucht, indem man nach dem Vorschlage von Felix Klein zu dem graphischen Bilde der Funktion die sogenannten Schmiegungsparabeln hinzunahm, d. h. die Kurven, die sich ergeben, wenn man die Taylorsche Reihe nach dem zweiten, dritten usw. Gliede abbricht, und die sich der Funktionskurve um so mehr anschmiegen, je mehr Glieder der Taylorschen Reihe man berücksichtigt. So handelt es sich z. B. bei der Funktion $y = \sin x$, wenn man die Kurve um die Stelle $x = 0$ herum in Betracht zieht, um die Kurven mit den Gleichungen

$$y = x,\ y = x - \frac{x^3}{3!},\ y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\ \text{usw.}$$

So wertvoll diese graphische Veranschaulichung der Approximation, die durch eine bestimmte Zahl von Gliedern der Reihe gewährt wird, auch ist, so erscheint sie doch als einziges Mittel nicht ganz befriedigend und auch zeitraubend, wenn der Schüler sich durch eigenes Zeichnen bei jeder der zu betrachtenden Funktionen von der Konvergenz der Reihe überzeugen soll. Ich möchte daher im Folgenden versuchen, die Lagrangesche Restformel so abzuleiten, wie es vielleicht auch auf der Schule gehen könnte. Der Gang ist im wesentlichen derselbe, wie er in den „Elementen der Differential- und Integralrechnung" von Burkhardt befolgt wird.

Wir gehen also vom anschaulichen Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus, der durch die Formel

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + \vartheta \cdot h)$$

gegeben ist, wo x_0 einen bestimmten Wert der unabhängigen Variablen, h einen sogenannten Zuwachs derselben und ϑ eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl bedeutet. Er spricht nur die Tatsache aus, daß die Sekante zwischen zwei Punkten eines Kurvenbogens der Tangente in mindestens einem zwischen ihnen liegenden Punkte des Bogens parallel ist, und ist folglich ohne weiteres verständlich. Von der vorstehenden Formel benutzen wir im folgenden einen besonderen Fall; sind nämlich die Funktionswerte $f(x_0)$ und $f(x_0 + h)$ beide gleich Null, so findet man

$$f'(x_0 + \vartheta h) = 0,$$

und diese Gleichung spricht den Satz von Rolle aus: Wenn eine Funktion der Art, wie wir sie stets betrachten, für zwei bestimmte Werte der unabhängigen Veränderlichen gleich Null ist, so gibt es zwischen diesen Werten stets mindestens einen, für den die Ableitung gleich Null ist, was auch wieder geometrisch ganz anschaulich ist.

Diesen Satz wenden wir nun auf eine zuerst etwas kompliziert aussehende Funktion an, die wir aus zwei gegebenen Funktionen $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ zusammensetzen, nämlich

$$\psi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} \cdot [\varphi(x) - \varphi(x_0)].$$

Setzen wir hier nämlich $x = x_0$, so hebt sich rechts alles fort, ebenso, wenn wir $x = x_0 + h$ setzen, und unsere Funktion erfüllt also die Bedingungen des Satzes von Rolle für die Stellen x_0 und $x_0 + h$. Demnach gibt es mindestens eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl ϑ, für die $\psi'(x_0 + \vartheta h) = 0$ ist, woraus man leicht die Formel folgert

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \vartheta h)}{\varphi'(x_0 + \vartheta h)},$$

die den sogenannten verallgemeinerten Mittelwertsatz ausdrückt. Wir machen nun über die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ die Voraussetzung, daß sie an der Stelle x_0 verschwinden und erhalten dann die Formel

$$\frac{f(x_0 + h)}{\varphi(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + \vartheta h)}{\varphi'(x_0 + \vartheta h)}.$$

Schreiben wir ferner zur Abkürzung h_1 für ϑh, so können wir die vorstehende Formel offenbar auch auf die Funktionen $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ und das Intervall von x_0 bis $x_0 + h_1$ anwenden, wenn wir noch die Voraussetzung hinzufügen, daß auch diese Funktionen, also die Ableitungen der gegebenen, an der Stelle x_0 zu Null werden, und es ergibt sich

$$\frac{f'(x_0 + h_1)}{\varphi'(x_0 + h_1)} = \frac{f''(x_0 + \vartheta_1 h_1)}{\varphi''(x_0 + \vartheta_1 h_1)},$$

wo ϑ_1 wieder eine nicht näher bekannte zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeutet. Nun ist aber $h_1 = \vartheta \cdot h$, also $\vartheta_1 \cdot h_1 = \vartheta \cdot \vartheta_1 \cdot h$ und $\vartheta \cdot \vartheta_1 = \eta$ auch eine zwischen Null und Eins gelegene Zahl, so daß wir schreiben können

$$\frac{f'(x_0 + h_1)}{\varphi'(x_0 + h_1)} = \frac{f''(x_0 + \eta h)}{\varphi''(x_0 + \eta h)},$$

also auch, wenn wir die frühere Formel dazunehmen,

$$\frac{f(x_0 + h)}{\varphi(x_0 + h)} = \frac{f''(x_0 + \eta h)}{\varphi''(x_0 + \eta h)}.$$

Es ist aber klar, daß man in derselben Weise weitergehen kann, wenn man noch die weiteren Voraussetzungen hinzufügt, daß auch die zweite bis $n$te Ableitung der Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ an der Stelle x_0 gleich Null sind, und wir erhalten schließlich die Formel

$$\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta h)}{\varphi^{(n+1)}(x_0+\vartheta h)} \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Wir können aber leicht eine Funktion angeben, die die notwendigen Voraussetzungen erfüllt, nämlich

$$\varphi(x) = (x - x_0)^{n+1},$$

denn sie wird selbst wie ihre n ersten Ableitungen für $x = x_0$ zu Null, da sie alle den Faktor $x - x_0$ enthalten. Und es ist

$$\varphi^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

Da ferner $\varphi(x_0+h) = h^{n+1}$ ist, so ergibt sich als Resultat unserer Betrachtungen, wenn für $f(x)$ unsere oben gemachten Voraussetzungen gelten, die Formel

$$f(x_0+h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \text{*)}.$$

Das ist nun freilich etwas abstrakt, aber das Folgende läßt gleich erkennen, wozu es gut ist.

Man zeigt nämlich jetzt zunächst, daß irgend ein Polynom

$$g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

auch geschrieben werden kann in der Form

$$g(x) = g(0) + x \cdot g'(0) + x^2 \cdot \frac{g''(0)}{1 \cdot 2} + \cdots + x^n \cdot \frac{g^{(n)}(0)}{n!},$$

die nur eine andere Schreibweise ist und die Maclaurinsche Darstellung des Polynoms heißt. Bei einer Funktion, die nicht rational und ganz ist, macht eine entsprechende Darstellung Schwierigkeiten, weil hier die Reihe der Ableitungen nicht abbricht, sondern unendlich ist, doch können wir an einer bestimmten Stelle aufhören und bei gegebener Funktion $y = f(x)$ das Polynom bilden

$$g(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Es ist die Frage, mit welcher Annäherung dieses Polynom die gegebene Funktion wiedergibt. Setzen wir aber $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, so ist

$$\varphi(0) = f(0) - g(0) = 0, \quad \varphi'(0) = f'(0) - g'(0) = 0,$$
$$\varphi''(0) = f''(0) - g''(0) = 0, \; \cdots\cdots$$

$\varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) - g^{(n)}(0) = 0$; die Funktion $\varphi(x)$ verschwindet also mit ihren n ersten Ableitungen an der Stelle Null, und wir können die oben abgeleitete Formel anwenden, aus der wir erhalten, wenn wir noch $x_0 = 0$, $h = x$ setzen,

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Nun ist ferner

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x),$$

da $g^{(n+1)}(x)$ als $(n+1)$te Ableitung eines Polynoms $n$ten Grades gleich Null ist, so daß wir schließlich bekommen

$$f(x) - g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \text{ oder}$$

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(0) + \cdots$$
$$+ \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\vartheta x).$$

*) Es wird noch darauf hinzuweisen sein, daß bei $\varphi(x) = (x - x_0)^{n+1}$ sowohl die Funktion selbst wie ihre erste bis $(n+1)$te Ableitung zwischen $x = x_0$ und $x = x_0 + h$ nirgends gleich Null werden, was nötig ist, damit die voraufgehenden Schlüsse bindend sind.

Damit ist die Maclaurinsche Formel abgeleitet. Auf die eigentliche Taylorsche Formel, die nur der Form, nicht dem Wesen nach allgemeiner ist, kann man verzichten.

Die Reihe wird zuerst auf die Exponentialfunktion angewendet, bei welcher Gelegenheit nun auch die Ausrechnung von e stattfindet. Ebenso wie bei der Sinus- und Cosinusfunktion macht der Nachweis der Konvergenz für beliebige Werte von x keine Schwierigkeit. Bei der Anwendung auf die Funktionen $\log(1+x)$ und $(1+x)^n$ muß man sich freilich auf das Gebiet von $x = 0$ bis $x = +1$ beschränken, da man für das Intervall von $x = 0$ bis $x = -1$ mit der Restformel von Lagrange nicht auskommt.

Nachdem man gezeigt hat, wie die elementaren Transzendenten im Prinzip bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit mit der Maclaurinschen Formel berechnet werden können, ist ein Eingehen auf die eigentliche Theorie der unendlichen Reihen wohl überflüssig.

Es bleibt nun noch übrig, auseinanderzusetzen, wie ich mir die Behandlung des Integrals denke. Man erklärt zunächst das Integrieren als Umkehrung des Differenzierens und ein Integral einer gegebenen Funktion $f(x)$ als eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung gleich $f(x)$ ist. Für die Erklärung der Bezeichnungsweise wird auf später vertröstet. Als erstes wichtiges Ergebnis zeigt es sich, daß, während zu einer Funktion stets eine eindeutig bestimmte andere als Ableitung gehörte, einer gegebenen Funktion, wenn überhaupt, unendlich viele Integralfunktionen entsprechen, die aus einer beliebigen von ihnen durch Addition einer willkürlichen Konstanten folgen. Die Bedeutung der Integrationskonstanten wird sodann geometrisch und physikalisch erläutert. Wir können ferner aus jeder Differentiationsformel leicht eine entsprechende Integrationsformel ableiten und gewinnen so z. B. die fundamentale Formel

$$\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C.$$

Ebenso ergeben sich leicht aus den analogen Regeln der Differentialrechnung die für die Integration einer Summe von Funktionen und die, daß man einen konstanten Faktor des Integranden vor das Integralzeichen setzen darf, so daß man jetzt eine beliebige ganze rationale Funktion zu integrieren imstande ist. Es folgen die übrigen Fundamentalformeln, wie

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \lg x + C \text{ usw.}$$

Darauf wird das bestimmte Integral eingeführt durch die Gleichung

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx = F(x_2) - F(x_1),$$

wobei $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$ das unbestimmte Integral von $f(x)$ ist, und gezeigt, daß es geometrisch den Inhalt des Flächenstücks bedeutet, das von der x-Achse, der Bildkurve von $f(x)$ und ihren zu den Abszissen x_1 und x_2 gehörigen Ordinaten eingefaßt wird, falls die Kurve sich innerhalb dieses Intervalls auf derselben Seite der Achse erstreckt. Das bestimmte Integral kann also zur Auswertung solcher Flächen dienen, was nun an der Sinuskurve, der Parabel und der Hyperbel z. B. praktisch ausgeführt wird. Mit der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals ist ferner die Möglichkeit gegeben, dieses unabhängig vom unbestimmten Integral als Grenzwert eines bezw. zweier

Summenausdrücke zu definieren, in dem man in bekannter Weise das entsprechende Flächenstück zwischen zwei andere einschließt, die an Stelle des Kurvenbogens durch je eine treppenförmige gebrochene Linie begrenzt werden. Jetzt findet auch die Integralbezeichnung und das Differential dx die noch fehlende Erklärung. Man wird bemerkt haben, daß von einer Einführung des Differentials in der Differentialrechnung abgesehen worden ist, um die vorhandenen Schwierigkeiten nicht noch um eine weitere nicht unerhebliche zu vermehren. Die Aufstellung und Auswertung eines Summenausdrucks der betrachteten Art wird nun am besten an der Sinusfunktion als Beispiel erläutert, und durch Uebergang zur Grenze wird das bestimmte Integral gewonnen, wie es sich auch aus dem bekannten unbestimmten ergibt. Den Schluß bilden Anwendungen aus der Geometrie und Physik, an denen kein Mangel ist.

Zur Konstruktion der Ellipse aus zwei Punkten, aus dem Mittelpunkt und der Länge der grossen Achse.

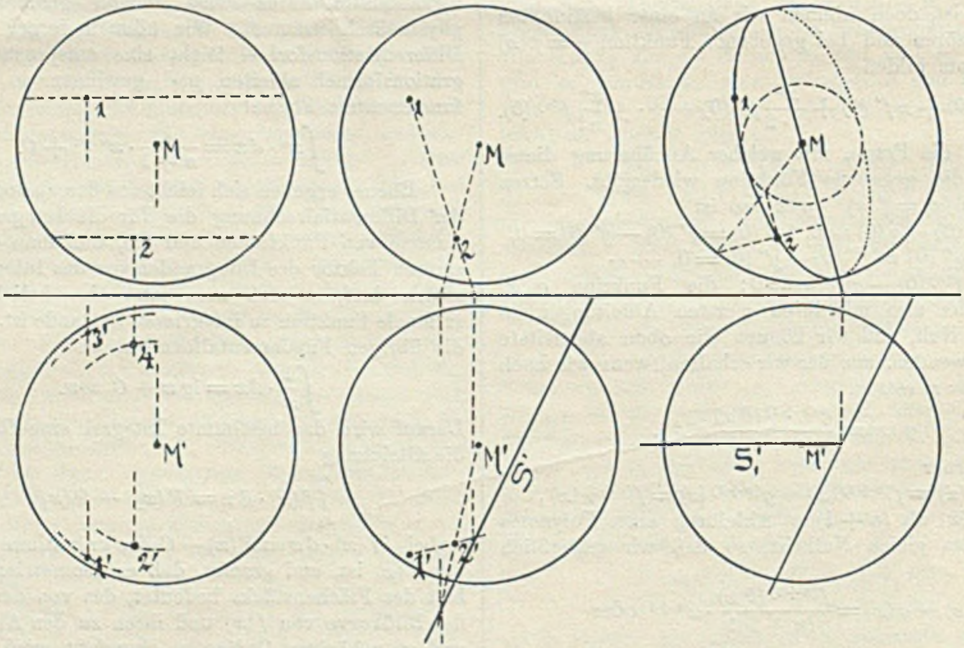
Von Dr. Karl Wörner (Frankfurt a. M.).

Die Aufgabe ist aus der Praxis hervorgegangen; es liegt ihr das folgende Erlebnis zugrunde: bei der Berechnung des Bogenstücks zwischen zwei Punkten der Erdoberfläche (ein Schiff segelt von New-York auf dem größten Kreise nach Kapstadt, wieviel geographische Meilen beträgt die Entfernung beider Städte?) pflegt man zur Erklärung in einen Kreis zwei Punkte einzutragen und durch ein Ellipsenbogenstück ungefähr zu verbinden. Ein Schüler wünschte nun diese Konstruktion korrekt durchzuführen, das Rezept dafür war

Eine außerordentlich einfache Lösung gibt die darstellende Geometrie zur Hand. Sie faßt die gegebene Figur als Aufriß oder senkrechte Parallelprojektion einer Kugel auf, auf deren Oberfläche zwei Punkte verzeichnet sind. Für eine Behandlung auf dem angekündigten Wege ist es zunächst nötig, die Figur zu ergänzen: Man legt eine beliebige Achse ein; der Grundriß wird dann durch einen weiteren kongruenten Kreis geliefert, dessen Mittelpunkt auf der Achsennormale des gegebenen Mittelpunkts liegt. Auch die Horizontalprojektionen der gegebenen Punkte lassen sich jetzt einzeichnen. Man legt Horizontalschnitte durch 1 und 2, die im Aufriß als Strecken, im Grundriß als Kreise erscheinen. Die Horizontalprojektion ihrer Mittelpunkte fällt mit der des Kugelmittelpunktes zusammen, ihre Durchmesser lassen sich aus der Vertikalprojektion unmittelbar abgreifen (Fig. 1 α).

Man kann nun an die eigentliche Lösung herantreten. Man legt die Ebene, die die Punkte 1, 2 und den Kugelmittelpunkt enthält, und so den gesuchten größten Kreis ausschneidet, in der üblichen Weise durch ihre Spuren fest; für die Lösung kann man mit der Horizontalspur auskommen (Fig. 1 β).

Der dritte Schritt bringt schon die Entscheidung: die wahre Schnittfigur durch die zwei gegebenen Punkte und den Kugelmittelpunkt ist, wie schon gesagt, ein Kreis, dessen Durchmesser im perspektivischen Bild im allgemeinen umgelegt und verkürzt erscheinen und so die bekannte Ellipse erzeugen. Ein Durchmesser jedoch bleibt in wahrer Größe und Lage erhalten: derjenige, der parallel zur Bildebene läuft und also durch eine parallele Ebene zur Bildebene, also hier zur Aufrißebene ausgeschnitten wird; die Schnittgerade im



α β γ

Fig. 1.

indessen mit den gewohnten Sätzen nicht sofort zur Hand. Eine Umfrage bei Kollegen verlief erfolglos, auch fand sich bei der Durchsicht der zur Verfügung stehenden Lehrbücher keine Erwähnung der betr. Konstruktion. Es scheint mir darum eine Besprechung des Problems an dieser Stelle angebracht.

Aufriß liefert unmittelbar die große Achse. Wendet man die Umkehrung der Zeichnung der Ellipse aus Umkreis und Inkreis auf Punkt 1 an, so findet man auch die kleine Achse, und die Konstruktion der Ellipse kann in bekannter Weise zu Ende geführt werden (Fig. 1 γ).

Jeder der beiden gegegebenen Punkte 1 und 2 kann nun als Doppelpunkt aufgefaßt werden, in dem die Bilder zweier hintereinanderliegender Punkte der Kugeloberfläche zusammenfallen. Gibt man deshalb dem Punkt 1 noch die Bezeichnung 3, dem Punkt 2 4, so entstehen drei weitere Aufgaben: die Bilder von größten Kreisen zu zeichnen, die durch (3, 4), dann durch (1, 4), endlich durch 2 und 3 gehen. Die Ausführung der zugehörigen Konstruktionen beruht auf einer Verschiebung der Horizontalprojektion der gegebenen Punkte nach der Achse zu (vergl. Fig. 1), wodurch drei neue Zeichnungen hervorgehen (vergl. Fig. 2).

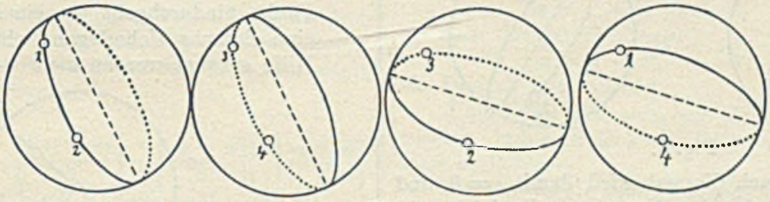


Fig. 2.

Je zwei der entstehenden Ellipsen sind kongruent und unterscheiden sich nur in der Sichtbarkeit der Hälften, die zugehörigen größten Kreise gehen durch Drehung um den ausgezeichneten Durchmesser ineinander über. Wider Erwarten stellen sich nicht vier, sondern nur zwei verschiedene Lagen der großen Achse ein.

Das zeichnerische Ergebnis wird in der analytischen Behandlung bestätigt.

Die Gleichung der gesuchten Kreisbilder heißt in der einfachsten Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

oder

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Da die kleine Achse b und die große Achse der Lage nach unbekannt sind, kann von dieser Form zunächst kein Gebrauch gemacht werden; es muß auf die allgemeinere Mittelpunktsgleichung bei zufälliger Lage der Abszissenachse übergegangen werden. Die Transformationsgleichungen heißen

$$x = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi,$$
$$y = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi,$$

wo ξ, η die Koordinaten des zufälligen orthogonalen Systems, φ seinen Winkel zwischen Abszissenachse und großer Achse bedeuten. Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse geht dadurch in die Form über:

$$b^2 (\xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi)^2 + a^2 (\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi)^2 = a^2 b^2.$$

Da die Koordinaten für das neue System festgestellt werden können, stehen zwei Gleichungen zur Berechnung der Unbekannten b und φ zur Verfügung.

$$b^2 (\xi_{,} \cos\varphi - \eta_{,} \sin\varphi)^2 + a^2 (\xi_{,} \sin\varphi + \eta_{,} \cos\varphi)^2 = a^2 b^2,$$
$$b^2 (\xi_{,,} \cos\varphi - \eta_{,,} \sin\varphi)^2 + a^2 (\xi_{,,} \sin\varphi + \eta_{,,} \cos\varphi)^2 = a^2 b^2.$$

Daraus entstehen die Durchgangsformen

$$\text{I} \qquad b^2 = \frac{a^2 (\xi_{,} \sin\varphi + \eta_{,} \cos\varphi)^2}{a^2 - (\xi_{,} \cos\varphi - \eta_{,} \sin\varphi)^2}$$
$$b^2 = \frac{a^2 (\xi_{,,} \sin\varphi + \eta_{,,} \cos\varphi)^2}{a^2 - (\xi_{,,} \cos\varphi - \eta_{,,} \sin\varphi)^2}$$

und schließlich eine Bestimmungsgleichung für φ:

$$[a^2 - (\xi_{,,} \cos\varphi - \eta_{,,} \sin\varphi)^2] [a^2 (\xi_{,} \sin\varphi + \eta_{,} \cos\varphi)^2] =$$
$$= [a^2 - (\xi_{,} \cos\varphi - \eta_{,} \sin\varphi)^2] [a^2 (\xi_{,,} \sin\varphi + \eta_{,,} \cos\varphi)^2].$$

Die Auflösung dieser Gleichung macht keine geringe Schwierigkeiten, da sie anscheinend von höherem als dem 4. Grad ist. Sie vereinfacht sich jedoch ungemein, wenn die willkürliche Abszissenachse durch einen der beiden Punkte, z. B. durch 1, hindurchgelegt wird, so daß $\eta_{,}$ den Wert 0 annimmt.

Es resultiert

$$[a^2 - (\xi_{,,} \cos\varphi - \eta_{,,} \sin\varphi)^2]\, \xi_{,}^2 \sin^2\varphi =$$
$$= (a^2 - \xi_{,}^2 \cos^2\varphi)(\xi_{,,} \sin\varphi + \eta_{,,} \cos\varphi)^2,$$

aufgelöst und geordnet

$$\text{II} \qquad \sin^2\varphi\, (a^2 \xi_{,}^2 - a^2 \xi_{,,}^2 - \xi_{,}^2 \eta_{,,}^2) +$$
$$+ 2 \sin\varphi \cos\varphi\, (\xi_{,}^2 \xi_{,,} \eta_{,,} - a^2 \xi_{,,} \eta_{,,}) + \cos^2\varphi\, (\xi_{,}^2 \eta_{,,}^2 - a^2 \eta_{,,}^2) = 0.$$

Bezeichnet man noch die Koeffizienten nacheinander mit r, s, t und dividiert durch $\cos^2\varphi$, so kommt man auf eine Gleichung 2. Grades

$$r \operatorname{tg}^2\varphi + 2 s \operatorname{tg}\varphi + t = 0,$$

daraus

$$\operatorname{tg}^2\varphi + 2 \frac{s}{r} \operatorname{tg}\varphi + \frac{t}{r} = 0$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{s}{r} \pm \sqrt{-\frac{t}{r} + \frac{s^2}{r^2}}$$

$$\text{III} \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - r t}}{r}.$$

φ hat also hat zwei Werte, es existieren im ganzen zwei verschiedene Lagen der großen Achse.

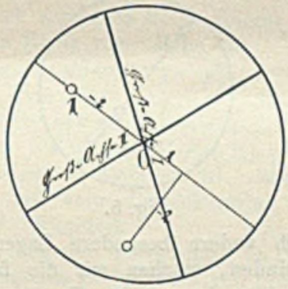


Fig. 3.

Beispiel: In Fig. 3 messen die Koordinaten für das System durch den Punkt 1

$\xi_{,} = -2$, $\eta_{,} = 0$, $\xi_{,,} = 1$, $\eta_{,,} = -2$, die große Achse a selbst 3;

daraus berechnen sich für $r s t$ die Zahlenwerte

$$r = 11, \quad s = 10, \quad t = -20$$

$$\text{für } \operatorname{tg}\varphi = \frac{-10 \pm 17{,}89}{11}$$

und φ beträgt entweder $35^0\,39'$ oder $111^0\,31^1/_2{}'$. Um diese Winkel ist das Koordinatensystem zurückzudrehen, die gewonnenen ursprünglichen Abszissenachsen stellen dann die großen Achsen dar.

Die Diskussion der Gleichung III gibt über die besonderen Fälle Aufschluß.

Es liegt nahe, den 2. Summanden $\sqrt{s^2 - r t} = 0$ anzunehmen, das tritt dann ein, wenn $s^2 = r t$ wird, oder

$$\xi_{,,}^2 \eta_{,,}^2 (\xi_{,}^2 - a^2)^2 - \eta_{,,}^2 (\xi_{,}^2 - a^2)(a^2 \xi_{,}^2 - a^2 \xi_{,,}^2 - \xi_{,}^2 \eta_{,,}^2)$$

den Wert 0 annimmt.

Dieses Kriterium wird erfüllt

1. für $\xi_{,} = a$, damit wird s überhaupt $= 0$ und auch $\operatorname{tg}\varphi = 0$, d. h. wenn Punkt 1 auf der Peripherie des Bildkreises oder auf dem Rand der Kugel

liegt, braucht man keinerlei Drehung des Koordinatensystems vorzunehmen, um die Abszissenachse in die große Achse hineinzulegen: die Strecke 1 zum Mittelpunkt liefert unmittelbar die große Halbachse. Weil Punkt 1 als Randpunkt kein Doppelpunkt ist, gibt es auch nur eine große Achse und nur zwei Bilder, deren kleine Achse nach I zu $\frac{a\,\eta_{,,}}{\sqrt{a^2-\xi_{,,}^2}}$ wird (Fig. 4).

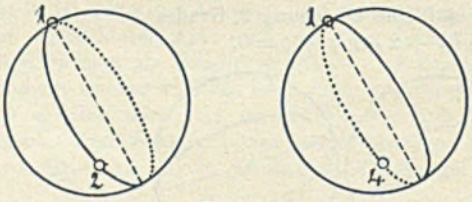


Fig. 4.

2. für $\eta_{,,}=0$; auch diesmal wird damit $s=0$ und $\operatorname{tg}\varphi$ nimmt wieder den Wert 0 an. Zugleich geht b nach I in die Werte $\frac{0}{\sqrt{a^2-\xi_{,}^2}}$, $\frac{0}{\sqrt{a^2-\xi_{,,}^2}}$ über, wird also $=0$, d. h. wenn die Punkte (1 3) und (2 4) in ein und dieselbe Gerade durch den Mittelpunkt fallen, bedarf es ebenfalls keiner Drehung des Koordinatensystems: die große Achse geht durch die zwei gegebenen Punkte, die kleine fällt in den Kugelmittelpunkt, das Bild des größten Kreises wird zur Strecke (Fig. 5).

selben Geraden in gleichem Abstand diesseits und jenseits des Mittelpunkts, so fällt die große Achse in die Abszissenachse und Ordinatenachse; die zwei ersten Kreisbilder fallen in eine Strecke, die zwei anderen enthalten die gegebenen Punkte als höchsten und tiefsten Punkt (Fig. 6).

2. für $\xi_{,}=\xi_{,,}=0$ ergibt die Gleichung II aus $\cos^2\varphi\cdot a^2\eta_{,,}^2=0$ für φ den Wert 90^0, und nach der Gleichung I wird $b=0$, d. h. rückt einer der gegebenen Punkte auf den Mittelpunkt, so entsteht nur ein Kreisbild, die Ellipse entartet wieder zu einem Durchmesser, der durch den 2. gegebenen Punkt hindurchgeht (— ein Resultat, das durch eine einfache Ueberlegung ohne jede rechnerische Hilfe erkannt werden kann —) (Fig. 7).

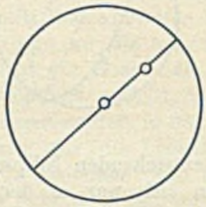


Fig. 7.

Die Aufgabe widerstrebt einer Lösung, so wünschenswert sie auch erscheint, mit den Hilfsmitteln der projektiven Geometrie; ob eine solche überhaupt unmöglich ist, wage ich auf Grund des zusammengetragenen Materials nicht zu entscheiden. Immerhin gibt auch so

Fig. 5.

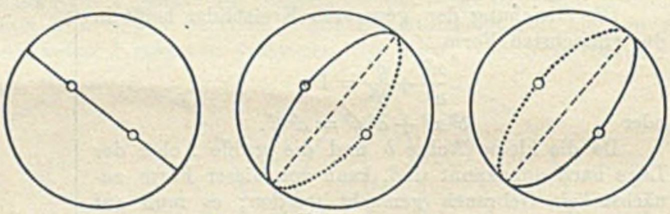


Fig. 6.

Um noch andere besondere Lagen der großen Achse aufzufinden, machen wir die fruchtbare Annahme, die beiden Summanden für $\operatorname{tg}\varphi$ wären gleich, also $s=\sqrt{s^2-rt}$; dafür müßte rt oder

$$(a^2\xi_{,}^2-a^2\xi_2^2-\xi_{,}^2\eta_{,,}^2)\,(\xi_{,}^2\eta_{,,}^2-a^2\eta_{,,}^2)=0$$

sein; der eine Faktor t wird Null für $\xi_{,}=a$ oder $\eta_{,,}=0$, das ist eine Wiederholung der eben besprochenen Fälle.

Der andere Faktor r oder $a^2(\xi_{,}^2-\xi_{,,}^2)-\xi_{,}^2\eta_{,,}^2$ nimmt den Wert Null an

1. für $\xi_{,,}=\pm\xi_{,}$ und zugleich $\eta_{,,}=0$, wählt man das positive Vorzeichen zu $\xi_{,,}$ so fallen die gegebenen Punkte in einem zusammen, die Aufgabe ändert ihren Inhalt wesentlich, wir scheiden diese Annahme darum aus.

Für die andere Annahme $\xi_{,,}=-\xi_{,}$ und zugleich $\eta_{,,}=0$ nimmt $\operatorname{tg}\varphi$ den Wert 0 oder den unbestimmten $\frac{0}{0}$ an, eine Differentiation von Zähler und Nenner nach η führt alsbald die Entscheidung herbei: nach dem Einsetzen von $\eta_{,,}=0$ entsteht $\frac{2(\xi_{,}^2\xi_{,,}-a^2\xi_{,,})}{0}$, also ∞; die zugehörigen Winkel messen 0^0 und 90^0. b beträgt nach I $\frac{0}{\sqrt{a^2-\xi_{,}^2}}=0$ und $\sqrt{\frac{a^2\xi_{,}^2}{a^2}}$ oder $\sqrt{\frac{a^2\xi_{,,}^2}{a^2}}=\xi_{,}\,(|\xi_{,,}|)$, d. h. liegen die zwei gegebenen Punkte auf der-

die Aufgabe Gelegenheit, zwei mathematische Disziplinen im Primaunterricht ungemein reizvoll zu verknüpfen und leiht zugleich der analytischen Geometrie für die Anwendung der Transformationsgleichungen einen ungewöhnlichen Uebungsstoff.

Analoga zu den „pythagoreischen“ Dreiecken.

Von Dr. H. Böttcher (Leipzig.)

Aufgabe: Die Gestalten aller rationalen Dreiecke zu bestimmen, die einen Winkel von 120^0 haben.

Lösung: Soll $\gamma=120^0$ sein, so sind drei rationale Zahlen a, b, c so zu bestimmen, daß $a^2+b^2+ab=c^2$ ist.

Setzt man $c=a+\frac{m}{n}b$, so ergibt sich

$$b^2+ab=2a\frac{m}{n}b+\frac{m^2}{n^2}b^2,\quad b\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)=a\left(2\frac{m}{n}-1\right)$$

$$a:b=(n^2-m^2):(2mn-n^2).$$

Man bekommt alle verlangten Dreiecksgestalten, wenn man für m, n alle Paare positiver ganzer Zahlen bildet, die der Ungleichung $2m\geqq n\geqq m$ genügen und dann direkt

$$\underline{a=n^2-m^2},\quad \underline{b=2mn-n^2},\quad \underline{c=a+\frac{m}{n}b=n^2+m^2-mn}$$

setzt.

Hier kann man zunächst, ohne daß man dadurch eine Dreiecksgestalt verlöre, die Paare m, n mit gemeinsamem Teiler weglassen.

Es sei nun p eine Primzahl, die, obgleich m und n relativ prim sind, in den drei Ausdrücken

$$(n-m)(n+m), \quad (2m-n)n, \quad (m+n)^2-3mn$$

aufgeht. m selbst kann dann nicht durch p teilbar sein, denn da es $(n-m)$ oder $(n+m)$ ist, müßte dann auch n durch p teilbar sein. Also ist $(2m-n)$ durch p teilbar. Daraus folgt wieder, daß $(n-m)$ nicht durch p teilbar sein kann, weil es sonst auch $(2m-n)+(n-m)=m$ wäre. Also ist $(n+m)$ durch p teilbar; mithin aber auch $(2m-n)+(n+m)=3m$. m ists nicht, also ist $p=3$.

Sind m und n relativ prim, so können also die drei Ausdrücke keine anderen Primfaktoren als 3 gemeinsam haben. Dieser Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $(m+n)$ durch 3 teilbar ist.

Es ist aber

$$\frac{n^2-m^2}{3}=\left\{2\cdot\left[\frac{2n-m}{3}\right]-\left[\frac{m+n}{3}\right]\right\}\cdot\left[\frac{m+n}{3}\right]$$

$$\frac{(2m-n)n}{3}=\left[\frac{m+n}{3}\right]^2-\left[\frac{2n-m}{3}\right]^2$$

$$\frac{m^2+n^2-mn}{3}=\left[\frac{2n-m}{3}\right]^2+\left[\frac{m+n}{3}\right]^2-\left[\frac{2n-m}{3}\right]\cdot\left[\frac{m+n}{3}\right].$$

Setzt man hierin

$$\frac{m+n}{3}=n', \quad \frac{2n-m}{3}=m',$$

so erkennt man, daß die Ausdrücke rechts genau gebaut sind wie die oben zur Berechnung von a, b, c angegebenen.

Die Zahlpaare m, n, bei denen $(m+n)$ durch 3 teilbar ist, können also einfach weggelassen werden. Denn die sich dabei ergebenden Dreiecksgestalten kommen (in kleineren Zahlverhältnissen) in der ursprünglichen Reihe von Zahltripeln noch einmal vor.

Beispiel: $n=7$, $m=5$ liefert

$$a=24, \quad b=21, \quad c=39;$$

oder das Seitenverhältnis

$$8:7:13.$$

$n'=4$, $m'=3$ aber liefert

$$a=7, \quad b=8, \quad c=13,$$

also dasselbe. Welchen Schenkel von γ man a nennt, ist ja gleichgültig.

Das Formeltripel

$$n^2-m^2, \quad 2mn-n^2, \quad m^2+n^2-mn$$

liefert also sämtliche Dreiecksgestalten und zwar in den kleinsten Zahlen, wenn man die positiven ganzen Zahlen m und n so wählt, daß

1. m und n relativ prim sind,
2. $(m+n)$ nicht durch 3 teilbar,
3. $2m \geqq n \geqq m$ ist.

(Durch Weglassen der Gleichheitszeichen in der dritten Bedingung wirft man nur das Dreieck mit den Seiten 0, 1, 1 weg.)

Auf die angegebene Art wird jede Dreiecksgestalt nur einmal gewonnen.

Beweis: Aus

$$n^2-m^2=q^2-p^2 \qquad /\cdot 1$$
$$2mn-n^2=2pq-q^2 \qquad /\cdot 2$$
$$m^2+n^2-mn=p^2+q^2-pq \qquad /\cdot 1$$

folgt durch Multiplikation mit den beigefügten Faktoren und Addition:

$$3mn=3pq,$$

wegen der zweiten Gleichung daraus $n^2=q^2$; wegen der ersten $m^2=p^2$; bei der Beschränkung auf positive Werte also $n=q$, $m=p$.

Dagegen folgt aus dem System

$$n^2-m^2=2pq-q^2 \qquad /\cdot(-1)$$
$$2mn-n^2=q^2-p^2 \qquad /\cdot 1$$
$$m^2+n^2-mn=p^2+q^2-pq \qquad /\cdot 2$$
$$3m^2=4q^2-4pq+p^2=(2q-p)^2.$$

Das aber ist bei rationalem m, p, q unmöglich.

Aufgabe: Die Gestalten aller rationalen Dreiecke zu bestimmen, die einen Winkel von 60° haben.

Bilden die rationalen Strecken a', b', c' ein Dreieck mit $\gamma'=120^0$, so bildet sowohl das Streckentripel

$$a=a'+b', \quad b=a', \quad c=c',$$

als auch das Streckentripel

$$a=a'+b', \quad b=b', \quad c=c'$$

ein Dreieck mit $\gamma=60^0$.

Umgekehrt läßt sich, wie planimetrisch leicht einzusehen, jedes Dreieck mit 60° aus einem solchen mit 120° herleiten.

Jede rationale Dreiecksgestalt mit $\gamma=60^0$ ist also in einem der beiden Tripel

1. $a=2mn-m^2$, $b=n^2-m^2$, $c=m^2+n^2-mn$

oder

2. $a=2mn-m^2$, $b=2mn-n^2$, $c=m^2+n^2-mn$

enthalten, wobei m, n den oben aufgestellten Bedingungen genügen. (a ist stets die längste, b die kürzeste Seite.)

Die beiden Dreiecke, die von demselben Wertepaar m, n geliefert werden, lassen sich immer zu einem großen gleichseitigen Dreieck von der Seitenlänge a zusammensetzen.

Ein Dreieck der einen Reihe kommt niemals auch in der anderen Reihe vor. Denn aus

$$2mn-m^2=2pq-p^2 \qquad /\cdot 1$$
$$n^2-m^2=2pq-q^2 \qquad /\cdot 1$$
$$m^2+n^2-mn=p^2+q^2-pq \qquad /\cdot 2$$

folgt

$$3n^2=p^2+q^2+2pq=(p+q)^2,$$

was bei rationalem n unmöglich ist. Ebenso läßt sich leicht zeigen, daß keine Dreiecksgestalt in derselben Reihe zweimal vorkommt.

Daß man bei der Forderung $\gamma=120^0$ nur eine, bei $\gamma=60^0$ dagegen zwei Reihen von Lösungen erhält, kommt daher, daß die Gleichung für b

$$b^2+ab-(c^2-a^2)=0$$

höchstens eine positive Wurzel haben kann; wegen $(b_1+b_2=-a)$, wogegen die Gleichung

$$b^2-ab-(c^2-a^2)=0$$

zwei positive Wurzeln haben kann, und sie auch wirklich hat, wenn

$$a^2 > c^2 > \frac{3}{4}a^2$$

ist. (Geometrische Deutung!)

Die Löslichkeit von Ozon in Wasser.

Von Otto Bürger (Kirn, Nahe).

Die Löslichkeit von Ozon in Wasser ist eine den anderen Gasen analoge, bekannte Tatsache, die daher auch bisher wenig untersucht worden ist. Die Bedingungen der Löslichkeit wurden erst in neuester Zeit von Dr. Monfang festgestellt.*)

*) Literatur: Monfang, Ed. Dr., „Ozonwasser als Desinfektionsmittel in der Brauerei" („Zeitschrift für das gesamte Brauwesen", 1912, Nr. 15).
Bürger, Otto, „Verwendung von Ozonwasser zu Desinfektionszwecken in der Brauerei" („Allgemeine Brauer- und Hopfen-Zeitung", 1913, Nr. 109; „Wochenschrift für Brauerei", 1913, Nr. 20).
Monfang, Ed. Dr., und Bürger, Otto, „L'eau ozonisée et son action stérilisante" („Brasserie et Malterie", 1913, Nr. 5; Deutsches Referat: „Allgemeine Brauer- und Hopfen-Zeitung", 1913, Nr. 148).

Um Ozon in Wasser lösen zu können, ist ein schwaches Ansäuern des Lösungswassers unerläßliche Hauptbedingung. Reduzierende Körper, wie z. B. Alkohol, wirken, selbst in geringen Mengen, der Ozonlöslichkeit stark entgegen. Vollständig neutrales Wasser nimmt nur Spuren von Ozon auf.

Auf die Stabilität hergestellter Ozonlösungen wirken niedrige Temperatur, Vermeidung von Reibung und sonstiger starker Bewegung fördernd.

Als Ausgangsstoff zur Ozondarstellung kann sowohl Luft als auch Sauerstoff verwendet werden und zwar a) in feuchtem, b) in getrocknetem Zustande. Im nachfolgenden seien nun die Ergebnisse dieser Untersuchungen mitgeteilt.

Vorerst sei jedoch noch auf ein wichtiges Gesetz aufmerksam gemacht, das sich während dieser Experimente ergeben hat:

Ein Wasser kann um so mehr mit Ozon angereichert werden, je höher die Ozonkonzentration des ozonübertragenden Gases ist, eine Feststellung, die zu dem Betreben, möglichst viel absolutes Ozon in der Zeiteinheit zu gewinnen, in direktem Gegensatz steht. Um eine möglichst hohe Ozonkonzentration des Ozonüberträgers zu erreichen, muß man die Stundenlitergeschwindigkeit des ozonisiert werdenden Gases möglichst gering nehmen. Bei einer Versuchsreihe stieg die Ozonkonzentration von 11 mg im Liter bei 66 Stundenlitern auf 56,4 mg im Liter bei nur 8 Stundenlitern. Die Temperatur betrug dabei durchschnittlich 18° C. Der verwendete Ozonapparat bestand aus sieben Siemensschen Röhrenelementen, die hintereinander geschaltet waren. Der Transformator lieferte einen Wechselstrom von 8000 Volt. Das etwas alkalische Lösungswasser war durch Ansäuern mit reiner Schwefelsäure auf einen Gehalt von 0,06 bis 0,08% freier Säure gebracht worden.

Es ist einleuchtend, daß man bei Verwendung anderer Ozonapparate, höherer Volt- und Periodenzahl, ganz andere Ergebnisse erzielen wird. Nach von anderer Seite angestellten Versuchen steigert sich dabei die Ozonausbeute in höherem Maße, als der direkten Proportionalität entspricht.

Es ist keineswegs gleich, ob man feuchte oder trockene Luft verwendet. Genaue Versuche haben ergeben, daß man bei Verwendung des gleichen Quantums Luft in gleicher Zeit ungefähr sechsmal so viel Ozon aus trockener Luft herstellen kann als aus feuchter. Feuchte Luft liefert verschwindend wenig Ozon.

Bessere Ergebnisse erhält man beim Arbeiten mit Sauerstoff. Für trockenen Sauerstoff bewegen sich die Werte für die Ozonlöslichkeit etwa zwischen 14—37, bei feuchtem Sauerstoff zwischen 2—8 mg Ozon pro Liter Lösungswasser. Bei einer Temperatur von 4,5° C lösten sich 56,4 mg Ozon im Wasser, während sich unter sonst gleichen Bedingungen bei 18° nur 37 mg lösten. Trockene Luft ergab als Löslichkeitskoeffizient 2,6—12 mg, feuchte Luft nur 0,6—2 mg O_3 pro Liter Wasser.

Diese Zahlen stellen ganz beträchtliche Unterschiede dar und mögen zum Teil wenigstens manche Fehlversuche erklären, die auf diesem Gebiete unternommen worden sind.

Man wird sich also zur Ozonwasserherstellung zweckmäßig trockenen Sauerstoffs bedienen.

So hergestelltes Ozonwasser zeigt sehr stark desinfizierende Eigenschaften. Es gelingt, im Braugewerbe die in Exportfässern verbleibenden Infektionen durch Behandlung mit Ozonwasser von 15—20 mg Ozon im Liter vollständig abzutöten. Auch auf Filtermasse übt Ozonwasser eine stark desinfizierende Tiefenwirkung aus.

Zusammenfassung.

Hauptbedingungen zur Darstellung von Ozonwasser sind:

1. Schwaches Ansäuren.
2. Abwesenheit von reduzierenden Körpern, wie Alkohol.
3. Verwendung trockenen Sauerstoffs.
4. Geringe Stundenlitergeschwindigkeit des ozonisiert werdenden Gases.

So hergestellte Ozonwässer besitzen eine stark desinfizierende Kraft.

Kleinere Mitteilungen.

Bemerkungen zu dem Aufsatze in XVIII, S. 126: Zur Dreiecksgeometrie.

Zu dem genannten Aufsatze, der hübsche Anwendungen der Sätze des Menelaus und Ceva bringt, erlaube ich mir im folgenden vom Standpunkte der projektiven Geometrie aus ohne Beweis — weil, wie sofort erkenntlich, die betrachteten Beziehungen auf den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks bezw. Vierseits beruhen — einige ergänzende Bemerkungen, wobei zwecks Abkürzung im Anschluß an die benutzten Bezeichnungen noch folgende vier Punkte benannt werden sollen: V, V_a, V_b, V_c seien die Schnittpunkte der jedesmal drei Ecktransversalen nach den Berührungspunkten des Inkreises und der drei Ankreise.

1. Die völlige Analogie der Punkte Q_a, Q_b, Q_c mit dem Punkte Q (Satz I bis IV des Aufsatzes), beruhend auf der im wesentlichen projektiven Natur der in Betracht kommenden Eigenschaften, findet sich auf Grund räumlicher Ueberlegungen ausgesprochen in der Arbeit: Einige Anwendungen des Pohlkeschen Satzes, Archiv der Mathem. u. Phys. (3. Reihe), Bd. 15, Heft 4, S. 314 (1910).
2. Da die Seiten des Dreiseits ABC die gesamte Ebene in vier Dreiecke zerteilen, von denen drei durch das Unendliche hindurch verlaufen, so kann jeder der vier Berührungskreise als Inkreis eines einzigen dieser vier Dreiecke betrachtet werden; die drei übrigen Kreise sind dann jedesmal die Ankreise dieses Dreiecks. Hieraus ergeben sich für jeden der Sätze V, VI, IX, X vier Fälle; Satz VII im besonderen spricht drei der Fälle des Satzes VI für sich aus.
3. Satz V ergibt sich offenbar auch als Folge des Pascalschen Satzes. Die vier sich so ergebenden Pascalschen Geraden sind die sogenannten „Harmonikalen" der vier Punkte V, V_a, V_b, V_c bezüglich des Dreiseits ABC; jede dieser vier Geraden ist zugleich die Polare eines der vier Punkte bezüglich des zugehörigen Kreises. In entsprechender Weise liefert Satz VI (und VII) die vier Harmonikalen zu Q, Q_a, Q_b, Q_c.
4. Satz IX liefert dieselben vier Geraden wie Satz V, Satz X dieselben vier Geraden wie Satz VI (und VII).
5. Ueber die aus den Sätzen XII bis XV sich ergebenden Geraden verschafft uns ein von Schröter herrührender Satz einen Ueberblick. Dieser Satz lautet: „Die sechs Endpunkte (Schnittpunkte mit den Gegenseiten) zweier Tripel von Ecktransversalen eines Dreiecks, die durch zwei beliebige Punkte gehen, liegen auf einem Kegelschnitt". Hieraus

folgt, daß diese sechs Endpunkte auf acht verschiedene Weise so verbunden werden können, daß (nach dem Pascalschen Satze) die Verbindungslinien die Dreiecksseiten in drei Punkten einer Geraden treffen; denn die Verbindungslinien müssen in dem jedesmal entstehenden Pascalschen Sechseck Gegenseiten zu den Dreiecksseiten sein. Wir erhalten so für jede Kombination zweier der Punkte V, V_a, V_b, V_c, Q, Q_a, Q_b, Q_c acht Pascalsche Geraden. Da 28 Kombinationen möglich sind, ergeben sich 224 Geraden. Zwölf dieser Kombinationen führen aber nur zu je vier Geraden, z. B. die Kombinationen VQ_a, VQ_b, V_aQ, V_aQ_b, · · · · usw., weil sich nämlich hier nur fünf Transversalenendpunkte ergeben. Mithin reduziert sich die Zahl der Geraden noch auf 176.

6. Auf Grund des eben Gesagten erkennt man unschwer, daß endlich auch die in den Sätzen IX und X auftretenden sechs Berührungspunkte (als auf Kegelschnitten liegend) noch in anderer Weise, als in den Sätzen zum Ausdruck kommt, sich so verbinden lassen, daß die Verbindungslinien die Dreiecksseiten jedesmal in drei Punkten einer Geraden treffen. Willy Weber (Schöneberg-Berlin).

* * *

Zu meinem großen Bedauern hatte ich bei Abfassung meiner Mitteilung keine Kenntnis von der im Archiv d. Mathem. u. Phys. erschienenen Abhandlung des Herrn Verfassers obiger interessanter Zusätze. Trotzdem glaube ich, daß der erste Teil meiner Arbeit nicht ganz überflüssig wird, da er sich einer rein planimetrischen Methode bedient, was für eventuelle Unterrichtszwecke wesentlich ist. Ueberhaupt kam es mir vor allem darauf an, die Entwicklung unter bloßer Benutzung ganz elementarer Mittel durchzuführen, weshalb ich auch nach keiner allgemeineren Beweismethode für die von mir für neu gehaltenen Sätze suchte. Allerdings mußte mir dadurch ein größerer Zusammenhang entgehen. Der von Schröter herrührende Satz über zwei Tripel von Transversalen war mir ebenfalls damals nicht bekannt; er scheint auch sonst nicht allgemein bekannt zu sein, da für ihn erst kürzlich in Schottens Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, XLIII, S. 433, in Aufg. 451 im Aufgaben-Repertorium ein Beweis verlangt wurde. Er läßt sich übrigens auch auf die Endpunkte der von mir in Satz VIII eingeführten Transversalen ausdehnen.

B. Kerst (Zwickau).

Vereine und Versammlungen.

Mathematik und Naturwissenschaften auf der 52. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Marburg a. L., 30. September bis 3. Oktober 1913.

Von F. Poske (Berlin).

Den elf Sektionen sprachlichen und historischen bezw. allgemein pädagogischen Charakters war als zwölfte eine mathematisch-physikalische und als dreizehnte (zum ersten Male) eine biologische Sektion angegliedert. Einführende waren in der ersteren die Universitätsprofessoren Hensel und Richarz, sowie Oberrealschuldirektor Bode, in der letzteren Universitätsprofessor Korschelt.

In der mathematisch-physikalischen Sektion wurden folgende Vorträge mathematischen Inhalts gehalten: Universitätsprofessor Engel (Gießen) über die Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen, wobei sowohl Reihenentwicklungen, als auch Produktzerlegungen unter Benutzung von Stammbrüchen besprochen wurden. — Universitätsprofessor Schlesinger (Gießen) über das arithmetisch-geometrische Mittel bei Gauß, mit interessanten Aufschlüssen über die geistige Eigenart des großen Denkers; in diesem Zusammenhange spielt auch der Gedanke der nichteuklidischen Geometrie (als Pseudogeometrie) lange vor Bolyai und Lobatschefski bei Gauß eine Rolle. — Prof. A. Schönfließ (Frankfurt a. M.) über die neue Entwicklung des Kurvenbegriffs, wonach eine ebene Kurve in Beziehung zu den von beiden Seiten an sie angrenzenden Flächenräumen gesetzt wird und jeder Punkt der Kurve als gemeinsamer Grenzpunkt dieser beiden Bereiche erscheint. Im besonderen wurden der Kreis und seine Abbildung auf andere Kurven, sowie die Kurve $y = \sin 1/x$ betrachtet. — Geh. Rat Münch (Darmstadt) führte unter großem Beifall seine kinematographischen Darstellungen der Verwandlung geometrischer Figuren vor. Auf physikalischem Gebiet demonstrierte Grimsehl (Hamburg) Versuche aus der Optik, durch die namentlich für die Erklärung der optischen Instrumente wertvolle experimentelle und didaktische Hilfsmittel dargeboten werden. (Die Versuche werden in einem Sonderheft der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht veröffentlicht werden.) — Der Direktor des physikalischen Instituts, Prof. Richarz, demonstrierte den Apparat von Henrich zum Nachweis der elektrostatischen Wirkung eines induzierten Magnetfeldes (Zeitschr. f. d. phys. Unterr. 1913, pag. 181); ferner einen einfachen Apparat von F. A. Schulze zur Ermittlung der Grenze der Hörbarkeit von Tönen, beruhend auf Longitudinalschwingungen eines in seiner Länge veränderlichen Klaviersaitendrahts, endlich Klangfiguren unhörbarer Töne, die auf kleinen Glimmerscheiben etwa mittels der Galtonschen Pfeife hervorgerufen werden. Von Herrn Prof. Feußner wurde die anomale Dispersion demonstriert, die durch eine Lösung von Zyanin in Chloroform bewirkt wird. Herr Dr. Taack zeigte die magnetische Wirkung Heuslerscher Legierungen an einer im Reagenzglase hergestellten Legierung von M_n und S_b (4:1). Herr Dr. Stuchthey die aus dem Gesetz der Absorption und Emission unter gewissen Voraussetzungen folgende Erscheinung, daß das Glühen von erhitztem Kupfer (wie auch Gold) nicht mit dunkelroter, sondern mit grünlich blauer Farbe beginnt, was noch deutlicher beim Wiedernachlassen des Glühens erkennbar wird. Außerdem wurden die Einrichtungen der Station für drahtlose Telegraphie besichtigt und die Zeit- und Wettersignale vom Eiffelturm abgehört. Den Herren vom physikalischen Institut, die uns mit diesen Vorführungen ein überaus freundliches Entgegenkommen bewiesen haben, sei auch hier aufrichtigsterDank ausgesprochen.

In der biologischen Abteilung in Kombination mit der archäologischen und der althistorisch- epigraphischen Sektion führte Pritzel (Groß-Lichterfelde) Vegetationsbilder aus Hellas und Kleinasien vor. In derselben, kombiniert mit der pädagogischen Sektion, hielt B. Schmid (Zwickau) einen Vortrag über Biologie und philosophische Propädeutik, in dem er namentlich auf die Aufgabe der Biologie hinwies, zu dem Verständnis philosophischer Probleme, wie Kausalität und Zweckmäßigkeit, und die Fragen des Verhältnisses von Leib und Seele hinzuleiten. In der anschließenden Diskussion fanden seine Darlegungen die Zustimmung der Herren R. Lehmann (Posen) und P. Natorp (Marburg).

Aus den allgemeinen Sitzungen sei hervorgehoben der am Eröffnungstage gehaltene Vortrag von Geh. Rat Diels über Wissenschaft und Technik bei den Hellenen, worin er die rege Verbindung beider Seiten bei den großen, gewöhnlich nur als Theoretiker bekannten Forschern wie Thales, Anaximander, Pythagoras nachwies. Von allgemeinem Interesse war auch der Vortrag von Geh. Rat Burdach (Berlin) über den Ursprung des Humanismus, worin gezeigt wurde, daß Humanismus wie Renaissance nicht aus dem Streben nach bloßer Wiederbelebung und Nacheiferung der antiken Kultur, sondern aus dem Bedürfnis nach einer Erneuerung des inneren Menschen und nach Verwirklichung eines rein menschlichen Ideals hervorgegangen sind. — In einer Nachmittagssitzung kam die Durchführung des „Hamburger Programms“, betreffend das Verhältnis zwischen Universität und Schule zur Verhandlung, doch lief der Vortrag von R. Lehmann (Posen) allzu einseitig auf die Forderung pädagogischer Lehrstühle an den Universitäten hinaus, der von mehreren Seiten widersprochen wurde. Im übrigen kamen in den allgemeinen Sitzungen vorwiegend philologische Themata zur Verhandlung; in der Eröffnungsrede betonte der erste Vorsitzende, Geh. Rat Voigt, die zentrale Stellung der Wissenschaft vom klassischen Altertum, und im Schlußwort sprach sich der zweite Vorsitzende, Direktor Fuhr (Marburg) so aus: „Ein Grundton ging durch alle Verhandlungen: die Philologie ist unsterblich, ja noch mehr, sie ist untötbar, unsterblich und jugendfrisch alle Tage lang“. In solchen Aeußerungen tritt die philologische, ja sogar speziell altphilologische Eigenart dieser Versammlungen deutlich zutage. Dies soll jedoch nicht im geringsten einen Vorwurf bedeuten. Es liegt schon im Namen dieser Versammlung „deutscher Philologen und Schulmänner“, daß sie dazu bestimmt sind, die Philologen im engeren Sinne, d. h. diejenigen, die die Philologie als Wissenschaft betreiben, mit den Schulmännern in enge Fühlung zu bringen und einen für beide Seiten fruchtbaren Kontakt herzustellen. Das Problem „Universität und Schule“ ist hier für die Philologie seit lange und aufs glücklichste gelöst. Das Reinpädagogische spielt auf diesen Versammlungen mehr eine zweite Rolle, auf die pädagogische Sektion wird sogar von Vertretern der Philologie als Wissenschaft mit einer gewissen Minderschätzung herabgesehen.

Das ist alles begreiflich und bis zu einem gewissen Grade geeignet, uns Respekt abzunötigen. Für uns Mathematiker und Naturwissenschaftler aber entsteht die Frage, ob wir uns an diesen Versammlungen beteiligen sollen. Wir haben dort im Grunde nichts zu suchen und sollten es vermeiden, als bloße Mitläufer dabei zu sein, oder gar nur als Dekoration zu dienen, wodurch der Schein erweckt wird, als stellten diese Versammlungen in der Tat — nebenbei — eine Vertretung der gesamten Oberlehrerschaft dar. Unsere Herren Kollegen von der klassischen Philologie sollten es schon im Interesse der „Stilreinheit“ ihrer Versammlungen unterlassen, auf die Beteiligung der Mathematiker und Naturwissenschaftler besonderen Wert zu legen. Wenn auch Mathematik und Physik, wie der Vorsitzende in der Begrüßungsrede hervorhob, von Anfang an in den Statuten der Versammlungen als mitbeteiligte Fächer genannt sind, so hat sich doch die Sachlage insofern geändert, als dafür seit mehr als zwanzig Jahren unsere Jahresversammlungen bestehen, die von Jahr zu Jahr einen größeren Aufschwung genommen haben. Um so mehr sollten wir unsere Kräfte nicht zersplittern, sondern diese auf unsere eigenen Versammlungen konzentrieren, die alljährlich den Angehörigen unserer Fächer ausreichend Gelegenheit geben, mit ihren engeren Fachgenossen und mit den Vertretern der Wissenschaft an den Hochschulen in Beziehung zu treten. Daß eine solche Bezugnahme auch mit den Vertretern der Philologie erwünscht ist, soll hier nicht in Abrede gestellt werden; nur sind dafür die Philologenversammlungen wenig geeignet, weil dort die Interessen gerade der philologischen Kollegen durch die reichen Darbietungen philologischer Art vollauf in Anspruch genommen sind.

Mein ceterum censeo ist also: schiedlich friedliche Sonderung der Interessen, Fernhaltung von der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner und sofern tunlich Hinwirkung auf die Aufhebung der dort bestehenden Sektionen für Mathematik und Naturwissenschaft.

Aufforderung betreffend Meldung von Unfällen.

Je mehr der physikalische und chemische Unterricht auf Unterrichtsversuche und Schülerübungen gegründet wird, um so mehr wird es zur Pflicht, die mit dem praktischen Arbeiten verknüpfte Möglichkeit von Unfällen soweit zu berücksichtigen, daß Schädigungen tunlichst vermieden werden. Bisher wurden fast alle Unfälle bei Unterrichtsversuchen, falls sie nicht in die Tagespresse gelangten, nur in ganz engen Kreisen bekannt. Es ist jedoch ersichtlich von Wert, wenn nicht nur derartige neue Fälle, sondern auch Wiederholungsfälle bekannter Unfallstypen unter Angabe der begleitenden Umstände zu allgemeiner Kenntnis gebracht werden. Zweifellos kann dadurch manchem neuen Unfall vorgebeugt werden. Es ist daher von seiten der Zeitschrift f. d. phys. u. chem. Unterricht (Berlin, J. Springer) eine solche Meldestelle errichtet worden, und es ergeht hiermit an alle Herren Fachkollegen im In- und Auslande die Aufforderung, alle bemerkenswerten Unfälle bei Schulversuchen und auch bei Schülerversuchen dort zur Meldung zu bringen und die Meldungen nach folgendem Schema einzurichten:

1. Ort und Name der Anstalt; Datum des Unfalles; Klassenstufe.
2. Angabe, ob der Unfall im Physik- oder im Chemie-Unterricht stattfand.
3. Kurze Angaben über die Art des Unfalles und über die Versuchsanordnung.
4. Vermutliche Ursache des Unfalles, eventl. nebst Ratschlägen zur Vorbeugung.
5. Angabe des Schadens, insbesondere etwaiger Verletzungen.

Alle Meldungen werden seitens der genannten Zeitschrift registriert und als Material zu gelegentlichen statistischen Aufstellungen oder sonstigen Mitteilungen in der Zeitschrift verwendet; andererseits gelangt keine Meldung gegen den Wunsch des Einsenders dort einzeln zur Mitteilung; ferner kann auch je nach dem Wunsche des Einsenders nur die Sache mitgeteilt werden, Name des Einsenders und Ort der Anstalt aber ungenannt bleiben.

Die Zuschriften werden an die Redaktion der genannten Zeitschrift, und zwar an die Adresse von Prof. O. Ohmann, Berlin-Pankow, Cavalierstr. 15,*) erbeten.

*) Verfassers der Schrift: „Die Verhütung von Unfällen im chemischen und physikalischen Unterricht“ (Berlin, Winckelmann & Söhne).

Teilnehmerliste der XXII. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

(** Anzahl der begleitenden Damen, † Anzahl der begleitenden Herren.)

1. Andrä, J., Prof., München
2. Auffenberg, G., Dr., Frankfurt
3.-4. Bärthlein,* Prof., Regensburg
5. Bandke, Prof., Hildburghausen
6. Baur, J., Studienrat, München
7. Beck, Dr., Leipzig
8. Beck, F., Dr., Nürnberg
9. Berger, Fr., Prof., Fürth
10.-12. Beutel,** Prof., Vaihingen
13. Biereye, Prof., Groß Lichterfelde
14. Biller, J., Prof., Pfarrkirchen
15. Blumschein, Prof., Traunstein
16. Böckler, Prof., Schweinfurt
17. Braun, Oberstudienrat Dr., Augsburg
18. Brüsch, Prof. Dr., Lübeck
19. Busch, Prof., München
20. Büttner, G., Prof., Schweinfurt
21.-22. Cuno,* Dr., Augsburg
23. Dacqué, Privatdozent Dr., München
24. Danderer, Dr., Bad Aibling
25. Danckwortt, Prof. Dr., Magdeburg
26. Dasio, Oberregierungsrat, München
27. Degenhart, H., Dr., München
28. Dicknether, F., Prof., München
29. Dingler, H., Dr., München
30.-31. Doehlemann,* Prof. Dr., München
32. Donle, W., Dr., München
33. Drautzburg, K., Dr., Straßburg
34. Ducrue, J., Oberstudienrat, München
35. Düll, E., Dr., München
36. Dyck, W. v., Dr., München
37. Ebner, Prof. Dr., Aachen
38. Edler, Dr., Halle a. S.
39. End, Dr., München
40. Endrös, Dr., Freiburg
41. Endrös, Dr., München
42. Endruß, Dr., Bamberg
43. Enzensperger, Prof., München
44. Fick, E., Prof., Neuburg a. D.
45. Finsterwalder, S., Geh. Rat Dr., München
46. Fischer, K., Prof. Dr., Solln b. München
47.-48. Flechsenhaar,* K., Prof. Dr., Frankfurt a. M.
49. Freitag, Hugo, Prof., München
50. Frisch, G., Prof., Weilheim
51. Fritz, Prof., Darmstadt
52.-53. Frühwald,* Rektor Prof., München
54. Gebhard, Prof. Dr., Dresden
55. Geistbeck, Prof., Kitzingen
56. Genthe, W. K., Dr., Chemnitz
57. Gombrich, Prof., Nürnberg
58. Götting, Prof. Dr., Göttingen
59. Götz, Prof., München
60. Grimm, A., Prof., Bruchsal
61. Grimsehl, Prof., Hamburg
62. Groß, L., Prof., Neustadt a. H.
63. Guithart, A., Prof. Dr., Leipzig
64. Günther, S., Geheimer Hofrat Dr., München
65. Haas, A., Prof., Augsburg
66. Haberkorn, Prof., Wasserburg a. T.
67. Halder, Exz v., Regierungspräsident, München
68. Haller, Dr., München
69. Hantmann, Prof., Augsburg
70. Harster, Dr., München
71. Hegele, Ant., Prof., Straubing
72. Helmreich, C., Dr., München
73. Heß, H., Dr., Nürnberg
74. Hetz, C., Prof., Erlangen
75. Heußel, Dr., Arnstadt
76. Heyer, Karl, Bad Dürkheim
77. Hierl, Prof., Ansbach
78. Hirschmann, Karl, Prof., Nürnberg
79. Hornbogen, Prof., Pößneck
80. Höhl, Dr., Hof (Thüringen)
81. Jahraus, Prof., Gunzenhausen
82. Jautmann, Dr., München
83. Kainz, F., Lehramtsverweser, München
84. Kerschensteiner, G., Dr., München
85. Kiefer, K., Dr., München
86. Kimmel, H., Dr., Nürnberg
87. Kloth, L., Prof., Mühlacker
88.-89. Klug,* J., Prof., Nürnberg
90. Knieg, Ferd., Prof., München
91. Knoblauch, Prof. Dr., München
92. Koch, Prof., Nürnberg
93. Krauß, J., Prof., Neumarkt i. O.
94. Krüß, Dr., Hamburg
95.-96. Kuen,* Th., Prof., München
97. Kugler, Dr. E., München
98. Kumpfmüller, Prof., München
99. Kupper, Dr., München
100. Lampart, E., Dr., Augsburg
101. Lehmann, A., Prof., Kaufbeuren
102. Leonhard, Prof., Oberstein (Schw.)
103. Lesser, Oskar, Prof., Frankfurt a. M.
104. Lier, O., Dr., Adlershof
105. Lietzmann, Dr., Barmen
106. Lindemann, A., Dr., Hamburg
107. Lindner, Dr., München
108. Löffler, Schwäbisch Hall
109. Lötzbeyer, Dr., Berlin-Wilmersdorf
110. Löwenhardt, Prof., Halle
111.-12. Ludwig,* Prof. Dr., Ploesti-Bukarest
113. Maas, Johanna, Dr., München
114. Mahler, K., Aalen (Wttbg.)
115. Mare, Dr., München
116. Marquard, Dr., München
117. Marzell, Dr., Püllach b. München
118.-19. Maschke,† Prof. Dr., Breslau
120. Matschilles, J., Pfarrkirchen
121. Mauck, Dr., Regensburg
122. Mayrhofer, Dr., München
123. Meinecke, Dr., Stettin
124. Meinel, Carl, Fürth
125. Meyer, Fritz, Leipzig
126. Müller, Dr., Ansbach
127. Müller, Dr., Chemnitz
128. Müller, Dr., Pasing
129. Neu, W., Augsburg
130. Neudecker, L., Hof
131. Neumann, H., München
132. Nöllner, Prof. Dr., Zwickau
133.-34. Pankritius,* Königsberg
135. Petzold, Glauchau
136. Petzold, C., Glauchau
137. Casinus-Pfättisch, P., München
138. Pörl, W., München
139. Poske, Prof. Dr., Berlin
140. Praeger, v., Ministerialrat Dr., München
141.-44. Presler,**† Prof., Hannover
145. Radecki, v., M., Birkenruh b. Riga
146. Rauschmeyer, Dr., München
147. Reindl, Jos., Dr., München
148. Reinsch, Dr., Neustadt (Pfalz)
149. Reiß, Hans, Dillingen
150. Reitinger, J., Dr., Bamberg
151. Reth, Hans, Leipzig
152. Richter, E., München
153. Riebesell, P., Dr., Hamburg
154. Roedel, Regensburg
155. Rohmer, M.,
156. Rothenberg, S., Dr., München
157. Rubenbauer, Dr., Augsburg

158. Rudel, E., Dr., Ludwigshafen
159. Rudolph, W., Landshut
160. Rühlmann, Prof., Halle
161. Sack, Prof. Dr., Lübeck
162. Salffner, Nürnberg
163. Salle, Dr., Berlin
164. Schäfer, Dr., Friedberg i. H.
165. Schätz, W., München
166. Schiefele, H., München
167. Schmauß, Dr., München
168. Schmelcher, Dr., München
169. Schmidt, N., Dr., München
170. Schneider, J., Passau
171. Schnell, Augsburg
172. Schnell, Dr., Butzbach i. Hessen
173. Schoenichen, Dr., Berlin-Friedenau
174. Schotte, K., Chemnitz
175. Schretzenmeyer, J., Passau
176. Schröter, Geheimrat Dr., München
177. Schumacher, H., Dr., München
178. Seith, K., Dir., Freiburg i. B.
179. Skrodzki, Anna, Königsberg
180. Sommer, Dr., München
181. Sommer, Dr., München
182. Speyerer, Dr., München
183. Spohr, J., Riga
184. Sporbert, E., Dresden
185. Stade, Halle
186. Stamm, F., Neumarkt i. O.
187. Steiner, v., Staatsrat, München
188. Straßer, A., Deggendorf
189. Sträuble, Homburg i. Ph.
190. Tafelmacher, Prof. Dr., Dessau
191. Telzmann, O., Leipzig
192. Tempel, Dr., Nürnberg
193. Thaer, Hamburg
194. Thiersch, F., Rothenburg
195. Trammer, O., Landshut
196. Trottler, München
197. Vogel, P., Dr., München
198. Voß, A., Dr., München
199. Wagner, Dr., Halle a. S.
200. Waldmann, Fürth
201. Walther, Prof., Halle a. S.
202. Weidinger, M., Ettel
203. Weigel, Dr., München
204. Weill, Dr., Gebweiler i. E.
205. Wein, Dr.,
206. Wetzstein, Prof. Dr., Augsburg
207. Wieleitner, H., Dr., Pirmasens
208. Wimmer, F. P., München
209.-10. Winderlich,* Oldenburg
211. Witting, Prof. Dr., Dresden
212. Wittmann, G., München
213.-14. Wittrien,* Dir., Königsberg
215. Wolbert, L., München
216. Wolf, Studienrat, München
217. Wolff, Dr., Barmen
218. Wölffing, Prof. Dr., Stuttgart
219.-21. Wolfing,** Ernst, Dr., Stuttgart
222. Wührer, München
223 Zahn, A., München
224. Zehe, B., München
225. Zistl, M, Dr., München
226.-27. Zöllner,* Augsburg
228. Zwanziger, G., Dr., Fürth.

Bücher-Besprechungen.

Perry, Höhere Analysis für Ingenieure. Deutsche Bearbeitung von R. Fricke und F. Süchting. 2. Aufl. Leipzig 1910, B. G. Teubner. X und 464 S. geb. M 13.

Der Ruf nach Anwendungen ist vom Verein zur Förderung des math. und naturw. Unterr. nicht nur in seinen bekannten Braunschweiger Beschlüssen, sondern immer wieder erhoben worden, die Meraner Lehrpläne fordern sie und die Lehrbücher und Aufgabensammlungen betonen sie, wenigstens in der Vorrede. Aber mit einigen rühmlichen Ausnahmen ist der Gang des Verfahrens doch derart, daß zu den mathematischen Entwickelungen ein oft künstlich zurecht gemachtes physikalisches oder technisches Beispiel gesucht wird, nicht aber daß schon bei der Auswahl der mathematischen Sätze und Darstellungen immer im Auge behalten wird: Hat das Gebotene auch wirklich außerhalb der Mathematik einen Zweck? Das ist übrigens ein Vorwurf, der von den Ingenieuren nicht nur dem mathematischen Schulunterricht, sondern auch früher dem an technischen Hochschulen gemacht worden ist und zu der Forderung führte, Ingenieuren auch die Vorlesungen in reiner Mathematik zu übertragen. Daß hierdurch neue Schwierigkeiten entstehen, ist nicht verkannt worden, aber die Schule hat weniger Grund, gegen die „Ingenieur-Mathematik" mißtrauisch zu sein, sie darf und muß sich vielfach mit einer geringeren Strenge begnügen, wenn der Lehrer sich allerdings auch bewußt bleiben sollte, wo er und wie weit er von den Vorschriften der Wissenschaft abweicht.

Da ist für ihn ein Buch von Wert, das von einem mathematisch und wie sich beim Lesen auf Schritt und Tritt offenbart, auch pädagogisch ungewöhnlich begabten Ingenieure verfaßt und nun für Deutschland von einem Professor der Mathematik an einer technischen Hochschule und einem Direktor eines Elektrizitätswerkes bearbeitet ist. In der Vorrede zur zweiten Auflage wird auch eine Studentin, Fräulein Elisabeth Klein, als geschätzte Mitarbeiterin genannt.

Gerade, daß der Gang der Unterweisung hier so wesentlich von dem üblichen abweicht, macht das Buch nicht nur lesenswert, sondern auch so ungemein lesbar, man braucht nicht erst Dutzende von Seiten zu überschlagen, ehe einem Neues begegnet. Gleich unter den ersten Kurven, die auf mm-Papier gezeichnet werden sollen, begegnet einem

$$y \cdot x^{1{,}414} = 100 \text{ und } y = a \sin(bx + c).$$

Sind die schon oft auf Schulen gezeichnet, oder gar $y = b \cdot e^{-ax} \cdot \sin(cx + g)$? Sollte sich hieran nicht die berühmte mathematische Schulung ebensogut erzielen lassen, wie an planimetrischen Konstruktionsaufgaben und an Systemen von quadratischen und höheren Gleichungen, die nachher in der Praxis nie irgendwelche Verwendung haben? Wie ein Eimer kalten Wassers wirkt die Einführung der Integration, mit dem lapidaren Satz: „Man integriere $\frac{d^2 y}{dx^2}$ und wird $\frac{dy}{dx}$ gewinnen, man integriere $\frac{dy}{dx}$ und findet y", dem auch gleich, ohne Integralzeichen, die Anwendung auf die beschleunigte Bewegung folgt. Wenn man sich aber von seinem Schrecken erholt hat, findet man es eigentlich sehr vernünftig. Ebenso köstlich naiv wird z. B. die Integration $\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx$ eingeführt und so einleuchtend begründet, daß man seine helle Freude daran hat. Der Hauptvorzug des Buches liegt natürlich in den Anwendungen, richtiger in der systematischen Behandlung einer großen Anzahl technischer, besonders mechanischer und elektrischer Probleme, überall mit bestimmten, der Praxis entnommenen Zahlen. Das Buch ist eine Fundgrube für Aufgaben und der Leser und Lehrer hat den Vorteil, daß ihm nicht nur ein Kostebissen geboten wird, sondern daß er sich aus der vollen Schüssel selbst das Beste heraussuchen kann. Der Feinschmecker kann auch gleich die reichhaltige Speisekarte des vortrefflichen Sachregisters studieren.

A. T.

* * *

Verworn, M., Die Erforschung des Lebens. 2. Aufl. 50 S. Jena 1911, Fischer.

Der bekannte Vortrag erscheint hier in zweiter Auflage. Nach des Verfassers Ueberzeugung lösen sich die Schwierigkeiten des Problems, wenn man sich klar macht, daß die Aufgabe wissenschaftlicher Forschung nicht ist „Ursachen“ aufzufinden, sondern „Bedingungen“ anzugeben. Das ist zweifellos richtig, aber es ist zu bedauern, daß der Verfasser nun hieraus nicht den richtigen Schluß zieht, nämlich den, daß wir aus der Erkenntnis der Bedingungen nur schließen können, daß, wenn sie vorhanden sind, etwas geschieht, aber nicht, daß es geschehen muß. Aber er merkt gar nicht, daß er das, was er beweisen will, schon voraussetzt. Er will beweisen, daß das ganze Leben mechanisch erklärbar sei, indem er die Bedingungen für das Leben aufsuchen will. Hierfür bedient er sich aber der Voraussetzung (p. 10): „In Wirklichkeit ist alles Geschehen in der Welt eindeutig und unabänderlich bestimmt durch die Bedingungen, die gerade an dem gegebenen Punkte zusammentreffen“. Das Wort gerade ist von mir unterstrichen, es hätte den Verfasser wohl darauf aufmerksam machen können, daß hier eben die Lücke klafft. Wenn das Thema also lautete, die Erforschung des Lebensmechanismus, so hätten wir nichts gegen die interessante Zusammenstellung der Fortschritte auf diesem Gebiete einzuwenden. Sehr ausgedehnt benutzt der Verfasser die Analogie von der chemischen Fabrik, um das Leben der Zelle zu schildern (p. 34), aber er vergißt, daß die Fabrik sich nicht selbst baut und nicht selbst steuert. Wenn er zum Schluß sagt: „Unsere ganze Aufgabe bei der Erforschung der Empfindungs-, Vorstellungs, Gedankenmechanik besteht, wie überall bei der wissenschaftlichen Forschung, nur in der Ermittlung ihrer gesamten Bedingungen. Das ist und bleibt der Weisheit letzter Schluß“, so unterschreiben wir den letzten Satz, wenn darin statt „Weisheit“ mechanische Erforschung gesagt wird. Gegen die Existenz einer Geisteswelt hat der Verfasser kein Argument beibringen können, er leugnet sie nur.

Hoppe (Hamburg).

* * *

Bochow, Prof. Dr. **Karl**, Realgymnasialdirektor, Der Kreis als Maximalfläche. Die wichtigsten Fälle des isoperimetrischen Problems für ebene Figuren. dargestellt für meine Schüler. Beilage zu dem Programm des Realgymnasiums in Nordhausen für das Schuljahr 1911/12. Programm Nr. 366 (1912).

Diese sehr lesenswerte Schrift enthält die im Titel angegebenen Probleme in durchaus elementarer, auch für begabtere Schüler verständlicher Darstellung. Sie wird hoffentlich manchen anregen, diese schönen Aufgaben auch mal in der Schule zu behandeln.

Jung (Kiel).

* * *

Prüsmann, Prof. **R.**, Oberlehrer am Leibniz-Gymnasium zu Berlin, Neue Auflösung der Gleichung fünften Grades. Mit 2 Tafeln. Berlin 1911, Weidmannsche Buchhandlung. Geh. M 2.40.

Die Schrift gibt zwei Methoden zur numerischen Auflösung von Gleichungen fünften Grades, eine, die graphisch und eine, die rechnerisch verfährt. Das Wesen ist bei beiden dasselbe. Ist $f(x)$ die Funktion, deren Nullstellen bestimmt werden sollen, so wird aus $f(x)$ nach Division mit einer Potenz von x die Integralfunktion hergeleitet. Dann wird für x durch goniometrische Substitution ein Winkel φ als neue Unbekannte eingeführt. Man erhält so eine Funktion $F(\varphi)$, deren Maxima oder Minima den Nullstellen von $f(x)$ entsprechen. Bei der graphischen Methode wird $F(\varphi)$ als Radiusvektor zu der Anomalie φ gezeichnet. Die Methode erfordert einen unverhältnismäßig großen Formelapparat und große Rechnungen und ist so weitläufig, daß man vor ihrer Anwendung nur warnen kann.

Jung (Kiel).

* * *

Berg, A., Geologie für Jedermann. Eine Einführung in die Geologie, gegründet auf Beobachtungen im Freien. 261 S. mit 154 Abbildungen.

Ein Leitfaden der praktischen Geologie im besten Sinne des Wortes. Sowohl den Anfänger, der sich über die zweckmäßige Ausrüstung für seine geologischen Beobachtungen im Felde, über die Beschaffung und Benutzung des Kartenmaterials, über die Anlage von Sammlungen usw. unterrichten will, als auch den Erfahreneren, der die wichtigste geologische Literatur eines deutschen Landesteiles überblicken oder die Bezugsquellen für Geräte, Apparate, Karten usw. ermitteln will, beide wird das vorliegende Buch nicht im Stiche lassen. Dem Freunde der Geologie, der seiner Wissenschaft draußen in der Natur nachspürt, kann dieser Ratgeber nur empfohlen werden.

Dr. Heineck (Wiesbaden).

* * *

Möbius, A. F., Astronomie. 11. Aufl., bearb. von Prof. Dr. H. Kobold in Kiel. Sammlung Göschen, Nr. 11 und 529. Jeder Band M 0.80.

Wenn Umfang und Tiefe der Art und Weise, wie ein Buch Erfahrung und Denken in innige Berührung bringt, zum Maßstabe des Urteils über seine Brauchbarkeit — nicht nur im Unterricht — gewählt werden, dann entsprechen auch diese beiden Bändchen den Anforderungen nicht völlig. Für den Laien, der ohne Hilfe eines Eingeweihten aus ihnen sein Wissensbedürfnis befriedigen will, ist der Zwang zu eigner grundlegender Erkenntnis zu schwach, die Lösung der schwebenden Fragen wird ihm zu leicht gemacht. Das tritt am fühlbarsten in dem Abschnitt über das Verhältnis der Erde zur Sonne zutage, wo die dem Leser gegebenen Hilfen durchaus nicht genügen, ihn vollständig allen Zweifeln zu entreißen und ihm eine klare Vorstellung von der scheinbaren Sonnenbahn zu geben.

Hier mußte zum mindesten die bildliche Darstellung helfend eingreifen; vorzuziehen wäre freilich, wenn dem Leser, der doch wohl kaum ohne jedes Hilfsmittel an die Verwirklichung seiner Pläne geht, gezeigt würde, mit wie einfachen Vorrichtungen die grundlegenden Einsichten gewonnen werden können. Kleine Rechenbeispiele, an denen der Unterricht in Prima kaum vorübergehen kann, würden die in dem Abschnitt über die Zeiteinteilung berührten Dinge dem Verständnis leichter erschließen. Die leidige Erfahrung lehrt, daß auch mathematisch geschulte Leser hier ganz unerwartet Schwierigkeiten finden, wenn ihre Vorstellungen nicht zu völliger Klarheit durchgearbeitet sind.

Trotz dieser Einwendungen können diese Bücher dem Schüler unbedenklich in die Hand gegeben und als Bundesgenossen begrüßt werden; bringen sie doch in angemessener Form und sprachlicher Klarheit viel fesselnde Dinge von bleibendem Wert, die der Unterricht leider unerörtert lassen muß. Auch für den

Lehrer sind sie bei der Zuverlässigkeit des gegebenen Zahlenstoffs und der Anschaulichkeit der Zeichnungen nicht ohne Bedeutung.

Gegen Fig. 3 auf Seite 13 ist einzuwenden, daß bei der aus der Zeichnung hervorgehenden Sonnenhöhe die Form der Hyperbel den Breiten, für die das Buch doch wohl vor allem in Betracht kommt, nicht entspricht; die Kurve muß nach der entgegengesetzten Seite gekrümmt sein.

W. B. Hoffmann (Rawitsch).

* * *

Schneider, Gustav, Lehrbuch der Anthropologie. Nach vornehmlich physiologischen und hygienischen Gesichtspunkten bearbeitet und auf zahlreiche Aufgaben und Versuche, die sich zu Schülerübungen eignen, gegründet. Leipzig 1911, Quelle & Meyer. geh. M 2.80.

Dieses Werkchen ist eine der erfreulichsten neueren Erscheinungen auf dem Gebiete der Schulbuchliteratur. Es ist aus dem Unterricht an einem Lehrerinnenseminar hervorgegangen und wendet sich demgemäß zunächst an die höheren Schulen. Es ist aber ohne Zweifel geeignet, auf den Betrieb des anthropologischen Unterrichts an allen Schulen starken Einfluß zu üben, ja auch außerhalb der Schule ist ihm eine weite Verbreitung zu wünschen. In überaus geschickter Weise hat der Verfasser überall den physiologischen Gesichtspunkt in den Vordergrund gestellt. Dazu kommt, daß, wo es angeht, Anleitungen zu Schülerübungen gegeben sind, so daß ein nicht unerheblicher Teil des Stoffes vom Schüler experimentell erarbeitet werden kann. Mit welcher Anschaulichkeit und Klarheit der Stoff behandelt ist, davon zeugen schon die Kapitelüberschriften, z. B. „Was wir unserm Körper zu seiner Entwicklung und Erhaltung bieten", „Wozu der Körper die dargereichten Nährstoffe verwendet" usw. Selbstverständlich kommt auch die Hygiene zu ihrem Recht. Zwei besondere Kapitel (Hygiene des Stoffwechsels, Hygiene der körperlichen und geistigen Arbeit) stellen sich in ihren Dienst. Des Verfassers Wunsch, das Buch möge zur Vertiefung des Unterrichts in der Menschenkunde beitragen, wird sicherlich in Erfüllung gehen.

Schäffer (Hamburg).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)
1913 erschienen, wo nicht anders bemerkt.

v. Hanstein, R., Biologie der Tiere. Leipzig, Quelle & Meyer. geb. M 9.—.
Hartmann, O., Astronomische Erdkunde. Stuttgart, Fr. Grub. geb. M 1.20.
Heilermann und Diekmann, Algebra. II. Teil. Essen, Baedeker. geb. M 2.80.
Hellermann, Landgrebe und Weider, Arithmetik und Algebra für Mittelschulen. Berlin, Oehmigke. geb. M 2.—.
Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. geb. M 6.—.
Hilzheimer, M., und Haempel, O., Handbuch der Biologie der Wirbeltiere. I. Hälfte: Fische, Amphibien, Reptilien. II. Hälfte: Vögel, Säugetiere. Stuttgart, F. Enke. Pr. je M 14.—. (Fische gesondert M 7.—.)
Himmelbauer, A., Mineralogie und Petrographie. Wien, Tempsky. geb. M 1.65.
Höfler, A., Didaktik der Himmelskunde u. der astronomischen Geographie. Leipzig, Teubner. geb. M 12.—.
—„— Himmelsglobus aus Modelliernetzen. Ebenda. geb. M 1.50.
Huckert, Die Leistungen der höheren Lehranstalten Preußens im Lichte der Statistik. Leipzig, Quelle & Meyer. geb. M 3.—.
Hupfeld, H., Praktische Physik für Oberlyzeen. Frankfurt a. M., Diesterweg. geb. M 4.—.
—„— Praktische Physik und Chemie für Mittelschulen. Ausgabe B. Ebenda. geb. M 3.50.
Jakobi, S., Sammlung arithmetischer Aufgaben. Leipzig, Teubner. kart. M 1.60.
Jarosch, J., Methodik des Unterr. in der Darst. Geometrie u. im geometr. Zeichnen. Wien, A. Pichlers Wwe. & Sohn.
Kambly—Thaer, Arithmetische Aufgaben von Thaer und Wimmenauer. Ausg. C: für Realschulen. Breslau, Ferdinand Hirt. geb. M 2.40.
—„— Rechenbuch f. höhere Schulen von Thaer u. Rouwolf. Gekürzte Ausg. A. Ebenda. geb. M 2.40.
Kempe, A., Der große Fermatsche Satz. 2. Aufl. Amsterdam, W. Versluys.
Kisselew, A., Elementare Geometrie, übers. von R. v. Zeddelmann. Riga 1912, G. Löffler.
Kleiber, J., Physik für Mittelschulen. München, R. Oldenbourg. M 1.20.
Knauer, F., Giftschlangen. Leipzig, Th. Thomas. geb. M 0.85.
Koch, W., und Chambré, A., Graphische Algebra. Stuttgart, Fr. Grub.
König, B., und Matuscheck, J., Anorganische Chemie. Wien, A. Pichler. geb. K 3.50.
Koestler, W., und Tramer, M., Differential- und Integralrechnung für Ingenieure. 1. Teil: Grundlagen. Berlin, J. Springer. geb. M 14.—.
Kraepelin, K., Leitfaden f. d. botanischen Unterr. Leipzig, Teubner. geb. M 3.60.
Kraus, K., Grundriß der Arithmetik f. Lehrerbildungsanstalten. 6. Aufl. Wien, A. Pichler. geb. K 3.50.
Lackemann—Kreuschmer, Planimetrie. 10. Aufl. Breslau 1912, Ferdinand Hirt. geb. M 2.—.
Lampert, K., Vom Keim zum Leben. Leipzig, P. Reclam jun. geb. M 1.—.
Lassar-Cohn, Einführung in die Chemie. 4. Aufl. Leipzig, L. Voß. M 4.—.
Laue, M., Das Relativitätsprinzip. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg. geb. M 8.80.
Lesser, O., Arithmetik und Algebra für Realanstalten und Gymnasien. 1. Teil: Unterstufe. 4. Aufl. Leipzig 1912, Freytag. M 2.50.
Levin, W., und Fock, E., Leitfaden der Chemie für Oberlyzeen. Berlin, Otto Salle. M 2.40.
Liermann, O., und Dienstbach, W., Mitteilungen aus dem Frankfurter Schulmuseum. Frankfurt a. M., Auffarth.
Lietzmann, W., Der internationale Mathematikerkongreß in Cambridge. Imuk Mitt. VIII. Leipzig, Teubner. geh. M 1.60.
—„— Bericht über die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses f. d. mathem. u. naturwissenschaftl. Unterricht im Jahre 1912. Ebenda. geb. M 1.—.
Lietzmann, W., Geck, E., Cramer, H., Neue Erlasse in Bayern, Württemberg u. Baden. Imuk II, 8. Ebenda. geb. M 1.50.
Lietzmann, W., und Trier, V., Wo steckt der Fehler? Math. Bibl. von Lietzmann und Witting X. Ebenda. kart. M 1.80.
Linnich, M., Geometrie und Trigonometrie für Studienanstalten. Math. Unterrichtswerk von Schwab und Lesser. Leipzig, G. Freytag. geb. M 3.—.
Lipschütz, A., Allgemeine Biologie. Teil 1: Zellenlehre. Thomas' Volksbücher, herausgegeben von Bastian Schmid. Leipzig, Th. Thomas. geb. M 0.65.
Löwenhardt, E., Lehrbuch der Chemie für Lyzeen. Leipzig, Teubner. geb. M 1.80.
Löwes Aufg. zum kaufmännischen Rechnen. 3 Teile. 31. Aufl., bearb. von F. Strothbaum. Leipzig, J. Klinkhardt. Pr. geb. M 1.—; M 1.20; M 1.40.
Lorenzen—Clasen—Fitschen, Naturkunde für Mittelschulen. II, 2: Chemie. Ausg. A. Breslau, F. Hirt. kart. M 0.85.
Lorey, W., Bericht über die öffentliche Handelslehranstalt zu Leipzig. Leipzig, Hesse & Becker.
Lucksch, A., Leitfaden f. d. analyt.-chemischen Uebungen an Realschulen und Realgymnasien. Wien, A. Hölder. M 0.70.
Mach — Habart — Wenzel, Grundriß der Naturlehre für Mädchenlyzeen. 2 Teile. Leipzig, Freytag. je K 1.70.
Martus, H. C. E., Astronomische Erdkunde. Große Ausgabe. 4. Aufl. Dresden 1912, C. A. Koch. M 12.50.
—„— Mathem. Aufgaben III. 3. Aufl. Ebenda. geb. M 4.60.
Mansion, P., Hyperbelfunktionen. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. geb. M 1.25.
Mecklenburg, W., Grundbegriffe der Chemie. II. Teil. Leipzig, Th. Thomas. M 1.—.
Meteorological Society, Quarterly Journal. Vol. XXXIX, Nr. 166. London, Stanford.
Meyer, Wilhelm, Chemie für Mittelschulen. 2. Aufl. Frankfurt a. M., M. Diesterweg. geb. M 1.80.
—„— Physik für die Mittelschulen. 2. Aufl. Ebenda. geb. M 2.20.
—„— Naturlehre (Physik, Chemie und Mineralogie) f. Mädchen-Mittelschulen. Ebenda. geb. M 2.—.
Mezger, C., Die Chemie als mathematisches Problem. Metz, G. Scriba. M 3.—.
Migula, W., Die Grünalgen. Stuttgart, Franckhsche Verlagshandlung. geb. M 2.80.
Miller, A., Gleichgewicht einer Gruppe schwingender Vollkörper. München, M. Kellerer. M 4.—.
Möhle, F., Der mathem. u. naturwissenschaftl. Unterricht an den preußischen Lyzeen, Oberlyzeen und Studienanstalten. Damnu 15. Leipzig, Teubner. geb. M 1.50.
Mönkemeyer, K., Vollständige vierstellige Logarithmentafel. Frankfurt a. M., M. Diesterweg. geb. M 2.—.
Müller, Emil, Lehrbuch der Darst. Geometrie für technische Hochschulen. II. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. geb. M 4.40.
Müller, H., und Ballin, R., Graphische Behandlung der Gleichungen, Grundlehre von den Kegelschnitten. Ebenda. geb. M 1.25.

Abschluß dieser Nummer am 26. Oktober 1913.