Jahrgang XXII. 1916. No. 2.

# Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

**Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.**

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**,
von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von

Geh. Studienrat Dr. **P. Bode**, Direktor der Klinger-Oberrealschule in Frankfurt a. M.
und
Professor **K. Schwab**, Oberlehrer a. d. Klinger-Oberrealschule in Frankfurt a. M.

**Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.**

**Redaktion:** Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden an Geh. Studienrat Dr. P. Bode, Frankfurt a. M., Hermesweg 34, erbeten.
**Verein:** Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

**Verlag:** Der Bezugspreis für den Jahrgang von 8 Nummern ist 4 Mk. pränum., für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift kostenlos; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.



**Inhalt:** Krieg — Wetterkunde — Schule. Von Prof. Dr. Franz Linke in Frankfurt a. M. (S. 21). — Nochmals Arbeitsunterricht. Von R. Maurer in Freiburg i. Br. (S. 24). — Ueber eine erweiterte Auffassung der Maxima und Minima im Unterricht der höheren Schulen. Von cand. prob. W. Liebermann in Frankfurt a. M., z. Z. im Felde (S. 24). — Weitere Kegelschnittseigenschaften. Von E. Magin in Hamburg (S. 29). — Erzeugungsweise und Tangentenkonstruktion der Cissoide, Strophoide und Konchoide auf gemeinsamer Grundlage. Von E. Magin in Hamburg (S. 32). — Kleinere Mitteilungen [Einige Bemerkungen über das Quadrieren. Von Carl Herbst, Dipl.-Ing., in Bochum (S. 35). — Abgekürztes Dividieren. Von Carl Herbst, Dipl.-Ing., in Bochum (S. 35). — Die Richtungskonstanten der Tangenten der Kegelschnitte in goniometrischer Herleitung am geraden Kreiskegel. Von Carl Herbst, Dipl.-Ing., in Bochum (S. 36)]. — „Die deutsche höhere Schule nach dem Weltkriege". Von Oberlehrer Dr. Jungbluth in Bonn (S. 37). — Bücher-Besprechungen (S. 39). — Anzeigen.

## Krieg — Wetterkunde — Schule.

Von Professor Dr. Franz Linke (Frankfurt a. M.).

Der große Krieg greift in mancher Hinsicht entscheidend in die Lebensgewohnheiten ein, die wir infolge der gewaltigen kulturellen Fortschritte der letzten Jahrzehnte angenommen hatten. Kulturfortschritt ist ja immer gleichbedeutend mit Entfernung von der Natur, weil der Mensch naturgemäß danach trachtet, diese Fortschritte dazu zu verwenden, um sich von der Natur und ihren Launen unabhängig zu machen. Da bedeutet dann das Leben im Schützengraben und in Gegenden, die aller Hilfsmittel entblößt sind, eine gewaltsame Einkehr und Umkehr. Manches, was die Kulturmenschheit vergessen hatte oder glaubte entbehren zu können, bekommt plötzlich hohe Bedeutung.

Das gilt besonders für die Beschäftigung mit den Wettervorgängen. Man braucht nicht einmal an Luftfahrt und Flugwesen zu denken; Schnee, Frost, Windrichtung (bei Gasangriffen), Nebel und Sonnenschein sind draußen von großer Wichtigkeit geworden. Und wie mancher hat bedauert, daß er nichts davon versteht; wie mancher diese Unkenntnis mit schwerem Schaden gebüßt! Es ist ja unmöglich, überall vorgebildete Mannschaften anzustellen; an Ort und Stelle müssen die Beobachtungen gemacht werden und jeder einzelne ist oft seines Glückes Schmied.

So hat sich denn auch in dieser Hinsicht die Wichtigkeit, ja Notwendigkeit der allgemeinen Verbreitung meteorologischer Kenntnisse gezeigt, für die ich schon häufiger in Wort und Schrift eingetreten bin. Es sei mir daher gestattet, frühere Vorschläge zu erneuern in der Hoffnung, daß nunmehr erhöhtes Interesse dafür vorhanden ist.

Es gibt gewiß keine Naturwissenschaft, deren Popularisierung aus allgemein kulturellen und praktischen Gründen so notwendig wäre wie die Meteorologie. Und dennoch gibt es keine Naturwissenschaft, deren Ergebnisse sowohl unter den Gebildeten als auch unter der großen Masse so wenig bekannt sind, wie die der Meteorologie. — Die Richtigkeit dieser beiden Sätze, die miteinander in einem merkwürdigen Gegensatz stehen, wird niemand bezweifeln. Sonst brauchte man nur zu fragen, wie viele Menschen denn über die einfachsten atmosphärischen Vorgänge Aufschluß geben können, z. B. wann sich Wolken bilden, wodurch der Regen entsteht, welche direkten Ursachen den Luftströmungen zugrundeliegen usw. Und doch sollte jedem Menschen die Beantwortung solcher Fragen, die sich ihm doch tagtäglich aufdrängen, viel eher am Herzen liegen als die aus den übrigen Naturwissenschaften, der Zoologie, Botanik, Physik, Chemie usw. — Das Kausalitätsbedürfnis scheint bei meteorologischen Problemen vollkommen abhanden gekommen zu sein.

Fragen wir nach den Ursachen dieser merkwürdigen Erscheinung, so fällt uns ein, daß wir zumeist in der Schule niemals ein Wort über das Wetter gehört haben. Das liegt wohl daran, daß die atmosphärischen Vorgänge nicht immer ganz einfach zu verstehen sind und daß auch die meteorologische Wissenschaft sich später als die übrigen zu wirklichen Erfolgen durchgerungen hat. Aber das sind alles Gründe, die in der Gegenwart keine Geltung mehr haben. Die Meteorologie hat sich in den letzten Jahren unbedingt eine Stellung errungen, und was die Schwierigkeit ihrer Probleme anbelangt, so unterliegt es keinem Zweifel, daß bei dem allgemeinen Fortschritt der geistigen Entwickelung noch viel schwierigere physikalische Vorgänge durch die Schule und durch die Presse bekannt geworden sind; ich erinnere nur an die Lehre von den elektrischen Erscheinungen. Heute gibt es keine Entschuldigung dafür, daß dem Volke die Bekanntschaft mit der Wetterkunde vorenthalten wird.

Nun besteht aber im Volke unzweifelhaft der Wunsch, über Wetterkunde etwas zu erfahren. Man frage die Landwirte, welche sehen, daß sie mit ihren alten Wetterregeln nicht auskommen; man frage die übrigen vom Wetter abhängigen Erwerbszweige; man erkundige sich bei allen denen, welche Sport in der freien Natur treiben, sei es im Sommer oder im Winter, erkundige sich bei unseren Feldgrauen; hauptsächlich aber höre man auf die Lehrer, die am meisten in der Lage sind, die Lernbedürfnisse des Volkes zu beurteilen. Von unten herauf, aus den breiten Massen kommt das Verlangen nach einer Belehrung über die Witterungsvorgänge.

Der Grund für dieses erhöhte Interesse ist teilweise die großartige Entwickelung der Luftschiffahrt. In noch viel höherem Maße ist aber besonders der landwirtschaftliche Teil der Bevölkerung durch den seit mehreren Jahren eingeführten Oeffentlichen Wetterdienst auf die Fortschritte der Meteorologie aufmerksam geworden. Da sah man, daß die Wettervoraussage größeres Vertrauen verdient, als man früher allgemein gemeint hatte. Man erfuhr aber auch, daß die höchste Ausnutzung dieser großzügigen Einrichtung erst ermöglicht wird, wenn man die Wetterkarte richtig verstehen lernt. Deutschland steht offenbar augenblicklich in der Organisation des Wetterdienstes obenan unter allen Völkern. Es fehlt nur noch ein — allerdings wichtiger — Schritt, um den praktischen Erfolg der geleisteten Organisationsarbeit auf das Vielfache zu erhöhen, nämlich eine zweckmäßige Belehrung des ganzen Volkes über die Witterungsvorgänge und die Bedeutung der Wetterkarte.

Sonst pflegen wissenschaftliche Kenntnisse durch Anregungen von oben her verbreitet zu werden. Diesmal ist es die Bevölkerung selbst, die Belehrung fordert. Und danach wird sich auch der Weg richten, den man einschlagen muß, um dieses Bedürfnis zu befriedigen. Der herkömmliche Weg ist der, daß man Professuren für eine Wissenschaft einrichtet, für das Examen der Oberlehrer entsprechende Forderungen stellt, im Lehrplan der Seminarien für Volksschullehrer die notwendigen Ergänzungen trifft usw. Nach einiger Zeit wird dann in der einen oder anderen Volksschule oder höheren Schule dieser oder jener Lehrer in der Lage sein, eine Anzahl Schüler in dem neuen Lehrfache zu unterrichten. Aber erst nach Jahrzehnten kann man die allgemeine Aufnahme dieses Unterrichtsgegenstandes durchgeführt ansehen. Und dann dauert es auch noch Jahre, bis die Schüler erwachsen und fähig sind, das Erlernte anzuwenden. Dieser Weg dürfte sich in unserem Falle, wo die Belehrung so dringend geworden ist und der Erfolg einer großen staatlichen Einrichtung, des Oeffentlichen Wetterdienstes, davon abhängt, nicht empfehlen. — Aber auch ein anderer Weg, der wohl am schnellsten zum Ziele führen könnte, hat sich als nicht zweckmäßig herausgestellt. Man hatte nämlich gemeint, daß die direkte Aufklärung der Interessenten durch populäre Vorträge in Vereinen und Versammlungen und durch Aufsätze in Zeitungen und Zeitschriften geschehen könne. Da zeigte sich aber wieder, wie schon häufig, daß nur ein geringer Prozentsatz der Menschen, besonders der erwerbenden und arbeitenden Klassen, geneigt und in der Lage ist, nach der Arbeit des Tages sich mit ihm bis dahin fernliegenden abstrakten Gegenständen zu befassen.

Der Verfasser möchte hier einen Mittelweg vorschlagen, von dessen Durchführbarkeit er sich in mehrjährigen Versuchen überzeugt hat, und dieser Weg führt direkt durch die Schule, ohne Umweg über Universitäten und andere Vorbereitungsanstalten. Es wurde mir nämlich durch das Entgegenkommen der zuständigen Regierungen und Schulbehörden ermöglicht, 30 Kurse über Wetterkunde mit Oberlehrern und Volksschullehrern abzuhalten; und gemeinsam mit weit über 1000 Teilnehmern habe ich nach einem Wege gesucht, wie man am schnellsten die Wetterkunde in die Schule einführen kann.

Das Ergebnis war überaus erfreulich. Es zeigte sich, daß der wetterkundliche Unterricht nicht nur die übrigen naturwissenschaftlichen Disziplinen in wünschenswerter Weise ergänzt, sondern daß auch aus rein pädagogischen Gründen, nämlich für die Erziehung der Schüler zum selbständigen Beobachten und Denken, die Aufnahme der Wetterkunde im eigenen Interesse der Schule liegt.

Nun ist aber die Schule bekanntlich mit Stoff außerordentlich überlastet und es wäre zurzeit ganz unmöglich, die Wetterkunde als besonderen Unterrichtsgegenstand einzuführen, wenn es nicht ohne Neubelastung der Lehrer und der Schüler geschehen könnte. Und das war eben das Ergebnis der Wetterkurse: ein systematischer Lehrgang des wetterkundlichen Unterrichtes.

Dieser Lehrgang besteht aus drei Abschnitten, die aber zeitlich ineinander übergreifen: Zuerst lernen die Schüler die verschiedenen Witterungselemente an einfachen Instrumenten beobachten; einzelne Schüler, die sich wöchentlich ablösen, haben die Aufgabe, täglich an einem festgesetzten Termine Thermometer, Windfahne usw. abzulesen und die Stände in Formulare zu notieren. Das schärft ihre Beobachtungsgabe, erweckt ihr Interesse und macht ihnen große Freude.

In späteren Schuljahren werden nun diese selbstgewonnenen Beobachtungen zu graphischen Darstellungen des Verlaufes der einzelnen Elemente von Tag zu Tag benutzt. Aus den entstandenen Kurven können dann leicht Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Wetterelementen abgeleitet werden, die als „Wetterregeln“ dem Gedächtnis sich leicht einprägen, z. B. „bei tiefem Barometerstand pflegt es zu regnen“, oder „steigt das Barometer, so klärt sich das Wetter auf“ usw.

Die Erklärung dieser Wetterregeln erfolgt erst in den letzten beiden Schuljahren an Hand der Wetterkarte, deren Verständnis nun keine Schwierigkeit mehr macht. Hier wird eine ganz einfache Theorie der Hoch- und Tiefdruckgebiete gegeben.

Dieser Lehrgang ist schon in manchen Schulen ausprobiert und als durchaus zweckmäßig befunden worden. Den meisten Schülern machte das Verständnis der Hoch- und Tiefdruckgebiete infolge der guten Vorbereitung gar keine Schwierigkeiten. Es ist eine Freude, so vorgebildete Jungen die Wetterkarte erklären zu hören. Man hat das sichere Gefühl, daß sie in Zukunft nicht nur tiefer gehendes Interesse für Wettervorgänge haben werden, sondern auch aus dem öffentlichen Wetterdienst die nötigen Vorteile ziehen können.

Dieses praktische Ziel zieht sich durch den ganzen Lehrgang als roter Faden hindurch. Dennoch ist genügend Zeit und Gelegenheit, auch die sonstigen meteorologischen Kenntnisse zu verbreiten. Besonders die Klimatologie, ohne welche die Geographie fremder Länder ja gar nicht verstanden werden kann, profitiert von diesem Lehrgang. Aber auch andere Lehrgegenstände außer der Geographie ziehen Nutzen aus der allgemeinen Einführung der Wetterkunde; besonders wird die Physik entlastet, der das schwerste Kapitel der Gase und der Kondensation abgenommen wird. Die Beziehungen der Wetterkunde zur Botanik und Zoologie sind so enge, daß für sie besonders großer Nutzen aus der Beschäftigung der Schule mit der Wetterkunde entspringt.

Die für Behandlungen der Wetterkunde notwendigen wenigen Unterrichtsstunden können also skrupellos den erwähnten Lehrgegenständen, nämlich Geographie, Botanik, Zoologie und Physik, entzogen werden. Schon jetzt sind übrigens in allen Lehrplänen meteorologische Lehrgegenstände enthalten. Aber es fehlte ein System, nach welchem unterrichtet werden sollte, und der Lehrer lief Gefahr, sich in der Fülle der meteorologischen Einzelheiten zu verlieren. Im hier vorgeschlagenen Lehrgang ist alles Nebensächliche vermieden und nur das wirklich Wichtige logisch aneinander gereiht worden.

Für die Einübung der Lehrer stehen zwei Wege zur Verfügung: nämlich die vom Königlichen Kultusministerium und anderen Behörden empfohlenen ein- oder zweitägigen Lehrerkurse, welche von den Wetterdienstleitern gehalten werden oder zum Selbstunterricht eine Reihe guter Anleitungen von bewährten Schul- und Fachmännern.

So steht denn also dem angestrebten Ziele, der Einführung der Wetterkunde in den Schulen, nichts mehr im Wege, und es ist deshalb leicht verständlich, daß an manchen Stellen des deutschen Reiches schon damit begonnen ist. Die Früchte dieses Unterrichtes werden sich schon nach wenig Jahren zeigen und — um das noch einmal kurz zusammenzufassen — in drei verschiedenen Erfolgen bestehen: Zunächst in einem kulturellen Fortschritt insofern, als die Menschheit, welche bis jetzt den Wettervorgängen eine bedauerliche Teilnahmslosigkeit entgegenbrachte, diesen alltäglichen Ereignissen in Zukunft größeres Interesse entgegenbringt. Zweitens in einem praktischen Erfolg insofern, als die daran interessierten Berufszweige durch bessere Verwertung des öffentlichen Wetterdienstes in der Lage sind, sich auf das künftige Wetter einzurichten. Infolgedessen resultiert aus der allgemeinen Aufnahme des wetterkundlichen Unterrichtes ein nationaler Erfolg, wenn Deutschland, wie bisher, in der Organisation des Oeffentlichen Wetterdienstes vorangeht und die wetterkundliche Volksaufklärung dabei nicht vernachlässigt.

Und sollten dann unsere Söhne einstmals wieder gezwungen sein, die Heimat zu verteidigen, so sollen ihnen die Wettervorgänge kein Buch mit sieben Siegeln sein, sondern sie werden dieses neue Rüstzeug des Geistes zu ihrem Vorteil anzuwenden wissen.

---

## Nochmals Arbeitsunterricht.

Von R. Maurer (Freiburg i. Br.).

Den eingehenden, vorsichtig abwägenden Ausführungen Winderlichs über diesen Gegenstand (Jahrgang XXI, Nr. 8) wird man in weiten Kreisen freudig zustimmen. Keineswegs darf das Voraus- und Nachdenken und die Einrichtung eines wohlgefügten Wissensgebäudes über dem Anstellen von Versuchen und Messungen vernachlässigt werden.

Zum Glück braucht aber der theoretische Unterricht keineswegs auf die hauptsächlichsten Erziehungswerte des „Arbeitsunterrichts" zu verzichten.

Wie das gemeint ist, sagt uns eine neuere pädagogische Richtung, als deren Führer wohl Hugo Gaudig angesprochen werden darf. Sie findet den Hauptgegensatz, auf den es hier ankommt, nicht zwischen geistiger und körperlicher Arbeit, sondern zwischen der freien Selbsttätigkeit der Schüler, wie sie schon von Fichte in den Reden an die deutsche Nation empfohlen worden ist, und einem bloß aufnehmenden oder immer erneuter Anregung durch den Lehrer bedürfenden Verhalten. Man kann ja die Schüler einerseits bei ihren schönsten physikalischen oder chemischen Versuchen in einer Weise bevormunden, daß von Freude an eigener Tätigkeit wenig oder nichts übrig bleibt, und diese Gefahr liegt um so näher, je kostbarer die Apparate sind und je peinlichere Behandlung sie erfordern; dagegen kann anderseits auch ein rein theoretischer oder referierender Unterrichtsabschnitt z. B. so eingerichtet werden, daß Abschnitte aus Lehrbüchern oder Abhandlungen unter die Schüler oder Gruppen derselben zum Durcharbeiten verteilt und dann unter gemeinsamen Gesichtspunkten im Unterrichtsgespräch behandelt werden. Einem solchen Unterrichtsverfahren muß freilich eine Schulung in mancherlei Arten geistiger Arbeit vorangehen, wozu auch der Erwerb und das Festhalten eines Bestandes positiver Kenntnisse gehört. Technik geistiger und körperlicher Arbeit reichen sich da die Hand. Mustergültig werden diese überaus mannigfachen Unterrichtsformen und Ausbildungsweisen in den verschiedensten Klassen und Fächern der von Oberschulrat Gaudig geleiteten zweiten höheren Mädchenschule mit Lehrerinnenseminar in Leipzig-Gohlis durchgeführt, und es ist jedem Lehrer dringend zu empfehlen, sich mit dem Geiste dieser Arbeitsschule bekannt zu machen*.

---

## Ueber eine erweiterte Auffassung der Maxima und Minima im Unterricht der höheren Schulen.

Von cand. prob. W. Liebermann (Frankfurt a. M., z. Z. im Felde).

Auf der Oberstufe der höheren Lehranstalten, welche die Infinitesimalrechnung in ihren Lehrplan aufgenommen haben, erfreuen sich die Aufgaben über Maxima und Minima bei den Schülern eines besonderen Interesses. Der Grund liegt einmal in der großen Anschaulichkeit und Einfachheit der Resultate, außerdem in der Einsicht, die der Schüler von Neuem in die Fruchtbarkeit der Methoden der Differentialrechnung gewinnt.

Bei den auf der Schule vorkommenden Aufgaben handelt es sich um Funktionen von der Form

$$y = f(x),$$

in denen also zwei Variable vorkommen. Eine besondere Betrachtungsweise ergibt sich nun für diese Aufgaben, wenn man sie von einem Gesichtspunkte aus auffaßt, wie er von der Theorie der relativen Maxima und Minima her bekannt ist. Sei z. B. die Funktion von vier Variablen

$$f(x, y, z, u)$$

vorgelegt, deren Extremwerte unter Einhaltung der beiden Bedingungsgleichungen

$$\varphi(x, y, z, u) = 0$$

und

$$\psi(x, y, z, u) = 0$$

zu bestimmen sind, so ist aus der Differentialrechnung bekannt, daß man sie findet, indem man die absoluten Extremwerte der neuen Funktion

$$f(x, y, z, u) + \lambda\, \varphi(x, y, z, u) + \mu\, \psi(x, y, z, u)$$

bestimmt. Hierbei bedeuten $\lambda$, $\mu$ Konstanten, die sogenannten Lagrangeschen Multiplikatoren. — Ein Beispiel möge zeigen, wie die auf der Oberstufe behandelten Aufgaben in eine nahe Beziehung zu den Aufgaben über relative Maxima und Minima gebracht werden können.

Aufgabe 1. Welches unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang $u = 4$ cm hat den größten Flächeninhalt?

Sind $x$ und $y$ die Seiten des Rechtecks, $F$ der Flächeninhalt, so ist

1) $$F = x\,y$$

2) $$x + y = 2, \quad \text{oder} \quad y = 2 - x.$$

Der gewöhnliche Weg ist nun der, in 2) $y$ durch $x$ auszudrücken und den gefundenen Ausdruck in 1) einzusetzen, so ergibt sich:

$$F = x\,(2 - x),$$

$$\frac{dF}{dx} = 2 - 2x,$$

und zur Bestimmung des Maximums

$$2 - 2x = 0$$

$$x = 1, \quad y = 1,$$

die Figur ist ein Quadrat.

---

* Vgl. in der Monatsschrift des Vereins für Knabenhandarbeit und Werkunterricht „Die Arbeitsschule", Leipzig, Quelle & Meyer, Jahrgang 1913 u. ff., die Aufsätze von Gaudig, Kühnel, Scheibner, Stiehler u. a.

Durch die Eliminierung von $y$ ist die neue Gleichung

$$F = x(2 - x)$$

entstanden; dabei hat man auf eine gesonderte Betrachtung der beiden ursprünglichen Gleichungen

$$F = xy$$

und $$x + y = 2$$

verzichtet. Wir wollen nun umgekehrt die ursprünglichen Gleichungen ins Auge fassen und die Eliminierung von $y$ nicht ausführen. Setzt man noch

$$F = z,$$

so stellt die erste Gleichung

$$z = xy$$

in räumlichen rechtwinkeligen Koordinaten ein hyperbolisches Paraboloid dar, die zweite $x + y = 2$ eine Ebene.

Um diese Gleichungen für die graphische Darstellung in der Ebene verwenden zu können und die Schwierigkeit der räumlichen Darstellung oder Vorstellung zu umgehen, schlagen wir folgenden Weg ein: Da $z = (xy)$ als Fläche alle beliebigen Werte von 0 bis $+\infty$ annehmen kann, so können wir folgende (vornehmlich ganzzahligen) Werte zählen:

$$\frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

und erhalten eine Folge von Gleichungen:

$$xy = \frac{1}{2},\quad xy = 1,\quad xy = 2,\quad xy = 3,\quad xy = 4 \text{ usw.}$$

Ihre graphische Darstellung ergibt eine Schar gleichseitiger Hyperbeln; aus dem räumlichen Gebilde $z = xy$ entstehen sie, indem man dieses mit den (zur $xy$-Ebene parallelen) Ebenen $z = \frac{1}{2}$, $z = 1$ usw. zum Schnitt bringt und die so entstehenden Schnitthyperbeln auf die $xy$-Ebene projiziert. Die Gleichung $x + y = 2$ stellt in der $xy$-Ebene eine Gerade dar, nämlich die Spur der Ebene $x + y = 2$. Jedoch sind diese räumlichen Ueberlegungen nur von untergeordneter Bedeutung und unterbleiben im weiteren Verlauf dieser Untersuchung. Ferner kann man sich auf den ersten Quadranten beschränken, da $x$ und $y$ als Rechteckseiten positiv zu denken sind. — Jede Hyperbel ist nun der geometrische Ort für alle Punkte, deren Koordinaten $x$, $y$ der Gleichung

$$xy = z \ (z = \tfrac{1}{2}, 1, 2, 3 \text{ usw.})$$

genügen. Für beliebige Zwischenwerte von $z$ könnten ebenfalls die betreffenden Hyperbeln konstruiert werden, doch wird diese Konstruktion durch folgende Bemerkung überflüssig: Für alle Punkte links und unterhalb der Hyperbel $xy = \frac{1}{2}$ ist $xy < \frac{1}{2}$, rechts und oberhalb $> \frac{1}{2}$. Die gleiche Betrachtung auf alle übrigen Hyperbeln ausgedehnt, ergibt z. B. für die Koordinaten aller Punkte zwischen den Hyperbeln $xy = 1$ und $xy = 2$, daß das Produkt $xy > 1$ und $< 2$, also

$$1 < xy < 2 \text{ usw.}$$

In analoger Weise ist für alle Punkte rechts der Geraden $x + y = 2$ die Summe $x + y > 2$, links $< 2$.

Da das Produkt $xy$ beliebig großer Werte fähig ist, so kann bei der Gleichung $z = xy$, für sich allein betrachtet, von einem Maximum keine Rede sein. Ein solches kann erst eintreten, wenn eine einschränkende Bedingung hinzutritt. Diese ist hier gegeben durch die Gleichung $x + y = 2$, geometrisch durch die entsprechende Gerade. Ein Blick auf die graphische Darstellung zeigt, daß alle Hyperbeln, für welche $xy > 1$ ($xy = 2$, $= 3$ usw.), bei der Lösung nicht in Betracht kommen, da sie keinen Punkt mit der Geraden $x + y = 2$ gemeinsam haben. Das bedeutet mit Rücksicht auf die ursprüngliche Aufgabe, daß die jenen Hyperbeln zugeordneten Rechtecke einen zu großen Umfang haben; denn für alle Punkte des Gebietes rechts und oberhalb der Geraden $x + y = 2$ ist $x + y > 2$.

Die Hyperbeln $xy = z$, für welche $z < 1$ $\left(\text{z. B.} = \frac{1}{2}\right)$, haben zwar je zwei Punkte mit der Geraden $x + y = 2$ gemeinsam, doch entspricht diesen Schnittpunkten noch nicht die Lösung; denn nähert man sich dem Berührungspunkt der Hyperbel $xy = 1$ und der Geraden $x + y = 2$, so nimmt der Wert des Produktes $xy$ ständig zu, bis er im Berührungspunkt selbst den größten Wert $xy = 1$ annimmt. Also ergeben die Koordinaten dieses Berührungspunktes die Lösung, nämlich $x = 1$, $y = 1$, d. h. das Quadrat mit der Seite 1 cm. Es liefert also stets diejenige Kurve der Schar die Lösung, welche die der Bedingungsgleichung entsprechende Kurve berührt. Zusammenfassend kann man sagen: Durchläuft man die Gerade $x + y = 2$ in der Richtung nach dem Berührungspunkt, so kommt man zu Punkten mit immer höheren Werten des Produktes $xy$, bis es im Berührungspunkt selbst sein Maximum 1 erreicht; im weiteren Durchlaufen nimmt sein Wert wieder ab. Sofern der genaue Wert des Produktes $xy$ in einem Punkte der Geraden nicht durch die hindurchgehende Hyperbel angegeben wird, kommt die Bemerkung oben zur Geltung. Durchläuft man dagegen die Hyperbel $xy = 1$, so ist zunächst $x + y > 2$, nimmt um so mehr ab, je mehr man sich dem Berührungspunkt nähert und ist genau $= 2$ nur im Berührungspunkt selbst; beim weiteren Durchlaufen wird $x + y$ wieder $> 2$ und nimmt ständig zu. Da also der Ausdruck $x + y$ (d. h. der halbe Rechtecksumfang) im Berührungspunkt sein Minimum erreicht, so ist zugleich die Aufgabe gelöst, das Rechteck zu finden, das bei gegebenem Flächeninhalt ($xy = 1$) den kleinsten Umfang hat.

Nebenbei sei erwähnt, daß im Berührungspunkt der Differentialquotient der beiden Kurven der gleiche sein muß:

$$xy = 1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

also für $x = 1$:

$$\frac{dy}{dx} = -1.$$

$$x + y = 2 \quad \text{oder} \quad y = 2 - x$$

$$\frac{dy}{dx} = -1.$$

Vorläufig hat diese Art, Maxima und Minima zu bestimmen, keinen praktischen Wert, wohl aber einen didaktischen; denn es ergibt sich ungezwungen auf analytischem Wege der Begriff der Kurvenschar, ferner durch stetige Aenderung des Parameters auch stetige Gestaltsänderung der ursprünglichen Kurve. Es tritt also zu dem schon bekannten einfachen Funktionsbegriff $y = f(x)$ und seiner geometrischen Deutung eine wesentliche Erweiterung, nämlich die Abhängigkeit einer Funktion (oder Kurve) von einem variablen Parameter. Neu ist endlich neben der Gleichung einer Kurve die

Ungleichung, welcher die Punkte eines bestimmten Flächengebietes genügen. Während sonst die Bedeutung der beiden Gleichungen im einzelnen verschwindet, tritt sie hier deutlich hervor.

Indes kann auch die praktische Lösung von Aufgaben zu ihrem Recht kommen. Sei z. B. die Aufgabe vorgelegt:

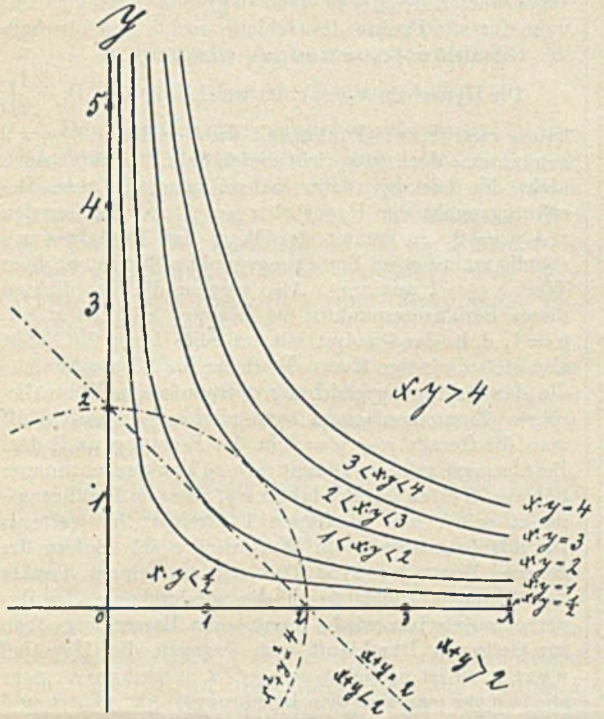



Fig. 1.

Aufgabe 2 (Fig. 1). Welches von allen einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ einbeschriebenen Rechtecken hat den größten Flächeninhalt? Hier ist

$$F = x\,y$$
$$x^2 + y^2 = 4.$$

Die gewöhnliche Behandlung mittels der Differentialrechnung ergibt:

$$x = \sqrt{2}, \qquad y = \sqrt{2},$$

also wieder ein Quadrat.

Nun steht diese Aufgabe zu Aufgabe 1 in der Beziehung, daß auch hier nach dem Maximum eines Produktes $x\,y$ gefragt ist, so daß die Kurvenschar $x\,y = z$ $(z = 1, 2 \ldots)$ nicht von neuem gezeichnet zu werden braucht, sondern nur die Kurve der Bedingungsgleichung

$$x^2 + y^2 = 4;$$

der entsprechende Kreis ist aber unmittelbar zu konstruieren. Es lassen sich also die so oft auftretenden Aufgaben, bei denen nach dem Extremwerte eines Flächeninhaltes, noch allgemeiner eines Produktes aus zwei Faktoren, gefragt ist, stets mit der einmal gezeichneten Hyperbelschar lösen.

Als letztes Beispiel dieser Art betrachten wir den Fall, daß an Stelle des Kreises der vorigen Aufgabe die Ellipse

$$x^2 + 4\,y^2 = 8$$

tritt.

Aufgabe 3 (Fig. 2). In eine Ellipse mit der Gleichung

$$x^2 + 4\,y^2 = 8$$

soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt eingeschrieben werden. Die rechnerische Behandlung ergibt dasselbe Resultat wie die graphische Darstellung, nämlich $x = 2, \quad y = 1;$ jedoch zeigt die graphische Lösung sehr deutlich, warum im Gegensatz zu Aufgabe 1, im Fall der Ellipse die Abszisse des Berührungspunktes größer als seine Ordinate sein muß.

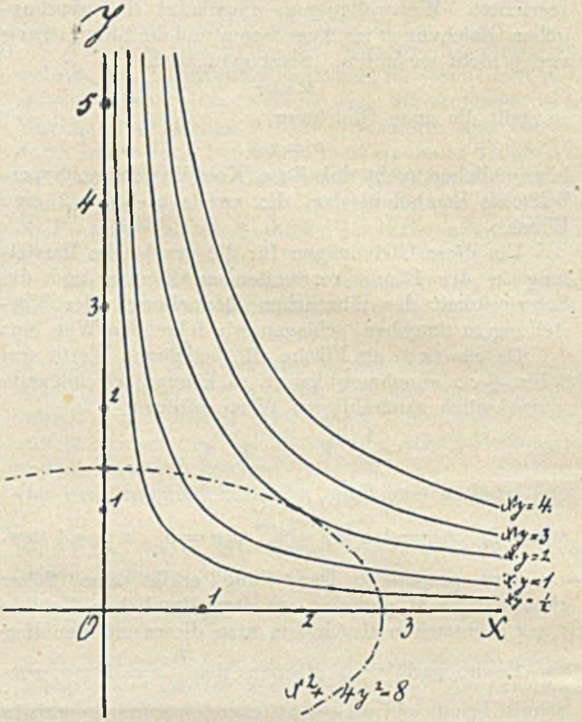



Fig. 2.

Diese Kurvenscharen haben eine ähnliche Bedeutung wie die Normalparabeln $y = x^2$, bezw. $y = x^3$ der graphischen Lösung von quadratischen Gleichungen

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

durch die Substitution

$$y = x^2, \quad y + p\,x + q = 0$$

oder bei kubischen Gleichungen

$$x^3 + p\,x + q = 0$$
$$y = x^3, \qquad y + p\,x + q = 0.$$

Um Beispiele für eine andere Kurvenschar zu geben, sei folgende Aufgabe genannt:

Aufgabe 4 (Fig. 3). Eine Strecke $a = 1$ cm durch einen Punkt so zu teilen, daß die Summe der Quadrate über den beiden Abschnitten ein Minimum wird.

$$F = x^2 + y^2$$
$$x + y = 1.$$

Die erste Gleichung stellt für

$$F (= z) = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{4}, 4 \ldots$$

eine Schar von Kreisen, die zweite eine Gerade dar. Die Rechnung ergibt dasselbe wie die geometrische Lösung:

$$x = \frac{1}{2}, \qquad y = \frac{1}{2},$$

d. h. der Punkt halbiert die Strecke. Der Unterschied gegenüber dem Falle des Maximums zeigt sich darin, daß bei Annäherung an den Berührungspunkt längs der Geraden $x + y = 1$ der Ausdruck $x^2 + y^2$ kleiner wird, im Berührungspunkt selbst sein Minimum annimmt $\left(x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\right)$ und dann wieder größer wird.

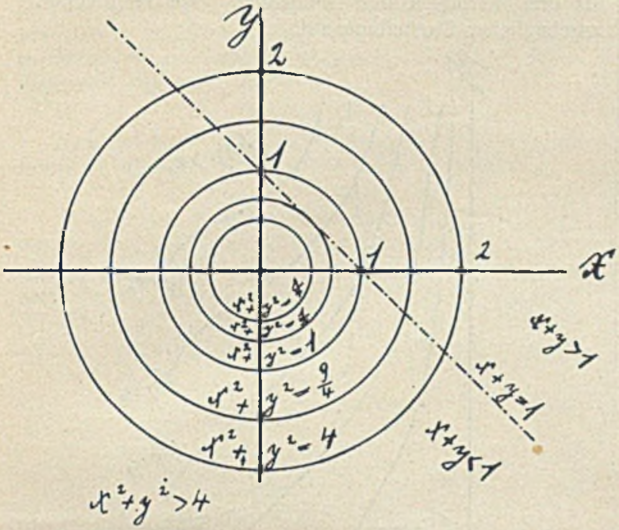



Fig. 3.

Der geometrisch besonders leicht darzustellende Fall der Geradenschar tritt in den folgenden drei Aufgaben ein:

Aufgabe 5 (Fig. 4). In einen Kreis mit dem Radius $r = \frac{1}{2}$ soll ein Rechteck mit möglichst großem Umfang einbeschrieben werden,

$$u = 2(x + y),$$

oder

$$z = x + y,$$

wenn man die Substitution

$$\frac{u}{2} = z$$

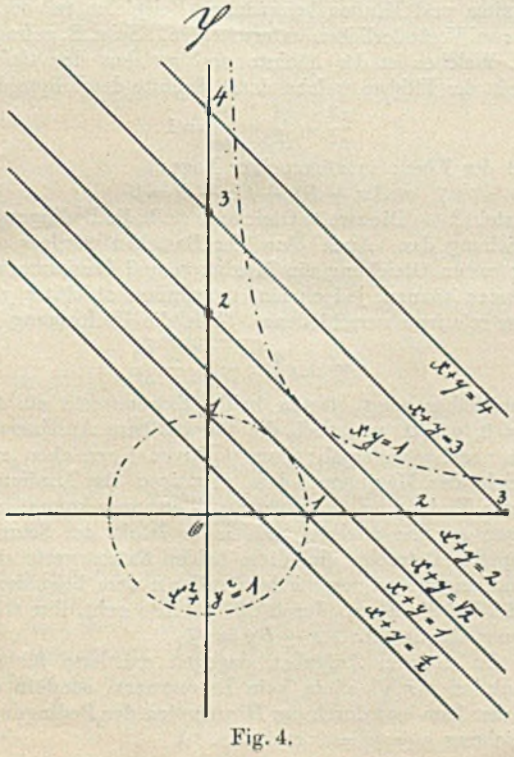



Fig. 4.

ausführt. Die Gleichung $x + y = z$ stellt für eine Reihe von Werten für $z$ eine Geradenschar dar. Die Bedingungsgleichung lautet:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{4}$$

oder

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Lösung: $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

Aufgabe 6 (Fig. 4). Welches von allen Rechtecken mit gegebenem Flächeninhalt $F = 1$ hat den kleinsten Umfang?

$$\frac{u}{2} = z = x + y$$

stellt dieselbe Geradenschar dar.

$$x \cdot y = 1$$

ist eine gleichseitige Hyperbel.

Lösung: $x = 1, \quad y = 1,$

das Rechteck ist ein Quadrat. Zugleich drückt es sich in der Figur deutlich aus, daß Aufgabe 6 nur die umgekehrte Fragestellung von Aufgabe 1 enthält. Dort ergab sich eine Schar Hyperbeln und eine Gerade, hier eine Geradenschar und eine Hyperbel, im übrigen die gleiche Lösung.

Als letzte Aufgabe sei angeführt:

Aufgabe 7 (Fig. 5). In eine Ellipse mit der Gleichung $9x^2 + 16y^2 = 144$ soll ein Rechteck mit möglichst großem Umfange einbeschrieben werden.

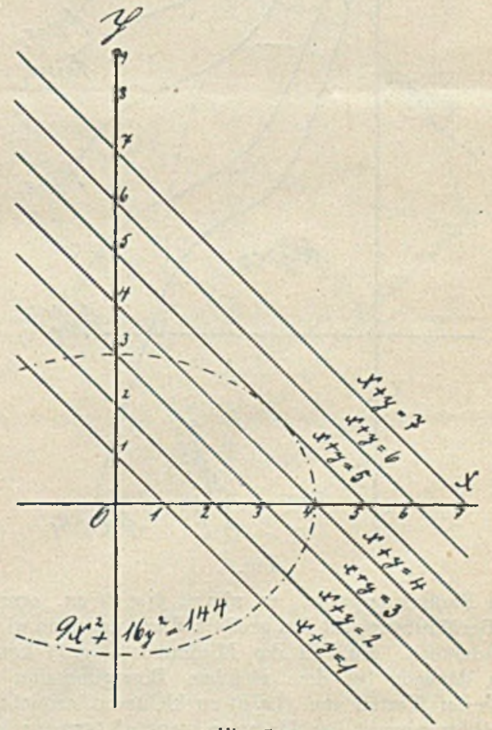



Fig. 5.

In derselben Bezeichnungsweise wie bisher ist

$$\frac{u}{2} = z = x + y,$$

also dieselbe Geradenschar.

Die Ellipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ wird von der Geraden $x + y = 5$ der Schar berührt im Punkte

$$x = 3\frac{1}{5}, \qquad y = 1\frac{4}{5}.$$

Wieder ist unmittelbar einleuchtend, warum im Gegensatz zu Aufgabe 5 die Abszisse des Berührungspunktes größer sein muß als die Ordinate.

Es ist leicht, alle vorkommenden planimetrischen und stereometrischen Aufgaben in der gleichen Weise zu deuten und zusammenzufassen.

Die Betrachtung ist nun leicht auf Gleichungen in allgemeiner Form auszudehnen (Fig. 6 u. 7). Sei $f(x, y) = z$ der Ausdruck in $x$ und $y$, der beliebige Werte annehmen kann, so erhält man die Gleichungen

$$f(x, y) = a_1, \quad f(x, y) = a_2, \ldots \quad f(x, y) = a_5.$$

wo $a_1, a_2, \ldots a_5 \ldots$ beliebige wachsende Zahlenwerte sind. Diesen Gleichungen entsprechen die angedeuteten Kurven. Ebenso wird die Bedingungsgleichung

$$\varphi(x, y) = 0$$

dargestellt. Die Koordinaten des Berührungspunktes der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ mit der entsprechenden Kurve der Schar ergeben die Lösung. Der Unterschied zwischen Maximum und Minimum drückt sich in der gleichen Weise aus wie in Aufgabe 4. Nähert man sich im Fall des Maximums (Fig. 6) längs der Kurve $\varphi(x, y) = 0$

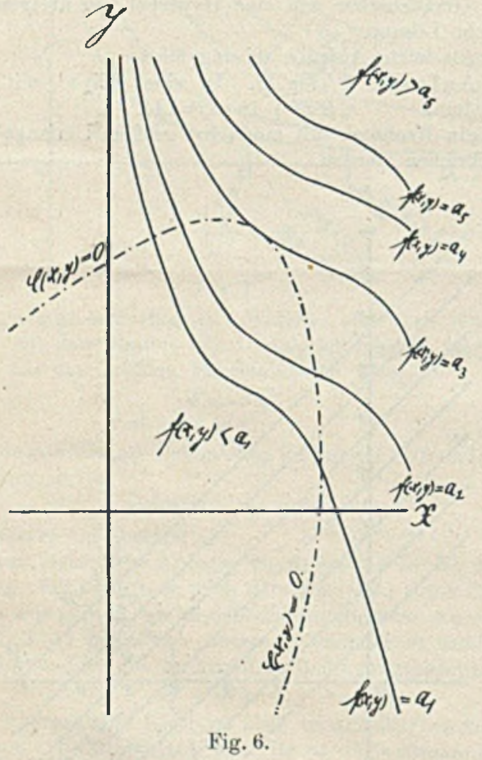



Fig. 6.

dem Berührungspunkt, so nimmt $f(x, y)$ zu, erreicht im Berührungspunkt den größten Wert, um dann wieder abzunehmen. Im Fall des Minimums (Fig. 7) kommt man dagegen bei dem gleichen Bewegungssinn von größeren Werten von $f(x, y)$ zu kleineren, erreicht im Berührungspunkt den kleinsten, worauf $f(x, y)$ wieder zunimmt.

Die Ausdehnung auf drei Variable würde von der graphischen Darstellung in der Ebene zur Konstruktion räumlicher Gebilde führen, wäre also für den mathematischen Unterricht auf höheren Schulen bedeutungslos, da man sonst über die hier gesetzten Ziele der Differentialrechnung und der analytischen Geometrie hinausgehen müßte. Da außerdem eine wirkliche Darstellung, etwa durch räumliche Modelle, kaum ausführbar ist, namentlich die der auftretenden Flächenscharen nicht, so könnte die weitere Verfolgung nur Sache eines sehr geübten räumlichen Vorstellungsvermögens sein. — Bei mehr als drei Variablen hört schließlich jede Möglichkeit anschaulicher Darstellung auf.

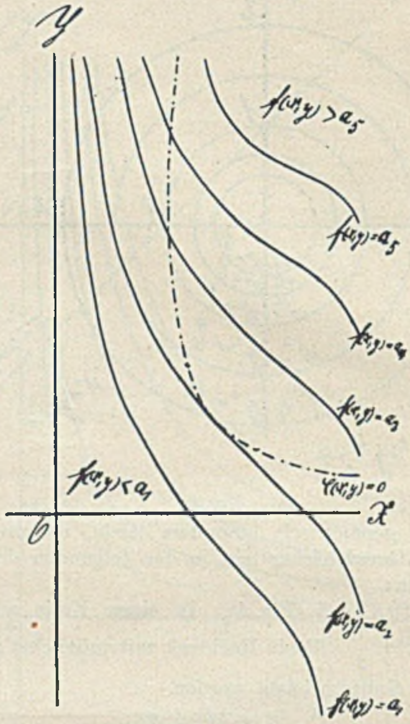



Fig. 7.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, in welchem Punkte sich die hier behandelten Aufgaben mit zwei Variablen von den sonst im Kapitel der relativen Maxima und Minima behandelten Beispielen mit mehr als zwei Veränderlichen unterscheiden. Sei z. B. gefragt:

Welches ist der höchste und welches der tiefste Punkt der Ellipse, welche durch Schnitt des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und der Ebene in allgemeiner Lage:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

entsteht? — Die zweite Gleichung stellt die Bedingungsgleichung dar. Auch ohne ihr Bestehen würde $z$ aus der ersten Gleichung ein Maximum und Minimum annehmen können, jedoch ein sogenanntes absolutes, von dem relativen verschiedenes. Wie die Umformung

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

unmittelbar zeigt, treten beide Extremwerte ein für $x = 0$, $y = 0$, was auch die unmittelbare Anschauung von vornherein ergab; dem positiven Vorzeichen entspricht das Maximum, dem negativen das Minimum. Unter Einhaltung der zweiten Gleichung kommt dagegen nur der höchste und tiefste Punkt der Schnittellipse in Betracht, und diese beiden Extremwerte sind von dem vorigen verschieden (außer in dem besonderen Fall, daß die Ebene durch die $z$-Achse geht, ihre Gleichung also lautet: $Ax + By = 0$).

In unseren Aufgaben dagegen existierte für die Funktion $f(x, y)$ allein kein Extremwert, sondern ein solcher kam erst durch das Hinzutreten der Bedingungsgleichung $\varphi(x, y) = 0$ zustande.

### Nachtrag.

Die Bedingungsgleichungen

$$\varphi(x, y) = 0$$

(bei der graphischen Darstellung durchgängig gestrichelt gezeichnet) konnten immer nur für einen bestimmt gewählten Wert graphisch dargestellt werden, z. B. in Aufgabe 1) für den Wert

$$x + y = 2.$$

Infolgedessen erhielt man auch die Lösung nicht sofort in allgemeinster Form, sondern zunächst nur

$$x = 1, \qquad y = 1.$$

Nun ist man aber nicht daran gebunden, die Summe zweier Rechteckseiten gleich zwei zu wählen; wählt man auch andere Werte, so erhält man weitere Geraden. Man kann sich nun zur Lösung stets auf diejenige Hyperbel beschränken, welche die gerade vorliegende Gerade berührt; dann ergibt sich zu der Geradenschar

$$x + y = u,$$

wo $u$ nun ein Parameter der Gleichung ist, die Schar der berührenden Hyperbeln.

Die Aenderung der Summe $x + y$ ändert nichts an der Tatsache, daß die Abszissen und Ordinaten der Berührungspunkte von Hyperbeln und Geraden einander gleich sind, das Rechteck also im Falle des Maximums ein Quadrat sein muß. Die numerische Beschränkung auf den Fall

$$x + y = 2$$

ist damit aufgehoben. Sämtliche Berührungspunkte liegen auf der Geraden

$$y = x;$$

hiermit ist die Aufgabe im allgemeinen Sinne gelöst. — Die ungleichartige Rolle, die zuerst die Kurvenschar

$$x \cdot y = z \left(z = \frac{1}{2}, 1, 2 \ldots\right)$$

einerseits und die Bedingungsgleichung

$$x + y = 2$$

andererseits gespielt haben, ist damit verschwunden, oder, in allgemeinen Ausdrücken, der ersten Schar mit dem Parameter $z$

$$f(x, y) = z$$

entspricht in gleicher Weise die Schar mit dem Parameter $u$

$$\varphi(x, y) = u.$$

Vergleicht man von diesem Gesichtspunkt aus die Aufgaben 1 und 5, so ergibt sich ihre bei Aufgabe 5 schon hervorgehobene Identität auf einen Blick; der Aufgabe 1 würden ausgezogene Hyperbeln und gestrichelte Geraden, der Aufgabe 5 ausgezogene Geraden und gestrichelte Hyperbeln entsprechen; die Berührungspunkte liegen in völlig gleicher Weise auf der Geraden

$$y = x.$$

In Aufgabe 3 ergab sich die Lösung:

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2}, \qquad y = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Hier liegen zwei veränderliche Parameter der Ellipse, nämlich $a$ und $b$ vor. Aendert man nun den Maßstab, so bleibt das Achsenverhältnis $\frac{a}{b}$ dasselbe, d. h. man erhält zu der Hyperbelschar eine Schar ähnlicher Ellipsen in gleicher Lage. Sei $c$ der Faktor, mit dem die Achsen $a$ und $b$ zu multiplizieren sind, um zu einer bestimmten, der früheren ähnlichen Ellipse zu gelangen, so ist nun für den Berührungspunkt:

$$x = c \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2}, \qquad y = c \cdot \frac{b}{2}\sqrt{2},$$

indem man einfach in der ersten Lösung $ca$ und $cb$ an Stelle von $a$ und $b$ setzt. Die beiden neuen Ausdrücke für die Berührungspunktkoordinaten zeigen aber ohne weiteres, daß sämtliche Berührungspunkte der Ellipsen und Hyperbeln auf einer Geraden liegen.

Dasselbe Resultat ergibt sich für die Berührungspunkte der Geradenschar von Aufgabe 7, wenn man wieder das Achsenverhältnis der Ellipsen gleich $\frac{a}{b}$ beibehält. — Auf diese Weise kann die Zuordnung von Kurvenscharen zu den Aufgaben über Extremwerte zu rein geometrischen Sätzen führen.

Bei der graphischen Darstellung der Werte von Flächeninhalten $x \cdot y$, Umfängen $x + y$ usw., tut man gut, stets wieder an die ursprünglichen geometrischen Figuren und deren Veränderungen zurückzudenken, so daß nicht nur eine Aenderung von Zahlengrößen, sondern auch von wirklichen Figuren zur Vorstellung gelangt. Der stete Hinweis hätte aber in der Darstellung nur ermüdend wirken können.

## Weitere Kegelschnittseigenschaften.

Von E. Magin (Hamburg).

Die vorliegende Arbeit setzt die Betrachtungen fort, welche in dem Aufsatz „Neue Kegelschnittseigenschaften" (Nr. 7, XXI. Jahrgang dieser Zeitschrift) ausgeführt worden sind.

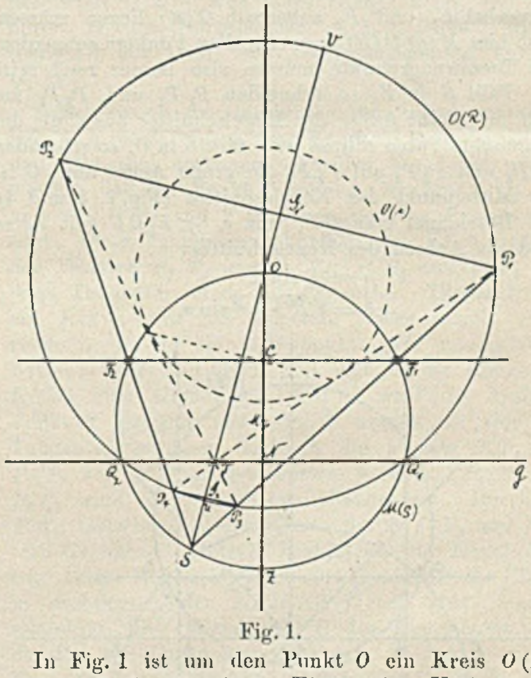


Fig. 1.

In Fig. 1 ist um den Punkt $O$ ein Kreis $O(R)$ mit dem Radius $R$ gelegt. Ein zweiter Kreis $M(\varrho)$, mit dem Mittelpunkt $M$ und dem Radius $\varrho$, ist so gelegt, daß er durch den Punkt $O$ verläuft. Auf dem Kreise $M(\varrho)$ werden zwei feste Punkte $F_1$ und $F_2$ beliebig, aber so gewählt, daß $F_1 F_2$ zu $MO$ senkrecht steht. Auf $M(\varrho)$ wird der Punkt $S$ willkürlich angenommen. $S$ wird mit $F_1$ und $F_2$ verbunden. Man erhält dadurch die Schnittpunkte $P_1$, $P_3$, $P_2$, $P_4$ mit dem Kreis $O(R)$. Die Punkte $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ werden miteinander verbunden, und schließlich wird noch $SO$ gezogen. Der Winkel $F_1 S F_2$ ist für alle Lagen des Punktes $S$ konstant, $SO$ ist für alle Winkel $F_1 S F_2$ Winkelhalbierende, $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ stehen also immer senkrecht zu $SO$. Die Dreiecke $SP_1P_2$ und $SP_3P_4$ sind demnach gleichschenkelig, und wegen der Unveränderlichkeit des Winkels $F_1SF_2$ sind die Winkel $P_1$, $P_2$, $P_3$ und $P_4$ konstant. Nach den Ausführungen des oben angegebenen Aufsatzes sind deshalb $P_1P_2$ und $P_3P_4$ Tangenten eines Kegelschnittes, dessen Brennpunkte $F_1$ und $F_2$ sind. Bewegt sich Punkt $S$ auf dem Kreise $M(\varrho)$, so bilden $P_1P_2$ und $P_3P_4$ eine Geradenschar, deren Einhüllende dieser Kegelschnitt ist. Nach den früher gemachten Ausführungen ist der Kegelschnitt eine Ellipse, wenn die Punkte $F_1$ und $F_2$ innerhalb des Kreises $O(R)$ liegen, eine Hyperbel, wenn sie außerhalb liegen, und zwar liegt die Ellipse ganz innerhalb des Kreises, die Hyperbel ganz außerhalb. Der Kegelschnitt berührt den Kreis $O(R)$ in zwei Punkten, die für die Ellipse reell sein, zusammenfallen oder imaginär sein können, bei der Hyperbel stets reell sind.

Fällt in Fig. 1 Punkt $S$ in $Q_1$ (oder $Q_2$), [Schnittpunkt von $O(R)$ mit $M(\varrho)$], so geht die Tangente $P_3P_4$ in eine Gerade über, die den Kreis $O(R)$ in $Q_1$ (oder $Q_2$) berührt. $Q_1$ und $Q_2$ sind demnach die Punkte, in denen der Kegelschnitt den Kreis $O(R)$ berührt. Wird der Kreis $M(\varrho)$ so gewählt, daß er $O(R)$ nicht reell schneidet, so hat die Ellipse mit $O(R)$ keine reellen Berührungspunkte; fallen $Q_1Q_2$ in einem Punkt zusammen, so wird $O(R)$ Krümmungskreis für den Endpunkt der kleinen Achse der Ellipse. Da für eine Hyperbel $F_1$ und $F_2$ außerhalb $O(R)$ liegen müssen, muß hier $M(\varrho)$ $O(R)$ in zwei reellen Punkten schneiden, die Berührungspunkte müssen also immer reell sein.

Fällt $S$ in $Z$, so schneiden $P_1P_2$ und $P_3P_4$ auf $OM$ die kleine Achse des Kegelschnittes aus (falls der Kegelschnitt eine Ellipse ist); fällt $S$ in $O$, so schneiden $P_1P_2$ und $P_3P_4$ auf $F_1F_2$ die große Achse aus. $C$ ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes (Fig. 1, 3 und 4).

Bezeichnet man $OF_1$ mit $c$, $\sphericalangle F_1OC$ mit $\alpha$, so sind die Achsen des Kegelschnittes:

$$a = R \sin \alpha,$$
$$b = \sqrt{R^2 - c^2} \sin \alpha.$$

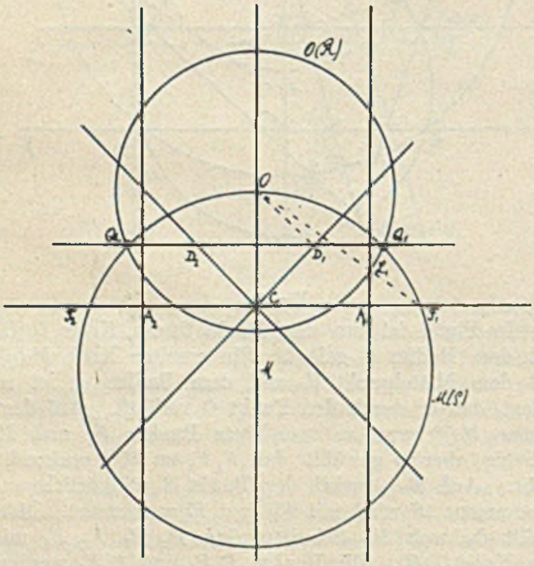


Fig. 2.

Das Verhältnis der Achsen ist demnach vom Winkel $\alpha$ unabhängig. Die geometrische Bedeutung hiervon ist folgende: Legt man bei festem Radius $R$ und unveränderlichen Punkten $F_1$ und $F_2$ verschiedene Kreise $M(\varrho)$, so sind die erhaltenen Kegelschnitte alle einander ähnlich.

Geht man von einem gegebenen Kegelschnitt aus, so lassen sich zu einem Kreise $O(R)$ sehr leicht die Berührungspunkte $Q_1$ und $Q_2$ finden. Man hat durch $O$, $F_1$ und $F_2$ den Kreis $M(\varrho)$ zu legen, der aus $O(R)$ die gesuchten Punkte ausschneidet. Die Konstruktion ist in Fig. 2 für die Hyperbel ausgeführt.

In Fig. 1 sind die Verbindungen $P_1P_4$ und $P_2P_3$ gezogen, die sich aus Symmetriegründen auf $SO$ im Punkte $T$ schneiden. Der Punkt $T$ liegt zugleich auf $Q_1Q_2$, wie aus folgender Ueberlegung ersichtlich ist. $SO$ schneidet $O(R)$ in den Punkten $U$ und $V$. Es ist dann nach bekannten Kreiseigenschaften $T$ der vierte harmonische Punkt zu $U$, $V$ und $S$. Kreis $M(\varrho)$ geht durch den Mittelpunkt von $O(R)$ und $Q_1Q_2$ ist die Chordale beider Kreise. Andererseits ist aber der Schnittpunkt von $P_1P_4$ und $P_2P_3$ der vierte harmonische Punkt zu $U$, $V$ und $S$. Dieser Schnittpunkt muß also auf $Q_1Q_2$ liegen. Da ferner die Sehnen $P_1P_4$ und $P_2P_3$ wegen der Unveränderlichkeit der Winkel $P_1$ und $P_2$ konstante Länge haben, so sind $P_1P_4$ und $P_2P_3$ Tangenten eines Kreises mit dem Mittelpunkte $O$.

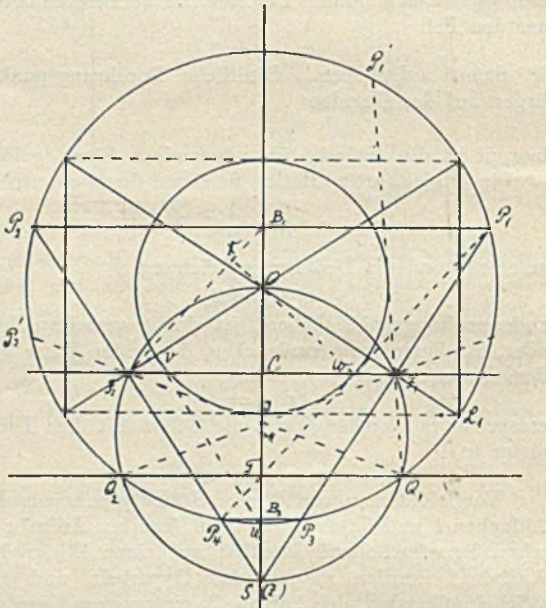


Fig. 3.

Die Bedeutung dieses Kreises wird aus Fig. 3 ersichtlich. $S$ ist in $Z$ zerlegt. Da $SF_1 \perp OF_1$ ist, ist $P_1P_3$ in $F_1$ halbiert. $F_1F_2$ ist demnach Mittelparallele zu $P_1P_2$ und $P_3P_4$. $P_1P_4$ wird also von $F_1F_2$ in $W$ halbiert. Der Kreis um $O$ berührt demnach $P_1P_4$ in $W$. $OW = r$ ist sein Radius. Der Mittelpunkt $C$ des Kegelschnittes ist folglich Pol zur Geraden $Q_1Q_2$ als Polare in bezug auf den Kreis $O(r)$. Läßt man $S$ in $Q_1$ oder $Q_2$ fallen, so fällt $T$ mit $S$ zusammen; $SP_1'$ und $SP_2'$ sind demnach Tangenten für den Kreis $O(r)$, oder mit anderer Bezeichnung: $Q_1F_1$ und $Q_2F_2$ sind Tangenten des Kreises $O(r)$. Man vergleiche die Benutzung des Kreises $O(r)$ in der zitierten Arbeit. Mit Berücksichtigung der dort gemachten Ausführungen findet man noch, daß die Verbindungslinie $U$ [Schnitt $OC$ mit $O(R)$] mit $V$ [Schnitt von $OF_2$ mit $O(r)$] auf $OF_2$ senkrecht steht.

An dem Kreise $O(r)$ knüpfen sich noch weitere Beziehungen. Im rechtwinkeligen Dreieck $OL_1J$ ist

$$OJ = r, \quad OL_1 = R, \quad JL_1 = a,$$

mithin $$r^2 = R^2 - a^2 = \frac{a^2}{c^2}(e^2 + h^2) - a^2,$$

also $$r = h \cdot \frac{a}{e}.$$

Verbindet man noch $F_2$ mit $B_1$, so ist der geometrische Sinn dieser Gleichung, daß $OW$ auf $F_2B_1$ senkrecht steht. Man kann demnach, von der Ellipse ausgehend, zu den Kreisen $O(r)$ und $O(R)$ auf folgendem Wege gelangen. Man zieht zunächst $F_2B_1$, wählt auf der kleinen Achse einen beliebigen Punkt $O$, zieht $OX \perp B_1F_2$, erhält $W$ als Schnitt von $F_1F_2$ mit $OX$ und hat in $OW$ den Radius $r$. Man errichtet dann auf $OW$ in $W$ die Senkrechte und gewinnt $P_1$ und $P_4$ als Schnittpunkte dieser Senkrechten mit den durch $B_1$ und $B_2$ zur Hauptachse gezogenen Parallelen. $OP_1 = OP_2$ ist der Radius $R$. Fällt $P_4$ in $B_2$, so wird $O(R)$ Krümmungskreis für den Scheitel $B_2$.

Für die Hyperbel gewinnt der Kreis $O(r)$ erhöht Bedeutung wegen seiner Beziehung zu den reellen Asymptoten (Fig. 4). Die Konstruktion des Kreises $O(r)$ mit Be-

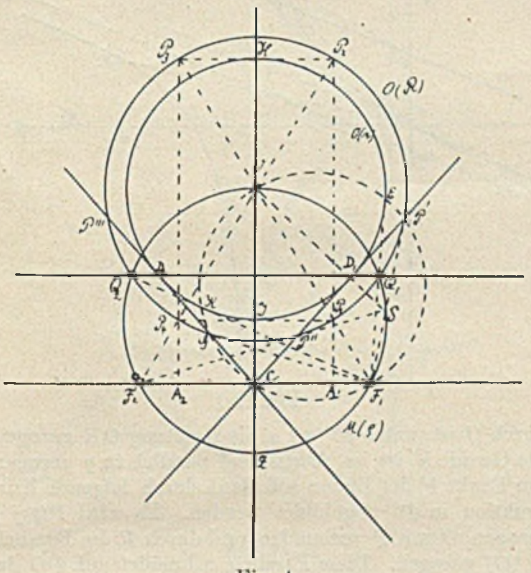


Fig. 4.

nutzung des Punktes $Z$ versagt hier, weil die Verbindungslinien $ZF_1$ und $ZF_2$ mit $O(R)$ imaginäre Schnittpunkte haben. Man gewinnt den Kreis $O(r)$ hier zunächst am einfachsten, wenn man $S$ in $O$ fallen läßt. $OF_1$ und $OF_2$ liefern mit $O(R)$ die Schnittpunkte $P_1$, $P_3$, $P_2$ und $P_4$. $P_1P_2$ und $P_3P_4$ schneiden auf $F_1CF_2$ die Scheitel $A_1$ und $A_2$ aus. $P_2P_3$ und $P_1P_4$ liefern mit $OC$ die Schnittpunkte $H$ und $J$. Der Kreis um $O$ mit $OH = OJ = r$ ist der Kreis $O(r)$. Die Schnittpunkte von $O(R)$ mit $M(\varrho)$ sind wieder mit $Q_1$ und $Q_2$ bezeichnet. $O(r)$ schneidet $Q_1Q_2$ in zwei Punkten: $D_1$ und $D_2$. Es sind dann $CD_1$ und $CD_2$ die Asymptoten der Hyperbel. Die Begründung liegt in folgender Betrachtung: Man wähle den Punkt $S$ auf $M(\varrho)$ derart, daß $SF_1$ zur Tangente $SP'$ an den Kreis $O(R)$ wird. Weil $SO$ für alle Lagen des Punktes $S$ Winkelhalbierende für Winkel $F_1SF_2$ ist, muß gleichzeitig $SF_2$ zur Tangente $SP''$ an $O(R)$ werden. Es fallen demnach $P_1P_3$ in $P'$, $P_2P_4$ in $P''$ zusammen. Die beiden Kegelschnittstangenten $P_1P_2$ und $P_3P_4$ fallen demnach zur Kegelschnittstangente $P'P''$ zusammen. Da für einen Kegelschnitt zwei parallele Tangenten gleichen Abstand vom Mittelpunkte $C$ haben, muß $P'P''$ durch $C$ gehen, also die eine Asymptote sein. $P'P''$ kann aber zugleich auch als $P_1P_4$ oder $P_2P_3$ aufgefaßt werden, muß also auch Tangente für den Kreis $O(r)$ sein. Da ferner $Q_1Q_2$ wie bei der Ellipse Polare zu $C$ als Pol in bezug auf $O(r)$ ist, geht $Q_1Q_2$ durch die Berührungspunkte $D_1$ und $D_2$ der Tangenten $CP'$ und $CP'''$ des Kreises $O(r)$. Nach den früheren Ausführungen sind die Verbindungslinien $Q_1F_1$ und $Q_2F_1$ Tangenten für $O(r)$ mit den Berührungspunkten $E$ und $K$. Die Asymptote $CP'''$ schneidet $O(R)$ in $G$. $F_1G$ ist Tangente für $O(R)$, entsprechend $F_2P''$. Die Punkte $P'$, $E$, $G$, $K$ und $C$ liegen auf einem Kreise, dessen Durchmesser $OF_1$ ist.

Hiernach kann für die Hyperbel folgende sehr einfache Konstruktion zur Bestimmung von $Q_1Q_2$ zu einem gegebenen Punkte $O$ angewendet werden. Es liege (Fig. 2) die Hyperbel in ihren Elementen gegeben vor. $CD_1$ und $CD_2$ sind die Asymptoten. $A_1A_2$ die Scheitel, $F_1$ und $F_2$ die Brennpunkte. Man konstruiert dann für den auf der Nebenachse willkürlich gewählten Punkt $O$ den die Hyperbel in zwei Punkten berührenden Kreis $O(R)$. Man zieht $OD_1 \perp CD_1$, und zieht durch $D_1$ die Parallele zu $A_1A_2$. Diese Parallele schneidet aus $O(R)$ die Berührungspunkte $Q_1$ und $Q_2$ aus.

Auf Grund der bisherigen Auseinandersetzungen läßt sich noch eine zweite Erzeugungsart der Ellipse und Hyperbel aufbauen. An der Fig. 1 ist gezeigt worden, daß der Punkt $T$ auf der Geraden $Q_1Q_2$ liegt und daß $TP_1$ und $TP_2$ Tangenten des Kreises $O(r)$ sind. Diese Tangenten schneiden den Kreis $O(R)$ in den Punkten $P_1, P_4$ und $P_2, P_3$. $P_1P_2$ und $P_3P_4$ sind dann Tangenten eines Kegelschnittes. Hiernach wird ein Kegelschnitt auf folgende Weise erzielt. Man zeichnet um $O$ als Mittelpunkt zwei konzentrische Kreise: $O(R)$ und $O(r)$, und legt in die Ebene der Kreise eine Gerade $g$. Auf $g$ wird der laufende Punkt $T$ gewählt und von $T$ werden an $O(r)$ die Tangenten gezogen, wodurch die Punkte $P_1P_4$ und $P_2, P_3$ auf $O(R)$ ausgeschnitten werden. $P_1, P_2$ und $P_3P_4$ sind die Kegelschnittstangenten. Durchläuft $T$ die Gerade $g$, so erhält man durch $P_1P_2$ und $P_3P_4$ eine Geradenschar, deren Einhüllende der Kegelschnitt ist. Dieser Kegelschnitt ist eine Hyperbel oder Ellipse, je nachdem $g$ den Kreis $O(r)$ reell aber imaginär schneidet. Der Mittelpunkt $C$ des Kegelschnittes ist der Pol zur Geraden $g$ als Polare in bezug auf den Kreis $O(r)$. Die Parallele durch $C$ zu $g$ ist die Richtung seiner Hauptachse. Die Länge der großen Achse wird gefunden, wenn $T$ ins Unendliche fällt, die Länge der kleinen Achse (für die Ellipse), wenn $T$ in $N$ fällt ($N$ Fußpunkt des Lotes von $O$ auf $g$, vgl. Fig. 5). Den Brennpunkt des Kegelschnittes kann man z. B. dadurch erhalten, daß man $OL_1$ zieht [$L_1$ Schnittpunkt von $O(R)$ mit dem Lot in $A_1$ auf $A_1A_2$], oder daß man durch $OQ_1$ und $Q_2$ den Kreis $M(\varrho)$ legt.

Wenn die Gerade $g$ den Kreis $O(R)$ schneidet, ohne $O(r)$ zu treffen, erhält man eine Ellipse, die $O(R)$ in $Q_1$ und $Q_2$ berührt. Liegt $g$ außerhalb $O(R)$, so hat die Ellipse mit $O(R)$ keine reellen Berührungspunkte. Berührt $g$ den Kreis $O(R)$, so wird $O(R)$ zum Krümmungskreis im Scheitel der kleinen Achse.

Wird im besonderen $r = R$, so fallen die Punkte $P_2 P_3$ und $P_1 P_4$ je in einen Punkt $P'$ und $P''$ zusammen. Die beiden Geraden $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ fallen ebenfalls zur Geraden $P'P''$ zusammen. Sämtliche Gerade $P'P''$ gehen dann durch einen Punkt $C$, den Pol zu $g$*.

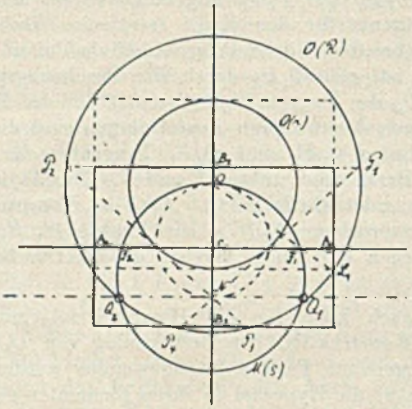


Fig. 5.

Herr Oberlehrer Willy Weber (Schöneberg) teilt der Schriftleitung folgendes mit:

Zu der von Herrn E. Magin (Hamburg) in den Unterrichtsblättern, Jahrg. XXI, Nr. 7, S. 128 ff., veröffentlichten Arbeit: „Neue Kegelschnittseigenschaften", gestatte ich mir die folgenden historischen Bemerkungen: Die von Herrn Magin betrachteten Kegelschnittseigenschaften sind, in der Hauptsache wenigstens, nicht neu. Schon Steiner hat in zwei Arbeiten die wichtigen Beziehungen zwischen einem Kegelschnitt und den ihn doppelt berührenden Kreisen mitgeteilt, freilich in der ihm eigentümlichen Weise zumeist ohne ausführlichen Beweis. Die beiden Steinerschen Arbeiten, in deren Verlauf die von Herrn Magin angegebenen Eigenschaften und dazu noch eine Fülle anderer Resultate auseinandergesetzt werden, sind: 1. „Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte", Crelles Journal, Bd. 37, S. 161—192. 2. „Ueber einige neue Bestimmungsarten der Kurven zweiter Ordnung nebst daraus folgenden neuen Eigenschaften derselben Kurven", Crelles Journal, Bd. 45, S. 189—211. Bezugnehmend auf die Steinerschen Veröffentlichungen hat dann im Jahre 1859 H. Heilermann weitere Sätze dieser Art mitgeteilt: „Beitrag zu den Sätzen über die einen Kegelschnitt doppelt berührenden Kreise", Crelles Journal, Bd. 56, S. 365—375. Gerade weil die Maginsche Arbeit einen einfachen und verständlichen Zugang in die erwähnte Gruppe der Kegelschnittseigenschaften gibt, sei es bei dieser Gelegenheit erlaubt, wieder einmal auf Steiner und seine Arbeiten hinzuweisen. Gilt es doch noch unablässig, die Fülle der Resultate und Sätze, die er uns hinterlassen hat — „für die Mit- und Nachwelt Rätsel", wie Otto Hesse in seinem Nachruf auf Steiner sagt —, zu bewältigen und zu erwerben, um sie ganz zu besitzen.

* Der Herr Verfasser hat seine Untersuchungen noch weiter geführt. Wegen der Ausführlichkeit müssen wir leider auf die Wiedergabe verzichten, möchten aber den Wunsch ausdrücken, daß später in einer besonderen Schrift die interessante Arbeit weiteren Kreisen zugänglich gemacht wird. (Die Schriftleitung.)

Herr Dr. Magin bittet die Schriftleitung, mitzuteilen, daß auch die Herren Professor Schafheitlin (Berlin) und Dr. Kiefer (Zürich) ihn darauf aufmerksam gemacht haben, daß die in Frage kommenden Kegelschnittseigenschaften sich bei Steiner finden.

## Erzeugungsweise und Tangentenkonstruktion der Cissoide, Strophoide und Konchoide auf gemeinsamer Grundlage.

Von E. Magin (Hamburg).

Die Punkte einer Ebene seien in folgender Weise in Punkte derselben Ebene abgebildet. $g$ ist eine feste Gerade der Ebene, $O$ ein fester Punkt auf $g$ (Fig. 1).

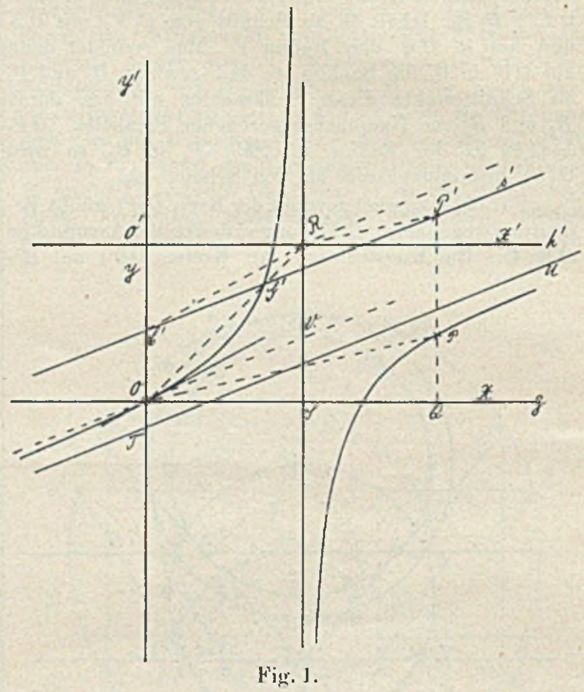


Fig. 1.

Durch $O$ ist unter $45^0$ zu $g$ die Richtung $OR$ gezogen. Die Gerade $h'$ ist im Abstande $b$ parallel zu $g$ gezogen. Der Punkt $P$ der Ebene soll dann durch folgende Konstruktion in $P'$ abgebildet werden. Es wird $PQ \perp g$ gezogen, $O$ mit $P$ verbunden und durch $R$ die Parallele zu $OP$ gezogen. Diese Parallele schneidet auf $PQ$ das Bild $P'$ des Punktes $P$ aus. Die Punkte $P$ werden bezogen auf $g$ als $X$-Achse und das Lot $OY$ auf $g$ als $Y$-Achse. $P'$ werde bezogen auf das System $Y'O'X'$, wobei $h'$ als $O'X'$-Achse gewählt wird. Man hat dann zwischen $P(x, y)$ und $P'(x', y')$ die Beziehungen:

$$x' = x,$$

$$y' = \frac{(x - b) \cdot y}{x}.$$

Bei dieser Abbildung geht eine Gerade $s$ der Ebene $YOX$ in eine Hyperbel der Ebene $Y'O'X'$ über und eine Gerade $s'$ der Ebene $Y'O'X'$ wird zur Hyperbel im System $YOX$.

Es werde eine Gerade $s'$ der Ebene $Y'O'X'$ gewählt mit der Gleichung:

$$y' = m'x' + c'.$$

Bei der Abbildung geht diese Gerade über in eine Kurve mit der Gleichung:

$$m'x^2 - xy + c'x + by = O.$$

Diese Gleichung stellt in jedem Fall eine Hyperbel dar, deren eine Asymptote die Gerade $RS$ ist und deren zweite Asymptote die Gleichung hat:

$$y = m'x + m'b + c'.$$

Diese Asymptote ist demnach mit der Geraden $s'$ parallel. Ihre Lage findet man, indem man die Strecke $OT = O'C' + VS$ $(OV \| s')$ von $O$ auf $YO$ abträgt und durch $T$ zu $s'$ die Parallele zieht.

Dieses Resultat läßt sich leicht auch rein geometrisch gewinnen.

Man erkennt ferner, daß alle Punkte $G'$ der Geraden $OR$ in sich selbst abgebildet werden. Die Gerade $s'$ muß also die Hyperbel auf $OR$ schneiden.

Alle Punkte einer zu $O'X'$ senkrechten Geraden werden in Punkte derselben Geraden abgebildet. Alle Punkte der Geraden $Y'O'$ werden in dem Punkt $O$ abgebildet. Die Hyperbel muß also durch den Punkt $O$ gehen. Man wird ferner leicht erkennen, daß die Hyperbeltangente in $O$ mit $RC'$ parallel ist. $C'$ ist der Schnitt von $s'$ mit $Y'O'$.

Diese Beziehungen zeigen eine besondere Bedeutung bei der Abbildung des Kreises.

Es sei in Fig. 2 ein Kreis mit dem Radius $r$ in der $YOX$-Ebene so gewählt, daß sein Mittelpunkt auf

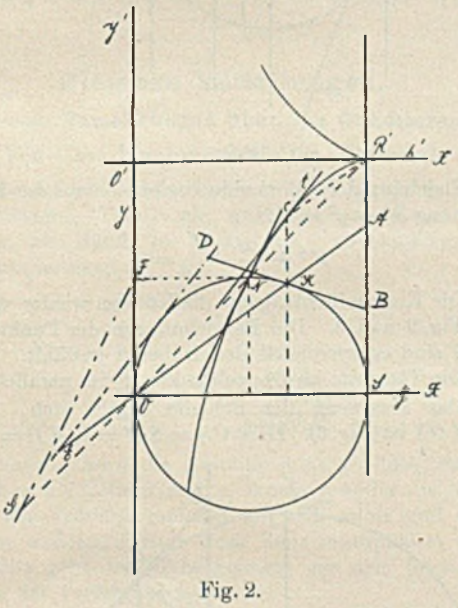


Fig. 2.

$OX$ liegt und er durch den Punkt $O$ geht. Es sei $b = 2r$, d. h. die Gerade $h'$ sei im Abstande $2r$ zu $g$ gelegt. Bildet man nach der oben gegebenen Vorschrift die Punkte des Kreises auf die $Y'O'X'$-Ebene ab, so erhält man die Cissoide. Die Begründung folgt unmittelbar aus der Fig. 2. Der Kreispunkt $K$ ist in $C'$ abgebildet und da $R'C' \# KA$ ist, muß $C'$ ein Punkt der Cissoide sein, für welche $R'$ die Spitze und $O'X'$ Symmetrielinie ist.

Der Punkt $N$ als Punkt von $OR'$ geht in sich selbst über. Die Cissoide muß den Kreis also in $N$ schneiden. Die Gleichung der Cissoide ergibt sich aus:

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

und den Transformationsgleichungen:

$$x = x'$$

$$y = \frac{x'y'}{2r - x'}.$$

$$(x' - r)^2 + \frac{x'^2 y'^2}{(2r - x')^2} = r^2.$$

Durch folgende Ueberlegung gelangt man zur Konstruktion der Cissoidentangente. Man denke sich im Punkte $C'$ die Cissoidentangente $t'$ gezogen. Diese Tangente wird bei der Abbildung auf die $YOX$-Ebene in eine Hyperbel übergeführt, die offenbar im zugehörigen Kreispunkte $K$ mit dem Kreis eine gemeinsame Tangente hat. Diese Hyperbel geht außerdem, wie durch Fig. 1 begründet ist, durch den Punkt $O$ und hat in $R'S$ ihre eine Asymptote. Die zweite Asymptote ist aber $t'$ parallel. Konstruiert man also in der $YOX$-Ebene diese Asymptote der Hyperbel, so hat man die Richtung der Tangente $t'$ des Cissoidenpunktes $C'$. Die Konstruktion dieser Asymptote erfolgt nun sehr einfach. Man hat in $K$ an den Kreis die Tangente zu legen, erhält den Punkt $B$ als Schnitt dieser Tangente mit der Asymptote $R'S$ und hat $KD = KB$ zu machen. Ferner hat man $KO$ zu ziehen, das Stück $KA$ von $O$ bis $E$ auf $KO$ abzutragen und hat in $DE$ die zweite Asymptote. Zieht man dann durch $C'$ zu $DE$ die Parallele, so ist diese die Cissoidentangente. Besonders einfach ergibt sich die Tangente in $N$. Man zieht $NF \| O'X'$, macht $OG = NR'$ und hat in $GF$ die Tangentenrichtung.

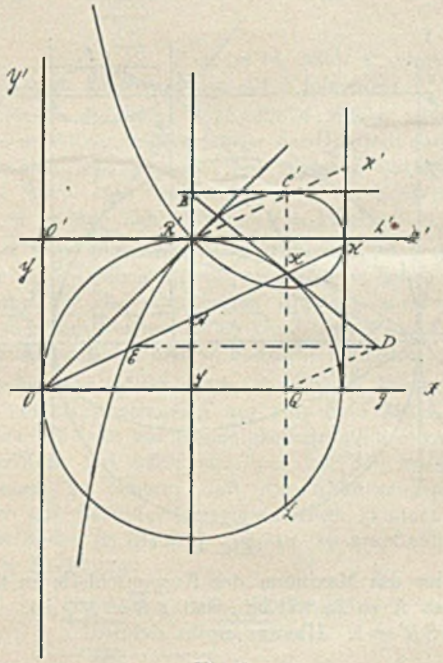


Fig. 3.

In Fig. 3 hat der Kreis die gleiche Lage wie in Fig. 2, $b = r$ gewählt. Der Kreis wird in der Strophoide abgebildet. Die Begründung liegt darin, daß $AK \# R'C'$ ist. Die Kurve geht durch den Punkt $R'$. Als Gleichung der Kurve erhält man aus der Kreisgleichung:

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2,$$

$$(x' - r)^2 + \frac{x'^2 y'^2}{(r - x')^2} = r^2.$$

Die Tangentenkonstruktion erfolgt auf derselben Grundlage wie bei der Cissoide. Man hat, um im Kurvenpunkte $C'$ die Tangente zu finden, in dem $C'$ entsprechenden Kreispunkte $K$ die Tangente zu ziehen, macht $KD = KB$, $OE = KA$ und hat in $DE$ die Richtung der Strophoidentangente des Punktes $C'$.

Um das Maximum $C'$ in der Strophoidenschleife zu finden, hat man den Kreispunkt $K$ so zu bestimmen, daß $DE \parallel OX$ wird. Da für alle Lagen des Punktes $K$ $\widehat{OL} = \widehat{OK}$ ist, so folgt:

$$\sphericalangle BKO = \sphericalangle OKL = \sphericalangle BAK,$$

mithin ist $\triangle AKB$ gleichschenklig, also:

$$BA = BK.$$

Da $OE = AK$ und nach Voraussetzung $ED \parallel OX$, muß:

$$DQ \# AK$$

sein, also ist:

$$BA = KQ = KB = KD.$$

Hieraus ergibt sich ohne weiteres

$$r : SQ = SQ : (r - SQ),$$

d. h. die Strecke $SQ$, durch welche das Maximum bestimmt wird, ist gleich der Seite des dem Kreise einbeschriebenen Zehnecks. Da $R'C' \# AK \# QD$, so ist die Ordinate von $C'$ gleich der Ordinate von $DE$.

Gibt man $b$ andere Werte, so erhält man Kurven von der Gleichung:

$$(x' - r)^2 + \frac{x'^2 y'^2}{(b - x')^2} = r^2.$$

Liegt $b$ zwischen $O$ und $2r$, so haben die Kurven Schleifen. In Fig. 4 ist $b$ zwischen $r$ und $2r$ gewählt.

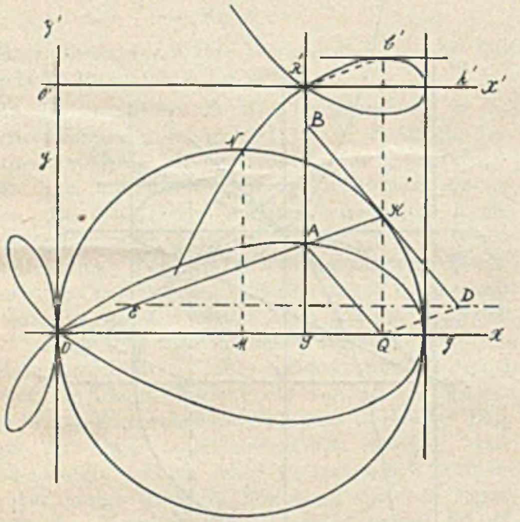


Fig. 4.

Um hier das Maximum der Kurvenschleife zu finden, hat man $K$ so zu wählen, daß $AB = KQ$ ist. Es ist $OS = SR' = b$. Hieraus ergibt sich:

$$MQ = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} r^2 + r(b - r)}.$$

Für verschiedene Werte von $b$ liegen die Punkte $A$ auf einer Kurve, die man leicht, wie Fig. 4 zeigt, konstruieren kann. Man zieht $OK$, $KQ \perp OX$ und $QA$ parallel zur Tangente $K$. Das Maximum $C'$ einer durch ein bestimmtes $b$ gegebenen Kurve findet man dann mit Hilfe der Kurve $A$ sehr leicht. Natürlich läßt sich das Maximum auch mit Zirkel und Lineal konstruieren.

Die in Fig. 4 eingezeichnete Kurve der Punkte $A$ hat in Polarkoordinaten (Pol $O$) die Gleichung:

$$\varrho = 2r \cos\varphi \cos 2\varphi$$

und ist die von G. de Longchamps und H. Brocard „gerades Dreiblatt" benannte Linie.

Da $R'C' \# AK \# QD$, so ist die Ordinate des Maximums $C'$ gleich der Ordinate der Parallelen $ED$.

Im nächsten Fall liege der Kreis mit seinem Mittelpunkt in $O$ (Fig. 5). Das Bild des Kreises wird die Konchoide. Die Begründung liegt darin, daß für alle Kurvenpunkte $P'$ $NP' = OP = r$ ist. Der Doppelpunkt der Kurve liegt in $R'$. Der Abstand $b$ kann beliebig gewählt werden. Ist $b = r$, so artet die Schleife ($b < r$) in die Spitze aus, ist $b > r$, so wird $R'$ isolierter Punkt.

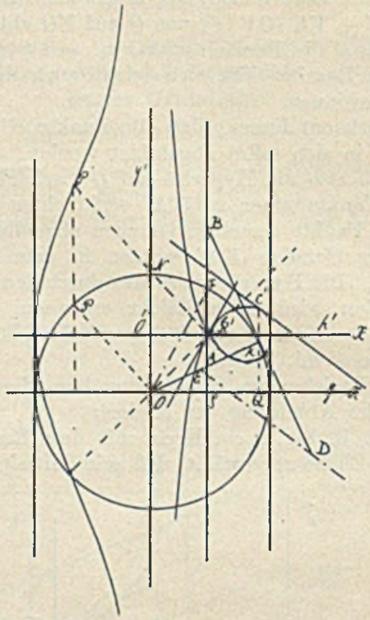


Fig. 5.

Die Gleichung der Konchoide ergibt sich aus der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$:

$$x'^2 + \frac{x'^2 y'^2}{(b - x')^2} = r^2.$$

Die Konchoidentangente findet man wieder wie in den Fig. 2 und 3. Die Bezeichnungen der Punkte der Fig. 5 sind entsprechend den früheren gewählt.

Die Tangente im Doppelpunkte $R'$ ist parallel $OF$.

Das Maximum der Schleife ergibt sich, wenn $ED \parallel OX$ ist (Fig. 6). Es ist $OS = SR' = b$, $KB = KD$,

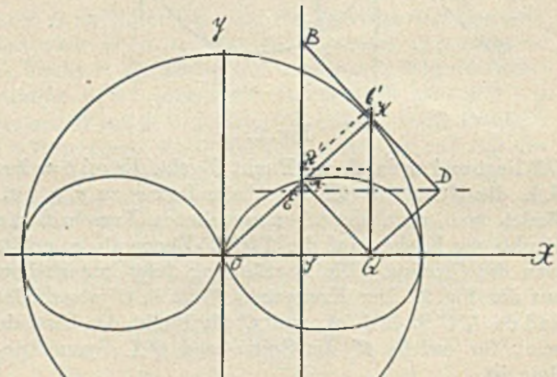


Fig. 6.

$KA = OE$, $ED \parallel OX$. Zieht man $DQ \parallel KA$, so muß wegen $BK = KD$ $DQ = KA = OE$ sein. Darum ist:

$$\triangle BAK \cong \triangle KQD,$$

$$KQ = BA,$$

demnach ist $BKQA$ ein Parallelogramm und $QA \perp OA$.

Bezeichnet man die Koordinaten von $K$ mit $x_1, y_1$, so findet man:

$$y_1 = \frac{r^2 (x_1 - b)}{x_1 y_1},$$
$$x_1^3 = r^2 b.$$

Beachtet man, daß $QA \perp OA$, so läßt sich der Ort der Punkte $A$ leicht konstruieren. Die Kurve ist in Fig. 6 eingezeichnet. Ihre Gleichung ist:

$$(x^2 + y^2)^3 = r^2 x^4.$$

Sie ist die von F. Münger als Doppeleilinie bezeichnete Linie.

Um das Maximum der Konchoidenschleife mit Hilfe der Kurve $A$ zu bestimmen, hat man $R'S \parallel YO$ im Abstande $b$ zu zeichnen, erhält durch $OA$ den Kreispunkt $K$ und damit das Maximum $C'$ der Konchoidenschleife. Die Ordinate von $C'$ ist gleich der Ordinate von $ED$.

Die Gleichung $x_1^3 = r^2 b$ zeigt, daß man die Doppeleilinie benutzen kann, um die Aufgabe der Würfelvervielfachung zu lösen. Hat man $x^3 = \frac{r^3}{n} = r^2 \cdot \frac{r}{n}$, so hat man $OS = \frac{r}{n}$ zu machen, erhält durch $R'S \parallel YO$ den Punkt $A$, zieht $OA$, gewinnt den Kreispunkt $K$, zieht $KQ \perp OX$ und hat in $OQ$ die gesuchte Würfelkante.

## Kleinere Mitteilungen.

### Einige Bemerkungen über das Quadrieren.

Von Carl Herbst, Dipl.-Ing. (Bochum).

Hat man bei Aufsuchung größerer Quadrate keine entsprechende Tafel, wie z. B. die von Zimmermann, zur Hand, so rechnet man zweckmäßig, wie das Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{ll} 4387^2 & \\ 4 & 16.. \\ 8_3 & 249.. \\ 86_8 & 6944.. \\ 876_7 & 61369 \\ \hline & 19245769 \end{array}$$

Zunächst wird die Kolonne links gebildet; daraus entstehen die Ziffern rechts, indem jeweilig die letzte Ziffer der Kolonne zunächst mit sich selbst und dann mit den anderen Ziffern ihrer Zeile multipliziert wird. Ueberdies geht das Bildungsgesetz aus dem folgenden Beweis des Verfahrens hervor:

$$43^2 = (40 + 3)^2 = 16 \cdot 100 + 3 \cdot \underbrace{(2 \cdot 40 + 3)}_{83}$$

$$438^2 = (430 + 8)^2 = 43^2 \cdot 100 + 8 \cdot \underbrace{(2 \cdot 430 + 8)}_{868}$$

$$4387^2 = (4380 + 7)^2 = 438^2 \cdot 100 + 7 \cdot \underbrace{(2 \cdot 4380 + 7)}_{8767}$$

Auf den ersten Blick scheint durch dieses Verfahren kaum etwas gewonnen zu sein. Einige Beispiele lassen es jedoch in wesentlich günstigerem Lichte erscheinen, zumal die Bildung der Kolonne lediglich als Schreibarbeit zu bewerten ist.

Nach meinem Dafürhalten sollte beim Kopfrechnen die Formel $a^2 = (a + b) \cdot (a - b) + b^2$ mehr als bisher zur Aufsuchung von Quadraten herangezogen werden. Hiernach ist beispielsweise:

$$\begin{aligned}
65^2 &= 70 \cdot 60 + 5^2 = 4225 \\
37^2 &= 50 \cdot 24 + 13^2 = 1369 \\
68^2 &= 86 \cdot 50 + 18^2 = 4624 \\
93^2 &= 100 \cdot 86 + 7^2 = 8649 \\
186^2 &= 200 \cdot 172 + 14^2 = 34596 \\
216^2 &= 232 \cdot 200 + 16^2 = 46656 \\
482^2 &= 500 \cdot 464 + 18^2 = 232324 \\
525^2 &= 550 \cdot 500 + 25^2 = 275625 \\
983^2 &= 1000 \cdot 966 + 17^2 = 966289
\end{aligned}$$

* * *

### Abgekürztes Dividieren.

Von Carl Herbst, Dipl.-Ing. (Bochum).

Hat man den Quotient von $\underbrace{8515232374}_{z_1} : \underbrace{95274}_{z_2}$ auf Einer zu berechnen, so entstehen bei gewöhnlicher Rechnung seine vier letzten Ziffern, wenn der Reihe nach 2 3 7 4 heruntergeholt werden. Zu den letzten vier Ziffern des Quotienten gelangt man aber ebenfalls, wenn man von vornherein im Dividenden die letzten vier Ziffern in Wegfall bringt und abgekürzt rechnet, wie das Beispiel andeutet:

$$\begin{array}{l} 851523\overline{2374} : 9\underline{\dot{5}\dot{2}\dot{7}\dot{4}} = 89376 \\ \underline{\phantom{0}89331} \\ \underline{\phantom{00}3584} \\ \underline{\phantom{000}726} \\ \phantom{0000}59 \end{array}$$

(7 · 2 = 14, zählt 2, wegen des abgeschätzten Einflusses der auf 2 folgenden 7*.)

Wäre zu dividieren 8515,232374 : 95274, so würde bei diesem Abkürzungsverfahren der Quotient natürlich 6 Dezimalen erhalten. Bei der Aufgabe 8515,232374 : 952,74 würde das 100fache dieses Quotienten entstehen, d. h. eine Zahl mit 6 — 2 = 4 Dezimalen.

Hat also allgemein der Dividend $z_1$ $(\sigma + \tau)$, der Divisor $z_2$ $\sigma$ Dezimalen, so gibt das vorgeschlagene Verfahren für den Quotienten $(\sigma + \tau) - \sigma = \tau$ Dezimalen, d. h. den Dezimalenüberschuß. Das ist die einzige Gedächtnisregel, die hier in Betracht kommt.

Es ist dabei gleichgültig, ob man im Divisor, wie oben, beim Unterstreichen nur eine freie Ziffer übrig läßt, oder ob man aus Genauigkeitsgründen etwa zwei Vorderziffern frei hält; man hat bei der Rechnung nur darauf zu achten, daß die Abkürzungspunkte lediglich auf die unterstrichenen Ziffern kommen. Ist z. B. zu bilden 38,7340917 : 105,748, so empfiehlt sich folgende Rechnung:

$$\begin{array}{l} 38,734\overline{0917} : 105,74|8 = 0,3663 \\ \underline{\phantom{00}7010} \qquad (\tau = 4.) \\ \underline{\phantom{000}665} \\ \phantom{0000}31 \end{array}$$

(Komma, wie stets, mechanisch hinzugefügt). Würde man nehmen

---

* Bei einiger Uebung des Rechners erscheint es mir nicht angebracht, an der bisher üblichen, verhältnismäßig rohen Abrundungsart noch weiter festzuhalten. Die hier vorgeschlagene neue Art der Abrundung mag noch durch eine Multiplikation gekennzeichnet werden, deren Faktoren als genau vorausgesetzt werden sollen. (Auch $z_1$ und $z_2$ mögen lediglich als genaue Werte angesehen werden.)

| | | |
|---|---|---|
| 597,287 · 3,86678 | gegen | 597,287 · 3,86678 |
| 179186 | | 179186 |
| 47783 | | 47782 |
| 3584 | | 3583 |
| 358 | | 358 |
| 42 | | 41 |
| 5 | | 4 |
| 2309,58 | | 2309,54 |

38,7340917 : 105,7|48 = 0,3664

701 ($\tau$ = 4.)

67

4

so würde die letzte Stelle um eine Einheit unrichtig werden; der Einfluß der Abrundungen fällt eben in diesem Falle stark ins Gewicht, weil der Divisor eine kleine Vorderziffer hat.

Immerhin wird man es bei gewöhnlichen Rechnungen bei einer freien Ziffer des Divisors bewenden lassen können; danach soll auch im folgenden verfahren werden. Z. B.:

32,3035817 : 67,3|985 = 0,479

534 ($\tau$ = 3.)

62

650,713763 : 27,39|85 = 23,75

1027 ($\tau$ = 2.)

205

13

244,618269 : 0,00857|294 ∼ 28500

731 ($\tau$ = —2; Hunderter.)

45

Aus vorstehendem ist nun ohne weiteres zu übersehen, wie man vorzugehen hat, um beim Quotienten eine gewünschte Anzahl $n$ von Dezimalen zu erreichen. Z. B.:

8515,|232374 : 952,|74 = 8,94

893 ($\tau$ = 4; $n$ = 2!)

36

8515,2|32374 : 952,7|4 = 8,938

8933 ($\tau$ = 4; $n$ = 3!)

358

72

32,3035|817 : 67,3985

($\tau$ = 3; $n$ = 5!)

323036 : 67398|5 = 0,47929

53442

6263

197

62

244,618|269 : 0,0085729|4 = 28534

73159 ($\tau$ = —2; $n$ = 0, Einer!)

4575

289

32

·95700 : 0,68927 = 1388,4

26773 ($\tau$ = —5; $n$ = 1!)

6095

581

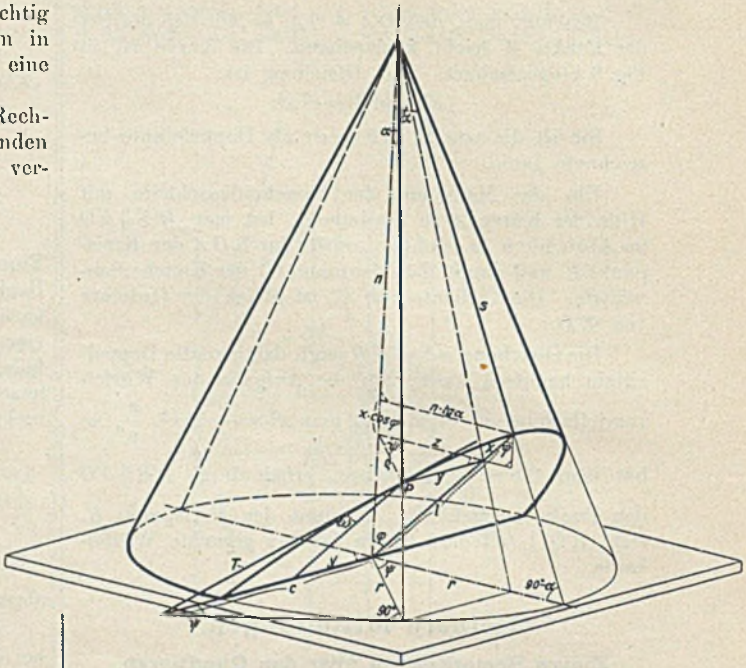
30

* * *

## Die Richtungskonstanten der Tangenten der Kegelschnitte in goniometrischer Herleitung am geraden Kreiskegel.

Von Carl Herbst, Dipl.-Ing. (Bochum).

Im Anschluß an meine Ableitung der allgemeinen Scheitelgleichung der Kegelschnitte (siehe Unterrichtsblätter 1912, Nr. 1) soll im folgenden noch gezeigt werden, wie die Richtungskonstanten der drei Kurven am Kegel (Fig. 1) abgelesen werden können, ohne infinitesimale Betrachtungen oder harmonische Beziehungen heranzuziehen.




Zu diesem Zwecke werde die gefundene Scheitelgleichung in der Form geschrieben:

$$y^2 = \left[2\,s\sin\alpha + \frac{x\cdot\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha}\right]\cdot\frac{x\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha},$$

und zur Vereinfachung gesetzt:

$$s\cdot\sin\alpha = \lambda, \qquad \frac{x\cdot\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha} = \mu, \qquad \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha} = \tau,$$

so daß man hat

$$y^2 = [2\lambda + \mu]\cdot x\cdot\tau = [\lambda + \lambda + \mu]\cdot x\cdot\tau.$$

Für den Neigungswinkel $\omega$ gegen die positive Richtung der $x$-Achse erhält man:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{c-y}{l-x} = \frac{\dfrac{r}{\sin\varphi} - y}{l-x} = \frac{r\cdot\dfrac{y}{\sin\varphi} - y^2}{y\cdot(l-x)}.$$

Nun ist

$$r = \frac{l\cdot\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(90^0-\alpha)} = l\cdot\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha} = l\cdot\tau;$$

$$l = \frac{s\cdot\sin\alpha}{\sin\varphi} \qquad l\sin\varphi = s\cdot\sin\alpha = \lambda;$$

$$\frac{y}{\sin\varphi} = \varrho = (n + x\cos\varphi)\cdot\operatorname{tg}\alpha = (s\cos\alpha + x\cos\varphi)\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Mithin

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r\,(s\cos\alpha + x\cos\varphi)\cdot\operatorname{tg}\alpha - (\lambda+\lambda+\mu)\,x\,\tau}{y\cdot(l-x)}$$

$$\frac{y}{\tau}(l-x)\operatorname{tg}\omega = l\cdot\left(s\sin\alpha + \frac{x\sin\alpha\cos\varphi}{\cos\alpha}\right) - \lambda x - \underbrace{l\sin\varphi}_{=\lambda}\cdot x - \mu x$$

$$= l\cdot\left(\lambda + x\cdot\frac{\sin\alpha\cos\varphi}{\cos\alpha}\right) - \lambda x - l x\cdot\frac{\cos\alpha\sin\varphi}{\cos\alpha} - \mu x$$

$$= \lambda\cdot(l-x) + \frac{l x}{\cos\alpha}\cdot\sin(\alpha-\varphi) - \mu x = \lambda\,(l-x) + l\cdot\mu - \mu x = (l-x)(\lambda+\mu).$$

Folglich $$\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{y}(\lambda + \mu).$$

I. Für die Parabel ($\varphi = \alpha$) ist $\mu = 0$ und

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r \cdot \lambda}{y} = \frac{\sin 2\alpha \cdot s \sin\alpha}{y \cos\alpha} = \frac{2 s \sin^2\alpha}{y} = \frac{p}{y}.$$

II. Für die Ellipse ($\varphi > \alpha$) wird

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{y} \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos\alpha}\left[s \cdot \sin\alpha + \frac{x \cdot \sin(\alpha - \varphi)}{\cos\alpha}\right] = \frac{1}{y} \cdot \left(p - \frac{p}{a} \cdot x\right) = \frac{p}{y} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

III. Für die Hyperbel ($\varphi < \alpha$) entsteht

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{y} \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos\alpha} \cdot \left[s \cdot \sin\alpha + \frac{x \cdot \sin(\alpha - \varphi)}{\cos\alpha}\right] = \frac{1}{y} \cdot \left(p + \frac{p}{a} . x\right) = \frac{p}{y} \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right).$$

Wie man ohne weiteres erkennt, stimmen diese Formeln mit den durch Differenziieren gewonnenen überein; wenn man will, kann man also auf diese Weise für den Schüler die Richtigkeit des Differenziierens bestätigen.

---

## „Die deutsche höhere Schule nach dem Weltkriege"*.

Von Oberlehrer Dr. Jungbluth (Bonn).

Unter obigem Titel hat Geheimrat Norrenberg aus der Feder namhafter Schulmänner 27 Aufsätze gesammelt, die als Beiträge zur Frage der Weiterentwicklung des höheren Schulwesens aufgefaßt werden wollen. Schon aus diesem Untertitel klingt hervor, daß in dem Werk keine umstürzenden Neuerungen gefordert werden, keine gänzliche Neueinstellung unserer höheren Schule, wie sie in den letzten Monaten unter den Eindrücken des Krieges von verschiedenen Seiten verlangt wurde. Zu solch übertriebenen Forderungen gelangt man leicht, wenn man übersieht, daß der Krieg „weder als letzter Sinn und Zweck noch als dauernde, normale Voraussetzung für Aufbau und Durchführung der nationalen Erziehung maßgebend werden darf", wie Professor A. Fischer-München in einer Einführung des Werkes (im Deutschen Phil. Blatt 1915 Nr. 46: „Die höhere Schule im Lichte der Kriegserfahrung") mit vollem Recht hervorhebt. Es mag sein, daß die lange Friedenszeit uns dazu verführt hatte, bei grundsätzlichen Betrachtungen über Schulfragen die Möglichkeit eines Krieges zu wenig zu berücksichtigen. Diese Erkenntnis soll uns aber davor bewahren, jetzt in den gegenteiligen Fehler zu verfallen und unseren gesamten Schulbetrieb nach dem Friedensschluß dauernd auf Krieg einzustellen. „So gewiß eine gute Schule sich als solche auch darin ausweist, daß ihre Zöglinge auch im Kriege das Ihre zu tun wissen, so wenig darf man etwaige im Krieg allein fühlbar gewordene Mängel dadurch verbessern wollen, daß man die Schule nun ausdrücklich auf die Bewährung im Krieg anlegt, ihre Lehrpläne auf das im Krieg Erforderliche zuschneidet, sie in eine Schule für den Krieg umwandelt". Was diese ernste Zeit von uns verlangt, ist eine gründliche Nachprüfung der bestehenden pädagogischen Ueberzeugungen unter dem Gesichtswinkel der Erfahrungen und Erlebnisse des Krieges. Wir müssen „uns im Kriege unsere Gedanken auch über die Schule machen, nicht um die Schule auf den Krieg hin zu orientieren, noch um den Krieg unmittelbar der Schule dienstbar zu machen, sondern um die Einseitigkeit und Befangenheit des Denkens im Frieden durch die Einwirkung der veränderten Stimmung, Bewußtseinslage und Betrachtungsweise im Kriege zu korrigieren. Es ist gewiß, daß wir im Kriege auch über die Erziehung uns andere Gedanken machen, als im Frieden; so wenig sie für sich allein berechtigt sein mögen, so wertvoll sind sie, um uns von allen, auch den übersehenen Voraussetzungen und Selbstverständlichkeiten zu befreien und sie mit allen durch keine Kriegserfahrung berührten, geschweige denn erschütterten Friedenseinrichtungen zu einer ganzen, vorurteilslosen, unverlierbaren Anschauung über Ziel und Aufbau der Volkserziehung zu vereinigen".

Eine solche nachprüfende Durchsicht der zur Zeit geltenden pädagogischen Grundsätze ist die Absicht der vorliegenden Sammlung. In diesen „Unterrichtsblättern" soll kurz berichtet werden, was sich dabei für die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer ergeben hat.

Da kann mit einer gewissen Genugtuung und Freude zunächst ganz allgemein festgestellt werden, daß die Erfahrungen des Krieges auf keinem der behandelten Gebiete einen wirklich neuen Gesichtspunkt gefördert haben, daß sie aber eine ganze Reihe neuzeitlicher Forderungen als durchaus berechtigt erwiesen und ihnen neue Kräftigung verliehen haben. Die Weiterentwicklung des Unterrichts in den math.-naturw. Fächern wird also durch den Krieg in keine grundsätzlich neuen Bahnen gedrängt werden, sondern lediglich einen besonders starken Anstoß erhalten, sodaß sie sich in den nächsten Jahren wahrscheinlich schneller vollzieht, als sie es unter den immergleichen Bedingungen des Friedens getan hätte.

In einer allgemein gehaltenen Betrachtung über „den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht" faßt Oberstudienrat Kerschensteiner die Lehre des Krieges dahin zusammen: „All unser Streben nach dem Kriege will doch darauf hinaus, immer mehr den Charakter zu entwickeln, den deutschen Charakter mit seiner Gründlichkeit, Bedächtigkeit, seiner Sorgfalt, seinem Fleiße, seiner Ausdauer". Zu diesem Ziele führt aber in unsern Fächern eine weise Beschränkung des Wissenstoffes und ein gründliches eigenes Erarbeiten der Kenntnisse, und so leitet Kerschensteiner als „ersten und letzten Grundsatz aller zukünftigen Schulreform" die Forderung ab: „Fort mit den Wissensmassen der Naturwissenschaften zugunsten der Entfaltung der einzigartigen Erziehungskräfte, die dem naturwissenschaftlichen Unterricht allein zukommen". Der Kern aller math.-naturw. Belehrung muß daher die Erziehung zu den Gewohnheiten des funktionellen Denkens sein, wie es schon die Meraner Beschlüsse als Richtlinie aufstellten. Nicht also in der Aneignung möglichst vielseitiger, nützlicher Kenntnisse darf der math.-naturw. Unterricht seine Aufgabe sehen, sondern in der Erziehung zu strenger, geistiger Disziplin in der Gewöhnung an logisches Denken, damit „der

---

* Die deutsche höhere Schule nach dem Weltkriege. Beiträge zur Frage der Weiterentwicklung des höheren Schulwesens gesammelt von Dr. J. Norrenberg, Geh. Oberregierungsrat. B. G. Teubner-Leipzig 1916. 275 Seiten, geb. 5,40 M. Das Werk enthält außer den in diesem Bericht ausführlicher behandelten Aufsätzen noch Beiträge zur Organisation der höheren Knaben- und Mädchenschulen, zur Ausgestaltung der übrigen Schulfächer, zur Stellung und Ausbildung der Oberlehrer, zum Berechtigungswesen, zur Lehrbuchfrage und zur Jugendbewegung.

Mensch nicht im Staatsbürger, und sei es auch einem noch so nützlichen, untergehe“.

In Ergänzung dieser Ausführungen vertritt Direktor Zühlke für den Unterricht in der Mathematik die Forderung nach stärkerer Betonung der angewandten Mathematik. Dabei verwahrt er sich aber ausdrücklich gegen die Ausdeutung, als wolle er „einem öden und flachen Nützlichkeitskrämertum das Wort reden“. Vielmehr wünscht er lediglich „ein Gegengewicht zu schaffen gegen eine allzu einseitig theoretisierende Betrachtungsweise“. Der Schüler solle lernen, die theoretisch erarbeiteten Kenntnisse praktisch auf die Dinge des täglichen Lebens anzuwenden. An gutgewählten, auch für den Nichtmathematiker verständlichen Beispielen zeigt Zühlke, wie er sich diese Durchtränkung des Theoretischen mit dem Praktischen denkt, und spricht zum Schluß die Hoffnung aus, daß „der Mathematikunterricht der Zukunft die Neigung unserer Jugend, die Dinge des praktischen Lebens denkend zu erfassen, mehr als bisher fördern und pflegen möge“.

In dem folgenden Abschnitt über „Physik und Chemie“ nimmt Professor Hahn zu dem Problem „Schule und Krieg“ einen Standpunkt ein, der nicht unwesentlich von dem eingangs dargelegten abweicht. Sicherlich hat Hahn recht, wenn er sagt, es sei „Pflicht der Lehrer, ihren Unterricht während (!) des ungeheuren Völkerringens kriegsgemäß zu wenden, der Jugend zu dem Verständnis und der Würdigung der gewaltigen Weltereignisse zu verhelfen und dafür zu sorgen, daß das Erlebnis „Krieg“ alle seine erziehenden Wirkungen entfalte“. Man kann ihm also auch nur zustimmen, wenn er für die Gegenwart Kriegsgeräte und ihre wissenschaftlichen Grundlagen als „wesentliche Lehrstoffe“ des chemisch-physikalischen Unterrichts einer eingehenden Behandlung für wert erklärt. Aber in einem Beitrag der vorliegenden Sammlung hätte man vor allem eine Aussprache darüber erwarten dürfen, in wie weit Hahn diese Bereicherung des Unterrichts nach dem Krieg dauernd beibehalten zu sehen wünscht. Auf Verkennung der Fragestellung scheint mir auch zu deuten, daß Hahn mehrfach von „kriegsbetonten“ Lehrstoffen spricht, darauf hinweist, daß diese oder jene Tätigkeit im Schüler „Fähigkeiten entwickle, die ihn später zu einem trefflichen Soldaten machen“ (u. a. auch zugunsten der Schülerübungen anführt, daß „schon die Fachausdrücke dieses Lehrverfahrens kriegerisch klingen“) und schließlich die Forderung aufstellt: „Wir müssen unseren Schülern das sachliche Verständnis für die Kriegführung erhalten“. Das ist kein „grundsätzliches Besinnen auf den Sinn und die Aufgabe der höheren Schule“, kein „Bild der Sehnsucht nach einer neuen, einer deutschen Form der höheren Schule“, wie es Professor Fischer in seinen Ankündigungsworten (Phil. Blatt S. 715) versprochen hatte. Immerhin kann man aus den Ausführungen Hahns einige methodische Leitsätze herausschälen, die auch für die Zeit nach dem Krieg Geltung behalten dürften. Sie lassen sich vielleicht folgendermaßen fassen: Mehr als bisher wird der Unterricht in Chemie und Physik auch deren Anwendungen zu kriegerischen Zwecken berücksichtigen müssen. Schülerübungen sind zu fördern, denn sie entwickeln Fähigkeiten, deren Bedeutung im Leben schon immer klar war, aber im Krieg sich besonders augenfällig zeigte. Verminderung des physikalischen Lehrstoffs scheint erwünscht, nur die Mechanik verlangt eine Erweiterung. Im chemischen Unterricht sind die physikalische Chemie und die organische Chemie stärker zu betonen, außerdem verdienen die gewerblichen Anwendungen und die wirtschaftliche Bedeutung der chemischen Forschung mehr hervorgehoben zu werden.

In dem Abschnitt über „Biologie und Hygiene“ bricht Professor von Hanstein in der ihm eigenen klaren und überzeugenden Art aufs neue eine Lanze für die Forderung, dem biologischen Unterricht auch in den Oberklassen einen angemessenen Platz einzuräumen. „Der große Wert, der der Biologie in der Jugendbildung neben den sprachlichen und neben den mathematischen und exakt-naturwissenschaftlichen Lehrfächern zukommt, beruht auf der Eigenart der Lebenserscheinungen, die zurzeit weder durch physikalisch-chemische Formulierung restlos darzustellen, noch durch philosophisch-spekulative Herleitung dem Verständnis zu erschließen sind, vielmehr eigener Beobachtungsmittel und Forschungswege bedürfen“. „Entwickeln Physik und Chemie die allgemeinen Gesetze des Naturgeschehens, behandeln die sprachlich-geschichtlich-philosophischen Fächer die Erzeugnisse des menschlichen Geistes, das, was den Menschen aus der Gesamtheit der übrigen Lebewesen heraushebt, so fällt der Biologie die wichtige Aufgabe zu, den Menschen unbeschadet seiner Eigenart seine Stellung in der Gesamtheit der Lebewesen erkennen zu lassen“. Aus dieser Auffassung heraus betrachtet von Hanstein es als eine wichtige Aufgabe des zukünftigen Unterrichts, mehr als bisher der „angewandten Biologie“ Raum und Zeit zu gewähren. Als Beispiel verweist er auf die Behandlung des Begriffs der Biozönose; aus ihr lasse sich eine neutrale, auf naturwissenschaftlicher Grundlage erwachsende Staatsauffassung ableiten, die geeignet sei, „die gegenseitige Achtung der verschiedenen Berufsstände zu fördern und die Sorge für die wichtigsten Grundlagen unseres Wirtschaftsleben nicht zu politischen Macht- und Parteifragen werden zu lassen“.

Für den biologischen Unterricht der Unterklassen begründet von Hanstein eine Forderung, die er auch schon in früheren Arbeiten vertreten hatte: Zurücktreten des Systems bei der Abgrenzung der Lehraufgaben auf die einzelnen Klassen. Anschließend betont er die heute wohl allgemein erkannte Wichtigkeit der Volksgesundheit und folgert daraus die Notwendigkeit einer gründlichen Belehrung über die Gesundheitspflege. Ein Schlußabschnitt befaßt sich kurz mit den biologischen Schülerübungen, deren Wert bei richtiger Beschränkung von Hanstein hoch einschätzt.

Für den Unterricht in der Erdkunde kommt Professor Lampe, wie hier noch kurz erwähnt sein möge, zu dem Ergebnis: „Zweierlei springt aus den Gedankenreihen, die hier entwickelt sind, als verbesserungsbedürftig in die Augen: der Raum, der bisher dem erdkundlichen Unterricht zugebilligt wurde, ist zu eng, als daß er die erforderlichen Bildungswerte zur Geltung bringen könnte, zu eng besonders in den Oberklassen und die Anleitung der Lehrkräfte auf der Hochschule, erfreulich in Hinsicht der wissenschaftlichen Vorbildung, bedarf für die unterrichtliche und erziehliche Auskaufung des Lehrfaches dringend einer noch gründlicheren Ergänzung als in manchem anderen Lehrgegenstand“. Auch dies sind Ueberzeugungen, die nicht erst der Krieg geschaffen, die er aber neu gestärkt hat.

Wenn also auch die mathematisch-naturwissenschaftlichen Beiträge der Norrenbergschen Sammlung nichts grundsätzlich neues zu fordern brauchten, vielmehr die erfreuliche Gewißheit erbrachten, daß die Entwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts in den letzten Jahren auf dem rechten Weg war, so können sie doch, wie ihr Herausgeber von ihnen erhofft, für sich das Verdienst in Anspruch nehmen, zu frischem, frohem Schaffen neue Anregung gegeben zu haben.

## Bücher-Besprechungen.

**Geographischer Anzeiger** verbunden mit der **Zeitschrift für Schulgeographie.** Herausgegeben von Dr. Hermann Haack, Prof. Heinrich Fischer und Lehrer Albert Müller. Verlag von Justus Perthes in Gotha.

Zu den Zeitschriften, die sich den durch den Krieg geschaffenen Verhältnissen mit am besten angepaßt haben, ist zweifellos der „Geographische Anzeiger“ zu zählen. Gewiß hat die Eigenart der Wissenschaft, die er vertritt, der Erdkunde, die ja in dieser Zeit geradezu zu einer Kriegswissenschaft geworden ist, der Schriftleitung und dem Verlage das Durchhalten erleichtert. Aber auch das langjährige Vertrauensverhältnis, das Leiter, Mitarbeiter und Leser zusammenhält, das im „Verband deutscher Schulgeographen“ seine äußere bindende Form erhielt, hat in hohem Maße mit dazu beigetragen, die Zeitschrift in alter Lebenskraft zu erhalten. Den Beweis dafür liefert das Schlußheft des 16. Jahrgangs, dem das Inhaltsverzeichnis des ganzen Bandes beigefügt ist. Nicht weniger als 65 Aufsätze über Kriegsgeographie, fachwissenschaftliche und pädagogische Fragen hat die Zeitschrift aus der Feder berufener Fach- und Schulmänner im Laufe des Jahres gebracht, 49 Sonderbeilagen erläuterten den reichen Inhalt durch Bild und Karte. Alle übrigen Abteilungen: Kleine Mitteilungen, Besprechungen, umfassende Quellennachweise und sonstige Literaturzusammenstellungen wurden mit alter Sorgfalt gepflegt. Voll guter Zuversicht kann der Anzeiger deshalb seinen 17. Jahrgang antreten, der ihm, so hoffen wir, die heißersehnte Möglichkeit bieten wird, seinen Lesern das schwer erkämpfte „Neue Deutschland“ in Wort und Karte vorzuführen.

17. Jahrgang 1916. Heft 1: Dr. Joh. Reindl-München: Fritz Regel †. — Prof. Fritz Braun-Graudenz: Ueber Bulgarien, das Land und die Leute. — Dr. E. Oehlmann-Linden: Der Streit um die österreichische Alpengrenze. — Prof. Dr. R. Stübe-Leipzig: Aus dem Lande der Masuren. — Prof. Dr. E. Letsch-Zürich: Bestrebungen zur Besserstellung des Faches der Geographie in der Schweiz. — Prof. Dr. Fr. Regel-Würzburg: Das neue Kartenwerk über den Rennsteig.

Sonderbeilagen: 1. Fritz Regel †. — 2. u. 3. Das masurische Bauernhaus. 7. Italienischer Kriegsschauplatz. (4—6 erscheinen im Februarheft.)

* * *

**Katz, D.**, Psychologie und mathematischer Unterricht. Imuk-Abhandlungen Bd. 3, Heft 8. IV und 120 S. Mit 12 Abbildungen. Leipzig und Berlin 1913, B. G. Teubner. M 3,20.

Diese Schrift will nicht dem Psychologen etwas neues bringen, sondern vor allem zeigen, wie eng der ganze mathematische Unterricht mit psychologischen Problemen verknüpft ist, und man darf wohl hinzufügen, wie wenig dem stellenweise Rechnung getragen worden ist, trotz verschiedener neuer Werke und trotz Höflers Didaktik. Während jene sich auf das Gebiet der Mathematik beschränkt, gibt Katz einen Ueberblick über das bisher von der experimentellen Pädagogik Geleistete — einiges fällt aus dem Rahmen des Buches heraus — und trägt dadurch hoffentlich dazu bei, daß auch an den höheren Schulen die Zahl derer, die sich mit experimenteller Pädagogik beschäftigen (ich vermeide absichtlich den Ausdruck „Freunde“), zu vermehren. Dann wird vielleicht die Psychologie des mathematischen Denkens, die noch immer hinter dem System zurücksteht (z. B. in der zu frühen Ansetzung von Definitionen), noch mehr als bisher an Boden gewinnen. Denn was wir brauchen, darüber ist man sich ja längst einig, ist ein Unterricht, der das Interesse der Schüler weckt und wacherhält. Wir können daher auch gar nicht genug Beispiele aus dem praktischen Leben, aber nur wirkliche, nicht erkünstelte, schaffen.

Der Verfasser behandelt nun im ersten Teile die Entwickelung der Zahlvorstellung beim Kinde, sowie Zahl und Zählen bei primitiven Völkern, und wendet sich dann zur Entwickelung der Raumvorstellung beim Kinde. Die hier vertretenen didaktischen Forderungen sind ja zum Teil schon längst in die Praxis umgesetzt (Treutlein und andere), ebenso die Forderung, während der Pubertät geringere Anforderungen an die Abstraktionsfähigkeit der Schüler zu stellen. Ob allerdings jeder Lehrer über die verschiedenen Vorstellungstypen unterrichtet ist, wage ich zu bezweifeln. Bei Untersuchungen über die Beliebtheit der Unterrichtsfächer hat nicht nur Stern das Rechnen berücksichtigt, das haben alle Umfragen getan (vergl. meine Sammelberichte in Ztschr. f. angew. Psych., Bd. III u. IV). In diesem dritten Kapitel, das der differentiellen Psychologie gewidmet ist, wird auch die Psychologie der Rechenkünstler kurz behandelt. Ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich dann mit der Psychologie der Minder- und Schwachsinnigen und gibt interessante Einblicke in das Seelenleben dieser Unglücklichen.— Der Anhang über die Hygiene der geistigen Arbeit fällt aus dem Rahmen des Ganzen heraus. Wichtig ist dagegen wiederum der Abschnitt über die Psychologie des mathematisch-technischen und des künstlerischen Zeichnens, der für die volle Gültigkeit der darstellenden Geometrie und des künstlerischen Zeichnens eine Lanze bricht. Auch den Schluß über die Ausbildung der Lehrer in Psychologie und Pädagogik möchte ich allgemeiner Beachtung empfehlen, und ich würde mich freuen, im Interesse unseres Standes und der deutschen Schule, wenn auch die Oberlehrerschaft den Problemen der allgemeinen Pädagogik etwas mehr Beachtung schenken würde als bisher. Vielleicht trägt gerade diese Schrift, die hiermit nochmals wärmstens empfohlen sei, dazu bei. H. Keller (Chemnitz i. S.).

* * *

**Vollprecht**, Dr. **Hugo**, Oberstudienrat, Rektor des Realgymnasiums in Zwickau. Das Rechnen, eine Vorbereitung zur allgemeinen Arithmetik. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. IV u. 48 S. Leipzig-Berlin 1913, B. G. Teubner. M 0,80.

Der Rechenunterricht hat einen doppelten Zweck, einmal die praktischen Bedürfnisse zu befriedigen und andererseits, für die höheren Schulen, den Eingang in die Arithmetik, in den logischen Aufbau der Rechenoperationen, zu bilden. Da dieser Gesichtspunkt nur vom Fachmathematiker voll gewürdigt werden kann, ist schon oft Verwahrung gegen die Erteilung des Rechenunterrichtes durch Nichtmathematiker eingelegt worden. Leider wird sich aber diese Forderung nicht so schnell ermöglichen lassen, ja, an manchen kleineren Schulen überhaupt unmöglich sein. Für diese Fälle, vor allem, aber auch für junge Kandidaten, dürfte das Büchlein von Vollprecht außerordentlich wertvoll sein. Es beschränkt sich nicht darauf, die Regeln und Formeln anzugeben, sondern fügt auch stets die Klassenstufe bei, auf der der betreffende Stoff zu behandeln ist. Sehr zu begrüßen ist es, daß ausdrücklich auf den Unterschied zwischen wirklichen Gegenständen und einfachen Maßeinheiten, von benannten Zahlen und Dimensionen hingewiesen wird. Auch daß ein Produkt nie genauer sein kann, als der genauere Faktor, daß also die abgekürzte Multiplikation einen viel breiteren Raum einnehmen sollte, hat noch nicht überall die verdiente Beachtung gefunden. Die Beispiele auf S. 10 über die Teilbarkeit durch 37 und über die Elferprobe könnten bei einer dritten Auflage noch deutlicher gemacht werden; in der vorliegenden Form werden sie manchem schwer verständlich sein, vor allem den Schülern, denen dieses Schriftchen bei seinem billigen Preise recht gut in die Hand gegeben werden kann, allerdings mehr als Hilfs- denn als Uebungsbuch. Das Heft, das aus einer langjährigen Erfahrung des Verfassers heraus geschrieben ist, hat bis zur zweiten Auflage elf Jahre gebraucht. Hoffentlich kann die dritte Auflage bald erscheinen, das Büchlein verdient es.

H. Keller (Chemnitz i. S.).

* * *

**Maennchen**, Geheimnisse der Rechenkünstler. Mathematische Bibliothek, herausgegeben von Lietzmann und Witting. XIII. IV u. 48 S. Leipzig-Berlin. 1913, B. G. Teubner. kartoniert 80 Pfg.

Wer sich und seinen Schülern eine angenehme Stunde bereiten will, der greife zu diesem Bändchen, es wird ihn nicht gereuen. Wenn auch manches vom Inhalt schon allgemein bekannt ist, so ist doch hier so viel, auch relativ neues, zusammengetragen, daß man sich des Gebotenen nur freuen kann. Es sind in erster Linie Wurzelaufgaben und ihre Lösungen berücksichtigt, die ja die Paradestückchen der Rechenkünstler darstellen. Außerdem sind noch Osterdaten- und Mondphasenberechnungen in den Kreis der Betrachtungen gezogen worden, ja, sogar die Elberfelder Pferde marschieren auf. Für die Multiplikation sind nur Auszüge aus Ferrols Rechenverfahren gegeben. Leider ist bei Jahnkes Schulprogramm, auf das hierbei verwiesen wird, versehentlich das Erscheinungsjahr weggelassen. Ein Anhang weist noch kurz auf die Brauchbarkeit der Neuner- und Elferprobe hin, die ja von den Rechenkünstlern viel benützt wird, und streift ganz kurz das Problem des kleinen Fermatschen Satzes. Das Bändchen bietet somit mannigfache Anregungen, besonders für das Gebiet der diophantischen Aufgaben, auf die der Verfasser auch selbst hinweist. H. Keller (Chemnitz i. Sa.).

* * *

**Mme. P. Curie**. Die Entdeckung des Radiums. Leipzig. Akademische Verlagsgesellschaft. 28 S. (Rede gehalten am 11. Dezember 1911 in Stockholm bei Empfang des Nobelpreises).

Die Darlegungen gehen von der Entdeckung der Uranstrahlung durch Henry Becquerel aus und bezeichnen dann die Radioaktivität als eine Eigenschaft des materiellen Atomes. Die experimentell bestätigte Tatsache, daß Helium sich aus dem Element Radium bildet, stützt die früher aufgestellte Hypothese von der Transformation der Atome bestimmter Elemente. Die Erscheinung, daß gewisse Mineralien eine größere Aktivität zeigten, als nach ihrem Gehalt an den bekannten aktiven Substanzen, Uran oder Thorium, zu schließen war, förderte als Frucht einer mehrjährigen Arbeit das Radium zu Tage. In langwieriger chemischer Analyse wurden die besonders starken radioaktiven Substanzen isoliert. Jeder Scheidung folgte die Messung der Aktivität der Produkte. Die Gewinnung des Radiums, die Emissions- und Transformationstheorie wird ausführlich dargelegt und die Bedeutung dieser Entdeckungen unter dem Gesichtspunkt des Energieprinzips betrachtet. Broßmer (Freiburg).

* * *

**Dahl**, Prof. Dr. Friedrich. Kurze Anleitung zum wissenschaftlichen Sammeln und zum Konservieren von Tieren. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. IV und 147 S. mit 274 Abbildungen im Text. Jena 1914, G. Fischer.

Nach kurzer Zeit liegt schon die dritte Auflage vor; ein Beweis für die Brauchbarkeit des Werkchens, das eine leicht verständliche Anleitung gibt und in allem wieder die Vielseitigkeit und Gründlichkeit des Verfassers beweist. Zuerst werden die Orte und die geeignete Zeit zum Sammeln beschrieben und dabei wird der mechanischen Sammelmethode das Wort geredet. Durch das Sammeln aller Tiere an Orten von möglichst verschiedener chemisch-physikalischer Beschaffenheit mit zum Massenfange geeigneten Geräten — letzteres sinngemäß angewandt — kann sehr bald und gründlich die Tierwelt des zu erforschenden Gebietes zusammengebracht werden. Die Fanggeräte und ihre Verwendung, sowie das Präparieren, Konservieren und Verpacken der Tiere werden sodann behandelt und zwar redet der Verfasser hier in erster Linie aus seiner reichen Erfahrung auf diesem Gebiete, die er in mehreren Erdteilen sich erworben hat. Alle Anweisungen sind möglichst einfach gehalten und praktisch durchaus erprobt. Sehr anziehend ist der Abschnitt geschrieben, der eine „kurze Uebersicht des Tierreiches für Sammler“ bringt und die Uebersichten innerhalb der Gruppen mehr nach biologischen als nach morphologischen Gesichtspunkten gibt. In welch geschickter Weise die Biologie dabei verwertet ist, mag eine kurze Stichprobe aus dem Gebiete der Flugsäugetiere zeigen: a) Insektenfresser, welche zum Auffinden fliegender Insekten am Kopfe mit sehr feinen Tastorganen ausgestattet sind, b) Fruchtfresser, ohne feine Tastorgane, aber mit längerer fast fuchsartiger Schnauze. Im letzten Abschnitte (Anlage einer wissenschaftlichen Dauersammlung: Forschsammlung, Unterrichtssammlung, Schausammlung) vertritt Dahl die Ansicht, daß Naturwahrheit in der Darstellung der leitende und bestimmende Grundsatz sein müßte und die sogen. „Panoptikum-Schaustellungen“ in Museen zu verwerfen seien, da sie die große Gefahr enthalten, daß der Laie der Natur immer mehr entfremdet wird, wenn man die Naturbeobachtung ins Museum verlegen will. O. Rabes (Halle a. S.)

---

**Abschluß dieser Nummer am 26. März 1916.**