Jahrgang XXII. 1916. No. 8

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.
Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**,
von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von

Geh. Studienrat Dr. **P. Bode**, Direktor der Klinger-Oberrealschule in Frankfurt a. M. und Professor **K. Schwab**, Oberlehrer a. d. Klinger-Oberrealschule in Frankfurt a. M.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden an Geh. Studienrat Dr. P. Bode, Frankfurt a. M., Hermesweg 34, erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 8 Nummern ist 4 Mk. pränum., für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift kostenlos; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Die mathematisch-naturwissenschaftliche Bedeutung von G. W. Leibniz.

Von Prof. Adolf Kistner (Karlsruhe i. B.)

Unter dem lebenswahren Bildnis von Leibniz, das Claus Meyer (Düsseldorf) für den Ehrensaal des Deutschen Museums zu München geschaffen hat, findet sich die treffende Inschrift:

> **Gottfried Wilhelm Leibniz,**
> geboren in Leipzig am 1. Juli 1646,
> gestorben in Hannover am 14. November 1716.
> Der universellste und vielseitigste Gelehrte der deutschen Nation, der Schöpfer der Analysis des Unendlichen,
> Bahnbrechend auf vielen Gebieten der Naturkunde und Volkswirtschaft,
> Verdienstvoll als Staatsmann und Historiker, Philosoph und Poet,
> Unermüdlich tätig für die Organisation wissenschaftlicher Arbeit, für die Verbreitung gemeinnütziger Kenntnisse.

Als am 14. November mitten im Kriegslärm der Todestag dieses „Universalgenies der Wissenschaft" wiederkehrte, gedachte man da und dort der philosophischen und diplomatischen Verdienste dieses außergewöhnlichen Mannes, der nach Friedrich des Großen Ausspruch eigentlich selbst eine Akademie darstellte. Daß auch die mathematisch-naturwissenschaftlichen Kreise sich seiner erinnern müssen, hat man in den verschiedenen Aufsätzen, die zur 200. Wiederkehr des Todestages erschienen sind, kaum betont gefunden. Man erwähnte höchstens seine „angebliche" Erfindung der Differentialrechnung, überging aber seine Bedeutung für die naturwissenschaftlich-technischen Wissenszweige, obgleich man in diesen wohl nur Leonardo da Vinci neben ihm nennen darf. Ein Gesamtbild seiner Tätigkeit auf diesen Gebieten ist noch nicht erschöpfend gegeben.* Das darf nicht wundernehmen, besitzt doch allein der Nachlaß eine ganz außergewöhnliche Größe. Außer vielen Aufsatzentwürfen, Notizzetteln und dergleichen besteht er aus 15 300 an Leibniz gerichteten Briefen von 35 fürstlichen und 1028 anderen Personen!

Einige Einzelbilder aus seiner Beschäftigung mit unseren Interessensgebieten zu zeichnen, ist gerade in diesen schweren Zeiten, die uns Deutsche zu uns selbst führen müssen, eine Ehrenpflicht.

* Eine gemeinverständliche Darstellung des Lebens und der mathematisch-naturwissenschaftlichen Tätigkeit von G. W. Leibniz findet sich S. 23—36 in A. Kistner, Deutsche Physiker und Chemiker. München 1908.

„Wie ein Straßenräuber“ wurde Leibniz vor 200 Jahren begraben, die von ihm geschaffene Berliner Akademie gedachte seiner nicht, und erst ein Franzose (Fontenelle) hat ein Jahr später der Welt gezeigt, was sie in Leibniz verloren hatte.

Wir blättern zuerst in dem Buche, das die Errungenschaften der Mathematik in ihrem Werdegang festhält, und finden Leibniz bei der Geschichte der Differential- und Integralrechnung genannt. Newtons Name steht daneben und zwingt uns genau zu lesen. Handelt es sich doch um die Lösung der vielumstrittenen Frage: „Ist Newton oder Leibniz der Erfinder der Differentialrechnung?“ In seiner trefflichen Leibnizbiographie, zu der man immer wieder greifen wird, wenn man dem größten deutschen Gelehrten näherkommen will, meint Kuno Fischer: „So viel steht bei allen, auch den Gegnern, fest: daß Leibniz, der erste Philosoph und Metaphysiker seiner Zeit, zugleich nach Newton deren erster Mathematiker war. Genug, daß er mit einem Newton um die Priorität einer der größten mathematischen Erfindungen streiten durfte, daß es überhaupt fraglich sein konnte, wer von diesen beiden der Ueberlegene war: Newton oder Leibniz!“

Den ganzen Streit hat ein in England lebender Schweizer N. Fatio de Duillier (1664—1753) mit einer Schrift heraufbeschworen, die im Jahre 1699 zu London erschien. Vor aller Welt stand da die Behauptung, Leibniz habe eigentlich nur das nachgeahmt, was Newton schon früher besessen habe. Damit war der Fehdehandschuh hingeworfen, Leibniz nahm ihn auf und verfocht mit einigen Freunden sein gutes Recht gegen Newton mit seinen Getreuen. Die Einzelheiten des Waffenganges können aus Raummangel hier nicht einmal angedeutet werden. Auf beiden Seiten stritt man unritterlich, manchmal sogar mit verwerflichen Mitteln. Persönliche Gehässigkeit, blinde Parteileidenschaft, erbitterter Nationalitätenhader, böswilliger Gelehrtenneid und zu allem noch Mißverständnisse verschiedenster Art haben den ganzen Streit zu einem betrüblichen Abschnitt in der Geschichte der Mathematik werden lassen. Gewiß, Leibniz hat in diesem Streite Fehler gemacht, die wir bei gerechter Abwägung nicht entschuldigen können und dürfen, aber er hat sich mit guten Gründen und ehrlichem Gewissen tapfer gewehrt. Und gerade das haben ihm seine englischen Gegner besonders verübelt. Der Vergleich mit der Gegenwart ist nicht abzuweisen, umsomehr als auch in diesem Mathematikerkrieg dem Engländer Leute folgten, die allen Grund gehabt hätten dem Deutschen dankbar zur Seite zu stehen.

Beide Forscher sind von verschiedenen Seiten an die Differential- und Integralrechnung herangetreten, der Boden dazu war durch mannigfache infinitesimale Betrachtungen längst vorbereitet. Durch gemeinsame Bekannte bestand zwischen beiden Forschern ein geistiges Band, dessen Vorhandensein wohl keiner merkte, obgleich es die völlige Unabhängigkeit kaum zuließ. Eine von der Royal Society gewählte Kommission trat am 24. April 1712 zusammen und bezeichnete die Verfahren von Newton und Leibniz als identisch. Newton habe seines früher gefunden (1666), Leibniz das seinige aber früher veröffentlicht (1675). Nun liegen aber die Verhältnisse so: Die Fluxionsrechnung von Newton war unbeholfen, die Differentialrechnung von Leibniz aber zweckmäßig. Besser als der ganze leidige Prioritätsstreit. zeigt das die Entwicklung, die die höhere Mathematik in den vergangenen zwei Jahrhunderten genommen hat. Sie folgte Leibniz, nicht Newton! Daß trotzdem der englische Forscher vielfach höher gewertet wurde, hat nicht zum wenigsten seinen Grund darin, daß Newton seinen Gegner überlebte. Im Kampf mit dem toten Leibniz war es leicht die Siegespalme zu erringen!

Der Raum verbietet es uns leider die ganze Tätigkeit von Leibniz auf dem Gebiet der Differentialrechnung auch nur mit ganz großen Strichen zu zeichnen. Das aber sei besonders herausgehoben, daß wir ihm die zur Sicherung des Algorithmus unentbehrliche Schaffung einer zweckmäßigen Sprache und Schrift verdanken. Schon in seiner ersten mathematischen Arbeit („de arte combinatoria“) hatte er u. a. den Gedanken vertreten, daß die Wissenschaft nur dann vervollkommnet und erweitert werden kann, wenn sie über eine geeignete Zeichensprache verfügt. Daß er (1675) das Zeichen für Differential und Integral erfand, mag mancher heute (wie früher!) nicht als besonders wertvoll ansehen. Leibniz hat dazu eine treffliche Bemerkung in einem Briefe an Huygens (1690) gemacht. Wie wertvoll sei es, daß man nicht m oder n statt x^2 oder x^3 schreibe! Und gerade so sei es mit dx und ddx. In der Tat ist die Mathematik unter dem Schwergewicht unpraktischer Bezeichnungen niemals fortgeschritten. Gute Zeichen liefern nicht den Erfolg, aber sie helfen zu ihm („In hoc signo vinces“). Dafür haben wir aus Leibnizens Tätigkeit mancherlei Beweise. Wie wertvoll wurde der Gebrauch der Stellenzeiger, die er (wohl schon 1675) als einfache Indices und 1693 als mehrfache einführte, um damit zu der Behandlung der Eliminationsmethode bei Gleichungen ein praktisches Werkzeug zu haben. Aus der Fülle der von Leibniz ersonnenen Zeichen heben wir aus dem Elementarrechnen heraus: den Punkt für das Multiplizieren und den Doppelpunkt für das Dividieren. Auch die Schulmathematik benutzt mit den Bezeichnungen Analysis, Funktion, Exponentialgröße, algebraische und transzendente Kurven usw. glückliche Neuschöpfungen von Leibniz.

Die eigenartige Verquickung von philosophischen und mathematischen Gedankenverbindungen, die Leibniz stets eigen gewesen ist, lassen es verständlich erscheinen, daß er auf dem Fundament der Kombinatorik seine Ideen ausbaute. Mit der Schrift „De arte combinatoria“ (1666) hat er den Reigen der Arbeiten eröffnet, um deren willen man ihn als den Begründer der wissenschaftlichen Kombinatorik und der kombinatorischen Analysis gelten lassen muß. Er war fest davon durchdrungen, daß „die Vervollkommnung der Algebra von der Kombinatorik abhängt“ und hat diesen Gedanken auch in die Tat umgesetzt. Er macht z. B. die Kombinatorik der Lösung von Gleichungen dienstbar und gelangt damit zur Determinante, die später G. Cramer (1704—52) als erster näher betrachtete. Mit dem Werkzeug der Kombinatorik gewinnt Leibniz ferner ganz selbständig die Sätze von A. Girard (1590—1632) und Newton über die Potenzsummen bei höheren Gleichungen und den polynomischen Lehrsatz. Schon 1695 hatte Leibniz diesen Satz näher untersucht, aber Moivre (1667—1754) kam ihm wenig später durch die Veröffentlichung des auch von ihm selbständig erarbeiteten Lehrsatzes zuvor. Auf dem betretenen Gebiete drängten sich Leibniz die mannigfachsten Probleme zu. Mit Tschirnhaus (1651—1708) korrespondiert er z. B. über die Frage der allgemeinen Lösung einer Gleichung fünften Grades und glaubt (schon 1678) einen Beweis für ihre Unmöglichkeit zu besitzen.

Für einen wichtigen Satz der Zahlentheorie hat Leibniz den Beweis erbracht, ohne daß man davon wußte. Fermat (1608—65) hatte nämlich 1640 seinem Freunde Frénicle (1605 bis 75) brieflich mitgeteilt, daß $a^{p-1}-1$ durch p teilbar ist, wenn die ganze Zahl a den Primfaktor p nicht enthält. Fast hundert Jahre später lieferte L. Euler (1707—83) den Beweis (1736). Damals wußte man noch nicht, daß Leibniz den Satz am 12. September 1680 bereits bewiesen hatte, wofür wir heute die sichersten Belege haben. Er hoffte, mit ihm Glück auf der Suche nach einer allgemeinen Primzahlengleichung zu haben, doch mußte er vor den auch heute noch nicht überwundenen Hindernissen die Waffen strecken. Durch das Studium der periodischen Dual- und Dezimalbrüche hatte er schon früher zu einer notwendigen und hinreichenden Primzahlbedingung vordringen wollen, doch führte der eingeschlagene Weg nicht zum Ziel. So versagten auch die Kräfte bei dem Versuch die Irrationalität von π zu erhärten. Bei der Ludolphischen Zahl hören unsere Schüler wenigstens auf der Oberstufe Leibnizens Namen, wenn für $\frac{\pi}{4}$ die Reihe

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

abgeleitet wird, die den Kreisinhalt für den Durchmesser 1 angibt. Leibniz hat diese Reihe im Jahre 1674 ganz selbständig gefunden, obgleich sie nur einen Spezialfall der *arctg*-Reihe darstellt, die Gregory (1638—75) im Jahre 1671 angegeben hat.

Eine bei Geldgeschäften wichtige Frage hat Leibniz mit den Untersuchungen über das „Interusurium“ angeschnitten, d. h. über den prozentual aus der Schuldsumme berechneten Abzug bei der Diskontierung. Dieses ganz unrichtige, aber auch heute noch börsenmäßig übliche Berechnungsverfahren war namentlich durch die Autorität des sächsischen Juristen B. Carpzow (1595—1666) unantastbar. Leibniz wies 1683 auf die Irrtümer bei der „Diskontierung von 100“ hin und trat für die allein richtige „Diskontierung auf 100“ ein, freilich ohne irgendwie Erfolg damit zu haben.

Zur Erleichterung des mechanischen Rechnens hat Leibniz mit seiner Rechenmaschine eine wertvolle Hilfe geschaffen. Zur Addition bezw. Subtraktion von Geldbeträgen hatte der neunzehnjährige Pascal (1623—62) im Jahre 1642 ein „Arithmometer“ erfunden, das aber der Verwendung gewisse Beschränkungen auferlegte. Leibniz hatte schon im Jahre 1672 einen Entwurf zu einer Rechenmaschine gefertigt, kam aber erst darauf zurück, als er bei seinem Aufenthalt in Paris das Arithmometer von Pascal gesehen hatte. Leibnizens Maschine, von der sich noch ein Exemplar in Hannover befindet, erlaubte auch Multiplikation und Division von sechsstelligen Zahlen, sowie das Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln. Sie stellte für ihre Zeit eine ganz unerhörte Leistung dar und ist für alle späteren Konstruktionen das Vorbild gewesen. Unter den nichtschreibenden Rechenmaschinen hat namentlich die von Thomas (1785—1870) in Colmar ersonnene große Verbreitung gefunden. Sie ist aber eigentlich nur eine Nachahmung oder wenigstens Verbesserung der Leibnizmaschine.

Zur Physik leitet uns die Brachistochronenaufgabe, die Johann Bernoulli (1667—1748) im Juni 1696 „den scharfsinnigsten Mathematikern des ganzen Erdkreises“ vorlegte. Leibniz fand noch am gleichen Tage, an dem er von der Aufgabe hörte, die Cykloide als Brachistochrone (oder Tachystoptota, wie er sie anfänglich nannte). Die erste Arbeit, die für die Entwickelung der Physik Bedeutung besitzt, veröffentlichte Leibniz schon im Jahre 1671. Sie schöpft aus der Aetheitheorie und Atomistik. Den Weltraum soll flüssiger Aether füllen, durch den sich Licht und Bewegung fortpflanzen. Licht und Schall werden als Aetherbewegungen angenommen, auch die Schwere ist eine Folge der Aetherzirkulation. Selbst den tieferen Grund für die chemische Verschiedenheit der Körper glaubt Leibniz mit seiner Aetherhypothese zu finden. Manches schimmert hier durch, was heute fester Besitz der theoretischen Physik und Chemie geworden ist. Indem Leibniz seine Gedankengänge mannigfach abändernd und erweiternd verfolgte, gelangte er zu dem Begriffe der Monaden, der substanziellen Atome, die Träger von etwas Lebendigem sind. Aus der Vereinigung dieser metaphysischen Punkte, denen er aus der prästabilierten Harmonie heraus das Gesetz der eigenen Entwickelung zuschreibt, entstehen die eigentlichen physischen Punkte. Für den Mathematiker und Physiker hat die Monadologie eigentlich nur dadurch Interesse, daß Leibniz bei diesen Betrachtungen zum Begriff des Differentials gekommen ist.

Im Jahre 1686 tritt Leibniz in Untersuchungen über das Kräftemaß ein. Den Kartesianern erschien das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit als das Maß der Kraft. An Untersuchungen von Huygens (1629—95) über den Stoß anknüpfend betont Leibniz, daß die Bewegungsgröße dem Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat proportional ist. Zur näheren Begründung gab er im Jahre 1695 eine Abhandlung, in der die Kräfte in „lebendige“ und „tote“ eingeteilt werden. Mangels scharfer Fassung dieser Begriffe fand die strittige Frage keine einwandsfreie Klärung. Der unglückliche Ausdruck „lebendige Kraft“, dem unsere Schulbücher ein ewiges Leben zu verleihen scheinen, muß durch den (1855) von Rankine (1820—72) gegebenen Begriff „Energie“ ersetzt werden. Wir befinden uns dann durchaus auf leibnizischer Grundlage, wenn wir von potentieller und kinetischer Energie reden. Leibniz fand das wichtige Ergebnis, daß (in heutiger Ausdrucksweise) die Summe von potentieller und kinetischer Energie ihren Wert nicht ändert. Das ist der Keim für den erst von Robert Mayer (1814—78) allgemein ausgesprochenen „Satz von der Erhaltung der Energie“. Wenn wir bedenken, daß jene Zeit von den verschiedenen Formen der Energie und von ihren Zusammenhängen noch recht wenig wußte, verstehen wir, daß Leibniz den Satz nur für den Sonderfall mechanischer Vorgänge finden konnte. Was Gassendi (1592—1655) und Huygens nur dunkel geahnt hatten, ringt sich bei Leibniz erstmals völlig erkennbar an das Licht. So finden wir bei ihm auch die klare Erkenntnis von der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile. Mit dem Hinweis, daß Leibniz als erster die hochwichtige Unterscheidung zwischen „gleitender“ und „rollender“ Reibung gemacht hat, sei die Skizze seiner mechanischen Studien vervollständigt.

Von seiner früheren Annahme über die Rolle des Aethers bei der Verbreitung des Schalls hat sich Leibniz später freigemacht. Wir finden ihn ganz im Banne der akustischen Anschauungen von Newton, wenn er die Mechanik der Schallentstehung genauer untersucht und durch die Resonanz gleichgestimmter Saiten experimentell prüft. In der Optik kann er sich, so erstaunlich das ist, aus dem Gedankenkreise von Descartes (1596—1650) und Newton trotz schwerwiegender Bedenken nicht zu der Undulationstheorie von Huygens durchringen.

Eine hübsche Entdeckung verdankt ihm die Elektrizitätslehre. Als er zu Mainz im Jahre 1671 seine „Hypothesis physica nova“ schrieb und sich dabei auf die Luftpumpenversuche von O. von Guericke (1602—86) stützte, trat er in Briefwechsel mit dem gelehrten Bürgermeister. An einer Schwefelkugel, die ihm dieser überlassen hatte, entdeckte Leibniz den elektrischen Funken. Da der betreffende Brief (vom 31. Januar 1672) verloren ist, wissen wir von der wichtigen Entdeckung nichts weiter, als was Guericke im Antwortschreiben vom 1. März 1672 andeutet.

Ein guter Vorschlag zur Verbesserung des Barometers kam leider nicht gleich zur Ausführung. Schon 1697 (21. Juni) schreibt Leibniz an Papin (1647—1712) von dem Ersatz des Quecksilberbarometers durch „eine Art von wohl geschlossenem Blasebalg“. Am 3. Februar 1702 teilt er Johann Bernoulli mit, daß er an ein Barometer aus einem luftdichten Lederbalg denke, den „das Gewicht der Luft zusammenzudrücken sucht, während er durch die Kraft einer elastischen Feder Widerstand leistet“. Das Ganze soll „in einem einer Uhr ähnlichen kleinen Behälter eingeschlossen werden“. Er wollte dabei, wie der Brief an Papin vom 26. September 1702 zeigt, Leder benutzen, das nach dem von Papin ersonnenen Verfahren durch Kochen in Oel luftdicht gemacht war. Das Prinzip des Aneroidbarometers ist also klar ausgesprochen. Erst 1760 konstruierte Zeiher (1720—84) ein ähnliches Instrument, freilich in unbequemer Form. Die heutige Einrichtung des Aneroids hat erst L. Vidi (1848) gegeben.

Daß die frühesten instrumentellen Wetterbeobachtungen in Deutschland auf Leibniz zurückgehen, weiß man noch nicht lange. Er ließ (1768) zu Hannover im Dienste der Wettervorhersage Barometerbeobachtungen anstellen, die S. Reyher (1635—1714) in Kiel von 1679 bis zu seinem Tode fortführte. Hier sei gleich angeschlossen, daß Leibniz Peter dem Großen den Vorschlag machte, erdmagnetische Beobachtungen veranstalten zu lassen. Auch das

Aufsuchen einer nordöstlichen Durchfahrt nach Indien riet er ihm.

Nicht ganz vorbeigehen können wir an dem, was Leibniz in seiner „Protogaea" (1687) über die Urgeschichte der Erde und ihrer Lebewesen schreibt. Streift man alle Phantastereien ab, so bleibt ein Bild zurück, an dem die heutige Wissenschaft nur verhältnismäßig wenig zu ändern brauchte. Hier und vor allem in seinem Nachlaß begegnen wir regem Interesse an den beschreibenden Naturwissenschaften. So fesseln ihn in der Zoologie namentlich die Insekten, in der Botanik die Arbeiten des Linné-Vorläufers J. Jungius (1587—1657) zur wissenschaftlichen Morphologie der Pflanzen. Wir finden Leibniz in Briefverkehr mit berühmten Mikroskopikern wie Leeuwenhoek (1632—1723), Malpighi (1628—94), Swammerdam (1637—80) u. a. m. Ganz modern mutet uns eine Stelle in einem Briefe (1715) an Leeuwenhoek an, in der er rät „junge Leute zu mikroskopischen Beobachtungen anzuleiten, wodurch gleichsam eine mikroskopische Schule aufgerichtet würde, welche bestehen und den Schatz der menschlichen Wissenschaften vermehren könnte". Von einer solchen Pflege verspricht er sich wichtige Einflüsse auf die Naturwissenschaften und auf die Medizin, über die er oft nachgedacht hat. Ihre praktische Ausübung und die öffentliche Gesundheitspflege wünscht er gefördert und empfiehlt, was heute interessiert, eine tüchtige Ausbildung von Chirurgen für die unabweisbar nötige Hebung des Sanitätswesens beim Heer.

Leibnizens Beziehungen zur Chemie reichen weit zurück, stand er doch als Jüngling zu Nürnberg im Dienst der Rosenkreuzer, der ihn das Treiben der Alchemisten kennen lehrte. Daß er einmal „Laboranten, Charlatans, Marktschreier, Alchymisten und andere Vaganten und Grillenfänger" in einem Atem nennt, verrät geringe Achtung vor den Adepten der schwarzen Kunst. Die praktische Seite der Alchemie schätzt er nicht sehr hoch ein, während ihn die theoretische fesselt, da er aus ihr eine Förderung der Naturerkenntnis erhofft. Die Chemiegeschichte verdankt Leibniz eine aufschlußreiche „Historia inventionis Phosphori" (1710), zu der der Nachlaß verschiedene Ergänzungen liefert. Aus dem Gebiet der technischen Chemie zeigt er Interesse für die Spiritusbrennerei. Bei der Besprechung ihrer handelspolitischen Bedeutung bezeichnet er (1711) den Branntwein als „ein Getränk, welches als eine Arzney wohl nützlich, aber zum ordentlichen Gebrauch als ein Aliment höchst schädlich und gewiß viel tausend Menschen dadurch ihr Leben verlieren". Im Jahre 1714 spricht er von Konserven für die Ernährung der Truppen im Feld und gedenkt als erster „des Extraktes aus Fleisch", wie ihn viel später J. von Liebig (1803—73) erfunden hat. Unter den zahlreichen Notizen des Nachlasses begegnet man vielen aus der Chemie von Küche und Haus. Gerade in unseren Tagen sollte man seine Hinweise beachten, aus jungen Tannenzapfen einen wohlschmeckenden Salat oder Konfitüren zu machen, chinesischen Tee durch Salbei zu ersetzen, Kapern aus Knospen von Gänseblumen herzustellen, Lampendochte aus Holundermark zu verfertigen usw.

Wie er hier die Chemie in den Dienst des täglichen Lebens stellt, verknüpft er auch seine physikalischen Ideen mit technischen Problemen. So verdanken wir das Prinzip der Energieaufspeicherung, dessen wir uns heute so mannigfach bedienen, seinen Versuchen zur Bewältigung des Grundwassers in den Silbergruben zu Clausthal und Zellerfeld. Er wollte (1678) die Energie des Windes zum Heben des lästigen Aufschlagwassers benutzen, sie in diesem aufspeichern und dann zum Betrieb der gewöhnlichen Wasserräder an den Grubenpumpen heranziehen. Allerlei Mißhelligkeiten mit der Bergbehörde nötigten leider schon 1685 zur Einstellung dieser Versuche, die für die Mechanik das Akkumulatorprinzip bergen. Vieles aus der mehr technischen Tätigkeit von Leibniz ist der Vergessenheit anheimgefallen und wurde später „nacherfunden", so z. B. seine doppeltwirkende Pumpe durch den Arzt J. N. de La Hire (1685—1727) im Jahre 1716, sowie der Heißluftmotor, über den er sich in Briefen an Papin (1706 und 08) deutlich ausspricht. Daß der Marburger Physiker (1706) die erste Hochdruckdampfmaschine bauen konnte, verdankt er Leibniz, der ihm am 6. Januar 1705 Zeichnungen der Dampfmaschine sandte, für die Th. Savery (gest. 1716) im Jahre 1698 ein englisches Patent erhalten hatte. Für die Maschine von Newcomen gibt man meist Potter (1712) als Erfinder der Selbststeuerung an; tatsächlich aber machte Leibniz diesen Vorschlag schon am 4. Februar 1707 in einem Briefe an Papin.

Die allgemeine Einführung der Feuerspritzen mit Windkessel [also in der noch heute üblichen Einrichtung, die auf den Zirkelschmied Hans Hautsch in Nürnberg (1655) zurückgeht] hat Leibniz eingeleitet, indem er der von ihm ins Leben gerufenen Berliner Akademie ein Privileg erwirkte für die Einführung und Beschaffung „der rechtschaffenen Feuerspritzen dergleichen noch nicht gebräuchlich".

Zu den physikalischen Fragen der Luftschifffahrt hat Leibniz als erster mit Berechnungen über die Tragkraft der Luft (um 1675) beigesteuert. Der von ihm geprägte Titel dieser Studie „Aero-nautica" mutet uns ganz neuzeitlich an. Unsere heutige Kriegstechnik benutzt überhaupt manches, was Leibniz sich ausgedacht hat. So hält er z. B. für das Heer Pontons aus Metall für praktischer als die schweren aus Holz. Auch die Geschichte des Tauchbootes und der Hinterladergeschütze kennt Leibnizens Namen. Recht bedauerlich ist es, daß uns nähere Aufschlüsse zu der Angabe in einem Brief an Spinoza fehlen, nach der er eine neue Linsenform für ein Fernrohr ausgedacht hat, das dadurch zum Entfernungsmesser wird. An Errungenschaften der modernen Kriegstechnik werden wir erinnert, wenn wir hören, daß er sich einen Wagen ausdachte, der dadurch über aufgeweichten Boden fahren kann, daß er selbsttätig breite Unterlagen für die Räder auf die Erde legt. Was J. J. Becher (1635—82) in seiner „Närrischen Weisheit" von „Leibnizens Postwagen von Hannover nach Amsterdam in sechs Stunden zu fahren" sagt, ist freilich nur eine boshafte Rache, weil Leibniz ihm eine „alchemistische Gaunerei" vereitelte, liegt aber für unsere Technik schon lange im Bereich des Möglichen.

Begleitet man Leibniz in die verschiedenen Gebiete, die wir hier durchwanderten, so begegnet man einer Fülle neugeschaffener wissenschaftlicher Werte, die uns noch heute Anerkennung abringen. Was er als höchstes Ziel für einen Gelehrten aufgerichtet hat, nämlich Betätigung auf den verschiedensten Arbeitsfeldern und gründliches Beschlagensein im Einzelgebiet, hat er in einem Maße erreicht, wie es die Geschichte der Wissenschaftspflege nicht mehr kennt. Unfruchtbare Gelehrteneinseitigkeit hat es in seinem ganzen Leben niemals gegeben, darum eifert er auch gegen sie und sucht überall (wie er in einem Briefe an Bourget sagt) „Studien aller Art miteinander zu verbinden". Hier liegen die Wurzeln zu seinen Gründungen von Akademien, um einer Zersplitterung von Einzelkräften wirksam zu begegnen. Und hier liegen auch die Wurzeln zu seinem genialen Plan, in die große Masse naturwissenschaftliche Bildung hinauszutragen, Sammlungen für technische Modelle und Werkzeuge, für physikalische, chemische und astronomische Instrumente zu schaffen. Was Leibniz vor 200 Jahren für die naturwissenschaftlich-technische Bildung der Allgemeinheit anstrebte, konnte erst in unserer Zeit Wirklichkeit werden, die uns in dem einzigartigen „Deutschen Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik" zu München entgegentritt. Ob wir dort die Allgemeinheit oder in unseren Schulen die Jugend im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht zum realistischen Bildungsideal im Sinne von Leibniz hinaufführen, die Richtschnur finden wir in seinem Lieblingswahlspruch: „In Worten die Klarheit, in Sachen den Nutzen".

Ueber die symmetrischen Funktionen der Quadrate der natürlichen Zahlenreihe.

Von Arthur Czwalina in Berlin.

Es ist folgender Satz zu beweisen: Jede rationale symmetrische Funktion der Quadrate der ersten m natürlichen Zahlen ist eine Funktion nur von m derart, daß sie, wenn man in ihr m durch $m - \frac{1}{2}$ ersetzt, den Wert der entsprechenden symmetrischen Funktion liefert, die aus den Quadraten der Hälften der ersten m ungeraden Zahlen gebildet wird.

Ein Beispiel möge zunächst die Bedeutung des Satzes erläutern, und zwar sei das einfachste gewählt. Die einfachste symmetrische Funktion der Quadrate der ersten m natürlichen Zahlen, also der Zahlen $1, 4, 9 \ldots\ldots m^2$ ist ihre Summe. Sie ist bekanntlich $\frac{1}{6} m (m+1)(2m+1)$. Nun besagt der Satz, daß, wenn wir in diesem Ausdruck für m, $m - \frac{1}{2}$ substituieren, so daß wir also erhalten

$$\frac{1}{6}\left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot 2m = \frac{1}{12} m (2m-1)(2m+1),$$

dieser Wert die Summen der Quadrate der Hälften der ersten m ungeraden Zahlen liefert. In der Tat ist

$$\frac{1}{4}\left(1^2 + 3^2 + \ldots\ldots (2m-1)^2\right) = \frac{1}{12} m (2m-1)(2m+1).$$

Dieser Satz soll im folgenden ganz allgemein bewiesen werden.

Es seien die Quadrate der ersten m natürlichen Zahlen mit $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_m$ bezeichnet, also $x_1 = 1^2$, $x_2 = 2^2, \ldots\ldots x_\varsigma = \varrho^2, \ldots\ldots x_m = m^2$. Entsprechend seien die Quadrate der Hälften der ersten m ungeraden Zahlen mit $y_1, y_2, \ldots y_m$ bezeichnet also

$$y_1 = \frac{1^2}{4}, y_2 = \frac{3^2}{4}, \ldots\ldots y_m = \frac{(2m-1)^2}{4}.$$

Ferner seien die m symmetrischen Elementarfunktionen bezeichnet mit

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_m = f_1(x_r)$$
$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \ldots\ldots + x_{m-1} x_m = f_2(x_r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots x_{m-1} x_m = f_m(x_r).$$

Entsprechend ist

$$y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_m = f_1(y_v) \text{ usw.}$$

Die Symbole $f_o(x_r)$ und $f_0(y_r)$, die die Symmetrie der später entwickelten Gleichungen erhöhen sollen, haben die Bedeutung 1.

Wir führen endlich eine Variable x ein und betrachten die Funktion

$$1)\quad \varphi(x, m) = x(x+2)(x+4)(x+6)\ldots\ldots(x+2m)\cdot(x-2)(x-4)\ldots\ldots(x-2m)$$

Dann ist

$$2)\quad \varphi(x, m) = x(x^2 - 4\cdot 1^2)(x^2 - 4\cdot 2^2)(x^2 - 4\cdot 3^2)\ldots\ldots(x^2 - 4m^2)$$

$$\varphi(x, m) = x(x^2 - 4x_1)(x^2 - 4x_2)(x^2 - 4x^3)\ \ldots\ldots(x^2 - 4xm)$$

Entwickeln wir diese Funktion nach fallenden Potenzen von x, so ergibt sich

$$3)\quad \varphi(x, m) = x^{2m+1} - 4^1 f_1(x_r) x^{2m-1} + 4^2 f_2(x_r) x^{2m-3} + \ldots\ldots + (-1)^\varrho 4^\varrho f_\varrho(x_v) x^{2m-2\varrho+1}$$
$$+ \ldots\ldots + (-1)^m 4^m f_m(x_r)\cdot r$$

Substituiert man hier $x // x+1$, so folgt

4) $$\varphi(x+1, m) = (x+1)^{2m+1} - 4^1 f_1(x_r)(x+1)^{2m-1} + 4^2 f_2(x_r)(x+1)^{2m-3} + \ldots\ldots + (-1)^\varrho 4^\varrho f_\varrho(x_r)(x+1)^{2m-2\varrho+1} + \ldots + (-1)^m 4^m f_m(x_r)(x+1)$$

Entwickeln wir die Glieder der rechten Seite nach dem binomischen Satz und ordnen wieder nach fallenden Potenzen von x, so folgt

5) $$\begin{aligned}\varphi(x+1, m) = {} & x^{2m+1} + \binom{2m+1}{1} x^{2m} + \left[\binom{2m+1}{2} - 4^1 f_1(x_r)\right] x^{2m-1} \\ & + \left[\binom{2m+1}{3} - 4^1 \binom{2m-1}{1} f_1(x_r)\right] x^{2m-2} \\ & + \left[\binom{2m+1}{4} - 4^1 \binom{2m-1}{2} f_1(x_r) + 4^2 f_2(x_r)\right] x^{2m-3} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left[\binom{2m+1}{\varrho} - 4^1 \binom{2m-1}{\varrho-2} f_1(x_r) + 4^2 \binom{2m-3}{\varrho-4} f_2(x_r) + \ldots\right] x^{2m-\varrho+1} \\ & + \ldots\ldots + (-1)^m 4^m f_m(x_r)\end{aligned}$$

Substituiert man dagegen in 1) $x // x+1$, so folgt

6) $$\varphi(x+1, m) = (x+1)(x+3)\ldots\ldots(x+2m-1)(x+2m+1)(x-1)(x-3)\ldots\ldots(x-(2m-1))$$

Faßt man jedes Glied $(x+\lambda)$ mit dem entsprechenden $(x-\lambda)$ zusammen, so folgt

$$\varphi(x+1, m) = [x+(2m+1)](x^2-1^2)(x^2-3^2)\ldots\ldots(x^2-(2m-1)^2)$$

$$\varphi(x+1, m) = [x+(2m+1)](x^2-4y_1)(x^2-4y_2)\ldots\ldots(x^2-4ym),$$

also 7) $$\varphi(x+1, m) = [x+(2m+1)]\left(x^{2m} - 4^1 f_1(y_r) x^{2m-2} + 4^2 f_2(y_r) x^{2m-4} \ldots + (-1)^m 4^m f_m(y_r)\right)$$

Multipliziert man aus und entwickelt wieder nach fallenden Potenzen von x, so ergibt sich

8) $$\begin{aligned}\varphi(x+1, m) = {} & x^{2m+1} + (2m+1)x^{2m} - 4^1 f_1(y_r) x^{2m-1} - 4^1 (2m+1) f_1(y_r) x^{2m-2} \\ & + \ldots\ldots + (-1)^\varrho 4^\varrho f_\varrho(y_r) x^{2m-2\varrho+1} + (-1)^\varrho 4^\varrho (2m+1) f_\varrho(y_r) x^{2m-2\varrho} \\ & + \ldots\ldots + (-1)^m 4^m f_m(y_r) x + (-1)^m 4^m (2m+1) f_m(y_r)\end{aligned}$$

Vergleicht man nun 5) und 8) bezüglich ihrer Koeffizienten und bedient man sich des Symbols $f^o = 1$, so ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\binom{2m+1}{2} f_0(x_r) - 4^1 f_1(x_r) & = -4 f_1(y_r) \\ \binom{2m+1}{3} f_0(x_r) - 4^1 \binom{2m-1}{1} f_1(x_r) & = -4(2m+1) f_1(y_r) \\ \binom{2m+1}{4} f_0(x_r) - 4^1 \binom{2m-1}{2} f_1(x_r) + 4^2 f_2(x_r) & = 4^2 f_2(y_r) \\ \binom{2m+1}{5} f_0(x_r) - 4^1 \binom{2m-1}{3} f_1(x_r) + 4^2 \binom{2m-3}{1} f_2(x_r) & = 4^2 (2m+1) f_2(y_r)\end{aligned}$$

usw.

Da $f_\lambda(x_r)$ und $f_\lambda(y_r)$ nur von λ und m abhängen, so setzen wir

9) $$f_\lambda(x_r) = f_\lambda(m) \text{ und } f_\lambda(y_r) = \varphi_\lambda(m).$$

Außerdem setzen wir zur Vereinfachung der Schreibweise

10) $$(-1)^\lambda 4^\lambda f_\lambda(m) = F\lambda(m) \text{ und } (-1)^\lambda 4^\lambda \varphi_\lambda(m) = \Phi_\lambda(m),$$

so daß auch $F_o(m) = \Phi_o(m) = 1$ ist. Dann erhält unser Gleichungssystem die Form

11) $$\begin{aligned}\binom{2m+1}{2} F_o + F_1 & = \Phi_1 \\ \binom{2m+1}{3} F_o + \binom{2m-1}{1} F_1 & = (2m+1)\Phi_1 \\ \binom{2m+1}{4} F_o + \binom{2m-1}{2} F_1 + F_2 & = \Phi_2 \\ \binom{2m+1}{5} F_o + \binom{2m-1}{3} F_1 + \binom{2m-3}{1} F_2 & = (2m+1)\Phi_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \binom{2m+1}{2\lambda} F_0 + \binom{2m-1}{2\lambda-2} F_1 + \ldots + \binom{2m-2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho} F_\varrho + \ldots + \binom{2m-2\lambda-3}{2} F_{\lambda-1} + F_\lambda & = \Phi_\lambda \\ \binom{2m+1}{2\lambda+1} F_0 + \binom{2m-1}{2\lambda-1} F_1 + \ldots + \binom{2m-2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho+1} F_\varrho + \ldots\ldots + \binom{2m-2\lambda+1}{1} F_\lambda & = (2m+1)\Phi_\lambda \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\end{aligned}$$

Aus diesem System 11) soll ein anderes hergeleitet werden, das die Φ nicht mehr enthält. Wir ziehen daher die letzte der aufgeschriebenen Gleichungen von der mit $(2m+1)$ multiplizierten vorletzten ab. So erhalten wir

$$\begin{aligned}& \left[\binom{2m+1}{2\lambda}(2m+1) - \binom{2m+1}{2\lambda+1}\right] F_0 + \left[\binom{2m+1}{2\lambda-2}(2m+1) - \binom{2m-1}{2\lambda-1}\right] F_1 + \ldots\ldots \\ & + \left[\binom{2m-2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho}(2m+1) - \binom{2m-2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho+1}\right] F\varrho + \ldots + \left[(2m+1) - \binom{2m-2\lambda+1}{1}\right] F\lambda = 0.\end{aligned}$$

Da nun $\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1}\frac{n-p+1}{p}$ ist, so ist

$$\binom{2m-2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho+1} = \binom{2m-2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho}\frac{2m-2\lambda+1}{2\lambda-2\varrho+1}, \text{ also}$$

$$\binom{2m-2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho}(2m+1) - \binom{2m-2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho+1} = \binom{2m-2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho}\left(2m+1-\frac{2m-2\lambda+1}{2\lambda-2\varrho+1}\right)$$
$$= \binom{2m-2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho}\frac{2[2m(\lambda-\varrho)+2\lambda-\varrho]}{2\lambda-2\varrho+1}.$$

Also gewinnt unsere Gleichung, wenn wir durch 2 dividieren die Gestalt

$$\binom{2m+1}{2\lambda}\frac{2m\lambda+2\lambda}{2\lambda+1}F_0 + \binom{2m-1}{2\lambda-2}\frac{2m(\lambda-1)+2\lambda-1}{2\lambda-1}F_1 + \ldots + \binom{2m-2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho}\cdot\frac{2m(\lambda-\varrho)+2\lambda-\varrho}{2\lambda-2\varrho+1}F_\varrho$$
$$+ \ldots\ldots + \binom{2m-2\lambda+3}{2}\frac{2m+\lambda+1}{3}F_{\lambda-1} + \lambda F_\lambda = 0.$$

Es gilt daher die Rekursionsformel *

$$12)\qquad -\lambda F_\lambda(m) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\lambda-1}\binom{2m-2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho}\cdot\frac{2m(\lambda-\varrho)+2\lambda-\varrho}{2\lambda-2\varrho+1}F_\varrho(m)$$

Bezeichnen wir weiter 13) $F\lambda\left(m-\frac{1}{2}\right) = \Psi_\lambda$.

Durch die Substitution $m // m - \frac{1}{2}$ gehen dann in der Gleichung 12) die F_λ in die Ψ_λ über, der Ausdruck $2m-2\varrho+1$ in $2m-2\varrho$ und $2m(\lambda-\varrho)+2\lambda-\varrho$ in $2m(\lambda-\varrho)+\lambda$, und es ergibt sich für die Ψ_λ die Rekursionsformel

$$14)\qquad -\lambda\Psi_\lambda(m) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\lambda-1}\binom{2m-2\varrho}{2\lambda-2\varrho}\cdot\frac{2m(\lambda-\varrho+\lambda}{2\lambda-2\varrho+1}\Psi_\varrho(m)$$

Nun müssen wir noch eine Rekursionsformel für die Φ herstellen. Ersetzen wir in Gleichung 7) $x+1$ durch x, so ergibt sich

$$15)\qquad \varphi(x, m) = [x+2m]\left[(x-1)^{2m} + \Phi_1(x-1)^{2m-2} + \Phi_2(x-1)^{2m-4} + \ldots + \Phi_m\right]$$

---

* Will man aus der Formel 12) die $F\lambda$ wirklich berechnen, so setzt man zweckmäßiger Weise $F\varrho = (-1)^\varrho\binom{2m+2}{2\varrho+1}q\varrho$. Dann geht die Rekursionsformel über in die Gestalt.

$$(-1)^{\lambda+1}\lambda\binom{2m+2}{2\lambda+1}q\lambda = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\lambda-1}(-1)^\varrho\binom{2m+2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho}\binom{2m+2}{2\varrho+1}\frac{2m(\lambda-\varrho)+2\lambda-\varrho}{2\lambda-2\varrho+1}q\varrho$$

Es ist aber $\binom{2m-2\varrho+1}{2\lambda-2\varrho}\binom{2m+2}{2\varrho+1} = \binom{2m+2}{2\lambda+1}\binom{2\lambda+1}{2\varrho+1}$. Wenn man dies einsetzt und die entstehende Gleichung durch $\binom{2m+2}{2\lambda+1}$ dividiert, so ergibt sich

$$(-1)^{\lambda+1}\lambda\cdot q\lambda = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\lambda-1}(-1)^\varrho\binom{2\lambda+1}{2\varrho+1}\frac{2m(\lambda-\varrho)+2\lambda-\varrho}{2\lambda-2\varrho+1}q\varrho.$$

Nun ist $F_0 = 1$, also $q_0 = \frac{1}{2m+2}$. Hieraus ergeben sich dann, wenn auch mit mühsamer Rechnung die weiteren Werte, nämlich

$q_0 = \frac{1}{2m+2}$	$F_0 = +1$
$q_1 = 1$	$F_1 = -\binom{2m+2}{3}$
$q_2 = \frac{2}{3}(5m+6)$	$F_2 = +\binom{2m+2}{5}q_2$
$q_3 = \frac{4}{9}(35m^2 + 91m + 60)$	$F_3 = -\binom{2m+2}{7}q_3$
$q_4 = \frac{8}{15}(175m^3 + 735m^2 + 1046m + 504)$	$F_4 = +\binom{2m+2}{9}q_4$
$q_5 = \frac{16}{9}(385m^4 + 2310m^3 + 5291m^2 + 5478m + 2160)$	$F_5 = -\binom{2m+2}{11}q_5$

Die q sind rational nicht zerlegbare Funktionen.

Den Inhalt der zweiten eckigen Klammer entwickeln wir binomisch nach fallenden Potenzen von x. Er ist

$$x^{2m} - \binom{2m}{1} x^{2m-1} + \left[\binom{2m}{2} + \Phi_1\right] x^{2m-2} - \left[\binom{2m}{3} + \binom{2m-2}{1}\Phi_1\right] x^{2m-3}$$
$$+ \left[\binom{2m}{4} + \binom{2m-2}{2}\Phi_1 + \Phi_2\right] x^{2m-4} - \left[\binom{2m}{5} + \binom{2m-2}{3}\Phi_1 + \binom{2m-4}{1}\Phi_2\right] x^{2m-5}$$
$$+ \ldots\ldots$$

Demnach erhalten wir aus Gleichung 15 die Gleichung

$$16)\quad \varphi(x,m) = x^{2m+1} + x^{2m-1}\left[\binom{2m}{2} + \Phi_1 - 2m\binom{2m}{1}\right]$$
$$- x^{2m-2}\left[\binom{2m}{3} + \binom{2m-2}{1}\Phi_1 - 2m\binom{2m}{2} - 2m\Phi_1\right]$$
$$+ x^{2m-3}\left[\binom{2m}{4} + \binom{2m-2}{2}\Phi_1 + \Phi_2 - 2m\binom{2m}{3} - 2m\binom{2m-2}{1}\Phi_1\right]$$
$$- x^{2m-4}\left[\binom{2m}{5} + \binom{2m-2}{3}\Phi_1 + \binom{2m-4}{1}\Phi_2 - 2m\binom{2m}{4} - 2m\binom{2m-2}{2}\Phi - 2m\Phi_2\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Nun war aber zufolge Gleichung 3)

$$\varphi(x,m) = x^{2m+1} + F_1 x^{2m-1} + F_2 x^{2m-3} + F_3 x^{2m-5} + \ldots.$$

Vergleicht man die Koeffizienten der Potenzen mit gleichem Exponenten in dieser und der 16. Gleichung, so ergibt sich das System

$$17)\quad F_1 = \Phi_1 + \left[\binom{2m}{2} - 2m\binom{2m}{1}\right]\Phi_0$$
$$0 = \left[\binom{2m-2}{1} - 2m\right]\Phi_1 + \left[\binom{2m}{3} - 2m\binom{2m}{2}\right]\Phi_0$$
$$F_2 = \Phi_2 + \left[\binom{2m-2}{2} - 2m\binom{2m-2}{1}\right]\Phi_1 + \left[\binom{2m}{4} - 2m\binom{2m}{3}\right]\Phi_0$$
$$0 = \left[\binom{2m-4}{1} - 2m\right]\Phi_2 + \left[\binom{2m-2}{3} - 2m\binom{2m-2}{2}\right]\Phi_1 + \left[\binom{2m}{5} - 2m\binom{2m}{4}\right]\Phi_0$$

. . . .

$$F_\lambda = \Phi_\lambda + \left[\binom{2m-2\lambda-2}{2} - 2m\binom{2m-2\lambda-2}{1}\right]\Phi_{\lambda-1} + \left[\binom{2m-2\lambda}{4} - 2m\binom{2m-2\lambda}{3}\right]\Phi_{\lambda-2}$$
$$+ \ldots + \left[\binom{2m\,2\varrho-4}{2\lambda-2\varrho} - 2m\left(\begin{bmatrix}2m-2\varrho-4\\2\lambda-2\varrho-1\end{bmatrix}\right)\right]\Phi_\varrho + \ldots + \left[\binom{2m-4}{2\lambda} - 2m\binom{2m-4}{2\lambda-1}\right]\Phi_0$$
$$0 = \left[\binom{2m-2\lambda}{1} - 2m\right]\Phi_\lambda + \left[\binom{2m-2\lambda+2}{3} - 2m\binom{2m-2\lambda+2}{2}\right]\Phi_{\lambda-1} + \ldots\ldots$$
$$\left[\binom{2m-2\varrho}{2\lambda-2\varrho+1} - 2m\binom{2m-2\varrho}{2\lambda-2\varrho}\right]\Phi_\varrho + \ldots + \left[\binom{2m}{2\lambda+1} - 2m\binom{2m}{2\lambda}\right]$$

Dieses System 17) ist die Auflösung bezw. Umkehrung des Systems 11). Es ist einfacher als jenes, da die Hälfte der Gleichungen die F gar nicht enthält. Es kann übrigens noch vermöge der Beziehung $\binom{n}{p+1} = \binom{n}{p}\frac{n-p}{p+1}$ vereinfacht werden. Auf Grund dieser Formel ist nämlich der Koeffizient von Φ_ς in der vorletzten Formel

$$\binom{2m-2\varrho-4}{2\lambda-2\varrho-1}\left[\frac{2m-2\lambda-3}{2\lambda-2\varrho} - 2m\right] = -\binom{2m-2\varrho-4}{2\lambda-2\varrho-1}\frac{2m(2\lambda-2\varrho-1)+2\lambda+3}{2(\lambda-\varrho)}$$

und der Koeffizient von Φ_ϱ in der letzten Formel

$$\binom{2m-2\varrho}{2\lambda-2\varrho}\left[\frac{2m-2\lambda}{2\lambda-2\varrho+1} - 2m\right] = -2\binom{2m-2\varrho}{2\lambda-2\varrho}\frac{2m(\lambda-\varrho)+\lambda}{2(\lambda-\varrho)+1}$$

Daher nimmt das System 17) die Form an

$$18)\quad F\lambda(m) = -\frac{1}{2}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\lambda}\binom{2m-2\varrho-4}{2\lambda-2\varrho-1}\frac{2m(2\lambda-2\varrho-1)+2\lambda+3}{\lambda-\varrho}\Phi_\varsigma(m)$$

$$19)\quad -\lambda\Phi_\lambda(m) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\lambda-1}\binom{2m-2\varrho}{2\lambda-2\varrho}\frac{2m(\lambda-\varrho)+\lambda}{2\lambda-2\varrho+1}\Phi_\varrho(m)$$

Vergleicht man nun mit dieser Formel die Formel

$$14)\quad -\lambda\Psi_\lambda(m) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\lambda-1}\binom{2m-2\varrho}{2\lambda-2\varrho}\frac{2m(\lambda-\varrho)+\lambda}{2\lambda-2\varrho+1}\Psi_\varrho(m)$$

so stellt man völlige Gleichheit fest, abgesehen davon, daß an Stelle von Ψ, Φ tritt. Da nun aber $\Phi_0(m) = \Psi_0(m) = 1$ ist und überdies in der einleitenden Bemerkung gezeigt ist, (obgleich das eben erwähnte bereits allein für den folgenden Schluß genügt), daß $\varphi_1(m) = f_1\left(m-\frac{1}{2}\right)$, also $\Phi_1(m) = -4\varphi_1(m) = -4f_1\left(m-\frac{1}{2}\right) = F_1\left(m-\frac{1}{2}\right) = \Psi_1(m)$ ist, so erhellt, daß allgemein jedes $\Phi_\lambda(m) = \Psi_\lambda(m)$ ist. Es ist also zufolge

13) $\Phi\lambda(m) = F\lambda\left(m - \frac{1}{2}\right)$, woraus sich infolge von 10) ergibt

$$\varphi\lambda(m) = f\lambda\left(m - \frac{1}{2}\right).$$

Für die symmetrischen Elementarfunktionen ist also der in Rede stehende Satz bewiesen. Nun läßt sich aber bekanntlich jede rationale symmetrische Funktion als Funktion der symmetrischen Elementarfunktionen ausdrücken. Daher gilt allgemein der Satz: Jede rationale symmetrische Funktion der Quadrate der ersten m natürlichen Zahlen ist eine Funktion nur von m derart, daß sie, wenn man in ihr m durch $m - \frac{1}{2}$ ersetzt, den Wert der entsprechenden symmetrischen Funktion liefert, die aus den Quadraten der ersten m ungeraden Zahlen gebildet wird.

Anmerkung: Es ist bemerkenswert, daß dieser Satz, der von den Quadraten der ersten m natürlichen Zahlen und den Quadraten der ersten m ungeraden Zahlen spricht, nicht auch von den ersten m natürlichen Zahlen selbst und den Hälften der ersten m ungeraden Zahlen gilt. Denn es ist z. B. die Summe der ersten m natürlichen Zahlen gleich $\frac{1}{2}m(m+1)$. Dieser Ausdruck liefert aber durch die Substitution $m/m - \frac{1}{2}$, die Funktion $\frac{1}{2}\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)$, während die Summe der Hälften der ersten m ungeraden Zahlen $\frac{1}{2}m^2$ ist. In dem angeführten Satz sind also die Worte „Quadrate" und „rational" unentbehrlich.

Ein Dandelinscher Beweis für einen Steinerschen Satz.

Von E. Magin (Hamburg).

In „Crelles Journal", Bd. 45, S. 189—211, hat Steiner über die Kegelschnitte einen Satz folgenden Inhalts analytisch bewiesen. Zeichnet man zu einem Kegelschnitt (Ellipse oder Hyperbel) zwei den Kegelschnitt symmetrisch berührende Kreise mit den Mittelpunkten auf der Hauptachse und zieht von einem Kegelschnittspunkt an diese Kreise die Tangenten, so ist die Summe oder Differenz dieser Tangenten (je nach der Lage des Punktes zu den Berührungspunkten der Kreise und des Kegelschnitts) konstant. Das Verhältnis der Tangente an einen Innenkreis und des Abstandes des Kegelschnittspunktes von der Berührungssehne des Innenkreises und des Kegelschnitts ist konstant $= \frac{b}{a}$.

Die Beweise dieser Sätze in Dandelinscher Betrachtungsart sind außerordentlich einfach. In der Figur 1 ist EE eine den Kegel S in einer Ellipse schneidende Ebene. Es sind zwei beliebige Kugeln M_1 und M_2 konstruiert, welche den Kegel längs m_1 und m_2 berühren. Aus diesen Kugeln schneidet die Ebene EE die Kreise i_1 und i_2 aus. Die Punkte BB (CC) sind die Schnittpunkte von m_1 (m_2) und i_1 (i_2). Da diese Punkte andrerseits Ellipsenpunkte sind, sind sie die Berührungspunkte der Innenkreise mit der Ellipse. BB und CC sind demnach die Berührungssehnen. Wie man leicht sieht, sind von einer bestimmten Grenzlage der Kugeln M an die Berührungspunkte imaginär, die Berührungssehne ist nach wie vor die Schnittgerade der Ebenen m_1 oder m_2 mit EE. P ist eine beliebiger Ellipsenpunkt. Von P sind die Tangenten t_1 und t_2 an die Kreise i_1 und i_2 gezogen.

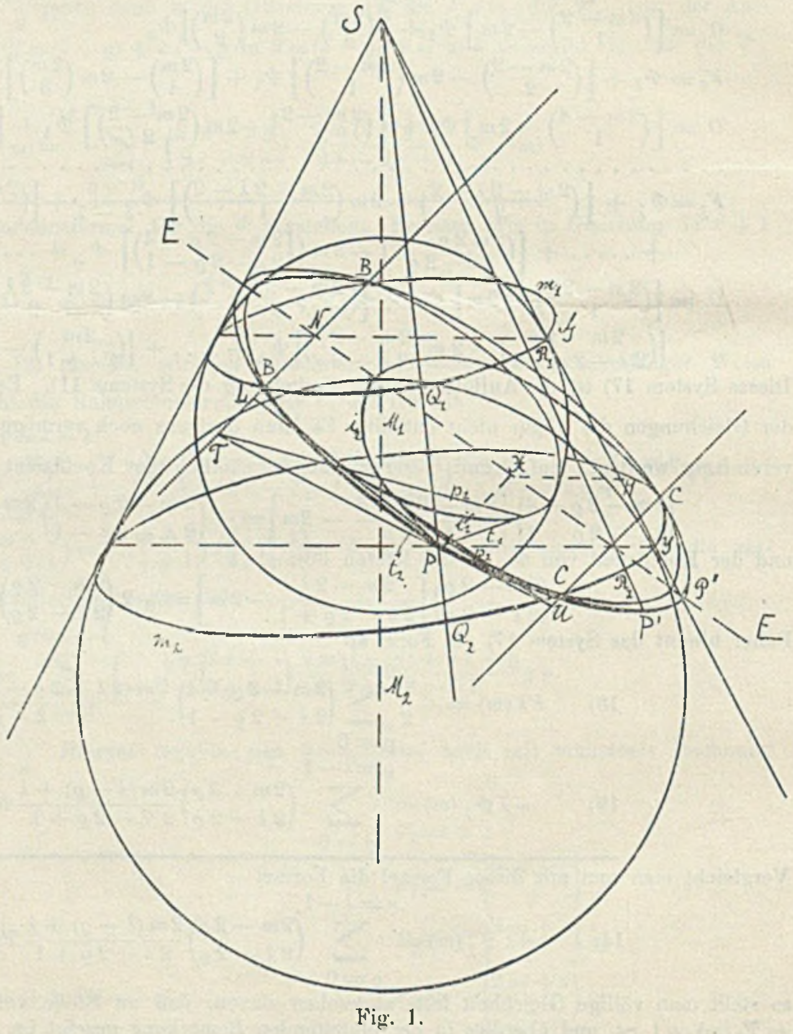


Fig. 1.

Nun ist sofort zu sehen, daß $t_1 = PQ_1$ als Tangente an die Kugel M_1, ebenso $t_2 = PQ_2$. Da $PQ_1 + PQ_2$ konstant ist, ist

$$t_1 + t_2 = c.$$

Ueberschreitet der Punkt P einen (reellen) Berührungspunkt z. B. C, so hat man offenbar

$$t_1 - t_2 = P'R_1 - P'R_2 = c.$$

Die Konstante bestimmt sich leicht aus der Lage P'' des Punktes P. Man hat (Figur 2)

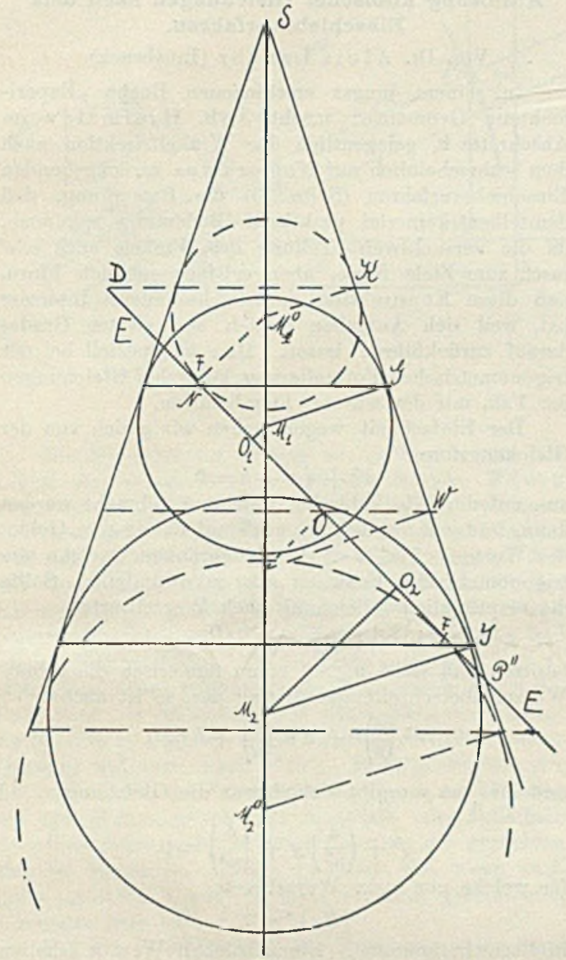


Fig. 2.

$$c = P''G - P''J = GJ.$$

In Figur 2 sind M_1^0 und M_2^0 die Dandelinschen Kugeln, FF die Brennpunkte der Ellipse der Ebene EE. M_1 und M_2 stellen die Kugeln der Figur 1 dar. $M_1 O_1$ und $M_2 O_2 \perp EE$. O_1 und O_2 sind die Mittelpunkte der Kreise i_1 und i_2 der Ebene EE. O ist der Mittelpunkt der Ellipse in EE. Es sei $OF = e$, $OO_1 = d_1$, $WK = a$. Dann gilt wie leicht zu sehen die Proportion:

$$\frac{WG}{WK} = \frac{OO_1}{OF}, \quad WG = \frac{a}{e} \cdot d_1$$

Ebenso ist: $WJ = \frac{a}{e} d_2$, demnach

$$c = \frac{a}{e}(d_1 + d_2).$$

Für $d_1 = d_2 = e$ (Radien der Kreise i_1 und $i_2 = O$) wird

$$c = 2a.$$

Für den Fall, daß $d_1 = d_2 = \frac{e^2}{a}$ gehen i_1 und i_2 in die Krümmungskreise über, und es wird

$$c = 2e.$$

Der Beweis zum zweiten Teil des Satzes folgt so. Durch P (Fig. 1) sei eine Ebene $// m_1, m_2$ gelegt, die EE in $PX \perp$ der Geraden EE schneidet, die Zeichenebene in XH. Dann ist für jede Lage des Punktes P $NX : NP'' = GH : P''G$. Nun ist $NX = PL =$ dem Abstand des Punktes P von der Berührungssehne $BB \cdot GH = PQ_1 = t_1$, mithin:

$$\frac{NX}{HG} = \frac{PL}{t_1} = \frac{NP''}{P''G}.$$

Aus Figur 2 aber ist

$$\frac{NP''}{P''G} = \frac{DP''}{P''R} = \frac{a}{e}.$$

Ferner folgt aus den Beziehungen über Pol und Polare, daß die Polare p_1 des Punktes P inbezug auf Kreis i_1 die Ellipsentangente des Punktes P in T auf BB trifft, die Polare p_2 von P zu i_2 sich mit der Tangente P in U auf CC schneidet.

Für die Parabel wird $t_1 = PL$.

Alle diese Beziehungen werden für den Fall, daß die Kugeln M_1 und M_2 in die Lage der Dandelinschen Kugeln übergehen, zu den entsprechenden Brennpunktseigenschaften.

Das konstruktive Prinzip der Maginschen Kegelschnittbehandlung.

Von Dr. Alois Lanner (Innsbruck).

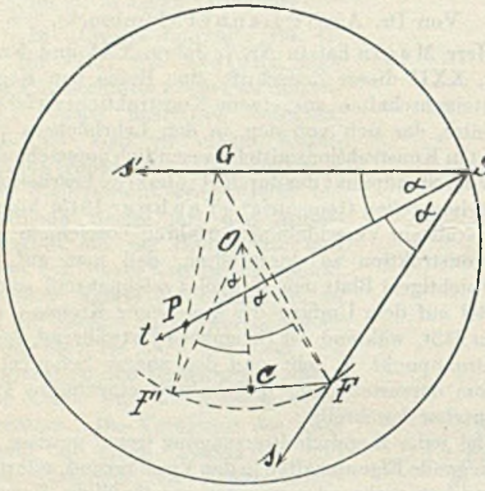
Herr Magin hat in Nr. 7, Jahrg. XXI und Nr. 2, Jahrg. XXII dieser Zeitschrift eine Reihe von Kegelschnitteigenschaften aus einem Konstruktionsverfahren abgeleitet, das sich von den in den Lehrbüchern verwendeten Konstruktionsmitteln wesentlich unterscheidet.

Vom Standpunkt der durch Hjelmslev bearbeiteten „Experimentellen Geometrie" (Teubner 1915) könnte man es als ein Verschiebungsverfahren bezeichnen und die Konstruktion so durchführen, daß man auf ein (durchsichtiges) Blatt den Winkel α zeichnet und seinen Scheitel auf dem Umfang des gegebenen Kreises O (R) gleiten läßt, während der Schenkel s fortwährend durch den Brennpunkt F geht und der andere Schenkel s' die vom darzustellenden Kegelschnitt eingehüllte Tangentenschar beschreibt.

Bei jeder Kegelschnitterzeugung treten gewisse ihr naheliegende Eigenschaften in den Vordergrund, während die anderen mehr oder weniger umständliche Beweise und Hilfssätze erfordern. Besonders auffällig ist dies im Unterschied zwischen analytischer und synthetischer Behandlung. Erstere stützt sich auf die Koordinatengleichungen, die in den Lehrbüchern fast ausschließlich in der auf den Mittelpunkt bezogenen Form Verwendung finden. Die Behandlung auf Grund projektiver Eigenschaften dürfte relativ selten zur Anwendung kommen. Eine um so größere Rolle spielt die Konstruktion, die mit oder ohne Benützung einer Schnur durchgeführt wird und zugleich den Ausgangspunkt für die Ableitung der analytischen Formeln bildet. Vielfach wird eine Eigenschaft oder ein Lehrsatz erst dann als gesichert hingestellt, wenn er „analytisch bewiesen" ist.

Es liegt in der Natur der Maginschen Kegelschnitt-Konstruktion, daß gerade die Berührungsaufgaben und -Konstruktionen in den Vordergrund treten. Zu einer gegebenen Geraden die parallelen Tangenten zu ziehen, ist bei ihr viel einfacher als die Scheitelpunkte zu bestimmen, wenn nur O, F und α gegeben sind. Dagegen findet eine noch primitivere Aufgabe gerade beim verbreitetsten Verfahren der Ellipsenkonstruktion selten die ihr gebührende Aufmerksamkeit und wird nur in der darstellenden Geometrie entsprechend betont. Man lege einem Schüler der obersten Klassen, falls er sie nicht von dort her kennt, die Aufgabe vor, die Schnittpunkte einer vorgezeichneten Geraden mit einer nur aus den Halbachsen bekannten Ellipse zu konstruieren. Er wird sich wahrscheinlich mit dem Versuche begnügen, in der Nähe liegende Ellipsenpunkte zu zeichnen. Daß man so den gesuchten Punkt nur durch Interpolation findet, fällt ihm ohne Anleitung kaum auf. Anders gestaltet sich die Sache, wenn man das von Hjelmslev behandelte Verschiebungs- und Einschiebungsverfahren als Konstruktionsmittel gelten läßt, das seinem Wesen nach dieselbe Berechtigung beanspruchen kann wie jedes Anlegen eines Lineals und das Ziehen eines Kreises mit dem Zirkel. Die Verwendung der Schnur zum Zeichnen von Kegelschnitten ist vom Standpunkt der Anschaulichkeit vortrefflich, aber praktich mit großen Nachteilen und noch mehr Fehlerquellen behaftet.

In den angeführten Magin schen Aufsätzen wird die Bestimmung einzelner und beliebiger Kegelschnittpunkte und die der Schnittpunkte mit einer Geraden nicht berührt. Behufs ihrer Verwertung für den Unterricht und zur Förderung des Verständnisses dieses Verfahrens möge dies ergänzend mitgeteilt werden.



Mit dem Brennpunkt F, dem Kreismittelpunkt O, seinem Radius R und dem Winkel α ist der ganze Kegelschnitt bestimmt und für jede Lage der erzeugenden Tangente t auch deren Berührungsqunkt P festgestellt. Da für jede Tangente dieser auf der Verbindungslinie des zweiten Brennpunktes mit dem symmetrischen Punkt des ersten liegt, so können wir folgendermaßen verfahren. Wir zeichnen auf das (durchsichtige) Verschiebungsblatt den Winkel 2α, dessen Winkelsymmetrale t ist. Seinen Scheitel verschieben wir auf dem Umfang des Kreises $O(R)$, indessen der eine Schenkel s fortwährend durch den Brennpunkt F geht. Zu F konstruieren wir auf dem Verschiebungsblatt den zu t symmetrischen Punkt G. Dann schneidet GF' die Tangente t im gesuchten Kurvenpunkt P. Trägt das Verschiebungsblatt eine zu t senkrechte Millimetereinteilung, so ist der Punkt G sofort ersichtlich und P durch Anlegen eines Lineals zu finden. Damit sind wir nicht nur in die Lage versetzt, beliebige Punkte auf dem Kegelschnitt selbst, sondern auch durch bloße Verschiebungen Punkte zu ermitteln, die noch auf irgend einer anderen vorgezeichneten Kurve liegen. Es handelt sich somit in diesem Falle um das Zusammentreffen dieser Kurven in demselben Punkte. Die Herbeiführung der Koinzidenz mit Hilfe des Verschiebungsblattes eröffnet ein weites Gebiet von Anwendungen, die sich obendrein durch ihre große Anschaulichkeit auszeichnen, und sie ist eben die eigentliche Grundlage der Maginschen Kegelschnittkonstruktionen.

Auflösung kubischer Gleichungen nach dem Einschiebeverfahren.

Von Dr. Alois Lanner (Innsbruck).

In seinem jüngst erschienenen Buche „Experimentelle Geometrie" macht Joh. Hjelmslev im Abschnitte 9, gelegentlich der Winkeltrisektion nach dem wahrscheinlich auf Nemorarius zurückgehenden Einschiebeverfahren (Seite 30) die Bemerkung, daß demselben keinerlei praktische Bedeutung zukomme, da die versuchsweise Teilung des Winkels auch sehr rasch zum Ziele führe, aber er fügt sogleich hinzu, daß diese Konstruktion deshalb besonderes Interesse hat, weil sich Aufgaben dritten und vierten Grades darauf zurückführen lassen. Dies ist speziell bei der trigonometrischen Formulierung kubischer Gleichungen der Fall, mit der wir uns hier befassen.

Der Einfachheit wegen gehen wir gleich von der Gleichungsform:

$$x^3 + a x + b = 0$$

aus, auf die jede kubische Gleichung gebracht werden kann, und wir wollen sie noch auf das engere Gebiet der Werte $-1 < x < +1$ beschränken, welche die trigonometrische Funktion $x = \cos \alpha$ umfaßt. Sollte die ursprüngliche Gleichung auch Wurzelwerte

$$(x_\lambda) > 1 > 0$$

besitzen und stellt $n > 0$ einen numerisch die größte Wurzel überschreitenden Betrag dar, so ist auch

$$n^3 \left(\frac{x}{n}\right)^3 + n\,a \left(\frac{x}{n}\right) + b = 0$$

und für $\frac{x}{n} = y$ ergibt sich daraus die Gleichung

$$y^3 + \left(\frac{a}{n^2}\right) y + \left(\frac{b}{n^3}\right) = 0,$$

für welche nur mehr Wurzelwerte

$$(y_\lambda) < +1$$

in Betracht kommen. Einen solchen Wert n erhalten wir, wenn $n^3 > (a)\,n + (b)$ oder

$$\sqrt[3]{(a)\,n + (b)} > n$$

gewählt wird, oberhalb welcher Zahl Wurzelwerte ausgeschlossen sind. Es ist dann $x_\lambda = n\,y_\lambda$.

Dies vorausgesetzt läßt sich für obige Gleichungsform ein Lösungsverfahren anwenden, das sich aus folgender Ableitung ergibt.

Da $$\cos 3\,\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

so ist

$$a' \cos \alpha - \cos 3\,\alpha = a' \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha + 3 \cos \alpha = b',$$

wenn $$\cos^3 \alpha - \frac{a' + 3}{4} \cos \alpha + \frac{b'}{4} = 0.$$

Soll demnach $\cos^3 \alpha + a \cos \alpha + b = 0$ und machen wir

$$a' = -(4\,a + 3) \text{ und } b' = 4\,b,$$

so folgt: $$a' \cos \alpha - \cos 3\,\alpha = b'.$$

Diese Beziehung läßt sich mechanisch auf folgendem Wege nach dem Einschiebungsverfahren von Hjelmslev herstellen. Wir zeichnen auf Millimeterpapier um den Koordinaten-Anfangspunkt 0 einen Kreis mit dem Halbmesser $r_1 = 1$ und einen zweiten konzentrischen Kreis mit dem Halbmesser $r_2 = a'$. Dann stellen wir einen rechten Winkel $NMP = 90^0$ nach Art eines rechtwinkligen Lineals her, auf dessen einem Schenkel wir $NM = b'$ auftragen und verwenden noch ein zweites Lineal mit der Strecke $RS = 2$. (Fig. 1.)

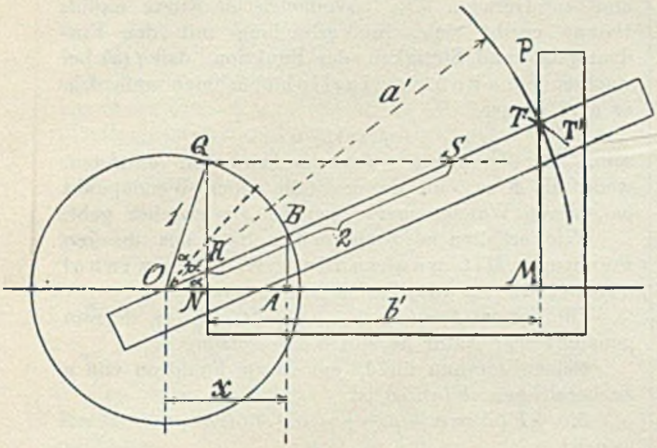


Fig. 1.

Die Einschiebung erfolgt so, daß einerseits das Lineal RS durch O geht und die Strecke $RS = 2$ zwischen $QN\ (\perp OM)$ und $QS\ (// OM)$ liegt, während andererseits der rechte Winkel NMP mit dem Schenkel $NM = b'$ auf OM fällt und der zweite Schenkel MP mit dem Lineal RS sich in einem Punkt T' des Kreises $O\ (a')$ schneidet. In diesem Fall ist, $\measuredangle MOS = a$ gesetzt, $MOQ = 3a$, $ON = \cos 3a$, $OM = a' \cos a$ und somit $NM = OM - ON = a' \cos a - \cos 3a = b'$. Gelingt es, einen solchen Punkt T' zu finden, so ist die Projektion von $OB = 1$ auf OM, nämlich $OA = \cos a = x$. Es handelt sich hierbei um das Zusammentreffen zweier Geraden auf dem Kreis $O\ (a')$. Beim Aufsuchen der Lösungen kann man von Schnittpunkten der Geraden OS und MP ausgehen, die innerhalb oder außerhalb desselben fallen und aus deren Lage die des gesuchten Punktes feststellen. Damit gelangen wir, wenn auch nicht „geraden Weges" so doch auf sanft gekrümmten Umwegen zum Ziel.

Bei der Durchführung auf Millimeterpapier kann man, ohne die Linien $QN \perp OM$ und $QS // OM$ auszuziehen, sich lediglich durch die Millimeterlinien leiten lassen und einen Schnittpunkt T' außerhalb oder innerhalb des Kreises in seiner Bewegung bei fortschreitender Verschiebung verfolgen. Dieses Verfahren ist insofern beachtenswert, als für die Lösung nur Punkte eines nach der Wahl des Maßstabes begrenzten Gebietes in Betracht kommen. Die Dreizahl der Lösungen erscheint darin anschaulich begründet, daß die vom Schnittpunkt T' beschriebene Kurve außerhalb des Kreises $O\ (a')$ beginnt und innerhalb desselben endigt und außerdem noch in einer Biegung den Umfang zweimal durchsetzt, falls die beiden anderen Lösungen reell sind.

Ueber einige Maxima und Minima.

Von O. Gründler (Spandau, Ev. Johannesstift).

Die nachfolgenden Untersuchungen verdanken ihre Entstehung einer graphischen Darstellung des Minimums der Ablenkung, die Prof. Masche in einer Sitzung des Vereins zur Förderung des physikalischen Unterrichts in Berlin zeigte. Es trat dabei zu Tage, daß unmittelbar aus der Umkehrbarkeit des Strahlenganges des Lichtes erschlossen werden kann, daß beim symmetrischen Strahlengang ein extremer Wert eintritt. Es soll daher im Folgenden an diesen physikalischen Vorgang angeknüpft werden, die Ablenkung auf eine etwas andere Weise graphisch dargestellt und dann die allgemeine Gesetzmäßigkeit, die hier zugrunde liegt, mathematisch untersucht werden.

Wenn wir den Einfallswinkel a, den Austrittswinkel β, den Winkel der brechenden Kante γ und die Ablenkung δ nennen, so gilt bekanntlich die Formel

$$\delta = a + \beta - \gamma$$

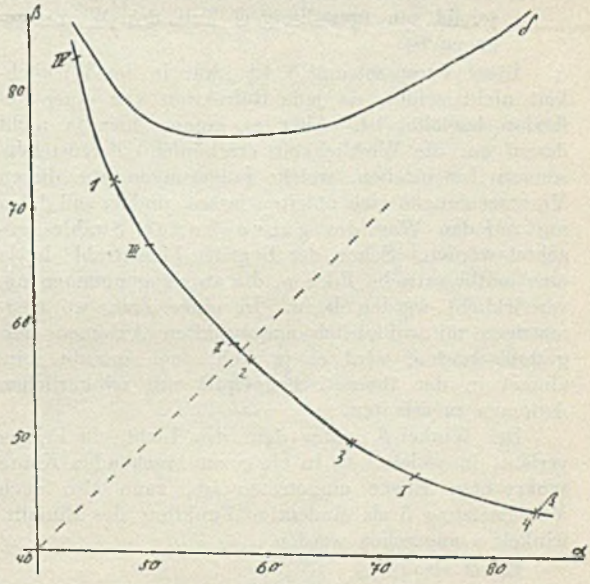
Mit einem Flintglasprisma mit dem brechenden Winkel $\gamma = 60^0$ wurden für vier Winkel a die entsprechenden Winkel β bestimmt. Es ergaben sich folgende Paare $(a; \beta)$:

1. $(48^0; 74{,}5^0)$, 2. $(59{,}5^0; 58{,}5^0)$, 3. $(69^0; 51{,}5^0)$, 4. $(84^0; 44{,}5^0)$.

Wegen der Umkehrbarkeit des Lichtweges ergeben sich folgende weitere 4 Paare, die mit römischen Ziffern bezeichnet sind.

I. $(74{,}5^0; 48^0)$, II. $(58{,}5^0; 59{,}5^0)$, III. $51{,}5^0; 69^0)$, IV. $(44{,}5^0; 84^0)$.

In der Figur sind nun auf der Abszissenachse die Werte a abgetragen, und als Ordinaten die dazugehörigen Werte β. Um der Raumersparnis willen beginnt die Zählung an dem Schnittpunkte der Ordinatenachsen mit 40^0 für beide Werte. So werden die Punkte 1- 4 und I—IV der Figur gefunden. Diese sind durch eine Kurve verbunden, die die Abhängigkeit des Winkels β von a darstellt. Da die mit



gleicher arabischer und römischer Ziffer bezeichneten Punkte symmetrisch zu der Winkelhalbierenden der Achsen, die in der Figur gestrichelt gezeichnet ist, liegen, so ist die ganze Kurve symmetrisch zu diesen Geraden.

Ferner ist für jeden Punkt der Wert $(a + \beta)$ gebildet, [oder genauer der Wert von $(a - 40^0) + (\beta - 40^0)$]. Die so entstandenen Werte unterscheiden sich nur durch eine Konstante von δ und zeigen daher die Abhängigkeit des Winkels δ von a. In der Figur ist die Kurve darum mit δ bezeichnet.

Es ist die Unsymmetrie der Kurve δ zu beachten. Das sehr flache Minimum zeigt an, warum es so gut gelingt, den Minimalwert von δ scharf zu bestimmen. Eine Abweichung des Winkels α vom richtigen Wert selbst um einige Grade gibt kaum einen merklichen Fehler für δ.

Da die Summe $\alpha + \beta$ bei zwei mit gleicher arabischer und römischer Ziffer bezeichneten Werten gleich ist, so geht daraus hervor, daß jede Parallele zur α Achse die Kurve δ in (wenigstens) 2 Punkten schneidet; nur dem Punkte, in dem die Kurve β die Symmetrieachse schneidet, entspricht kein zweiter Punkt. Also ist die Parallele zur α Achse in diesem Falle eine Tangente, und der Wert von δ ist für diesen Fall ein extremer Wert, — wie der Versuch lehrt, ein Minimum.

Das in dem Falle des „symmetrischen Strahlenganges" ein extremer Wert der Ablenkung eintreten muß, kann also aus folgenden Voraussetzungen ohne jeden Versuch abgeleitet werden:

1. Im homogenen Medium geht der Strahl geradlinig.
2. Der Weg des Lichtstrahls ist immer umkehrbar.
3. Beim Uebergang aus einem Medium in ein anderes entspricht einer stetigen Aenderung der Richtung des eintretenden Strahles eine stetige Aenderung der Richtung des gebrochenen Strahles.
4. Beim Uebergang aus einem Medium in ein anderes bleibt der Lichtstrahl in der durch das Einfallslot und den eintretenden Strahl bestimmten Ebene.
5. Der Weg des Lichtstrahls ist eindeutig bestimmt, sobald ein (geradliniger) Teil des Weges gegeben ist.

Diese Voraussetzung 5 ist zwar in der Wirklichkeit nicht erfüllt, da jede Refraktion von einer Reflexion begleitet ist. Aber es kommt hier ja nicht darauf an, die Wirklichkeit erschöpfend darzustellen, sondern festzustellen, welche Folgerungen aus diesen Voraussetzungen sich ableiten lassen, und es soll dabei nur auf den Weg des g e b r o c h e n e n Strahles geachtet werden. Schon der Begriff „Lichtstrahl" ist ja eine mathematische Fiktion, die streng genommen nie verwirklicht werden kann. In einer Zeit, wo Geometrieen mit willkürlich ausgewählten Axiomen aufgestellt werden, wird es ja wohl auch erlaubt sein, einmal in der theoretischen Optik mit willkürlichen Axiomen zu arbeiten.

Der Winkel β, unter dem das Licht ein Prisma verläßt, in welches es in einer zur brechenden Kante senkrechten Ebene eingetreten ist, kann also nach Voraussetzung 5 als eindeutige Funktion des Einfallswinkels α angesehen werden.

Es ist also

1. $$\beta = f(\alpha).$$

Dieselbe Funktion gestattet aber nach Voraussetzung 2 den Winkel α aus β abzuleiten. Es ist also auch

2. $$\alpha = f(\beta).$$

Derartige Funktionen z w e i e r Variabeln, in der man die beiden Variabeln vertauschen kann, wollen wir „u m k e h r b a r e" Funktionen nennen.

Nehmen wir nun einen beliebigen Wert α_1 an, so können wir ihn immer so wählen, daß, (abgesehen von dem Falle, daß $f(\alpha)$ immer gleich α ist, den wir ausschließen wollen), $\alpha_1 < f(\alpha_1)$, also $\alpha_1 < \beta_1$ ist. Lassen wir nun α von α_1 wachsen, bis es gleich β wird und bezeichnen den neuen Wert mit α_2, (den dazugehörigen Wert mit β_2), so ist

3. $$f(\alpha_2) = \alpha,$$

wegen der Umkehrbarkeit der Funktion f. Während α von α_1 bis α_2 gewachsen ist, hat $f(\alpha)$ von α_2 bis α_1 abgenommen. Es ist klar, daß die Funktion, wie oben, eine zur Geraden $\alpha = \beta$ symmetrische Kurve ergibt. Daraus ergibt sich, in Verbindung mit der Eindeutigkeit und Stetigkeit der Funktion, daß $f(\alpha)$ bei wachsendem α k o n t i n u i e r l i c h abnehmen muß, d. h. es muß immer

4. $$f'(\alpha) \lesseqgtr 0$$

sein. Der Grenzfall $f'(\alpha) = 0$ kann nur eintreten, wenn die Kurve an dieser Stelle einen Wendepunkt hat, deren Wendetangente parallel zur α Achse geht.

Wir erhalten also als ersten Satz aus unseren Prämissen: M i t w a c h s e n d e m E i n f a l l s w i n k e l n i m m t d e r A u s t r i t t s w i n k e l a b.

Die Formel $\delta = \alpha + \beta - \gamma$ ergibt sich, da sie rein geometrischer Natur ist, aus Voraussetzung 4.

Setzen wir nun für δ, um es als Funktion von α zu bezeichnen, $F(\alpha)$, so ist

5. $$F(\alpha) = \alpha + \beta - \gamma = \alpha + f(\alpha) - \gamma;$$

also ist

6. $$F'(\alpha) = 1 + f'(\alpha).$$

Folglich tritt ein extremer Wert von δ nur ein für den Fall

7. $$f'(\alpha) = -1.$$

Nun ist $f'(\alpha) = \frac{d\beta}{d\alpha}$, $f'(\beta) = \frac{d\alpha}{d\beta}$, also

8. $$f'(\alpha) \cdot f'\beta = 1.$$

Da α und β in entgegengesetztem Sinne sich verändern, so folgt daraus, wegen der Stetigkeit beider Veränderungen, daß es einen Wert $\alpha_0 = \beta_0$ geben muß. Dann ist natürlich auch

9. $$f'(\alpha_0) = f'(\beta_0).$$

Aus Gleichung 9 in Verbindung mit Gleichung 7 folgt aber $f'(\alpha) = \pm 1$. Der Fall $f'(\alpha) = +1$ ist ausgeschlossen wegen Gleichung 4. (Dieser Fall $f'(\alpha) = +1$ würde nur verwirklicht werden, wenn α identisch gleich β wäre, was oben abgelehnt ist.)

Hieraus geht hervor, daß

10. $$F'(\alpha_0) = 1 + f'(\alpha_0) = 0$$

ist, d. h. b e i „s y m m e t r i s c h e m S t r a h l e n g a n g" h a t δ e i n e n e x t r e m e n W e r t.

Die obige Betrachtung läßt sich noch leicht verallgemeinern. Wenn y eine beliebige „umkehrbare" Funktion von x ist (mit Ausnahme von $x = y$), und z eine beliebige Funktion von x und y, die ihren Wert nicht ändert, wenn x und y vertauscht werden (eine „vertauschbare" Funktion von x und y), so ist z_0 für den Fall $x_0 = y_0$ ein Maximum oder Minimum.

Es ist dann nämlich

11. $$\frac{dz}{dx} = \frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta F}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Nun ist dann aber, wie oben in Gleichung 7 nachgewiesen ist, $f'(x_0) = -1$. Da aber $F(x, y)$ eine „vertauschbare" Funktion von x und y ist, so ist

$$\frac{\delta F(x_0, y_0)}{\delta x} = \frac{\delta F(x_0, y_0)}{\delta y},$$

also ist

$$\frac{dz_0}{dx_0} = 0.$$

Auf diese Weise ergeben sich eine große Anzahl Anwendungen. Unter allen umfangsgleichen Rechtecken hat das Quadrat einen „ausgezeichneten" Inhalt;

unter den inhaltsgleichen Rechtecken hat das Quadrat einen „ausgezeichneten“ Umfang. Der Abstand von Bild und Gegenstand bei der Linse, der Lichtweg zwischen Bild und Gegenstand beim Hohlpiegel hat einen „ausgezeichneten“ Wert für den Fall, daß Bildweite gleich Gegenstandsweite ist. Hierbei braucht man wieder die Linsen- bezw. Hohlspiegelformel garnicht zu kennen, sondern es genügt auch hier der Satz von der Umkehrbarkeit des Lichtweges.

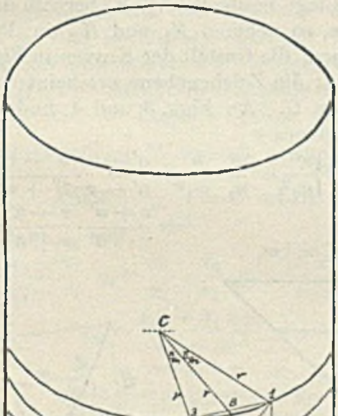
Es zeigen sich hier klare Beziehungen zu der ganz anders gearteten Behandlung der Maxima und Minima von Liebermann (Jahrg. XXII, Nr. 2). Wenn dort die „Bedingungsgleichung“ eine „umkehrbare“ Funktion von x ist, und zugleich die Kurvenschar $z = F(x, y)$ eine „vertauschbare“ Funktion von x und y darstellt, so ist die ganze Figur symmetrisch zur Geraden $x = y$, und der extreme Wert tritt ein für den Fall $x_0 = y_0$.

Kritische Bemerkungen zu einer Grenzwertbestimmung.

Von O. Gründler (Spandau), Ev. Johannesstift.

In Weber und Wellstein, Encykl. der Elementar-Mathematik, Bd. II, S. 558 f findet sich folgende Betrachtung:

„Denkt man sich eine krumme Oberfläche, z. B. eine Kugel oder einen Zylinder von einem Netz aus Punkten überzogen, und je drei dieser Punkte zu einem ebenen Dreieck verbunden, so erhält man ein der gegebenen Fläche eingeschriebenes Polyeder, und es könnte scheinen, daß die Oberfläche dieses Polyeders, wenn man die Punkte auf der Fläche unendlich dicht nimmt, die gegebene Oberfläche zur Grenze habe. Daß dies aber nicht allgemein richtig ist, hat zuerst H. A. Schwarz bemerkt, und wird durch folgendes Beispiel bewiesen.



Wir wollen eine Zylinderfläche vom Radius r und der Höhe h betrachten. Wir teilen diese Höhe in n Teile, deren jeder die Höhe $\frac{h}{n}$ hat, und die Peripherie eines jeden Teilkreises in m Teile, deren jeder den Winkel $\frac{2\pi}{m}$ faßt; wir verschieben aber die Teilpunkte auf jedem folgenden Kreise um $\frac{\pi}{m}$, wie die Figur zeigt.“ *

Nun wird nachgewiesen, daß die Oberfläche dieses Polyeders

$$2 r m n \sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{h^2}{n^2}+4 r^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4}$$

ist (der Faktor 2 fehlt irrtümlicher Weise)** oder, indem man für unendlich kleine Winkel den Sinus durch den Winkel ersetzt,

$$2\pi r\sqrt{h^2+\pi^4 r^2\frac{n^2}{4m^4}}$$

„Lassen wir,“ heißt es dann weiter, „n und m unabhängig von einander ins Unendliche wachsen, so ist dieser Ausdruck ganz unbestimmt. Er erhält aber den Grenzwert $2\pi r h$, wenn $n : m$ in einem endlichen Verhältnisse bleibt. Er kann aber auch ins Unendliche wachsen, z. B. wenn man $n = m^3$ setzt. Es ist aber immer die Fläche des Zylinders $2\pi r h$ die untere Grenze aller Werte, deren der obige Ausdruck fähig ist.“ Die letztere Behauptung ist nicht richtig. Sie ist zwar unbestritten, wenn man von der Form

$$2\pi r\sqrt{h^2+\pi^4 r^2\frac{n^2}{4m^4}}$$

ausgeht. Aber es ist dabei übersehen, daß bei diesem Ausdruck schon ein Grenzübergang vorgenommen ist, indem für den Sinus der Winkel gesetzt ist. Der Winkel bildet aber die obere Grenze des Sinus. Gehen wir von der Form aus:

$$2 r m n \sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{h^2}{n^2}+4 r^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4}$$

$$= 2 r m \sin\frac{\pi}{m}\sqrt{h^2+4 r^2 n^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4},$$

so ist die $2\pi r$ die obere Grenze des Ausdrucks vor der Wurzel, h die untere Grenze der Wurzel, wenn $m : n$ in einem endlichen Verhältnis bleibt, was im Folgenden stets vorausgesetzt werden soll. Lassen wir den Faktor $2r$, der auf die Untersuchung ohne Einfluß bleibt, fort, so können wir für den obigen Ausdruck schreiben $(\pi - \delta)(h + \varepsilon)$, wo δ und ε Werte bedeuten, die für $m = \infty$ und $n = \infty$ verschwinden. Ob πh die obere oder untere Grenze bildet, hängt nur davon ab, ob δh oder $\varepsilon\pi$ größer ist, denn $\delta\varepsilon$ wird von höherer Ordnung als δ und ε unendlich klein.

Bilde ich nun zunächst, um δ zu bestimmen, die Reihe für $m \sin\frac{\pi}{m}$ auf zwei Glieder, so erhalte ich

$$\pi - \frac{\pi^3}{6 m^2},$$

also ist

$$\delta = \frac{\pi^3}{6 m^2}.$$

Die Wurzel wird nach dem binomischen Lehrsatz gezogen, wobei die Reihe auch mit dem zweiten Gliede abgebrochen wird. Der Wert der Wurzel ist dann

$$h + 2\frac{r^2}{h} n^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4$$

also ist

$$\varepsilon = 2 n^2\frac{r^2}{h}\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4.$$

* Die Figur wurde mit Erlaubnis des Verlegers der Encyklopädie von Weber-Wellstein, Bd. II, S. 559 entnommen.

** Anmerkung der Redaktion. In der neuesten (3.) Aufl. findet sich der Faktor.

Nun ist $\delta h = \frac{h\pi^3}{6m^2}$, $\varepsilon\pi = 2n^2\pi\frac{r^2}{h}\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4$.
Folglich hat der oben gefundene Ausdruck den Zylindermantel zur oberen Grenze, wenn

$$\frac{h\pi^3}{6m^2} > 2n^2\pi\frac{r^2}{h}\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4,$$

oder wenn

$$\frac{h}{n} > \frac{r\pi}{2m}\sqrt{3}$$

ist, wo jetzt für den Sinus wieder der Winkel eingesetzt ist.

Wie also die Polyederfläche größer wird als der Zylinder, wenn $\frac{h}{n}$ klein wird, und sogar unendlich groß werden kann, wenn n im Verhältnis zu m sehr groß wird ($n = m^3$), so kann auch die Polyederfläche „kleiner" als der Zylinder sein, wenn $\frac{h}{n}$ „groß" bleibt, oder wenn $n < m\frac{2h}{r\pi\sqrt{3}}$ ist. Für unendlich großes n und m hat es aber auch in diesem Falle die Zylinderfläche als (obere) Grenze.

Pol und Polare am Kreise mit Ausblick auf die Schnitte am beliebig schiefen Kreiskegel.

Von Carl Herbst, Dipl.-Ing., Westfälische Bergschule (Bochum).

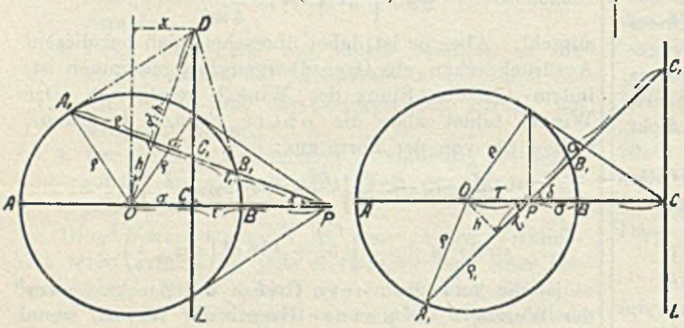


Fig. 1. Fig. 2.

An den Figuren liest man ab:

$$\text{Fig. 1.}\quad \cos\delta = \frac{\tau_1}{\tau} = \frac{\tau - \sigma}{\tau_1 - \sigma_1}$$

$$\text{Fig. 2.}\quad \cos\delta = \frac{\tau_1}{\tau} = \frac{\sigma - \tau}{\sigma_1 - \tau_1} = \frac{\tau - \sigma}{\tau_1 - \sigma_1}$$

Mithin ist in beiden Fällen

$$\tau_1^2 - \sigma_1\tau_1 = \tau^2 - \sigma\tau = \tau^2 - \varrho^2 = \tau^2 - h^2 - (\varrho^2 - h^2) = \tau_1^2 - \varrho_1^2$$

d. h. $\varrho_1^2 = \sigma_1 \cdot \tau_1$.

Daraus folgt einerseits

$$\frac{\varrho_1}{\sigma_1} = \frac{\tau_1}{\varrho_1} \qquad \frac{\varrho_1 + \sigma_1}{\varrho_1 - \sigma_1} = \frac{\varrho_1 + \tau_1}{\tau_1 - \varrho_1},$$

also $A_1\,B_1\,C_1\,P$ harmonische Punkte (Fig. 1) und andererseits

$$\frac{\varrho_1 + \tau_1}{\varrho_1 - \tau_1} = \frac{\varrho_1 + \sigma_1}{\sigma_1 - \varrho_1},$$

daher $A_1\,B_1\,P\,C_1$ harmonische Punkte (Fig. 2).

In Fig. 1 ist noch

$$x = \frac{\varrho^2}{h}\cdot\sin\delta = \frac{\varrho^2}{h}\cdot\frac{h}{\tau} = \frac{\varrho^2}{\tau} = \sigma,$$

so daß D auf L liegt; seine Berührungssehne (Polare) geht durch den Pol P von L.

Diese wenigen Gesetze genügen zur Aufstellung der bekannten Sätze über Pol und Polare am Kreise; die weitere Benutzung des Satzes von Pappus zur Uebertragung jener Sätze auf die Kegelschnitte kann hier ebenfalls als bekannt gelten.

Immerhin scheinen mir für die Kegelschnittslehre auf der Schule die nachstehenden Entwicklungen von einigem Belang.

Figg. 3 und 4 zeigen einen beliebigen Kreiskegel mit den Schnittkurven K_1 und K_2. Bei beiden ist

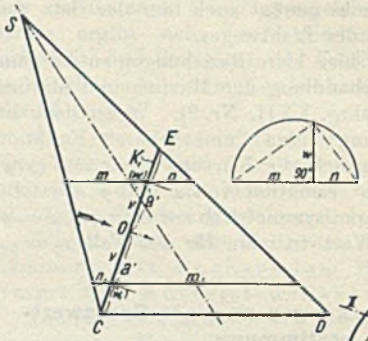


Fig. 3.

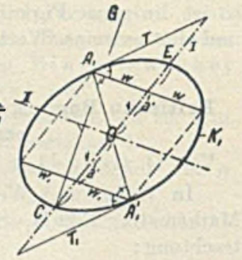


Fig. 3a.

der Durchmesser CD des Grundkreises in der Zeichenebene, die Kegelspitze S beliebig oberhalb oder unterhalb dieser Ebene zu denken. Die Ebene SCD enthält die Kegelachse, den Ort für die Mittelpunkte der wagerechten Parallelkreise des Kegels. In Fig. 3 ist CE die Schnittgerade von SCD und der Ebene von K_1, in Fig. 4 ist $C'H$ die Schnittgerade von SCD und der Ebene von K_2.

Liegt beispielsweise S oberhalb der Zeichenebene, so nehmen K_1 und K_2, in Pfeilrichtung gesehen, die Gestalt der Kurven in Figg. 3a. und 4a. an; die Zeichenebene erscheint darin als die Gerade G. An Figg. 3 und 4 findet man nun für ein beliebiges v

$$\left.\begin{aligned} w^2 &= m\cdot n \\ w_1^2 &= m_1\cdot n_1 \end{aligned}\right\}\frac{w^2}{w_1^2} = \frac{m}{n_1}\cdot\frac{n}{m_1} = \frac{a'+v}{a'-v}\cdot\frac{a'-v}{a'+v} = 1 \text{ (Fig. 3)}$$

$$= \frac{v+a'}{v-a'}\cdot\frac{v-a'}{v+a'} = 1 \text{ (Fig. 4)}$$

Also ist $|w| = |w_1|$.

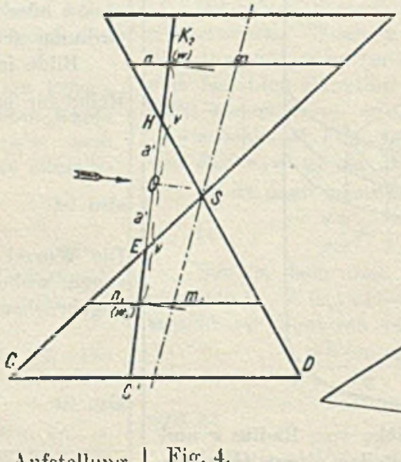


Fig. 4.

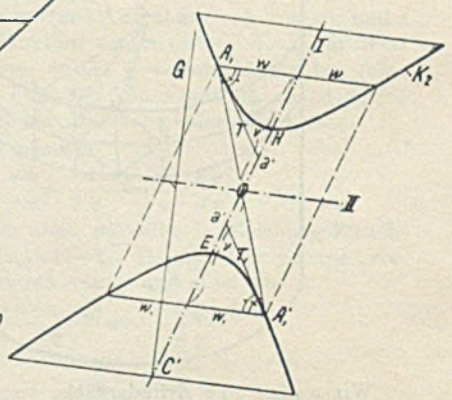


Fig. 4a.

Die Kurven K_1 und K_2 sind demnach, außer zur Achse I, auch zur Achse II symmetrisch. Für jedes beliebige v (Figg. 3a. und 4a.) geht mithin die Sehne $A_1 A_1'$ durch 0 und wird in 0 halbiert; 0 erweist sich daher als Mittelpunkt der Kurven, jede durch 0 gehende Sehne als Durchmesser. Weiter erkennt man aus Gründen der Symmetrie, daß die Tangenten T und T_1 der Endpunkte eines Durchmessers parallel sein müssen. (Pol des Durchmessers im Unendlichen).

Diese Ergebnisse ermöglichen eine überaus einfache Ableitung der Gleichung von K_1 sowohl für endliche als unendliche Erstreckung; der Form nach ist diese Herleitung bekannt, so daß sie hier übergangen werden kann. Will man keine weiteren Kenntnisse voraussetzen, so stößt man jedoch bei Aufstellung der Gleichung von K_2 auf einige Schwierigkeiten. Wie diese beseitigt werden können, zeigt folgende Ueberlegung.

Das für eine beliebige Durchmesserrichtung $A_1' A_1$ (Fig. 5) nach Pappus gewonnene Gesetz $a_1^2 = x_1 \cdot x_t$*

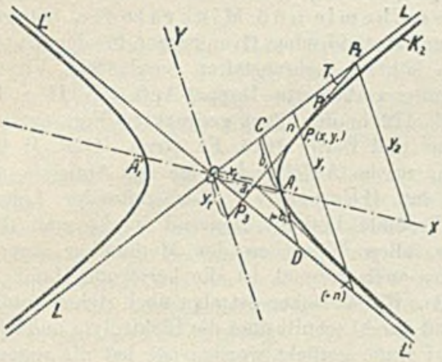


Fig. 5.

liefert für $x_1 = \infty$ den Wert $x_t = 0$. Die von 0 aus Projektionsgründen allein möglichen beiden Tangenten, welche durch L und L' angedeutet sein mögen, berühren folglich K_2 in unvorstellbar weiter Ferne. Immerhin ist ihre Berührungssehne zur Tangente CD (und damit zur eingetragenen Y-Achse) parallel, so daß $A_1 C = A_1 D$ wird. Bei jeder Tangente wird somit das zwischen L und L' liegende Stück durch den Berührungspunkt halbiert,** weshalb $y_1 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)$ ist.

Mit der Abkürzung $\frac{a_1}{b_1} = n$ erhält man aus der Figur $x_2 = n \cdot y_2$ und

$$y_2 = \frac{x_2 - x_t}{x_1 - x_t} \cdot y_1 = \frac{x_t - x_2}{x_t - x_1} \cdot y_1 = \frac{x_1 x_t - x_1 x_2}{x_1 x_t - x_1^2} \cdot y_1$$

$$y_2 = \frac{a_1^2 - x_1 n y_2}{\underbrace{a_1^2 - x_1^2}_{= z}} \cdot y_1,$$

daher $\quad y_2 \cdot (z + n x_1 y_1) = a_1^2 \cdot y_1.$

Entsprechend $y_3 \cdot (z - n x_1 y_1) = a_1^2 \cdot y_1.$

Aus der Bedingung $2 y_1 = y_2 + y_3$ folgt

$$\frac{2}{a_1^2} = \frac{y_2}{a_1^2 y_1} + \frac{y_3}{a_1^2 y_1} = \frac{1}{z + n x_1 y_1} + \frac{1}{z - n x_1 y_1} = \frac{2z}{z^2 - n^2 x_1^2 y_1^2};$$

demnach

$$z^2 - n^2 x_1^2 y_1^2 = a_1^2 \cdot z \qquad n^2 x_1^2 y_1^2 = z \cdot (z - a_1^2) = -x_1^2 \cdot z$$

$$n^2 y_1^2 = \frac{a_1^2}{b_1^2} \cdot y_1^2 = -z = x_1^2 - a_1^2$$

also $b_1^2 x_1^2 - a_1^2 y_1^2 = a_1^2 b_1^2.$

So ist die Aufgabe gelöst. — Aus der Gleichung von T in der Form $y = \frac{x - x_t}{x_1 - x_t} \cdot y_1$ folgt noch für $x = 0$

$$y_t = -\frac{x_t y_1}{x_1 - x_t} = -\frac{x_1 x_t y_1}{x_1^2 - x_1 x_t} = -\frac{a_1^2 y_1}{-z} = -\frac{a_1^2 \cdot y_1}{\frac{a_1^2}{b_1^2} \cdot y_1^2} = -\frac{b_1^2}{y_1}.$$

* Vergl. $\varrho_1^2 = o_1 r_1$.

** Nebenher erkennt man hieraus, daß bei allen durch einen Kurvenpunkt P_1 gehenden Sekanten die bis L und L' gemessenen Außenstrecken einander gleich sind.

Bücher-Besprechungen.

Hjelmslev, J., Geometrische Experimente. Nr. 5 der Beihefte zur Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Aus dem Dänischen übersetzt von A. Rohrberg. 69 S. 56 Fig. Leipzig 1915, Verlag von B. G. Teubner. Geh. M 2,40.

Die Arbeit enthält eine interessante Sammlung von Aufgaben, die nicht mit Hilfe von Zirkel und Lineal im engeren Sinne gelöst werden können, sondern durch Probieren. Es werden daher auch graphische Methoden mit Kegelschnitten und höheren Kurven, Schrittversuchen und Verschiebungen zugelassen. Von den 83 Aufgaben seien hier die Kubikwurzelausziehung, die Dreiteilung des Winkels und die Dreieckskonstruktion aus a, b, ϱ erwähnt. Das Buch bildet eine wertvolle Erweiterung unserer recht einseitig orientierten Schulplanimetrie.

P. Riebesell (Hamburg).

* * *

Hupka, E., Die Interferenz der Röntgenstrahlen. Sammlung Vieweg, Heft 18. 68 S. 33 Abb. u. 1 Lichtdruck-Doppeltafel. Braunschweig 1914, F. Vieweg & Sohn. Geh. M 2,60.

Das kleine Buch gibt in klarer Weise zunächst eine Ableitung der Impulstheorie. Es werden dann die Originalarbeiten von Laue, Friedrich, Knipping, Bragg über die Interferenz der Röntgenstrahlen besprochen und die Erklärung an der Hand zahlreicher Photogramme und Abbildungen gegeben. Die aus den Untersuchungen folgenden Ansichten über die Molekularstruktur der Kristalle werden eingehend dargelegt.

P. Riebesell (Hamburg).

* * *

Pahl, F., Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts. 1. Band des von J. Norrenberg herausgegebenen Handbuches des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts. 368 S. Leipzig 1915, Verlag von Quelle & Meyer. geh. M 8.60, geb. M 10.60.

Das Werk bietet ein außerordentlich vielseitiges Material. Nachdem der Grundsatz allgemein anerkannt ist, den Unterricht durch geschichtliche Hinweise zu beleben, verdient auch die hier gegebene historische Entwicklung des Unterrichts selbst Beachtung. Außerdem ist für jeden Zeitabschnitt eine kurze Entwicklung der Wissenschaft vorangestellt, so daß das Buch auch hierfür als Quelle benutzt werden kann. Allerdings kommt die Neuzeit recht schlecht weg. Auch die Weiterführung des π. Problems bis zum Beweis der Transzendenz und die Anführung der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Polygone durfte nicht fehlen. Als Herausgeber dieser Blätter ist noch Pietzker genannt.

P. Riebesell (Hamburg).

* * *

Schoy, Carl, Vermischte Aufgaben der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie mit vollständigen Lösungen. Zum Gebrauch für den Unterricht an höheren Schulen sowie beim Selbststudium. Mit 24 Figuren auf einer Tafel. IV und 89 S. Hamburg 1913, Henri Grand. geh. M 4,40, geb. M 5.—

Wenn man die Schrift in ihrer Gesamtheit dem Unterricht zugrunde legen wollte, würden wohl nur wenig Schülerjahrgänge, und nur solche realer Anstalten, den größeren Teil dieser 55 Aufgaben lösen können; denn sie führen z. T. recht spezielle Gebiete und erfordern umfangreiche Rechnungen. Trotzdem muß man dem überaus rührigen Verfasser auch für diese Veröffentlichung Dank wissen; denn sie bietet, da die Aufgaben aus dem täglichen Leben genommen werden, viel Stoff zur Belebung des Unterrichts und reiche Anregung zu neuen ähnlichen Aufgaben. Besonderen Wert muß man aber schließlich den geschichtlichen Rückblicken beimessen, die vielfach auch durch umfangreiche Literaturangaben den Leser in den Stand setzen, die Lösungen der einzelnen Aufgaben zu vergleichen und gegeneinander abzuwägen.

H. Keller (Chemnitz, Sa.).

* * *

Hort, W., Die Differentialgleichungen des Ingenieurs. 540 S. 255 Fig. Berlin 1914, Verlag von Springer. Geb. M 14,—.

Im Gegensatz zu den mathematischen Lehrbüchern über Differentialgleichungen verfolgt das vorliegende Buch den Zweck, in die praktischen Lösungsmethoden einzuführen. Nicht die Existenzbeweise und Reihenentwicklungen, sondern die numerischen und graphischen Lösungen oder Annäherungslösungen praktisch gegebener Differentialgleichungen nehmen daher den Hauptraum ein. Für diese Zeitschrift hat das Buch insofern Interesse, als der erste Abschnitt eine recht praktische Einleitung in die Differential- und Integralrechnung gibt. Hort geht vom unbestimmten Integral aus. Er beginnt mit der „graphischen Summierung der Geraden $y = a$“. Es ergibt sich die Funktion $y = ax$, die Inhaltskurve. Dann wird graphisch durch Aneinanderreihen von Trapezen die Integralkurve von $y = ax + b$ gezeichnet und schließlich wird zur allgemeinen Kurve übergegangen. Dann folgt der Differentialquotient als Umkehrung und Kurventangente. Bedauerlich ist, daß bei den physikalischen Gleichungen nicht von der Vektoranalysis Gebrauch gemacht ist.

P. Riebesell (Hamburg).

* * *

Herz, Prof. Dr. **R.,** Elemente der Chemie und Kristallographie. Für den Unterricht in der ersten Klasse der Realschulen und der Untersekunda der Oberrealschulen. Leipzig 1914, Freytag. geb. M 1,20.

Diese „Elemente“ bilden die Vorstufe zu einem Lehrbuch der Chemie und Mineralogie (1911) und zu einem „Chemischen Praktikum“ (1912) desselben Verlags. Das Büchlein kann sich neben der großen Zahl ähnlicher „Vorstufen“ recht wohl sehen lassen. Die den einzelnen Paragraphen vorangestellten Grundversuche sind geschickt und in solcher Zahl zusammengestellt, daß man eine gute Auswahl hat. Daß dabei die Elektrolyse des Wassers als „Taschenspielerkunststück“ weggelassen ist, werden viele Fachgenossen billigen. Nicht minder ist zu loben, daß den messenden Versuchen besondere Beachtung zuteil geworden ist. Die Mehrarbeit und Sorgfalt bei der Vorbereitung solcher Versuche belohnt sich reichlich durch die Gediegenheit der Einführung in die chemischen Grundbegriffe. Nach der Meinung des Berichters gehört die Atomtheorie ganz gewiß in den Anfangs-Unterricht der Chemie, und man könnte sie recht gut noch früher einfügen als in die §§ 26—29. — Der kurze Anhang über Kristallographie in § 55 — eine Anleitung zum Zeichnen der einfachsten Formen wird wohl aus dem Zeichenunterricht vorausgesetzt — genügt vollständig den Anforderungen der Vorstufe. Die Fig. 49 ist gegen Fig. 15 verkehrt; in Fig. 6 erscheinen wegen der verkehrten Schraffierung die gewölbten Flächen vertieft.

Dr. C. H. Müller (Frankfurt a. M.).

* * *

Henniger, K. A., Vorbereitender Lehrgang der Chemie und Mineralogie. Ausgabe A. Nach methodischen Grundsätzen für den Unterricht an höheren Lehranstalten bearbeitet. Vierte und fünfte verbesserte Doppel-Aufl. VIII u. 104 S. mit 112 in den Text gedruckten Figuren. Stuttgart und Berlin 1914, Fr. Grub. Geb. M 1,50.

Die rasche Aufeinanderfolge der Auflagen spricht dafür, daß Hennigers „Vorbereitender Lehrgang“ viele Freunde besitzt. Dauernd merkt man das Bestreben, allen Wünschen der Methodiker gerecht zu werden; auch diesmal ist die bessernde Hand rührig gewesen. Ein Versehen ist aber noch stehen geblieben: während der Abschnitt über die Elektrolyse und Elektrolyte ans Ende gerückt worden ist, hat die sogenannte Elektrolyse des Wassers ihre unberechtigte Stellung in einem Anfangskapitel beibehalten.

R. Winderlich (Oldenburg i. Gr.).

* * *

Düll, E., Naturkunde für die V. Klasse der Gymnasien, umfassend Anthropologie, Chemie und Mineralogie. Auf Grund der (bayerischen) Schulordnung vom 30. Mai 1914. VI u. 245 S. mit 100 Textabb. München u. Berlin 1914, R. Oldenbourg. Geb. M 2,60.

Die Naturkunde von Düll zeigt auf jeder Seite die Begeisterung des Verfassers für seine Fächer, und Begeisterung reißt gar leicht die Jugend mit sich fort. So könnte man Freude an dem Buche haben, wenn es nicht gegen den Grundsatz verstieße, daß der Unterricht vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortschreiten soll. Was hier als erste Einführung in die chemischen Vorgänge geboten ist — „Chemischer Vorkursus“ 1—29 —, ist doch zu verwickelt und schwer. Zudem wird der Schüler mit seinem „ach so kurzen Gedächtnis“ (S. 133) vom ersten Augenblick an bis zum Schlusse des Buches durch ein Zuviel erdrückt. Am auffallendsten ist das im Schlußteil des Buches — „Einführung in die Mineralogie verbunden mit chemischer Technologie“ S. 143—245 —, wo so viel Stoff niedergelegt ist, daß auch ein Primaner noch genug daran hat. Am meisten zustimmen kann man dem Hauptteil des Buches, „dem für die Schüler zweifellos wichtigsten“ S. 29—142, wo die Anthropologie behandelt wird; aber auch hier ist der Stoff für die Klassenstufe recht reichlich bemessen.

Bei der übergroßen Reichhaltigkeit wird das Fehlen eines Schlagwörterverzeichnisses schmerzlich vermißt.

R. Winderlich (Oldenburg i. Gr.).

* * *

Schaefer, C., Einführung in die theoretische Physik. I. Band: Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper und Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydrodynamik). 249 Fig. 925 S. Leipzig 1914, Veit & Comp. geh. M 18,—, geb. M 20,—.

Das Gebiet der theoretischen Physik soll hier in dem Umfang dargestellt werden, wie es in einem fünf- bis sechssemestrigen Vorlesungskursus bei vier Wochenstunden behandelt werden kann. Durch die dadurch bedingte Ausführlichkeit nimmt das Buch eine Sonderstellung unter den modernen Lehrbüchern ein. Die Vektorenanalysis ist entwickelt, doch werden die Gleichungen meist auch in der Koordinatendarstellung gebracht. Das Buch verdient für diese Zeitschrift dadurch Beachtung, daß auch die elementaren Probleme vom höheren Gesichtspunkt aus behandelt sind.

P. Riebesell (Hamburg).

* * *

de Haas-Lorentz, G. L., Die Brownsche Bewegung und einige verwandte Erscheinungen. Verlag von F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1913. 103 S. Geh. M 3,50, geb. M 4,20.

Das Buch, das als 52. Band der vorzüglichen Sammlung „Die Wissenschaft" erscheint, enthält die von der Verfasserin ins Deutsche übersetzte Doktor-Dissertation über die Brownsche Bewegung. Es werden die Theorien von Einstein und v. Smoluchowski in klarer Weise auseinandergesetzt und die Bestätigungen durch Perrin dargelegt. Das Buch gibt einen guten Einblick in die Bedeutung dieser Einzelerscheinung für andere Gebiete der Physik.

P. Riebesell (Hamburg).

* * *

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. I. Band: Wahrscheinlichkeitstheorie, Fehlerausgleichung, Kollektivmaßlehre. 3. Auflage. 25 Figuren, 462 S. Leipzig und Berlin 1914, B. G. Teubner. geh. M 12,—, geb. M 14,—.

Die dritte Auflage dieses vortrefflichen Buches ist wiederum durch Berücksichtigung der neuesten Literatur erweitert worden. Man erhält überall den Eindruck, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung schon lange nicht mehr reine mathematische Spekulation ist, sondern auf den verschiedensten Gebieten praktische Anwendung findet. Hoffentlich werden in der Neuauflage des zweiten Bandes auch die zahlreichen Anwendungen auf die moderne theoretische Physik berücksichtigt.

P. Riebesell (Hamburg).

* * *

Graetz, Dr. L., Kurzer Abriß der Elektrizität. 172 Abbildungen. 8. Auflage (36. bis 40. Tausend). 208 S. Stuttgart 1915, J. Engelhorns Nachf.

Der bekannte Verfasser des überaus erfolgreichen Buches: „Die Elektrizität und ihre Anwendungen", dessen 17. Auflage in der Zeitschrift angezeigt ist, gibt in dem vorliegenden, auch bereits in 8. Auflage verlegtem Abriß der Elektrizität, der für einen weiteren Leserkreis bestimmt ist, eine gedrängte Uebersicht der hauptsächlichsten Kenntnisse und Anschauungen von der Elektrizität und ihren wichtigsten Anwendungen. Im Gegensatze zu dem größeren Werke geht der Verfasser hier nicht von dem elektrostatischen Erscheinungen, sondern unmittelbar von den elektrischen Strömen aus und sucht von vornherein die elektrischen Erscheinungen auf Grund der Elektronentheorie zu erklären. An die Erörterung der gesetzmäßig erkannten Tatsachen werden gleich die Anwendungen angeschlossen.

Die Neuauflage ist in allen Teilen dem neuesten Standpunkt der Wissenschaft und Technik angepaßt worden. Das überall klar geschriebene Buch wird sicherlich ebenso wie das größere Werk des Verfassers zur Verbreitung gründlichen Wissens auf dem Gebiete der Elektrizität und ihrer reichen Fülle von Anwendungen beitragen. Schwab (Frankfurt a. M.).

* * *

Püning, H., Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Im Anschlusse an desselben Verfassers Grundzüge der Physik bearbeitet. 10. Aufl. 380 Figuren und eine Spektraltafel. 359 S. Münster i. W. 1915, Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung. geb. M 3,70.

Das in 10. Auflage vorliegende Buch hat durch seine Auflagenzahl den Beweis der Brauchbarkeit erbracht. Sein Verfasser war stets bemüht, das Buch den Fortschritten der Forschung und den Anforderungen der Unterrichtspraxis entsprechend zu verbessern. Um den Umfang des Buches nicht anwachsen zu lassen, wurden von der 6. Auflage an eine Reihe entbehrlich erscheinender mathematischer Entwicklungen gestrichen, um sie dem Universitätsstudium zu überlassen. Ob der Verfasser damit überall Zustimmung finden wird, erscheint nicht ganz zweifellos. Für die fortgelassenen Entwicklungen sind zahlreiche Einfügungen aus der praktischen Physik und der Technik gesetzt worden, um auf diese Weise das Buch für den Schüler anregender und nutzbringender zu gestalten. Das Lehrbuch erhält dadurch ein durchaus auf der Höhe stehendes Gepräge. Schwab (Frankfurt a. M.).

* * *

Bilecki, A., Gedanken über das periodische System der chemischen Elemente. 32 S. mit 4 Fig. im Text und 1 Tafel. Troppau 1915, Buchholz & Diebel. K 1,40; M 1,20.

Den eigentümlichen Mangel aller bisher bekannt gewordenen Darstellungen des periodischen Systems sieht Bilecki darin, „daß sie mathematisch unzulänglich begründet, daher unmöglich sind". Eine wirklich mathematische Begründung ist aber in seinen Ausführungen auch nicht zu finden; im Grunde läuft bei ihm alles auf Zahlenspielereien hinaus, wenn auch der Verfasser mit seiner Meinung recht haben mag, daß für die Darstellung des Systems nur eine Raumkurve in Frage kommen kann, und daß diese noch in Teilkurven zerlegt werden muß.

R. Winderlich (Oldenburg i. Gr.).

* * *

Graetz, L., Die Elektrizität und ihre Anwendungen. 17. Aufl. (77. bis 86. Tausend). XVI u. 748 S. mit 687 Abb. Stuttgart 1914, J. Engelhorns Nachf. Geb. M 9,—.

Wenn ein Buch in 17 Auflagen erscheinen kann, so ist es erfolgreich, und wenn es gar ein wissenschaftliches Buch ist, das so begehrt wird, so muß es ganz besondere Vorzüge aufweisen. Die Vorzüge, welche „Die Elektrizität" von Graetz so beliebt gemacht haben, liegen in der leichten Verständlichkeit des Textes, in der Zuverlässigkeit aller Angaben und nicht zuletzt in der quellenden Fülle der beschriebenen Anwendungen. Seinem raschen Absatz entsprechend hat das Buch stets die neusten Errungenschaften auf theoretischem und praktischem Gebiet berücksichtigt, während Veraltetes ausgemerzt wurde. Auch in der vorliegenden, vornehm ausgestatteten Neuauflage hat der nimmermüde Verfasser eine große Zahl von Verbesserungen und Neueinschaltungen vorgenommen; es sei nur auf die neusten Forschungen über die Röntgenstrahlen und die Radioaktivität hingewiesen und auf die Fortschritte in der Elektrotechnik.

Das schöne Buch wird sich zu seinen alten noch viele neue Freunde erwerben.

R. Winderlich (Oldenburg i. Gr.).

* * *

Loewy, Dr. Alfred, Prof. an der Universität Freiburg i. B., Versicherungsmathematik. 3. umgearbeitete und vermehrte Auflage. (Sammlung Göschen Nr. 180.) G. J. Göschensche Verlagshandlung G. m. b. H. in Berlin und Leipzig. geb. M 0,90.

Das in dritter Auflage vorliegende, gegen die früheren Auflagen wesentlich umgestaltete Büchlein gibt einen lehrreichen Ueberblick über die Versicherungsmathematik. Aus dem reichen Inhalt sollen die Kapitel II Sterblichkeitstafeln, Kapitel V Praxis, Kapitel VI Deckungskapital oder Prämienreserven, Kapitel VII die Bilanz, hervorgehoben werden, die vielen Laien eine interessante Erweiterung ihrer Kenntnisse über das Versicherungswesen geben werden. Die Formeln für die verschiedenen Arten der Versicherung sind unter Anwendung der internationalen Bezeichnungen klar abgeleitet und durch Hinzufügung numerischer Beispiele dem Verständnis näher geführt. Die Beigabe der deutschen Reichssterbetafel für Männer 1891/1900 gibt auch dem Lehrer willkommene Gelegenheit zur Aufstellung praktischer Beispiele.

Dr. P. Bode (Frankfurt a. M.).

* * *

Prandtl, A., Ueber die Auffassung geometrischer Elemente in Bildern. Fortschritte der Psychologie und ihre Anwendungen, herausgeg. von Karl Marbe. Bd. V, S. 255—301. Leipzig und Berlin 1914, B. G. Teubner.

Dieser kurze Aufsatz von Prandtl beschäftigt sich mit experimenteller Aesthetik und weist individuelle Eigentümlichkeiten nach, die sich bei der Betrachtung des Aufbaus von Bildern ergeben. Es zeigt sich aber, daß trotz aller Individualität der Betrachtung ein bestimmtes Schema zugrunde liegt, woraus sich dann eine durchschnittliche Betrachtungsweise finden läßt, die nicht subjektiv, sondern irgendwie durch das Bild bedingt ist. Es wäre eine dankbare Aufgabe, einmal alle diese rein objektiven Faktoren zu ordnen und Aesthetik und Mathematik in engere Beziehung zueinander zu setzen. Wer sich mit diesem Zweige der experimentellen Methode vertraut machen will, würde in dem vorliegenden Aufsatze manches Interessante finden.

H. Keller (Chemnitz, Sa.)

Verzeichnis der bei dem Verlage zur Besprechung eingegangenen Bücher.

v. Schroeder, G. und J., Erläuterungen zu den Wandtafeln für den Unterricht in der allg. Chemie und chem. Technologie. Tafel VI—X. 2. Aufl. Verfaßt von Dr. A. Harpf. Leipzig 1916, Fischer & Co. M —.50.

Smalian, K., Leitfaden der Pflanzenkunde f. höh. Lehranstalten. 4. Teil. Mit 48 Abb. u. 7 Farbentafeln. geb. M 1.90. 5. Teil. Mit 100 Abb. und 11 Farbentafeln. geb. M 2.20. Leipzig 1916, Freytag.

Smalian u. Bernau, K., Naturw. Unterrichtswerk f. höh. Mädchenschulen. II. Teil: Klasse VI. Mit 75 Abb. u. 11 Farbentafeln. 2. Aufl. geb. M 1.80. V. Teil: Klasse III/II. 2. Aufl. Mit 118 Abb. u. 8 Farbentafeln. geb. M 2.40. Ebenda.

Sommer, G., Geistige Veranlagung und Vererbung (Aus „Natur und Geisteswelt". Bd. 512). Leipzig 1916, Teubner. geb. M 1.25.

Spahn, K., Kriegsstoffe für den Unterricht in Physik und Chemie. Straßburg 1916, Straßb. Druckerei u. Verlagsanstalt. M 3.—.

Stein, A., Die Lehre von der Energie. Mit 13 Fig. 2. Aufl. (Aus „Natur u. Geisteswelt". Bd. 257). Leipzig, Teubner. M 1.25.

Steindorff, U., Kriegstaschenbuch. Ein Handlexikon über den Weltkrieg. Mit 5 Karten. Leipzig 1916, Teubner. geb. M 3.50.

Stiehler, G., Geländezeichnen für die deutsche Jungmannschaft und das Militär. Mit 172 Abb. II. Teil. Leipzig 1916, Dürr. M 2.—.

Stoltz. O., u. Gmeiner, J. A., Theoretische Arithmetik. II. Abteilg.: Die Lehre von den reellen u. v. d. komplexen Zahlen 2. Aufl. Mit 23 Fig. Ebenda. M 12.—.

Vater, R., Einführung in die techn. Wärmelehre. Mit 40 Abb. (Aus „Natur und Geisteswelt", Bd. 516). Leipzig 1916, Teubner. geb. M 1.25.

Voigt, A., Die Teilbarkeit der Potenzsummen und die Lösung des Fermatschen Problems. Frankfurt a. M. 1916, Diesterweg. M 2.—.

Wasmann, E., Ernst Haeckels Kulturarbeit. Freiburg 1916, Herder. M 1.20.

Weber, R. H., u. Gans, R., Repertorium der Physik I. Band, 2. Teil (Mechanik u. Wärme). Mit 72 Fig. Leipzig 1916, Teubner. M 11.—.

Witting, A., Soldaten-Mathematik. Mit 37 Fig. (Mathem. Bibliothek Nr. 22). Ebenda. M —.80.

Wolff, G., Mathematik und Malerei. Mit 18 Fig. und 35 Abb. (Mathem. Bibliothek Nr. 20/21). Ebenda. M 1.60.

Wulff, L., Herbarvorschule und Herbarpflanzenregister und kleine Herbarien. Parchim 1915, Wehdemann.

—„— Mitteilungen zur Kriegsernährungsersparnis und Linderung. M —.50. Parchim 1915, Wehdemann.

Wünsche, O., Die Pflanzen Deutschlands. Eine Anleitung zu ihrer Kenntnis. II. Die höh. Pflanzen, 10. Aufl., von Joh. Abromeit. Ebenda. geb. M 6.—

Abschluß dieser Nummer am 27. Dezember 1916.

An unsere Mitglieder.

Dieser Nummer ist ein Bild unseres verewigten Ehrenvorsitzenden **Friedrich Pietzker** beigegeben, das allen, die ihn kannten, eine willkommene Erinnerung an den verehrten Mann sein wird, aber auch denen, die ihn nicht kannten, einen Eindruck von seiner lebensvollen Persönlichkeit geben kann. —

Der in Nr. 4 bis 7 abgedruckte Rückblick auf unsere Vereinsgeschichte ist auch als Sonderabdruck unter dem Titel „Die ersten fünfundzwanzig Jahre des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts" erschienen und ebenfalls mit dem Bilde Friedrich Pietzkers geschmückt. Die Schrift wird von der Verlagsbuchhandlung Otto Salle gegen Einsendung von 70 Pf. abgegeben.