Jahrgang XXIV. 1918. No. 3 u. 4.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**,
von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von
Professor **Karl Schwab**, Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule in Frankfurt am Main
unter Mitwirkung von Dr. **August Maurer**, Direktor des Kgl. Realgymnasiums in Wiesbaden.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle Mitteilungen und Sendungen werden an Prof. K. Schwab, Frankfurt am Main, Günthersburgallee 33, erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 8 Nummern ist 4 Mk. pränum., für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift kostenlos; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhandlung zu beziehen.

Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Vereins-Angelegenheiten.

Zur Preisaufgabe von 1917 betreffend das Rechnen als Mittel der Intelligenzprüfung.

Die Frist für die Ablieferung der Bewerbungsarbeiten wird hierdurch bis zum 31. Dezember 1918 verlängert.

Im Namen des Vorstandes:
F. Poske.

Die Grundlagen der Geometrie als schulgemäße Einführung in die Erkenntnistheorie

Von W. Dieck (Sterkrade), z. Zt. im Felde.

Ueber Sinn und Zweck des Lebens größtmögliche Klarheit zu gewinnen, muß dem Menschen ein starkes, nimmer erlöschendes Bedürfnis sein. Wer die Stellung des Menschen im Weltganzen richtig erkennt, wer die eigene Tätigkeit im Rahmen seines Volkes und der gesamten Menschheit treffend wertet, nur der kann sein Lebensschifflein zielbewußt zu eigenem Glück und der anderen Wohl steuern. Gewiß muß sich jeder Mensch jene grundlegenden Fragen zuguterletzt selber beantworten, aber die Schule kann ihm dabei in den entscheidenden Jahren der reiferen Jugend machtvolle Hilfe gewähren. Sie muß ihm die Bedeutung dieser Probleme in ihrer ganzen Wucht rechtzeitig zum Bewußtsein bringen, sie kann ihm die unermüdliche Arbeit des Menschen an der Lösung dieser Fragen in großen Umrissen vor Augen stellen, sie sollte ihm die Irrtümer aufweisen, welche den Generationen vor uns bei ihrem unablässigen Forschen unterlaufen sind. Und diese philosophische Propädeutik darf nicht eine Sonderaufgabe etwa des Religionsunterrichtes bleiben. Viel wirksamer und in der Regel wohl auch sachgemäßer kann diese Unterweisung gestaltet werden, wenn die einzelnen Unterrichtsfächer geeignete, in ihrem Umkreise liegende Stoffgebiete für die philosophische Schulung nutzbar machen. So fordern die „Meraner Vorschläge" auch in der Mathematik eine philosophische Vertiefung des abschließenden Unterrichtes. In die Praxis der Schulstube sind diese schönen Pläne aber anscheinend noch wenig hineingedrungen. Daher will ich versuchen, im Rahmen dieses Artikels einen der Wege offen zu legen, auf denen die Geometrie diese hohe Aufgabe in einer Weise zu lösen imstande ist, die von den anderen Unterrichtsfächern schwerlich überboten werden kann.

Das mathematische Stoffgebiet, das uns zu philosophischen Erwägungen geradezu nötigt, sind die Grundlagen der Geometrie. Schon früher hatten die Mathematiker das Bedürfnis, die Grundbegriffe der Geometrie auf das sorgfältigste zu untersuchen. So finden wir bei Eukleides die folgenden Definitionen für Punkt und Gerade, die Grundgebilde der ebenen Geometrie.

Der Punkt ist das, was keinen Teil hat.

Die Linie ist Länge ohne Breite.

Die Gerade ist jene Linie, die gleichmäßig durch ihre Punkte gesetzt ist. Heute sind wir uns darüber im klaren, daß die eukleidischen Definitionen ihrem Wesen nach verfehlt sind. Die Grundbegriffe der Geometrie kann man nicht nach den Regeln der formalen Logik per genus proximum et differentiam specificam[1] definieren. Sie sind ursprünglicher Geistesbesitz der Menschheit und so einfach, daß sie einer befriedigenden Erklärung unfähig sind. Fehlen sie jemandem, so kann die beste Erklärung sie ihm nicht verschaffen. Die einzige Arbeit, die wir an ihnen tun können und tun müssen, ist die Erforschung ihrer gegenseitigen Beziehungen. In dieser Hinsicht stellen wir zunächst auf

Forderung 1.

Zwei Punkte bestimmen eine Gerade.

„Forderung" nennen wir diesen ersten, das Wesen von Punkt und Gerade erklärenden Satz, weil er von der geraden Linie die durch ihn ausgesprochene Eigenschaft kategorisch verlangt, will sie anders mit Recht auf den Namen „gerade Linie" Anspruch erheben. Wie auch die beiden Punkte in der Ebene gelagert sein mögen[2], stets können wir sie durch eine Gerade verbinden. Es ist die erste geometrische Aufgabe, die der Anfänger zu lösen hat, durch zwei Punkte die Gerade zu ziehen. Er benutzt dazu das Lineal, dessen Kante das dem Menschen erreichbare Ideal einer beweglichen Geraden darstellt. Durch Verschieben und Drehen des Lineals bewirken wir leicht, daß erst der eine, dann der andere der gegebenen Punkte mit unserer Normalgeraden zusammenfällt. Alsdann hat unsere bewegliche Gerade die gewünschte Lage, die wir durch einen Bleistiftstrich in der Zeichnung festhalten. So scheint es — ausreichende Länge des Lineals vorausgesetzt — allemal möglich zu sein, durch zwei Punkte eine Gerade zu ziehen, aber auch nicht mehr als eine einzige. Infolgedessen sieht der unbefangene Mensch die durch Forderung 1 ausgesprochene Eigenschaft der Geraden als eine Selbstverständlichkeit an, die gar nicht erst einer feierlichen Formulierung bedarf. Aber diese Meinung ist irrig. Um dies einzusehen, wollen wir nach dem Verhalten der geraden Linie „im Unendlichen" fragen. Die gerade Linie, so sagen wir gemeinhin in der Planimetrie, kann nach beiden Seiten „ins Unendliche" verlängert werden. Irgendwelche Bedenken treten uns bei dieser Behauptung gar nicht auf, und doch wären sie durchaus am Platze. Hier müssen wir unbedingt einen Gedanken in Rücksicht ziehen, der durch Kant der menschlichen Erkenntnis gewonnen wurde.

Wenn wir über das Verhalten der geraden Linie im nicht übersehbaren Teile der Ebene irgend eine Aussage machen, so kann diese nur den Charakter einer Hypothese besitzen, objektive Wahrheit kommt ihr nicht zu. Der nicht philosophisch geschulte Mensch ist nur zu geneigt, die im Bereiche seiner Erfahrung erkannten Gesetzmäßigkeiten auch als außerhalb und jenseits der möglichen Erfahrung gültige Normen anzusehen. Diese Unzuträglichkeiten vermeidet man, wenn man stets beachtet, daß wir die Gesetze des Seins und Geschehens nur durch die Erfahrung und in der Erfahrung kennen. Ob es darüber hinaus solche Gesetze überhaupt gibt — sie könnten ja Zutaten des menschlichen Geistes sein, da wir nicht die Dinge an sich, sondern nur ihre Erscheinungsform kennen — wissen wir nicht, noch weniger wie diese Gesetze beschaffen sind, falls es solche geben sollte.

Von der Entdeckung einer Wahrheit bis zu ihrer allgemeinen Anerkennung und restlichen Durchführung ist es ein weiter Schritt. Diese Beobachtung kann man allenthalben in der Geschichte der menschlichen Erkenntnis machen. Sie bestätigt sich auch bei dem soeben dargelegten Grundsatz aus Kants Kritik der reinen Vernunft. In dem Begriff der geraden Linie, wie er sich in der euklidischen Geometrie herausgebildet hat und

[1] Vgl. Etwa Elsenhans, Psychologie und Logik S. 120—121.

[2] Die hier von Pasch in den Vorlesungen über neuere Geometrie S. 17 ff. gemachten Einschränkungen bieten gleichfalls wertvollen Stoff zu interessanten philosophischen Betrachtungen.

dadurch Allgemeingut der Menschheit geworden ist, steckt nämlich ein solches Moment, das in der Erfahrung nicht gegeben ist, gar nicht gegeben sein kann. Ich meine — und damit kommen wir auf die oben gestellte Frage zurück — die Eigenschaft der Unendlichkeit, die man der Geraden zuzusprechen pflegt. Der Mensch kann allemal nur ein endliches Stück der geraden Linie verfolgen. Selbst wenn er sein ganzes Leben hindurch eine Gerade entlang wanderte, wäre es immer nur eine endliche Länge, die er durchmessen. Mit der Annahme einer unendlichen Ausdehnung der Geraden verlassen wir den festen Boden der wirklichen oder möglichen Erfahrung und befriedigen unseren Drang nach Vollständigkeit der Erkenntnis durch eine kühne Hypothese. Und die Kühnheit dieser Hypothese wird geradezu unerhört dadurch, daß sie mit einem Schlage auch für Ebene und Raum unendliche Ausdehnung fordert, soll anders die Gerade in ihnen Platz haben. Irgend einen berechtigten Anspruch auf objektive Gültigkeit kann unsere Forderung natürlich nicht haben. Sie ist lediglich eine Fiktion unseres Verstandes, ebenso berechtigt oder unberechtigt wie jede andere Fiktion, die mit den gesicherten Ergebnissen der Erfahrung nicht im Widerspruch steht. Die unendliche Ausdehnung der Geraden — und somit auch der Ebene und des Raumes — gehört also gar nicht zu ihrem Wesen, insofern das Wesen eines Dinges in der Erfahrung gegeben sein muß.

Es ist unbedingt nötig, auf diese Sachlage mit allem Nachdruck hinzuweisen; denn die Vorstellung von der Unendlichkeit des Raumes ist ein weit verbreitetes Dogma. Gewiß ist sie äußerst naturgemäß und naheliegend, wird auch durch mancherlei Scheingründe oft genug „bewiesen“. Alles das ändert nichts an der Tatsache, daß sie nach Kants Sprechweise ein transzendenter Begriff ist, d. h. ein Begriff, der die unserer Begriffsbildung durch die Grenzen der Erfahrung gesetzten Schranken überschreitet. Wer den Raum als zweifellos unendlich ansieht — und eben dieses ist die allgemein herrschende Ansicht — der begeht einen Trugschluß und fällt den Fallstricken der transzendenten Begriffe zum Opfer. Das einzige, was wir mit Sicherheit von der geraden Linie sagen können, ist, daß sie in unserer Anschauung keine natürliche, ihr eigentümliche Grenze hat. Soweit wir sie auf dem Papier oder in der Vorstellung verfolgen mögen, Grenzen, die aus ihrem Wesen entspringen, treffen wir nicht an. Wir müssen also der geraden Linie Unbegrenztheit zuerkennen. Diese Eigenschaft wurde dann bis vor wenigen Jahrzehnten als identisch mit Unendlichkeit angesehen. Der wesentliche Unterschied dieser beiden Bestimmungen wurde zuerst von Bernhard Riemann bemerkt, der in seinem Habilitationsvortrage „Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen“ im Jahre 1854 darauf hinwies. Ein Beispiel macht diesen überaus wichtigen Unterschied am besten deutlich. „Unbegrenzt ist sowohl die gewöhnliche Ebene als die Kugeloberfläche, aber nur die erstere ist unendlich, während die andere eine endliche Ausdehnung hat. Riemann nimmt nun in der Tat den Raum nur unbegrenzt und nicht unendlich an“[3]. Um eine völlige Klärung des Geradenbegriffes zu erlangen, müssen wir diesen Gedanken etwas weiter ausspinnen. Skizzieren wir drum die Grundgebilde einer Geometrie, die dem soeben ausgesprochenen Axiome Riemanns genügt. Wir beginnen damit, daß wir die euklidische Ebene als unwahr, d. h. als reine, in der Natur nicht gegebene Verstandesschöpfung ausscheiden. Als existent erkennen wir nur die Kugelfläche an, so daß alle Flächen, die uns „eben“ erscheinen, in Wahrheit Kugelflächen bezw. Teile von solchen sind. Wir sind dazu berechtigt, weil wir uns einmal die Kugel beliebig groß denken können; dann muß man berücksichtigen, daß alle in der Erfahrungswelt gegebenen „ebenen“ Flächen so klein sind, daß wir bei der Ungenauigkeit unserer sinnlichen Wahrnehmung über ihre wahre Beschaffenheit uns ein durchaus zuverlässiges Urteil nicht bilden können. Dazu kommt noch, daß der Begriff der euklidischen Ebene in Wahrheit aus der Kugel geboren ist. Größere Teile der Erdoberfläche, die eine gewisse Regelmäßigkeit aufweisen, nennt man „Ebene“. Aus dieser durch die Anschauung gewonnenen Vorstellung ist dann der euklidische Begriff der Ebene durch den Verstand abgeleitet worden. Es steht also nichts im Wege, die Kugelfläche als einen vollwertigen Ersatz der euklidischen Ebene aufzufassen. Um diese Analogie auch durch die Bezeichnungsweise hervorzuheben, wollen wir unsere Kugelfläche von jetzt ab „Kugelebene“[4] nennen.

Es fragt sich nun: Gibt es in der Kugelebene auch ein Gegenstück zu der euklidischen Geraden? Für die Beantwortung dieser Frage bietet uns die Anschauung einen wichtigen Anhalt. Wenn wir von einem Menschen verlangen, daß er von einem bestimmten Punkte der Erdoberfläche aus in „gerader Linie“ zu einem anderen Punkte hingehen solle, so sind wir uns über den einzuschlagenden Weg völlig im klaren. Es ist jener Weg, bei dem die Achse des wandernden Menschen stets in derselben euklidischen Ebene[5] bleibt. Die beiden Punkte auf

---

[3] F. Klein, Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkt aus. Leipzig 1913, S. 385—386.

[4] Kurz „K-Ebene“.

[5] Wir benutzen diese hier als rein verstandesmäßigen Hilfsbegriff.

der Erdoberfläche bestimmen nämlich zusammen mit dem Mittelpunkte der Erde eine euklidische Ebene und auf dem Schnitt dieser Diametralebene mit der Erdoberfläche muß in dem beregten Falle der Wanderer gehen. Jede euklidische Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel schneidet die Kugelfläche in einem größten Kugelkreise, in einem sogenannten Hauptkreise. Auf der Erde nennen wir also jeden Hauptkreis eine gerade Linie und demgemäß setzen wir fest: Gerade Linien in unserer K-Ebene sind die Hauptkreise der Kugel. Wir nennen diese Hauptkreise von jetzt ab Kugelgeraden[6].

Nehmen wir nun noch den Kugelpunkt[7] hinzu, so stellt er in Verbindung mit der K-Geraden und der K-Ebene eine Folge von geometrischen Grundgebilden dar, zwischen denen ganz ähnliche Beziehungen obwalten wie zwischen den entsprechenden Gebilden der euklidischen Raumlehre. Heben wir die wichtigsten kurz hervor: Der K-Punkt hat keine Ausdehnung. Die K-Gerade hat eine Ausdehnung, die Länge; nach beiden Seiten ist sie unbegrenzt; wie die euklidische Gerade ist sie die kürzeste Verbindungslinie zweier K-Punkte in der K-Ebene. Wir berufen uns dabei auf die Erfahrung, die uns lehrt, daß der „gerade" Weg auf der Erde allemal auch der kürzeste ist. Die K-Ebene besitzt zwei Ausdehnungen, Länge und Breite. Eine in der euklidischen Ebene liegende euklidische Gerade können wir um einen beliebigen ihrer Punkte drehen, ohne daß die Gerade dabei die Ebene verläßt, und zwar durchwandert die Gerade bei einer vollständigen Drehung alle Punkte der Ebene, bis sie in ihre Anfangslage zurückkehrt. Genau die gleiche Aussage gilt über K-Gerade und K-Ebene. K-Ebene und K-Raum sind unbegrenzt das hier beschriebene System der K-Geometrie[8], nennen wir nach dem Vorgange von F. Klein[9] eine nichteuklidische Geometrie zweiter Art[10], zweiter Art deshalb, weil vor ihr schon eine andere nichteuklidische Raumform erster Art von Lobatschefsky und Bolyai entdeckt worden ist.

Die Grundgebilde der K-Geometrie sind dem euklidischen nach dem Gesagten durchaus gleichartig und kommen ihnen in unserer Anschauung beliebig nahe. Daraus ergibt sich ohne weiteres, daß die nichteuklidische Geometrie zweiter Art berufen und fähig ist, die euklidische als menschliche Anschauungsnorm der Umwelt abzulösen. Gewiß sträubt sich unser in den euklidischen Vorstellungen groß gewordenes Denken gegen den Begriff der in sich geschlossenen Geraden und des endlichen Raumes. Aber wir müssen uns hier darüber klar werden, daß die unendliche Länge der Geraden nicht aus der unmittelbaren Anschauung zu entnehmen ist. Wir können jede Gerade immer nur in einem endlichen Raumstück verfolgen und daher kann es der Wahrnehmung nicht widersprechen, wenn wir sagen, die Gerade hat eine zwar ungeheuer große, aber doch eine endliche Länge, vielleicht Millionen oder mehr[11] Siriusweiten; die Phantasie kann sich hier ja beliebig große Zahlen ausdenken, die über jede Anschauung hinausgehen. Gemäß diesen Ueberlegungen kann man durch die N. G. II, die einen willkürlichen Parameter enthält, die Verhältnisse in jedem begrenzten Raumstück beliebig genau darstellen.

Die hier berührten logischen und anschaulichen Tatsachen, wie sie sich vom Standpunkt der Mathematik aus darbieten, laufen freilich in hohem Maße jener orthodoxen Raumauffassung zuwider, die viele Philosophen an den Namen Kants anknüpfen und nach der alle Sätze der Geometrie absolute Gültigkeit[12] haben sollen. So erklärt es sich, daß die nichteuklidische Geometrie bei ihrem Bekanntwerden in philosophischen Kreisen so viel Aufregung und Widerstand hervorgerufen hat" [13].

Wer sich allerdings bei der Ablehnung der nichteuklidischen Geometrie auf Kant beruft, der klammert sich an das Wort Kants, sündigt aber zugleich gegen den Geist seiner Kritik der reinen Vernunft. Ihr wichtigster Zweck ist ja gerade, zur Nachprüfung aller Begriffe und Urteile daraufhin anzuleiten, ob sie nicht etwa transzendente Momente enthalten. Wenn ihm nun selber diese transzendenten Bestandteile der geometrischen Grundbegriffe entgangen sind, so ist das eben menschliche Schwäche und Unvollkommenheit, die auch den größten Geistern nicht fremd ist. Kants Glaube an eine absolute Gültigkeit der euklidischen Geometrie im Erfahrungsraum beruht sonach auf einer irrigen Voraussetzung. Ein solcher Irrtum ist um so entschuldbarer, als der große Gedanke der nichteuklidischen Geometrie zu Kants Zeiten noch nicht gedacht war.

Kehren wir nunmehr zu unserer Forderung 1 zurück! Fassen wir in der K-Ebene einen festen Punkt A ins Auge und ordnen wir ihm

[6] Kurz „K-Geraden".
[7] Kurz „K-Punkt".
[8] Ihre eigentümlichen, von der euklidischen Geometrie abweichenden Hauptsätze hat der Verfasser in einem demnächst erscheinenden Bändchen der Mathematischen Bibliothek „Nichteuklidische Geometrie in der K-Ebene" dargelegt.
[9] a. a. o. S. 383.
[10] Kurz „N. G. II."
[11] Ein willkürlicher „Parameter" der K-Geometrie.
[12] Vgl. hierzu Anm. 3 der vorhergehenden Seite.
[13] F. Klein a. a. o. S. 384–390.

im Geiste alle möglichen anderen K-Punkte zu, so bestimmt A mit ihnen jedesmal eine und nur eine Gerade, allerdings mit einer einzigen Ausnahme. Es gibt nämlich einen, aber auch nur einen K-Punkt — man nennt ihn meist den Gegenpunkt von A — mit dem zusammen A nicht eine, sondern unendlich viele K-Geraden, ein Büschel von K-Geraden bestimmt. So sehen wir, wie der Grundsatz 1 der euklidischen Geometrie in der K-Ebene keine Gültigkeit hat. Hier gilt statt seiner Forderung 1: In der unbegrenzten, aber endlichen K-Ebene bestimmen zwei Punkte eine Gerade oder ein Geradenbüschel.

Durch die Aufstellung von Forderung 1 scheiden wir also aus der Zahl der möglichen Raumvorstellungen die Riemannsche aus und schreiben der Geraden und damit auch dem Raume Unendlichkeit zu. Forderung 1 spricht also in der Tat eine durchaus wesentliche Eigenschaft der euklidischen Geraden aus, allerdings in einer so verhüllten Form, daß es mehr als 2000 Jahre dauerte, ehe sie an die Stelle der euklidischen Definition der Geraden gesetzt wurde. Daß wir heute die gerade Linie durch eine Forderung definieren, ist von entscheidender Bedeutung. Für das mathematische Denken ist es die Voraussetzung dafür, daß die euklidische Vorstellung von der Unendlichkeit des Raumes in erkenntnistheoretischer Hinsicht richtig eingeschätzt werden kann. Jener Schritt zwingt dann mit logischer Folgerichtigkeit dazu, neben die Hypothese des unendlichen als gleichberechtigt die Hypothese des endlichen Raumes zu setzen.

Allerdings macht der menschliche Verstand, durch eine unselige Veranlagung getrieben, dieser Vorstellung vom endlichen Raum, deren Zulässigkeit er nicht bestreiten kann, allerlei Schwierigkeiten. Wenn das Weltall und der Raum endlich ist, so fragt der unkritische Mensch, was ist dann „jenseits desselben“? Wie mir scheint, ist schon die Stellung der Frage unzulässig. Wir haben es hier mit einer der sogenannten Antinomien des menschlichen Verstandes zu tun, wie solche uns auch sonst begegnen und deren restlose Ueberwindung einer späteren Zeit vorbehalten bleibt, in der folgerichtiges Denken über diese Dinge dem Menschen zur zweiten Natur geworden sein wird. So ist das Atom des Chemikers unteilbar, muß es sein, und doch will der menschliche Verstand auch bei diesem kleinsten Quantum körperlichen Stoffes die Möglichkeit der Teilung nicht abgebrochen sehen. Unser Geist haßt alle Schranken, die Schranken im unendlich Kleinen und die Schranken im unendlich Großen. Aber an den unentbehrlichen Hypothesen der wissenschaftlichen Welterklärung kann er mit Erfolg nicht rütteln. Wie er sich mit der Unteilbarkeit der Atome (oder wie man die Elementarquanten der Materie nennen mag) abzufinden hat, so muß er sich auch in die Möglichkeit, ja Wahrscheinlichkeit des endlichen Raumes fügen und seine sophistischen Einwendungen zum alten Eisen legen.

Die Riemannsche Raumvorstellung hat nämlich in steigendem Maße Anerkennung gefunden. „Das erste Prinzip der Naturerklärung, sagt von Helmholtz, ist das der Begreiflichkeit derselben; sonst hätte es keinen Sinn, an das Studium derselben zu schreiten.“ „Ist der Kosmos, von dem wir einen Teil bilden, unendlich, so ist er unbegreiflich, denn das Unendliche liegt jenseits der Grenzen unseres Verstandes.“ „Die Natur ist einfach und somit verständlich. Daß das Weltall undenkbar weit ist, bedingt noch nicht, daß es ohne Ende[14] ist. Daraus, daß es aus einer undenkbar großen Zahl von Sonnen zusammengesetzt ist, folgt noch nicht, daß diese Zahl unzählbar ist. Ist es seiner Ausdehnung und seiner Masse nach endlich[15], wird der Mensch die Mittel finden, es zu wägen und zu messen“ [16].

Und ähnlich spricht sich Schwarzschild in einem Vortrage über das Universum[17] aus. „Es gab eine Zeit, wo es wunderbar erschien, daß man beim Geradeausgehen auf der Erde wieder zum Ausgangspunkt zurückkommt. Es könnte sein, daß zukünftige Geschlechter dasselbe Wunder in einem noch höheren Maße erlebten, wenn es sich herausstellte, daß, wenn man von der Erde weg weiter und weiter in den Raum hinausgeht, man schließlich wieder zu demselben Ausgangspunkt zurückkommt. Was sich durch die Erdumsegelung Magelhaens in zwei Dimensionen ereignete, das würde sich hier in drei Dimensionen wiederholen; sowie die Erde eine endliche Oberfläche hat, von der jetzt nur noch geringe Fleckchen unbesucht sind, so würde der Raum einen endlichen Inhalt haben, den wir ebenfalls ausforschen könnten“. „Diese Vorstellung des endlichen, sogenannten gekrümmten Raumes erklärt die Endlichkeit unseres Milchstraßensystemes, die wir aus den Beobachtungen erschlossen haben, durch die einfachste Annahme, daß es darüber hinaus nichts gibt, weil der Raum eben zu Ende ist. Sie ist zugleich die ermutigendste für den Menschengeist, der auf Beherrschung des Universums ausgeht, indem sie ihm angibt, daß er nur ein räumlich begrenztes Reich zu erobern braucht, daß er einst die makroskopische Forschung zu

[14] Bei Kleinpeter „Grenze“.

[15] Bei Kleinpeter „begrenzt“.

[16] Snyder, Das Weltbild der modernen Naturwissenschaft. Uebersetzt von Kleinpeter, Leipzig 1907.

[17] Ueber das System der Fixsterne. Leipzig 1916, Seite 42.

Ende führen und dann nur die mikroskopische fortzusetzen haben wird."

Die Schüler des Eukleides waren reifere, im philosophischen Denken wohl geübte Männer; drum dürfte er seine Definitionen und Axiome an die Spitze der geometrischen Unterweisung stellen. Seinem Beispiele in gedankenloser Nachahmung beim Unterrichte zwölfjähriger Knaben zu folgen, verrät wenig Lehrgeschick. Eine weisere Methodik behält die Grundlagen der Geometrie in zeitgemäßer Aufmachung der Oberstufe unserer höheren Schulen vor. Daß da ihre richtige Stelle ist, das dürften die vorstehenden Erörterungen überzeugend dargetan haben. Dort wird man sie aber auch nicht gerne vermissen. Gewährleisten sie doch einmal eine unübertreffliche Schulung im philosophischen Denken, während sie andererseits unschwer einen wertvollen Einblick in bedeutsame Teilgebiete der neueren geometrischen Forschung ermöglichen. Diesen letzteren Umstand näher darzulegen, das sei der Fortführung des Gedankens in einer der nächsten Nummern dieser Zeitschrift vorbehalten.

Volkswirtschaft im Unterricht.

Von A. Schülke (Tilsit).

(Schluß.)

Der Wohlstand des Landes wird nun bedingt durch die Arbeit der Bevölkerung, und diese ist gerichtet auf Hervorbringung von Nahrungsmitteln, Rohstoffen (Kohle, Eisen, Kali), Verarbeitung und Verteilung der Stoffe und auf geistige Werte.

Kann die heimische Landwirtschaft die 2,7fache Bevölkerung ernähren? Von 1880—1913 haben sich bei Weizen und Roggen die Ernte- und Hektar-Erträge verdoppelt, die Versorgung mit Brotgetreide ist also, trotzdem das Ackerland nicht vermehrt wurde, dieselbe geblieben; bei Kartoffeln hat sich der Hektar-Ertrag verdoppelt, die Ernte aber verdreifacht, es ist also noch — namentlich im Osten — leichter Boden, dessen Bebauung früher nicht lohnend war, mit Kartoffeln bestellt. Zugleich sieht man aus den Tabellen den außerordentlich hohen Stand der deutschen Landwirtschaft. Zwar hat England ähnliche Hektar-Erträge, da aber die Gesamternte winzig ist, so kann wohl nur der beste Boden als Ackerland benutzt sein. In Oesterreich, Ungarn, Frankreich und Italien bringt der Hektar etwa dasselbe wie in Deutschland vor 33 Jahren, obwohl dort das Klima günstiger ist. Kanada hat bessere Hektar-Erträge als die letztgenannten Länder, wenn aber dies große Land nur etwa den dritten Teil des Brotgetreides von Deutschland hervorbringt, so scheint man sich dort ebenso wie in England nur auf den besten Boden zu beschränken. Die Vereinigten Staaten, Rußland, Argentinien, Indien erzeugen im Verhältnis noch weniger als Deutschland 1880. Auch der Viehstand war in Deutschland viel größer als in anderen Ländern. Man kann daraus auf vermehrten Fleischgenuß und wachsenden Wohlstand schließen, aber es mußten für eine Milliarde Mark Futtermittel aus dem Auslande bezogen werden. Die Bedeutung der Landwirtschaft erkennt man auch daraus, daß allein der Wert einer Roggenernte dem Wert der jährlichen Kohlenförderung, 2 Millarden Mark, ungefähr gleichkommt. Auch die Kartoffelernte hat, den Zentner zu M 2 gerechnet, denselben Wert.

Während es verhältnismäßig leicht ist anzugeben, welchen Preis die erzeugten Nahrungsmittel und Rohstoffe haben, so ist es nur in Einzelfällen möglich festzustellen, welche bedeutenden Werte durch Verarbeitung der Rohstoffe (Veredelung) geschaffen werden, z. B. 1913 kostete 1 dz Baumwolle M 130, Baumwollgarne M 1500; 1 kg Roheisen M 0,08, 1 kg Nähnadeln M 9. Für den Durchschnitt ist man aber auf indirekte Schlüsse angewiesen, z. B. 1913 wurden für 1,3 Milliarden Mark Baumwolle und Wolle eingeführt; davon wurden die Bekleidungsstoffe in Deutschland hergestellt und es wurden noch für 1 Milliarde Stoffe ausgeführt. Die Erzeugung von Roheisen hatte einen Wert von 1,4 Milliarden Mark, die Ausfuhr von Eisenwaren und Maschinen 2,2 Milliarden. Die Rohstoffe der chemischen Industrie sind geringwertig, die Ausfuhr allein ergab 800 Millionen.

An der ungeheueren Wertsteigerung durch Veredlung der Stoffe hat namentlich die geistige Arbeit einen großen Anteil. Die Grundlage für jeden modernen Betrieb bildet die Beherrschung der Naturkräfte, und diese kann nur erlangt werden durch wissenschaftliche Forschung; aber von der theoretischen Erkenntnis bis zur praktischen Ausführung ist noch ein weiter Weg, dessen Schwierigkeit häufig unterschätzt wird. Selbst einem Manne, dem alle technischen Hilfsmittel in so vollkommener Weise zu Gebote standen, wie Siemens, gelang es, nachdem er das elektrodynamische Prinzip klar ausgesprochen hatte, erst nach 20 Jahren, eine brauchbare Dynamomaschine zu bauen. Andere dem Schüler nahe liegende Beispiele für den wirtschaftlichen Wert wissenschaftlicher Arbeit liefern die Forschungen in der Wärmelehre, aus denen die neueren Dampfmaschinen, die Turbinen und Motoren hervorgegangen sind. Aus Betrachtung der Zug- und Druckkräfte entstanden die gewaltigen Brücken der Neuzeit, aus den elektrischen Wellen die drahtlose Telegraphie. Durch seine Arbeit über Ernährung der Pflanzen hat Liebig es ermöglicht, daß die deutsche Landwirtschaft 40 Millionen Menschen mehr ernähren kann als vor 100 Jahren. Das Thomasverfahren machte nicht allein phosphorhaltige Eisenerze nutzbar, sondern es gab der Landwirtschaft auch ein wertvolles Düngemittel. Die künstliche Herstellung des Indigo bewirkte, daß wir Indigo ins Ausland ausführen, und daß sein Anbau in Indien fast ganz eingestellt ist. Besonders durchsichtig sind die Verhältnisse in der Chemie. Preußen zahlt für Universitäten jährlich 23 Millionen Mark, das Reich etwa 36 Millionen. Davon betragen die Ausgaben für Chemie nur einen kleinen Bruchteil; durch die chemische Wissenschaft ist aber eine Industrie entstanden, deren Ausfuhr allein einen Reingewinn von 80 Millionen jährlich liefert (10 % der Ausfuhr). Eine notwendige Ergänzung für die Erfindertätigkeit bildet aber die Arbeit der höheren Schulen, der Volks- und Fachschulen, auf denen die Beamten, Ingenieure, Werkmeister und Arbeiter vorgebildet werden, welche für die Ausführung neuer Gedanken gebraucht werden.

Der Außenhandel Deutschlands besteht im wesentlichen aus der Einfuhr von Rohstoffen und der Ausfuhr von fertigen Waren und Kohle. Der Handel hat sich in noch stärkerem Maße entwickelt als die Landwirtschaft, denn von 1890 ist die Einfuhr auf das 2,6fache gewachsen, die Ausfuhr auf das Dreifache. Bei der Einfuhr war das Wachstum in Belgien, Holland, Oesterreich und Italien noch stärker; die Zunahme der Ausfuhr ist in Deutschland, Holland, Belgien, Italien und den Vereinigten Staaten fast gleich groß. Auffallend ist, daß das kleine Holland fast ebensoviel Außenhandel hat als Frankreich, Belgien mehr als Oesterreich oder Italien; und daß der Handel nach den britischen Kolonien das Zehnfache von dem nach den deutschen Kolonien beträgt, weil wir zu spät angefangen haben, unsere Kolonien zu entwickeln. Das Bemerkenswerteste aber ist, daß wir 1913 für Getreide und Futtermittel 1 Milliarde Mark, für Baumwolle, Wolle, Felle, Kupfer, Kaffee, Kautschuk, Tabak, 4 Milliarden ins Ausland abgegeben haben. Statt dieser 5 Milliarden werden wir wohl nach Beendigung des Krieges mindestens das Doppelte zahlen müssen. Wahrscheinlich aber wird es dem hartnäckigen Haß in der kriegerischen Presse von England und Amerika gelingen, uns fast den ganzen Außenhandel (21 Milliarden) dauernd zu entziehen. Der Handel mit Oesterreich, Bulgarien und der Türkei beträgt nur den zehnten Teil davon und gibt, selbst wenn er gesteigert wird, nur einen schwachen Ersatz für den Welthandel. Weil wir außerdem noch jährlich 5 Milliarden für Verzinsung der Kriegsanleihen und direkten Kriegskosten zahlen müssen, so würden wir unter der Last der Steuern zusammenbrechen, wenn wir nicht starke Entschädigung und Machterweiterung erhalten. Denn die Steuern und Zölle des deutschen Reiches betrugen 1913 nur 1,7 Milliarden, die Gebühren, Einkommen- und Vermögensteuer in Preußen nur 0,7 Milliarden. Von großer wirtschaftlicher Bedeutung ist Verschwendung oder Sparsamkeit bei der täglichen Lebenshaltung. Z. B. die Ausgaben 1913 für die Genußmittel, Branntwein und Bier betrugen 3,5 Milliarden Mark. Diese Summe ist größer als die Gesamtausgabe des deutschen Reiches, dreimal so groß wie die Ausgaben für Heer und Flotte; man hätte dafür 100 Großkampfschiffe bauen können. In Preußen brachte die Einkommen- und Ergänzungssteuer nur den achten Teil dieser Summe, das ganze Unterrichtswesen — Universitäten, höhere und Volksschulen — kostete nur den zwölften Teil, die Rechtspflege den 16. Teil. Wenn dagegen jeder Erwerbsfähige (die Hälfte der Bevölkerung) durch bessere Arbeit den Wert seiner Leistungen täglich nur um 10 Pfennige steigert, so gewinnt dadurch das Volk jährlich 1 Milliarde Mark. Bekannt ist auch, daß allein die Sparsamkeit bei Lebensmitteln (Brotkarte) uns das Durchhalten ermöglicht.

Bei dem glänzenden Aufschwung Deutschlands bleibt noch zu untersuchen, wie der Zuwachs sich verteilt hat. Sind die Reichen reicher, die Armen ärmer geworden? Auf diese Frage kann man nur in Preußen eine sichere Antwort geben, weil hier eine streng durchgeführte Einkommensteuer besteht. Aber die Ergebnisse werden ähnlich für das Reich gelten. Von 1896—1913 hat sich die Einwohnerzahl wie 3 : 4, das Einkommen aber weit stärker wie 1 : 2 vermehrt. Die Personenzahl in der untersten Stufe mit einem Jahreseinkommen unter M 900 hat sich vermindert, das Gesamteinkommen der Personen mit M 900—3000 Jahreseinnahme ist 2,88 mal, mit M 3000—9500 2,42 mal, über M 9500 2,46 mal so groß geworden; die Zunahme ist also fast gleichmäßig, am stärksten aber bei den kleinen Einkommen erfolgt. Dadurch hat sich der Anteil der verschiedenen Stufen für das Volkseinkommen verändert. 1896 bildeten die Einkommen unter M 900 40 % des ganzen Einkommens, und die anderen Schichten lieferten 36, 13, 16 %; 1913 waren es jedoch 21, 45, 15, 19 %. Weil aber der Steuersatz mit der Höhe des Einkommens wächst, ist der Anteil dieser Gruppen an dem ganzen Steuerbetrage fast unverändert geblieben, er betrug nämlich für die kleinen Einkommen $^1/_3$ des Steuerbetrages, für die mittleren $^1/_4$, und die großen $^5/_{12}$.

Im Jahre 1906 war das ganze veranlagte Einkommen 14,614 Milliarden Mark, 1913 20,451 Milliarden, durchschnittlich fand also ein jährliches Wachstum von 0,834 Milliarden statt, in 7 Jahren also $0{,}834 \cdot 7 \cdot 8 : 2 = 23$ Milliarden.

Wo ist nun diese ungeheuere Summe geblieben? Ein großer Teil wird verwandt auf bessere Nahrung, Kleidung, Wohnung. Auch die Weiterbildung und mehr oder weniger edle Genüsse (Reisen, Theater, Konzert, Kino) verbrauchen einen Teil der Mehreinnahmen. Sodann sind die Kosten für die Ausbildung der Kinder wesentlich gestiegen, weil die Schülerzahl in den Volksschulen verhältnismäßig abnimmt, in den höheren Lehranstalten dagegen in weit stärkerem Maße wächst als die Bevölkerung (von 1890—1913 fast auf das Doppelte). Endlich steigen die Preise für die meisten Lebensmittel und Gebrauchsgegenstände, d. h. das Geld verliert an Wert. So kommt es, daß mitunter geklagt wird, die Ausgaben seien stärker gewachsen als die Einnahmen. Läßt sich nun nachweisen, daß die Mehrzahl des Volkes von den vermehrten Einnahmen einen verständigen Gebrauch macht? Der Vermögenszuwachs nach der Ergänzungssteuer von 1905—1914 betrug 33 Milliarden, also noch mehr als es der vorige Ueberschlag verlangte, und davon kamen 1907 bis 1913 allein 4 Milliarden auf die Einlagen in Sparkassen, d. h. auf die minderbemittelte Bevölkerung. Der Vermögenszuwachs hat sich also über alle Volkskreise erstreckt. Diese starke Kapitalbildung hat den wirtschaftlichen Aufstieg befördert und das Durchhalten erleichtert.

Man sieht also, daß die Volkswirtschaft ein Gebiet ist, das nicht allein Uebungen im Rechnen liefert, sondern zugleich Anregung zum Nachdenken gibt.

Da die Notwendigkeit besteht, unserem Volke mehr staatsbürgerliche Kenntnisse zuzuführen, so scheint mir ein solcher Ueberblick über die gesamte wirtschaftliche Lage Deutschlands, über die Erwerbsmöglichkeiten und die notwendigen Ausgaben die Grundlage für jede volkswirtschaftliche Bildung zu sein. Diese Gedanken können nur dann vollständiges Eigentum der Schüler werden, wenn sie nicht dogmatisch mitgeteilt, sondern aus den Zahlen erarbeitet werden.

Weitere Einzelheiten ersieht man aus den Tabellen von selbst. Aber auch ganz andere Gebiete ergeben viel Lehrreiches, z. B. der Haushalt des deutschen Reiches und des preußischen Staates, weil nur am Haushalt der verwickelte Zusammenhang zwischen dem Reich und den Einzelstaaten klar zu übersehen ist. (I, Seite 164—169.) II, S. 136 wird gezeigt, daß die Anlage von wirtschaftlichen Unternehmungen verschieden erfolgt, je nachdem der größte Nutzen für den Unternehmer oder für die Gesamtheit erstrebt wird. Früher dachte man fast immer an den größten Unternehmergewinn, nach dem Kriege werden häufiger volkswirtschaftliche Erwägungen den Ausschlag geben.

Man weise diese Bestrebungen nicht ab mit dem Schlagwort: Die Schätzung nach Milliarden führt zum Materialismus und zur Verachtung aller geistigen und sittlichen Werte! Materialistische Gesinnung entstammt aus ganz anderen Quellen, und die gute alte Zeit war durchaus nicht frei davon; man hat früher Schiller fast verhungern, Mozart und Beethoven dauernd mit Sorgen kämpfen lassen! Hier kann im Gegenteil gezeigt werden, daß ein rein idealer Gedanke: Schutz der nationalen Arbeit und Schutz der wirtschaftlich Schwachen Deutschland Segen gebracht hat.

Wechselstromtheorie ohne Differential- und Integralrechnung.

Von St.-R. Dr. Franz Hochheim (Weißenfels a. S.).

Der Abhandlung, die ich in dieser Zeitschrift 22, S. 130 veröffentlichte[1], lag die Voraussetzung zugrunde, daß die Schüler mit den Elementen der Differential- und Integralrechnung vertraut sind. In der Tat habe ich, solange an unserer Anstalt die UI und OI getrennt waren und in ersterer die Elemente der Infinitesimalrechnung behandelt wurden, in OI die besten Erfahrungen mit der Wechselstrombehandlung gemacht. Indessen nicht überall liegen die Verhältnisse so günstig: es wird noch immer Anstalten geben, auf denen die Elemente der Differential- und Integralrechnung gar nicht oder erst zu einer Zeit behandelt werden, daß man sie in der Physik nicht mehr nutzbar machen kann. Vor allem erschwert eine Vereinigung der OI und UI die Behandlung der Wechselströme: ich habe darum, seit diese Vereinigung auch bei uns vorliegt, zunächst nach einem Verfahren, das ich 22, S. 131 skizzierte, in der Mathematik einige Grundlagen gelegt und danach in der Physik die Wechselströme behandelt, war aber nicht befriedigt mit dem bei den Unterprimanern erzielten Resultat: letztere besaßen eben doch zu wenig Uebung im Differenzieren, die Rechnungen wurden deshalb im Physikunterricht breiter als bei genügender Uebung und lenkten dadurch die Aufmerksamkeit der Schüler allzusehr auf sich, so daß das eigentlich Physikalische zu sehr hinter dem Mathematischen zurücktrat. Das muß aber vermieden werden: Die Physikstunde ist keine Mathematikstunde!

Mußte nun darum auf das so interessante und bedeutsame Gebiet der Wechselströme verzichtet werden? Ich glaube nicht. Es kommt nur darauf an, ein Lehrverfahren zugrunde zu legen, das eben die Kenntnis des Differenzierens bestimmter Ausdrücke nicht voraussetzt, sich im übrigen an die Vorstellungs- und Betrachtungsweisen, die dem Schüler geläufig sind, anschließt und mit möglichst wenig Rechnung, d. h. mathematischem Zeitaufwand erledigen läßt. Freilich ohne differentiale Betrachtungen, d. h. Hineinziehung kleiner Größen geht es auch hierbei nicht ab; aber ohne diese kommt man in der I überhaupt weder in der Mathematik noch in der Physik aus. Ich halte es auch für unbedenklich, die Symbole di, dt usw. zu benutzen; je öfter sie benutzt werden, um so klarer erwächst das Verständnis für ihre Bedeutung; aber man kann sie schließlich auch durch andere Buchstaben

[1] Die theoretische Behandlung der Wechselströme im Unterricht. — Ich werde im folgenden mehrfach auf diese Abhandlung zurückkommen; auf sie beziehen sich die Hinweise 22, S. 130 u. dgl.

ersetzen. Das Verfahren, das ich nun zugrunde legte und das ich seitdem ausgeprobt habe, stützt sich auf die Vorstellungen der Vektorbehandlung, — ich sage absichtlich nicht Vektorenrechnung, denn gerechnet wird dabei sehr wenig. Zwei didaktische Schwierigkeiten sind dabei zu überwinden, übrigens dieselben wie bei der Behandlung des ebenen Pendels ohne Differentialrechnung: einmal die Erweckung des Verständnisses, daß man sich neben der tatsächlich sich vollziehenden schwingenden Bewegung eine gleichmäßig kreisende denken kann, deren Projektion die erstere ist, und dann die Festigung des Bewußtseins, daß die Figuren, die durch Drehung des Vektors fortwährend sich ändern, nur veränderliche Augenblickszustände darstellen, also nicht fest, sondern beweglich zu denken sind. Wesentlich ist, daß hierauf immer wieder hingewiesen wird, die Betrachtungsweise also den Schülern allmählich in Fleisch und Blut übergeht; letzteres ist um so leichter möglich, als dieselbe Figur nur mit kleinen Abänderungen immer wiederkehrt. Nach den Erfahrungen, die ich machte, glaube ich wohl, daß sich das Verfahren für den Unterricht eignet, und im folgenden soll daher das wesentliche daraus mitgeteilt werden.

1. Gleichung des Wechselstromes. Wird man die Wechselstromlehre zweckmäßig überhaupt den Schwingungen der Akustik und Optik folgen lassen, so kann man leicht an die Konstruktion der Sinuskurve mit Hilfe eines Kreises (Fig. 1) anknüpfen, die man natürlich genau zeichnen lassen wird: die Ordinaten, die

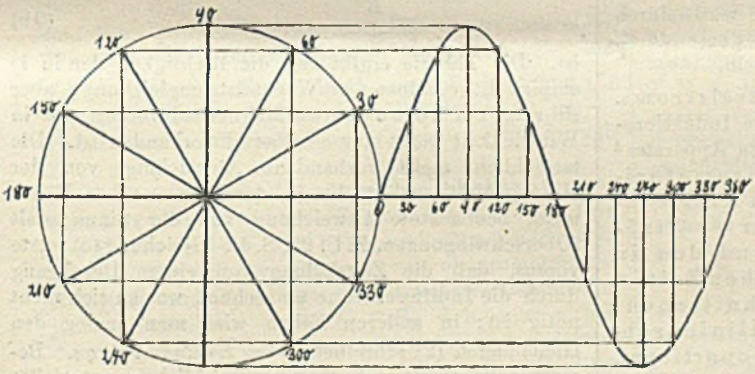


Fig. 1.

durch Rotation des Vektors (gegen den Uhrzeiger) nacheinander in der linken Seite der Figur entstehen, werden in der rechten Seite nebeneinander als Funktion der Zeit dargestellt. Die Kurve der rechten Seite sieht man im rotierenden Spiegel bei Betrachtung des Bildes einer leuchtenden Blende, dessen Strahlen zuvor von einer vertikalen schwingenden Stimmgabel reflektiert worden sind. Dieselbe Kurve sieht man aber auch im rotierenden Spiegel bei Betrachtung des Fluoreszenzfleckes der Braunschen Röhre[2], wenn derselbe durch einen Wechselstrom beeinflußt ist[3], und gelangt so zu der Ueberzeugung, daß die Intensität des Wechselstromes eine Sinusfunktion der Zeit darstellt. Es folgen darum sofort die Begriffe „veränderlicher Augenblickswert" i (Projektion), Scheitelwert $\bar{i}$ (Vektor bzw. Amplitude), Frequenz n, und die Zeichnung eines Kreises mit dem Radius $\bar{i}$ (z. B. 3 cm = 3 Ampere) in Fig. 2 gibt für den Augenblickswert

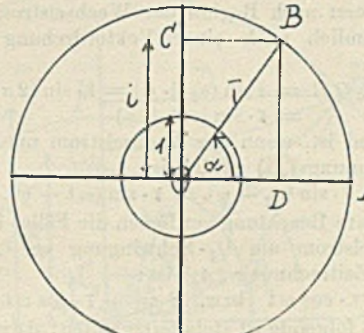


Fig. 2.

$$i = OC = BD = \bar{i} \cdot \sin \alpha, \qquad (1)$$

worin α der mit der Zeit gleichmäßig wachsende Winkel A_0OB ist. Bei der Frequenz n dauert ein Umlauf des Vektors, d. h. eine Periode $\frac{1}{n}$ sek.; da sich bei gleichmäßiger Rotation des Vektors $\bar{i}$ die Wege wie die Zeiten verhalten, ist (im Einheitskreis)

$$\alpha : 2\pi = t : \frac{1}{n}, \quad \alpha = 2\pi n t. \qquad (1a)$$

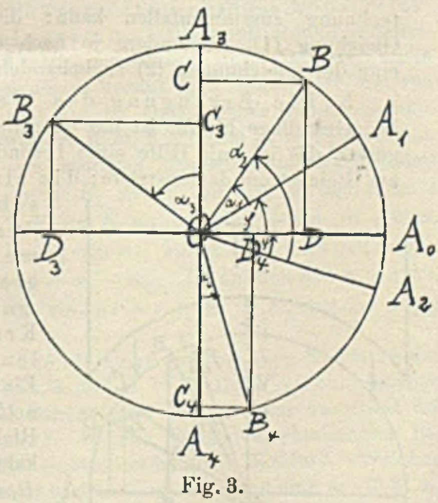


Fig. 3.

$2\pi n$ ist der in 1 sek. bestrichene Bogen des Einheitskreises, daher auch als „Winkelgeschwindigkeit" bezeichnet und mit ω („Frequenzfaktor") abgekürzt, also

$$\omega = 2\pi n, \quad i = \bar{i} \sin 2\pi n t = \bar{i} \sin \omega t \qquad (1b)$$

Ueber die Messung von $\bar{i}$ mit der Braunschen Röhre vgl. Z. U. 29, S. 4.

2. Die Phasenverschiebung. Die Gleichungen (1) setzen voraus, daß man die Zeit von einem Moment ab zählt, in dem α gerade $= 0$ oder $= 2k\pi$, also $i = 0$ ist. Man kann aber die Zeit auch von

[2] Ueber Arbeiten mit der Braunschen Röhre, auch über die zweckmäßige Regulierung der Spiegelgeschwindigkeit, habe ich in der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht (im folgenden Z. U. abgekürzt) einige Arbeiten veröffentlicht: Z. U. 29, S. 1; 30, S. 32; 30, S. 57. — Ist ein Oszillograph vorhanden, so kann man die Wechselstromkurven objektiv projizieren und wird dies dann auch mit der zum Vergleich herangezogenen Stimmgabelkurve tun. Die Bilder der Braunschen Röhre gestatten nur eine subjektive Betrachtung im rotierenden Spiegel.

[3] Abgesehen von Oberschwingungen, die man abdrosseln kann (Z. U. 29, S. 4).

einem anderen Momente ab zählen, in dem i einen positiven oder negativen Wert hat. Beginnt z. B. die Zeitrechnung in einem Momente (Fig. 3), in dem sich der Vektor in A_1 befindet, so ist der Wechselstrom der Zeitrechnung um den Winkel φ voraus, da letztere erst nach Beginn der Wechselstromperiode einsetzt, nämlich nach einer Vektordrehung um φ, und es ist

$$i = \bar{\imath} \cdot \sin A_0 O B = \bar{\imath} \sin(a_1 + \varphi) = \bar{\imath} \cdot \sin(2\pi n t + \varphi)$$
$$= \bar{\imath} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Entsprechend ist, wenn der Wechselstrom um ψ hinter der Zeitrechnung (A_2) zurück ist,

$$i = \bar{\imath} \cdot \sin(a_2 - \psi) = \bar{\imath} \cdot \sin(\omega t - \psi). \qquad (2\text{a})$$

Besondere Beachtung verdienen die Fälle, in denen der Wechselstrom um $^1/_4$-Schwingung vor (A_3) oder hinter der Zeitrechnung (A_4) ist:

$$i = \bar{\imath} \cdot \cos \omega t \quad \text{bzw.} \quad i = -\bar{\imath} \cdot \cos \omega t \qquad (2\text{b, c})$$

Für das folgende ist stets festzuhalten: der Sinusverlauf des Stromes beginnt stets in A_0, da die Projektion auf die Vertikale den Augenblickswert darstellt; die Zeitrechnung kann von jedem anderen Punkte aus erfolgen. Es kann dem Anfänger scheinen, daß die Einführung des „Phasenwinkels“ eine unnötige Erschwerung bedeutet: bei der Existenz einer einzigen Schwingung wird man in der Tat immer die Gleichungen (1) zugrunde legen. Aber schon der Hinweis auf die Akustik (Lissajoussche Figuren) zeigt, daß gleichzeitig Schwingungen verschiedener Phase vorhanden sein können, von denen natürlich nur der Beginn einer mit dem Anfang der Zeitrechnung zusammenfallen kann: diese wird durch Gleichung (1), die andere je nach der Phase durch eine der Gleichungen (2) zu behandeln sein.

3. Die Erzeugung des Wechselstroms. Die Grundlage hierfür ist das quantitative Induktionsgesetz, das ich mit Hilfe eines besonderen Apparates[1] am Gleichstrom demonstriere: die elektromotorischen Kräfte induzierter Ströme sind den in gleichen Zeiten geschnittenen Kraftlinienzahlen proportional. Ein homogenes Magnetfeld habe nun die Richtung der vertikalen Pfeile der Fig. 4. $B_1 B'_1$ stellt den Durchmesser oder, wenn man will, den Aufriß der Stirnseite des im Magnetfelde gedrehten Drahtkreises einer Wechselstromdynamo in einem Momente dar, wenn er gegen die Indifferenzzone OA um den Winkel a_1 gedreht ist. Das Schneiden der Kraftlinien oder der Austritt derselben aus der Windungsebene erfolgt durch die in B_1 bzw. B'_1 auf der Zeichenebene senkrechten Drähte. Die durch Induktion in B_1 und B'_1 erzeugten elektromotorischen Kräfte addieren sich bekanntlich. $C_1 C'_1$ ist die Lage des Drahtkreises eine sehr kurze Zeit dt später. Ebenso stellt $B_2 B'_2$ den Drahtkreis nach Drehung um a_2 aus der Lage OA dar, $C_2 C'_2$ wieder um ein gleiches dt später ($C_1 B_1 = C_2 B_2$). Die bei B_1 und B_2 induzierten E. M. K. sind dann den bei der Drehung über $C_1 B_1$ bzw. $C_2 B_2$ austretenden Kraftlinienzahlen proportional, d. h. den Strecken $F_1 B_1$ und $F_2 B_2$. Da $\sphericalangle F_1 C_1 B_1 = a_1$, $F_2 C_2 B_2 = a_2$ (je zwei entsprechende Schenkel aufeinander senkrecht), so gilt für die erzeugten E. M. K. E_1 und E_2

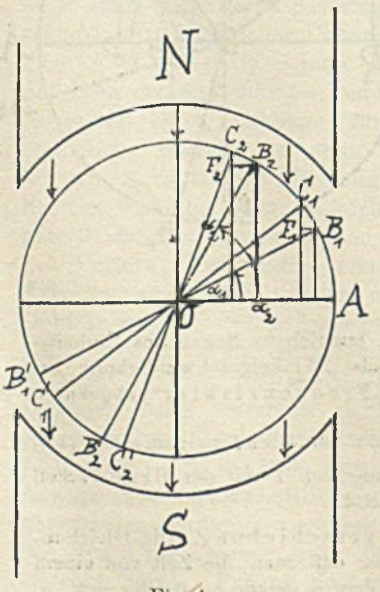


Fig. 4.

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{F_1 B_1}{F_2 B_2} = \frac{\sin a_1}{\sin a_2},$$

woraus nach Einführung des Proportionalitätsfaktors $\bar{E}$ folgt

$$E = \bar{E} \cdot \sin a = \bar{E} \cdot \sin \omega t. \qquad (3)$$

$\bar{E}$ ist der höchste Wert von E, erreicht, wenn $\sin a = 1$, also der Scheitelwert. Es ist evident, daß derselbe der Drehungsgeschwindigkeit, der Stärke des Magnetfeldes und der Windungszahl auf dem Anker proportional ist. Aus (3) wird man, wenn keine anderen E. M. K. vorliegen, den Strom durch Division mit dem Widerstand w schließen:

$$i = \frac{\bar{E}}{w} \cdot \sin \omega t = \bar{\imath} \cdot \sin \omega t. \qquad (3\text{a})$$

so daß

$$\bar{\imath} = \frac{\bar{E}}{w} \qquad (3\text{b})$$

ist. Die Theorie ergibt also die Richtigkeit der in 1) empirisch geschlossenen Wechselstromgleichung; aber sie setzt ein homogenes Magnetfeld voraus, das in Wirklichkeit meist nur annähernd vorhanden ist. Die tatsächlich meist vorhandene Abweichung von der Homogenität erklärt die in der Braunschen Röhre meist beobachtete Abweichung von der Sinusgestalt (Oberschwingungen, Z. U. 29, S. 4). Gleichung (3) setzte voraus, daß die Zeitzählung von einem Durchgang durch die Indifferenzzone ab rechnet, was an sich nicht nötig ist; in anderen Fällen wird man analog den Gleichungen (2) schreiben $E = \bar{E} \cdot \sin(\omega t \pm \varphi)$. Bemerkenswert ist, daß hier ein wirklicher materieller Vektor in Gestalt des drehbaren Drahtradius vorliegt, während sonst der Vektor nur eine mathematische Fiktion ist.

4. Die Effektivmessungen des Wechselstromes. Man kann sich die Wärmewirkung des Stromes nicht nur durch Ausdehnung eines Drahtes (Hitzdrahtinstrumente), sondern auch auf kalorimetrischem Wege gemessen denken; die Anwendung auf

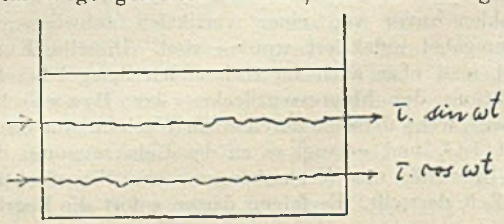


Fig. 5.

die Hitzdrahtinstrumente folgt hieraus von selbst. Zwei Drähte gleichen Widerstandes mögen ihre Erwärmung an eine abgemessene Wassermenge abgeben (Fig. 5).

[1] Der Apparat ist von A. Pfeiffer in Wetzlar zu beziehen, der eine genaue Beschreibung desselben kostenlos versendet; eine solche befindet sich auch in meiner Abhandlung „Elementare Theorie der Wechselströme“ (B. G. Teubner), eine kurze in dieser Zeitschr. 22, S. 132.

Durch diese Drähte möge je ein Wechselstrom gleichen Scheitelwertes und gleicher Frequenz, aber von einer Viertelschwingung Phasenunterschied geleitet werden; man kann sich diese Wechselströme etwa durch eine Maschine mit zwei aufeinander senkrechten Ankerwindungsebenen, die dann vier Schleifringe zur Abnahme der Ströme (Zweiphasenmaschine) besitzen muß, geliefert denken. Für die Ströme kann man dann die Gleichungen (1 b) und (2 b) benutzen, ihre Wärmewirkungen in der kurzen Zeit dt sind in Joule gemessen $dA_1 = \bar{\imath}^2 w \sin^2 \omega t \cdot dt$ und $dA_2 = \bar{\imath}^2 w \times \cos^2 \omega t \cdot dt$, der gesamte Wärmewert also während dt ist $dA = dA_1 + dA_2 = \bar{\imath}^2 w \cdot dt$, in einer Sekunde $A_{1\,\text{sek.}} = \bar{\imath}^2 w \cdot \Sigma dt = \bar{\imath}^2 w$. Da die beiden Wechselströme zwar nicht in jedem Moment, wohl aber in dem Zeitraum einer Sekunde gleiche Wärme entwickeln, bewirkt e i n e r der Ströme in 1 sek. die Hälfte dieser Joule, $\frac{\bar{\imath}^2}{2} \cdot w$, wirkt also kalorimetrisch wie ein Gleichstrom der Intensität

$$i_\varepsilon = \frac{\bar{\imath}}{\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Ein mit Gleichstrom geeichtes Hitzdrahtamperemeter gibt als den $\sqrt{2}$-ten Teil des Scheitelwertes, die „Effektivintensität" i_ε. Da mit einem Hitzdrahtvoltmeter (3 b) $i_\varepsilon \cdot w = \frac{\bar{\imath}}{\sqrt{2}} \cdot w = \frac{\bar{E}}{\sqrt{2}}$ gemessen wird, setzt man analog (4) die „Effektivspannung"

$$E_\varepsilon = \frac{\bar{E}}{\sqrt{2}} \tag{4a}$$

und kann also aus der Angabe eines an die Pole einer Wechselstrommaschine gelegten Voltmeters E_ε die Scheitelspannung $\bar{E}$ berechnen, so daß Gleichung (3) bei Kenntnis der Tourenzahl völlig bestimmt ist. — Ueber den praktischen Vergleich von $\bar{\imath}$ und i_ε vgl. Z. U. 29, S. 4.

5. Die Summation zweier elektromotorischer Kräfte von Wechselströmen. Die resultierende Scheitelspannung. Wirken in einem (Wechsel)-Stromkreise zwei elektromotorische Kräfte E_1 und E_2 in Serie, so ist selbstverständlich in jedem Augenblick $iw = E_1 + E_2$, d. h. man erhält die Stromstärke, wenn man die Summe der elektromotorischen Kräfte durch den Widerstand dividiert. Daraus darf aber nun nicht geschlossen werden, daß man bei Wechselströmen auch den Scheitelwert des Stromes gewinnt, wenn man die Summe der Scheitelwerte der elektromotorischen Kräfte durch den Widerstand dividiert: denn auch bei anderen Schwingungen ist die Amplitude der resultierenden Schwingung nur dann gleich der Summe der Amplituden der Komponenten, wenn diese gleichphasig sind, anderenfalls stets kleiner.

Folgender auch weiterhin benutzbarer mathematischer Hilfssatz kann zugrunde gelegt werden: die Summe der Projektionen zweier von einem Punkt ausgehenden Strecken auf dieselbe Gerade ist gleich der Projektion der Diagonale ihres Parallelogramms. Da nämlich (Fig. 6) $OC_1 = DB_2 = FC_2$, ist OC_1 (Projektion von OB_1) $+ OC_2$ (Projektion von OB_2) $= OF$ (Projektion von OB).

Stellen nun OB_1 und OB_2 die Vektoren zweier in Serie geschalteter elektromotorischer Kräfte in einem Moment der Drehung dar, die sich zwar mit gleicher Winkelgeschwindigkeit drehen, aber nicht gleichphasig sind, sondern zu verschiedenen Zeiten die Richtung OA_0 passieren, so haben beide den Phasenunterschied $B_1 O B_2$; ihre Projektionen OC_1 ($E_1 = OB_1 \cdot \sin \alpha_1 = \bar{E}_1 \cdot \sin \alpha_1$) und OC_2 ($E_2 = OB_2 \cdot \sin \alpha_2 = \bar{E}_2 \cdot \sin \alpha_2$)

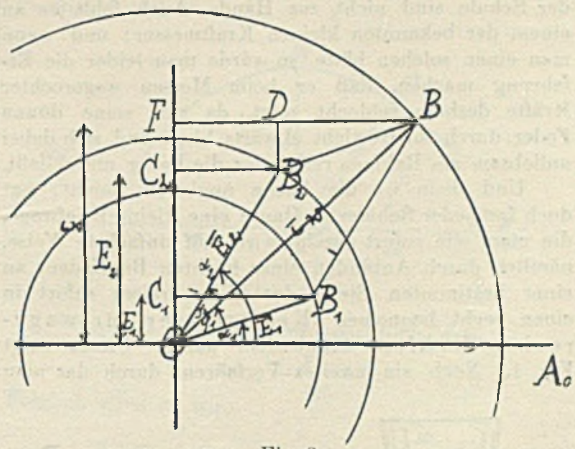


Fig. 6.

sind die Augenblickswerte der E. M. K. und $OF = OC_1 + OC_2 = iw$ ist der Augenblickswert der resultierenden Spannung, aus dem man durch Division mit w den Augenblickswert i der Stromstärke gewinnt. Aber die resultierende Scheitelspannung $\bar{\imath} w$ ist gleich der Diagonale des aus den Scheitelspannungen $\bar{E}_1$ und $\bar{E}_2$ unter Berücksichtigung ihres Phasenunterschiedes konstruierten Parallelogramms. Die resultierende Scheitelspannung und also der Strom sind stets der einen E. M. K. in der Phase voraus (φ_1), hinter der anderen zurück (φ_2), und sie ist stets kleiner als die Summe der Scheitelwerte der E. M. K. Dabei ist es vollkommen gleichgültig, von welchem Momente ab man die Zeit zählt. Setzt man $E_1 = \bar{E}_1 \cdot \sin \omega t$, so ist $i = \bar{\imath} \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$, $E_2 = \bar{E}_2 \sin(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)$ zu setzen. Ist aber $E_2 = \bar{E}_2 \cdot \sin \omega t$, so ist $i = \bar{\imath} \sin(\omega t - \varphi_2)$, $E_1 = \bar{E}_1 \cdot \sin(\omega t - \varphi_1 - \varphi_2)$. Ist endlich $i = \bar{\imath} \cdot \sin \omega t$, so ist $E_1 = \bar{E}_1 \cdot \sin(\omega t - \varphi_1)$, $E_2 = \bar{E}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$ zu setzen.

Beispiel. Die eff. elektromotorischen Kräfte zweier Maschinen seien 3 und 5 Volt, ihr Phasenunterschied 60°. Welcher Scheitelwert des Stromes resultiert bei 2 Ω Widerstand? Welche Phasenverschiebungen hat er gegen die elektromotorischen Kräfte? Welchen Augenblickswert in dem Moment, wenn eine der E. M. K. ihren Maximalwert hat?

Am besten löst man eine solche Aufgabe erst rechnerisch und dann konstruktiv (Volt = cm oder einem Bruchteil davon) und zeigt den großen Vorteil der graphischen Methode, da sie keiner Tafeln benötigt.

(Schluß folgt.)

Die Briefwage als Kraftmesser für wagerecht wirkende und für beliebig gerichtete Kräfte.

Ein Beitrag zum Betrieb der Schülerübungen.

Von Prof. Joh. Kleiber (München).[1]

Zu Hause auf dem Tisch steht ein Trinkglas; oder es liegt auf dem Tisch eine Schere, ein Messer, eine Gabel oder sonst ein kleiner Gegenstand. Der Schüler

[1] Anm. der Schriftl.: Der Verfasser wohnt Thierschstr. 21.

möchte nun gern den Reibungskoeffizienten zwischen dem Gegenstand und der Unterlage bestimmen.

Das scheint nun zunächst nicht leicht auszuführen; denn eine Rolle, dazu Wagschale und Gewichte wie in der Schule sind nicht zur Hand. Auch fehlt es an einem der bekannten kleinen Kraftmesser; und wenn man einen solchen hätte, so würde man leider die Erfahrung machen, daß er beim Messen wagerechter Kräfte deshalb schlecht zeigt, da sich seine dünne Feder durch ihr Gewicht abwärts biegt und sich dabei unliebsam am Rahmen reibt, der die Feder umschließt.

Und doch ist die Sache ungemein leicht; hat doch fast jeder Schüler zu Hause eine kleine Briefwage, die man, wie sofort gezeigt wird, auf einfachste Weise, nämlich durch Anbinden eines leichten Bindfadens an einer bestimmten Stelle des Skalenkreises sofort in einen recht bequemen „Kraftmesser für wagerechte Kräfte“ verwandeln kann. Dieses zeigt Fig. 1. Noch ein zweites Verfahren, durch das man

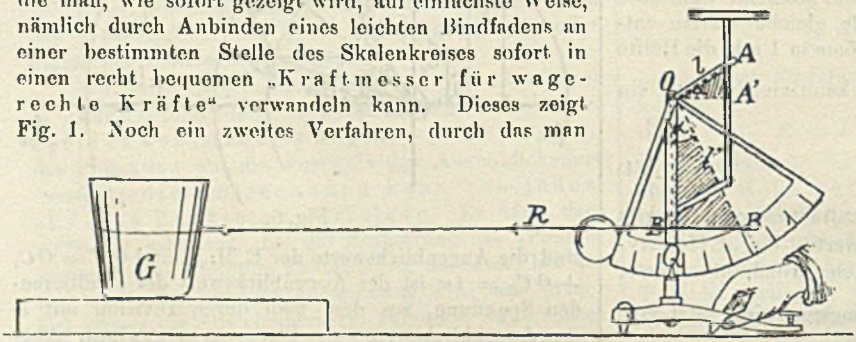


Fig. 1.

die Briefwage in einen, wenn auch weniger genau zeigenden Kraftmesser für beliebig gerichtete Kräfte verwandeln kann, sei hier geschildert (Fig. 2).

I. Verfahren.

Betrachtet man die Briefwage (Fig. 1) genauer, so bemerkt man, daß ihre Wagschale von einem nach aufwärts gerichteten Arm OA gehalten wird. O sei sein Drehpunkt. Sucht man nun jene Stelle B auf dem Skalenkreisbogen, der so liegt, daß

$$OB \perp OA$$

ist und bindet hier den wagerecht verlaufenden Faden an der Skala fest, so ist das Dynamometer fertig.

Gebrauch. Schlingt man den wagerecht verlaufenden Faden um den zu bewegenden Gegenstand, der auf dem Tisch liegt, und zieht die Briefwage fort, so ist die aufgewendete, wagerecht wirkende Kraft R gleich der Ablesung Q an der Skala der Briefwage multipliziert mit dem ein für allemal zu bestimmenden Uebersetzungsverhältnis der Hebelarme $OA : OB$.

Beweis. Der Ausschlag sei Q (auf der Skala abgelesen). Diesen kann man auf zwei Arten hervorbringen. Entweder man legt wirklich eine Last vom Gewichte Q auf die Wagschale. Ihr Drehmoment ist dann

$$Q \cdot l \cdot \cos \alpha,$$

wenn l die Länge des Hebelarmes OA, $\sphericalangle\, \alpha$ dessen Neigung gegen die Wagerechte ist.

Oder man erzielt dieselbe Skaleneinstellung durch eine wagerecht wirkende (in B angreifende) Kraft R. Diese bringt ihrerseits das Drehmoment

$$R \cdot l' \cdot \cos \alpha$$

hervor, wobei l' die Länge des Hebelarmes OB ist (Fig. 1).

Setzt man beide Drehmomente einander gleich, so folgt sofort die einfache Beziehung

$$R = Q \cdot \left(\frac{l}{l'}\right).$$

Bei meiner Briefwage ist $l = 3$ cm, $l' = 6$ cm, also ist für diese das Uebersetzungsverhältnis gleich $\frac{1}{2}$, d. h. die wagerecht wirkende Kraft R ist stets gleich der halben Ablesung auf der Skala der Briefwage.

Beispiel. Eine Schere wog (auf die Wagschale der Briefwage gelegt) 64 g. Beim Fortziehen der Schere auf dem Tisch zeigte die Wage den Ausschlag 24 g. Es war also:

Gewicht = 64 g
Reibung = 12 g.

Daher ist der gesuchte Reibungskoeffizient

$$\mu = 12 : 64 = 0{,}19.$$

Vorteil und Nachteil. Die Wage zeigt theoretisch und praktisch einwandfrei die gesuchte Reibung an; der Faden darf dabei bis zu 10° (wie in der Praxis der Pendelschwingungen) von der Wagerechten abweichen. Aber um die Wirkungsweise zu verstehen, muß der Schüler das Hebelgesetz kennen, ein wenig Trigonometrie anwenden und schließlich muß er noch eine kleine physikalische Tat anfügen: er muß nämlich die Längen der Hebelarme l und l' abmessen, um ihr Verhältnis zu bestimmen. Alles dieses stempelt den Versuch zu einer Experimentieraufgabe für die Oberstufe. Nichts hindert aber — unter Hinweis auf später folgende Erklärung — den Gebrauch dieses so bequemen Kraftmessers schon auf der Unterstufe zu betätigen.

II. Verfahren.

Wir binden beim zweiten Verfahren den Faden unten an den Stiel der Wagschale (bei X, Fig. 2) und führen ihn dann senkrecht nach unten durch die Oese D eines blanken Drahtstücks, das wir (bei C) am Ständer der Wage durch einfaches Umbiegen befestigen. Den durch die Oese bei D gezogenen Faden kann man schließlich wagerecht oder in beliebiger Richtung weiterführen. Damit ist das Dynamometer für in beliebiger Richtung wirkende Kräfte fertig. Der Ausschlag der Wage zeigt theoretisch die Spannung im Faden an.

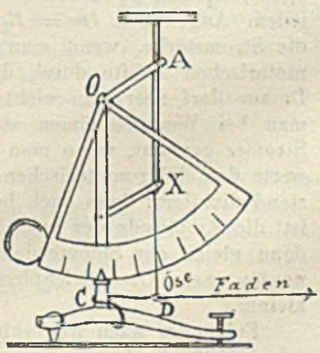


Fig. 2.

Erklärung. Die Oese wirkt als Rolle. Diese Erklärung ist schon auf der Unterstufe verständlich. Leider ist die Reibung des Fadens an der Oese etwas groß; daher die Genauigkeit dieses Dynamometers weniger entsprechend. Auch weicht bei der Bewegung des Stieles AX der Wagschale der lotrechte Teil des

Fadens, schon wegen seiner Kürze, oft mehr als um 10^0 von der lotrechten Stellung ab, was wieder Messungsmängel verursacht. Aber man kann sich hier beim Anfangsunterricht, bei dem die ersten tastenden Versuche des Schülers in die Wege geleitet werden, auf den gesunden Standpunkt stellen: Lieber Messungen mit etwas ungenauen Apparaten, als gar keine Messungen.

Ist es ja doch ein Problem für sich, ein Problem erst für den reifenden, denkfesten Schüler, wie später für den tiefer schürfenden Gelehrten, die Fehlerquellen einer Versuchsanordnung aufzudecken und ihren Einfluß auf ein Mindestmaß herabzudrücken. Den Begriff einer absolut exakten Messung im idealistischen Sinn gibt es ja in der Praxis nicht. Man denke nur an die weit auseinanderliegenden Werte, die z. B. Joule seinerzeit für den Wärmewert einer Arbeitseinheit ermittelte. Hätte er vielleicht besser getan, darum seine Untersuchung zu unterlassen? Wenn nicht, so muß man auch dem kleinen Schüler dasselbe Moment zubilligen. Man muß sich freuen, wenn die Schüler aus innerem Triebe mit ihren kleinen fehlerhaften Apparaten zu Hause zu arbeiten wünschen; man wird sie anleiten, daß sie möglichst erfolgreich damit arbeiten und man wird sie darauf hinweisen, daß die von ihnen gefundenen Zahlen durchaus selbständigen Wert neben den im Lehrbuch angeführten Zahlenwerten besitzen. Folgt noch die selbständige, schöne, kritisch durchdachte schriftliche Darstellung einer kleinen Versuchsreihe durch den Schüler, so ist der kleine Naturforscher in ihm auf dem besten Wege. Mit der von ihm aus freien Stücken geleisteten Tat entwickelt sich seine Persönlichkeit, und dies ist unser Wunsch.

Eine Aufgabe der mathematischen Geographie.

Von P. Kiesling (Bromberg).

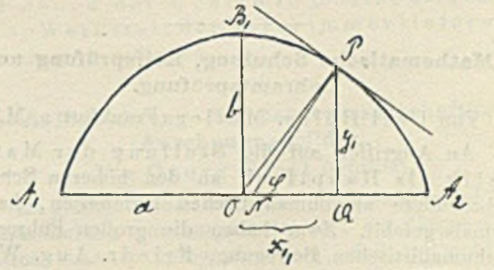
Die Aufgabe, die geozentrische Breite eines Ortes der Erde, dessen Polhöhe φ bekannt ist, zu berechnen, kann mit Hilfe der analytischen Geometrie gelöst werden. In den mir zugänglichen Aufgabensammlungen über analytische Geometrie ist sie nicht zu finden, daher soll die Lösung hier kurz besprochen werden.

Während die geographische Breite φ der Winkel ist, den die Richtung der Schwerkraft mit dem Aequator bildet, versteht man unter geozentrischer Breite den Winkel, den der nach dem Beobachtungsorte führende Erdradius mit dem Aequator bildet. Beide Winkel würden zusammenfallen, wenn die Erde eine vollkommene Kugel wäre. Sie ist aber bekanntlich ein Rotationsellipsoid.

Wir legen nun durch den Beobachtungsort P und die Achse der Erde OB_1 einen größten Kreis, dessen Ebene den Erdkörper in einer Ellipse schneidet. Nehmen wir die Abplattung am Pol zu $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299{,}15}$ an, so bedeutet a die große Halbachse und b die kleine Halbachse der Ellipse, und es ist

$$b = \left(1 - \frac{1}{299{,}15}\right) a = \frac{298{,}15}{299{,}15}\, a.$$

Die Richtung der Schwerkraft im Orte P ist durch die Richtung der Normale PN bestimmt, so daß $\sphericalangle PNA_2 = \varphi$ die geographische Breite angibt, während $\sphericalangle POA_2 = \varphi'$ die geozentrische Breite darstellt. Nun ist $\operatorname{tg}\varphi$ die Richtungskonstante der Normale, so daß $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$ ist, wenn x_1 und y_1 die Koordinaten des Punktes P bedeuten.



Ferner ist aus der Figur ersichtlich, daß

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y_1}{x_1} \text{ ist.}$$

Folglich erhalten wir:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\varphi_1 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Für Bromberg ($\varphi = 53{,}13^0$) ergibt sich hieraus z. B. $\varphi_1 = 52{,}95^0$. Als Unterschied der beiden Breiten folgt $\varphi - \varphi_1 = 0{,}18^0 = 10{,}8'$.

In welcher Polhöhe ist nun die Abweichung der geozentrischen Breite von der geographischen Breite am größten?

$$\text{Es ist } \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\operatorname{tg}\varphi}{1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\varphi}$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)\operatorname{tg}\varphi}{a^2 + b^2\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Setzen wir $\operatorname{tg}\varphi = z$, so wird $\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1)$ eine Funktion von z:

$$f(z) = \frac{(a^2 - b^2)\, z}{a^2 + b^2 z^2} = \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1).$$

Das Maximum dieser Funktion kann nun durch Differentialrechnung oder nach dem Verfahren von Schellbach gefunden werden. Der Einfachheit halber bedienen wir uns der ersteren Methode, wobei der Differentialquotient $\frac{d\,f(z)}{d\,z} = 0$ zu setzen ist.

Nun wird:

$$\frac{d\,f(z)}{d\,z} = \frac{(a^2 + b^2 z^2)(a^2 - b^2) - (a^2 - b^2)\, 2 b^2 z^2}{(a^2 + b^2 z^2)^2}, \text{ also muß}$$

$$(a^2 + b^2 z^2)(a^2 - b^2) - (a^2 - b^2)\, 2 b^2 z^2 = 0 \text{ sein.}$$

$$z^2 b^2 (b^2 - a^2) = a^2 (b^2 - a^2)$$

$$z^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$z = \pm \frac{a}{b}.$$

Das Maximum der Abweichung tritt also für diejenige Polhöhe φ ein, für welche

$$z = \operatorname{tg}\varphi = \pm \frac{299{,}15}{298{,}15} \text{ ist.}$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$\varphi = \pm 45^0\, 5'\, 45''.$$

Für diese Polhöhe ist die geozentrische Breite nach der Formel

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi$$

zu berechnen:

$$\varphi_1 = 44^0\, 54'\, 15'', \text{ daher}$$
$$\varphi - \varphi_1 = 11'\, 30''.$$

Die größte Abweichung, die überhaupt möglich ist, beträgt also $11'\,30'' = 11^1/_2{}'$. Sie findet sich in einer geographischen Breite von angenähert $\pm\, 45^0$.

Mathematische Schulung, Reifeprüfung und Lehramtsprüfung.

Von Carl Heinr. Müller (Frankfurt a. M.).

An Angriffen auf die Stellung der Mathematik als Hauptfach an den höheren Schulen, insbesondere an humanistischen Gymnasien, hat es niemals gefehlt. Zwar haben die großen Führer der neuhumanistischen Bewegung, Friedr. Aug. Wolf, Wilh. v. Humboldt und Johannes Schulze, stets die Wichtigkeit mathematischer Erkenntnis, dieser ausgezeichneten Blüte altgriechischen Geistes, geachtet und betont; das beweisen namentlich die Süvernschen Lehrpläne, in denen der Mathematik sogar sechs Wochenstunden zugebilligt waren, ohne Zweifel unter dem Einflusse der napoleonischen und der Freiheitskriege. Aber sehr bald ging unter dem Drucke der Reaktion und der trostlosen Biedermeierzeit diese hervorragende Stellung verloren, und selbst das Jahr 1870 hat, wenigstens an humanistischen Gymnasien, nicht allzuviel daran zu ändern vermocht; beredtes Zeugnis gibt die Verkümmerung des mathematischen Unterrichtes in den Mittelklassen mit drei Wochenstunden. Und immer wieder wird die Mathematik, namentlich im Verein mit Naturwissenschaft, als der Störenfried für eine gründliche sprachliche, insonderlich fremdsprachliche Schulung bezeichnet[1]. Die Wortführer dieser Geistesrichtung haben keinen Hauch jenes platonischen Geistes verspürt, der die mathematische Schulung schon in formaler Hinsicht als unentbehrlich erkennt; noch weniger aber haben sie ein Empfinden für die Durchdringung der gesamten modernen Naturwissenschaft und Technik mit mathematischem Geiste. Das einfache Wort „Kriegstechnik“ allein müßte den sogen. Stock-Philologen zur Besinnung bringen und ihm sagen, wohin sein Streben schließlich führen muß: „Zum papiernen Bildungstrieb einer entpolitisierten Menge“, wie kürzlich nicht ohne Recht gesagt worden ist. Dabei zweifeln wir nicht daran, daß es diese Richtung in ihrer Art ernst und ehrlich meint; aber ebenso ernst und entschieden muß man dagegen Widerspruch erheben.

Ein sehr beachtenswertes Hilfsmittel zur Beurteilung mathematischer und sprachlicher Schulung hat uns der Geh. Reg.- und Prov.-Schulrat Herr Professor Schickhelm zu Münster i. W. an die Hand gegeben, und zwar ein ganz eigenartig statistisches[2]. Er hat rund 800 Reifeprüflinge von Gymnasien und Realanstalten der statistischen Betrachtung unterzogen, Prüflinge, die sich dem Studium der Schulwissenschaften[3] (Philologie im weiteren Sinne einschließlich Mathematik und Naturwissenschaften) gewidmet haben; sie sind auf acht hintereinanderliegende Halbjahre vor dem Kriege verteilt. Die Ergebnisse der Reifeprüfung (sehr gut, gut, genügend, nicht genügend) und der Lehramtsprüfung (ausgezeichnet, gut, bestanden, nicht bestanden) werden nun sorgfältig verzeichnet, geordnet und gegeneinander abgewogen. In dieser Beschränkung auf Kandidaten der Philologie scheint zunächst eine gewisse Einseitigkeit zu liegen. Doch mit Unrecht, denn gerade diese Persönlichkeiten zeigen am ausgeprägtesten die Einflüsse jener Hauptfächer der Schule, sie pflegen ihren Neigungen zu folgen und eignen sich vornehmlich zur Auswertung des Verhältnisses der mathematischen zur sprachlichen Schulung. Daß dabei auch eine erkleckliche Zahl von Brotstudenten mit unterläuft, wird sich hernach zeigen.

Auf die Einzelheiten der statistischen Untersuchung soll hier nicht eingegangen werden, sie müssen an Ort und Stelle nachgelesen und nachgeprüft werden. Für diese Blätter möchte ich aber die Hauptergebnisse in einer Reihe von Sätzen ausziehen und zusammenstellen. Ich bringe diese Ergebnisse in zwei Gruppen unter: Reifeprüflinge und Lehramtsprüflinge. In der ersten werden die Untersuchungen Schickhelms für Reifeprüflinge allein zusammengestellt; in der zweiten erscheint die weit wichtigere und daher mannigfaltigere Zusammenstellung der Ergebnisse aus dem Vergleich zwischen Reife- und Lehramtsprüfung.

A. Reifeprüflinge.

1. Gemischte Begabung (Intelligenz) ist häufiger als einseitige.

Schickhelm bezeichnet Schüler, die in einem oder mehreren Hauptfächern gut erreichen ohne Ausfall in irgend einem Fach, als intelligent.

2. Gute Leistungen in Mathematik verbinden sich sehr häufig mit guten Leistungen in den Sprachen.

3. Gute Leistungen in den Sprachen verbinden sich häufiger mit guten als mit genügenden Leistungen in Mathematik.

Dieser Satz ist nicht eine einfache Umkehrung des vorigen, wie aus dem verschiedenen Umfang der Begriffe in der Statistik (vergl. S. 462) hervorgeht. Außerdem muß man beachten, daß immer das eine Hauptfach Mathematik mehreren sprachlichen Hauptfächern gegenübersteht und zwar an Gymnasien: Deutsch, Latein, Griechisch; an Realgymnasien: Deutsch, Latein, Französisch, Englisch; an Oberrealanstalten: Deutsch, Französich, Englisch.

4. Einseitige Begabung, d. h. gute mathematische Begabung mit sehr starkem Abfall nach der sprachlichen Seite und umgekehrt, ist als Ausnahme anzusehen.

Sollte sich dieser Satz bei weiterer Durchprüfung bewähren, — denn jene Zahl von 800 Einzelfällen ist, wie Herr Schickhelm selbst hervorhebt, nicht ausreichend zur endgültigen Entscheidung, — so würde

[1] Als klassisches Beispiel diene die Schrift von Dr. Karl Gneiße: Ueber den Wert der mathematischen und sprachlichen Aufgaben für die Ausbildung des Geistes. Berlin, Weidmann, 1898. Sie hat ja seinerzeit die gebührende Würdigung erfahren, verdient aber immer wieder als Musterstück einseitiger Beurteilung und Verurteilung hervorgehoben zu werden. Der Verfasser sieht in der einzigartigen Einfachheit und Klarheit des mathematischen Gedankengangs nur Armut und Dürftigkeit des Denkens!

[2] Reifezeugnis und die Ergebnisse der Prüfungen (vor d. wiss. Prüfungskomm. für d. höh. Lehramt). Monatsschrift f. höh. Schulen. Jahrg. 16, Heft 10/11, Seite 460—68, 1917.

[3] Die Auffassung der Philologie in diesem weiteren Sinne bricht sich glücklicherweise mehr und mehr Bahn. War doch der erste „Philologe“, der diesen Namen trug, ein Mathematiker und Geograph: Eratosthenes v. Cyrene. — Die praktische Ergänzung der (theoretischen) Schulwissenschaft ist die Technologie. In diesem Sinne erscheint naturgemäß die Medizin als Technologie zur Biologie.

sich daraus eine entschiedene Ablehnung jeder weiteren Gabelung (Differenzierung) der Schularten, namentlich in den oberen Klassen, ergeben.

5. Mehr als ein Viertel der Abiturienten wendet sich dem Lehramt zu, ohne ein Gut in den Hauptfächern erreicht zu haben.

Daß diese künftigen Brotstudenten nicht die angenehmste Zugabe in einem Lehrerkollegium bilden werden, ist jedem kundigen Schulmann einleuchtend. Uebrigens können wir uns mit diesem Viertel getrösten, denn in den übrigen gelehrten Berufen steht es entschieden ungünstiger.

B. Lehramtsprüflinge.

1. Die beste Gewähr für einen guten Verlauf und Abschluß der philologischen Studien (einschließlich Mathematik) ist ein gutes Reifezeugnis.

Sehr treffend bemerkt dabei Schickhelm: Die Vorwürfe, die gegen die höheren Schulen erhoben werden, daß nämlich die Schulleistungen, wie sie im Reifezeugnis bewertet werden, keinen maßgebenden Anhaltspunkt für die Weiterentwicklung des Inhabers gewähren, stellen sich im Rahmen der Untersuchung als vollständig unberechtigt dar.

2. Kandidaten des höheren Schulamts haben wenig Aussicht auf eine erfolgreiche Ablegung der Staatsprüfung, wenn sie in ihren Studienfächern von der Schule her nicht mindestens gute Leistungen mitbringen.

Dies gilt insbesondere für solche, die die Reifeprüfung nur durch Ausgleich (Kompensation) bestanden haben.

3. Die Prüfungsergebnisse fallen für die mathematische Gruppe der Kandidaten günstiger aus als für die sprachliche, besonders hinsichtlich der Spitzenleistung.

Damit hängt zusammen, daß ein Mathematiker nicht bloß auf der Schule, sondern auch auf der Hochschule stetig und lückenlos arbeiten muß, wenn er nicht entgleisen will.

4. Den besten Prüfungserfolg in der sprachlichen Gruppe haben diejenigen Studierenden, die zugleich gute Schulleistungen in der Mathematik aufzuweisen hatten.

Wir haben hier eine gewisse nachträgliche Bestätigung der Sätze unter A_2 und A_3.

5. Den Studierenden der Sprachen gewährt die gute Schulleistung in Mathematik mehr Aussicht auf Bestehen der Staatsprüfung als selbst das „Gut" in der Sprache, die er zum Fachstudium gewählt hat.

Dies unerwartete Ergebnis gibt einen deutlichen Hinweis auf den stillen, aber sicheren Einfluß mathematischer Schulung auf die gesamte geistige Entwicklung des jungen Menschen und rechtfertigt auch den Schlußsatz:

6. Die formale Kraft, die durch mathematische Schulung erzielt wird, betätigt sich nicht bloß auf mathematischen und verwandten Gebieten, sondern kommt auch auf dem Gebiete der sprachlichen Wissenschaften kräftig und wertvoll zum Ausdruck.

Ich schließe mit den Worten, die Kaiser Wilhelm II. bei der Eröffnung der Danziger Hochschule sprach: Die Mathematik und die exakten Naturwissenschaften konnten die Wege bauen, auf denen der Mensch in Gottes allgewaltiger Werkstatt der Natur immer tiefer einzudringen vermag.

Die Aufbewahrung der naturwissenschaftlichen Anschauungsbilder.

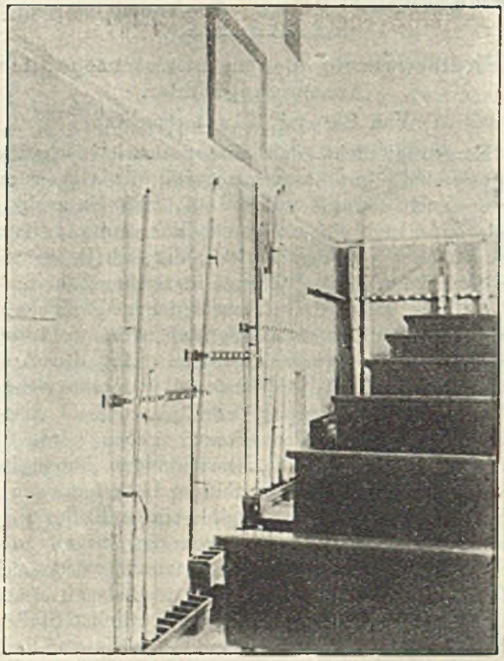
Von Georg Klatt (Görlitz).

Es genügt nicht, daß eine naturwissenschaftliche Lehrsammlung gut ausgestattet ist; die Gegenstände müssen auch so aufbewahrt sein, daß sie wohl geschützt sind und eine bequeme Benutzung gestatten. Dies gilt auch von den Bildern, die sich ja als wichtige Anschauungsmittel überall in reicher Zahl finden. Es gibt eine ganze Reihe verschiedener Möglichkeiten, diese Bilder aufzubewahren. Man wird wohl sagen müssen, daß nicht unbedingt eine Art der Aufbewahrung für alle Fälle die beste ist, daß man vielmehr je nach den besonderen Verhältnissen bald diesem, bald jenem System den Vorzug geben wird. Ich möchte im Folgenden die Einrichtungen beschreiben, die ich auf Grund sehr sorgfältiger Ueberlegungen gewählt habe. Vielleicht, daß dies einige Kollegen veranlaßt, meine Erfahrungen durch die ihrigen zu ergänzen; ein solcher Meinungsaustausch würde sicher helfen, die Frage der Einrichtung der Lehrmittelsammlungen, der man jetzt ja auch an amtlicher Stelle so lebhafte Aufmerksamkeit schenkt, in diesem Punkte zu fördern.

Zunächst wird die Art der Aufbewahrung davon abhängen, ob man es mit gerollten oder mit ungerollten Tafeln zu tun hat. Das Gewöhnliche ist, daß die Tafeln gerollt sind; dennoch fand ich in einer Anstalt, an der ich früher unterrichtete, die Mehrzahl der Tafeln ungerollt vor. Da mir die Art, wie diese aufbewahrt wurden, nicht gefiel, so ließ ich einen Schrank anfertigen, der eine große Anzahl flacher Züge besaß, die so breit und tief waren, daß die Tafeln darin bequem Platz fanden. Die große Zahl der Züge erlaubte eine übersichtliche systematische Ordnung. Um auch unter den Tafeln, die in ein und demselben Zuge lagen, Ordnung zu halten, erhielt jede Tafel an der rechten vorderen (unteren) Ecke einen mit Leinwand unterklebten Papierstreifen, auf dem die der Tafel zukommende Zahl, außerdem noch ein Buchstabe, der den Zug bezeichnete, angebracht wurde (A 1, B 3 usw.). Auf diese Weise war Ordnung und Uebersichtlichkeit gewährleistet. Für die gerollten Tafeln, die die biologische Sammlung noch besaß, und deren Zahl beständig anwuchs, schaffte ich ein Gestell mit wagerechten Armen an. Mit dieser Einrichtung war ich jedoch nicht zufrieden. Wenn man auch die einzelnen Arme für die verschiedenen Gruppen des Tier- und Pflanzenreiches bestimmen kann, so läßt sich doch unter den in einer Höhe untergebrachten Tafeln kaum Ordnung halten. Das hat dann aber zur Folge, daß nach jeder Tafel erst mühsam gesucht werden muß. Es ist aber wünschenswert, daß man die gewünschte Tafel mit einem Griffe fassen kann.

An der Oberrealschule zu Görlitz, wo ich jetzt tätig bin, habe ich zur Aufbewahrung der gerollten

Tafeln — ungerollte besitzen wir gar nicht — einen anderen Weg eingeschlagen. Eine Schwierigkeit, die einem wohl in den meisten Fällen zu schaffen machen wird, bestand darin, daß die Tafeln eine sehr ungleiche Länge besaßen: während die kürzeren nur etwa 0.60 m lang waren, maßen die längsten mehr als 2 m. Es ist mir in der Tat nicht gelungen, sämtliche Tafeln in



gleicher Weise unterzubringen. Zur Aufbewahrung der kleineren Tafeln dient uns ein Schrank im Sammlungszimmer, der bei einer Höhe von 2.45 m 1.70 m breit und 1.20 m tief ist. Ich ließ den Schrank durch wagerechte und senkrechte Bretter in der Weise teilen, daß 420 tiefe Fächer entstanden, die eine Höhe von 7 cm und eine ebensolche Breite besaßen. Unten blieb noch ein Raum von 0.45 m Höhe frei; hier wurden vier große Fächer für Mappenwerke und dergleichen eingerichtet. Die 20 wagerechten Reihen wurden mit den Buchstaben A bis V, die senkrechten mit den Zahlen 1 bis 20 bezeichnet; die Bezeichnungen wurden mit einem Brennapparat angebracht. Die Tafeln ordnete ich systematisch ein. Da auch die Tafeln, die in diesem Schranke Platz finden konnten, nicht alle die Länge der Fächer — 1.20 m — hatten, so mußte dafür gesorgt werden, daß die kürzeren Tafeln nicht tief hineingeschoben werden konnten: man hätte sie sonst aus den engen Fächern nur mit Mühe herausholen können. Ich ließ daher von vornherein für jedes Fach einen vierkantigen Holzstab anfertigen, an den vorn ein Brettchen genagelt war. Diesen Stäben gaben wir, soweit sie für große Tafeln zu lang waren, mit der Säge die richtige Länge und schoben sie tief in die Fächer hinein. Dabei mußte auch daran gedacht werden, daß sich einmal irgend eine Umordnung der Tafeln und damit eine Auswechslung der Holzstäbe nötig machen könnte. Wird diese erforderlich, so benutzen wir einen kräftigen Stock mit einer Stahlspitze dazu, die Holzstäbe herauszuziehen. So sind wir gegen alle Möglichkeiten gerüstet. Nun blieben aber noch die langen Tafeln übrig. Sollten sie neben den anderen in einem Schranke aufbewahrt werden, so müßte dieser die gewaltige Tiefe von über 2 m erhalten; dies würde aber eine Verschwendung an Geld und Raum bedeuten. Für diese Tafeln mußte daher in anderer Weise eine Aufbewahrungsstelle geschaffen werden. Leider ließ der beschränkte Raum in demselben Zimmer keinen Platz dafür: sie mußten in dem daneben gelegenen Lehrzimmer untergebracht werden. Hier benutzte ich dazu zwei Wände: die den Fenstern gegenüberliegende und die Wand hinter den Bänken. 8 cm über dem Fußboden ist ein auf Füßen stehendes Brett angebracht. Vorn wird es durch eine Leiste abgeschlossen, Querleisten teilen es in flache Kästchen von 10 cm Tiefe und 8 cm Breite. Etwa 1 m darüber ist an der Wand eine Leiste befestigt und daran vorspringende Eisenbänder. An jedem von diesen ist ein bewegliches Eisenband angebracht, das herübergeklappt werden kann und den Raum für die einzelne Tafel abschließt. Dieser Raum ist 8 cm tief und ebenso breit; er ist ziemlich knapp bemessen, so daß die Tafeln sorgfältig gerollt werden müssen. So war es aber möglich, für 97 Tafeln Platz zu schaffen. Die Fächer tragen sämtlich Ziffern, die Zahlen sind mit weißer Oelfarbe auf der Verschlußplatte angebracht. Da der Fußboden treppenförmig ansteigt, so hat unsere Vorrichtung ebenfalls stufenförmige Absätze. Die Tafeln stören die Bewegung der Schüler in keiner Weise. Zwischen den Tafeln und der Bankreihe bleibt noch ein Gang von 50 cm Breite übrig, der also vollkommen ausreicht. Auch hier sind die Tafeln systematisch geordnet, und zwar so, daß zwischen den einzelnen Gruppen Raum für Neuanschaffungen gelassen ist. Ein Verzeichnis an der Wand enthält die in diesem Zimmer befindlichen Tafeln. Ein systematisches Verzeichnis sämtlicher Tafeln ist an der Innenseite der Türen des Kartenschrankes angebracht, und zwar stehen unmittelbar nebeneinander in zwei Reihen die im Schranke und die im Nebenzimmer aufbewahrten Tafeln. Ein Beispiel mag dies noch deutlicher machen. Ein Schüler sucht nach Bildern von Krebsen und findet in dem Verzeichnisse: O 1. Flußkrebse, daneben: 52. Rankenfüßer. Die erste Tafel hat er also im Schranke, die zweite im Lehrzimmer zu suchen.

Eine vollkommene Lösung der Aufgabe, die Tafeln übersichtlich zu ordnen, würde ja eigentlich erst gefunden sein, wenn alle Tafeln an einer Stelle untergebracht würden, aber ich zweifle, ob sich das in wirklich praktischer Weise durchführen lassen wird. Wir sind zu unserem System durch die Verhältnisse gedrängt worden und finden nichts daran auszusetzen.

Kleinere Mitteilungen.

Geometrische Ableitung der Formeln für $\sin(\varphi \pm \psi)$, $\cos(\varphi \pm \psi)$, $\sin\varphi \pm \sin\psi$, $\cos\varphi \pm \cos\psi$.

Von O. Eckhardt (Wiesbaden).

1. Fig. 1. Das Parallelogramm $ABDC$ ist flächengleich dem Rechteck $ABFG$. Also ist: $xy \sin(\varphi + \psi) = (u + v) \cdot h = uh + vh$ und

$$\underline{\sin(\varphi + \psi)} = \frac{uh}{xy} + \frac{vh}{xy} = \underline{\sin\varphi \cdot \cos\psi + \sin\psi \cdot \cos\varphi}.$$

Anmerkung: Ist einer der beiden Winkel, z. B. φ stumpf, so zerlege man ihn durch h in zwei spitze Winkel φ_1 und φ_2. Dann ergibt sich die Formel mit Anwendung der Formeln 1) und 2).

2. Fig. 1.

$$\cos(\varphi+\psi) = \frac{x^2+y^2-(u+v)^2}{2\,xy} = \frac{x^2+y^2-u^2-v^2-2\,uv}{2\,xy},$$

oder:

$$\cos(\varphi+\psi) = \frac{2\,h^2-2\,uv}{2\,xy} = \frac{h^2-uv}{xy} = \frac{h}{x}\cdot\frac{h}{y} - \frac{u}{x}\cdot\frac{u}{y},$$

d. h.: $\underline{\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cdot\cos\psi - \sin\varphi\cdot\sin\psi.}$

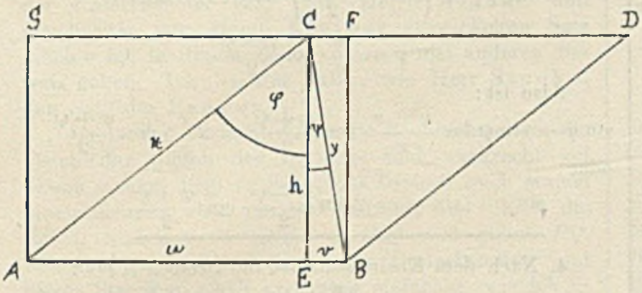


Fig. 1.

3. Fig. 2. In dem Dreieck ABC sei $\sphericalangle ACB = \varphi$ und $\sphericalangle DCB = \psi$, also $\sphericalangle ACD = \varphi - \psi$. Das Parallelogramm $ADEC$ ist flächengleich dem Rechteck $ADFG = ABCG - DBCF$.

Also ist: $xy\cdot\sin(\varphi-\psi) = uh - vh$, oder:

$$\sin(\varphi-\psi) = \frac{uh}{xy} - \frac{vh}{xy},\quad \text{d. h.:}$$

$$\underline{\sin(\varphi-\psi) = \sin\varphi\cdot\cos\psi - \cos\psi\cdot\sin\varphi.}$$

4. Fig. 2.

$$\cos(\varphi-\psi) = \frac{x^2+y^2-(u-v)^2}{2\,xy} = \frac{x^2+y^2-u^2-v^2+2\,uv}{2\,xy}$$

oder:

$$\cos(\varphi-\psi) = \frac{2\,h^2+2\,uv}{2\,xy} = \frac{h^2+uv}{xy} = \frac{h}{x}\cdot\frac{h}{y} + \frac{u}{x}\cdot\frac{u}{y},$$

d. h.: $\underline{\cos(\varphi-\psi) = \cos\varphi\cdot\cos\psi + \sin\varphi\cdot\sin\psi.}$

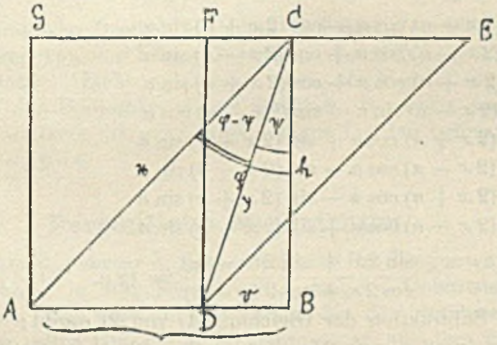


Fig. 2.

Ableitung der Formeln für $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$.

Fig. 3. Zieht man im rechtwinkligen Dreieck ABC die Seitenhalbierende CM, so ist im Dreieck CMB nach dem Sinussatz:

$$\sin 2\alpha : \sin(90^0-\alpha) = a : \frac{c}{2},\quad \text{oder}$$

$$\sin 2\alpha : \cos\alpha = a : \frac{c}{2}.\quad \text{Dann ist}$$

$$\underline{\sin 2\alpha} = 2\,\frac{a}{c}\cdot\cos\alpha = \underline{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha.}$$

Fig. 3.

$$\cos 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{c^2}{4}-a^2}{2\cdot\frac{c^2}{4}} = \frac{\frac{c^2}{2}-a^2}{\frac{c^2}{2}} = \frac{c^2-2a^2}{c^2} = \frac{c^2-a^2-a^2}{c^2},$$

oder:

$$\underline{\cos 2\alpha} = \frac{b^2-a^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} - \frac{a^2}{c^2} = \underline{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha.}$$

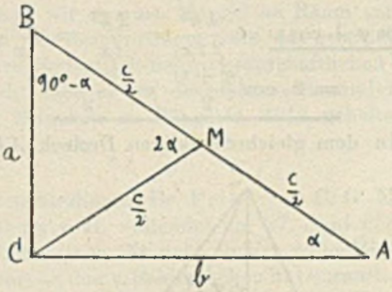


Fig. 3.

1. In dem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $2c$ ziehe man die Transversale $CD = t$ und nenne die Basisabschnitte u und v, während die Strecke zwischen dem Fußpunkt der Höhe und der Transversale z heißen möge. $\sphericalangle BCD$ sei φ und $\sphericalangle ACD = \psi$.

Dann ist im Dreieck DBC nach dem Sinussatze:

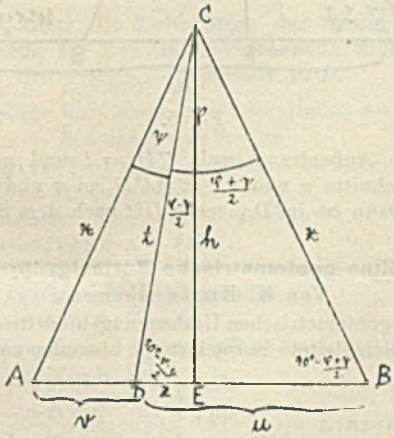


Fig. 4.

$$\sin\varphi : \sin\left(90^0 - \frac{\varphi-\psi}{2}\right) = u : x,\quad \text{oder}$$

$$\sin\varphi = \frac{u}{x}\cdot\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\ \ldots 1)$$

Ebenso ist im Dreieck ADC:

$$\sin\psi : \sin\left(90^0 + \frac{\varphi-\psi}{2}\right) = v : x,\quad \text{oder}$$

$$\sin\psi = \frac{v}{x}\cdot\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\ \ldots 2)$$

Also ist

$$\sin\varphi + \sin\psi = \frac{u+v}{x}\cdot\cos\frac{\varphi-\psi}{2} = 2\cdot\frac{c}{x}\cdot\cos\frac{\varphi-\psi}{2},$$

oder: $\underline{\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi-\psi}{2}.}$

2. Nach dem Kosinussatz ist im Dreieck DBC:

$$\cos\varphi = \frac{x^2+t^2-u^2}{2\,tx}.$$

Ebenso ist im Dreieck ADC:

$$\cos\psi = \frac{x^2+t^2-v^2}{2\,tx}.$$

Also ist: $\cos\varphi + \cos\psi = \dfrac{2\,x^2+2\,t^2-u^2-v^2}{2\,tx}.$

Setzt man nun $u = c+z$ und $v = c-z$, so ergibt sich:

$$\cos\varphi + \cos\psi = \frac{x^2+x^2+t^2+t^2-c^2-2cz-z^2-c^2+2cz-z^2}{2tx},$$

oder $\underline{\cos\varphi + \cos\psi} = \dfrac{4h^2}{2tx} = \dfrac{2h^2}{tx} = 2\dfrac{h}{x}\cdot\dfrac{h}{t}$

$$= 2\cdot\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi-\psi}{2}.$$

3. In dem gleichschenkligen Dreieck ABC ziehe

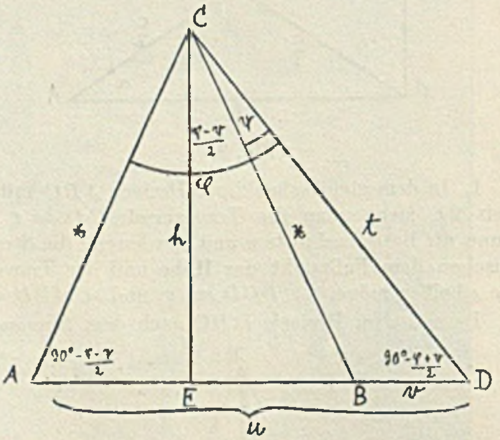


Fig. 5.

man die Außentransversale $CD = t$ und nenne die Basisabschnitte u und v. $\sphericalangle ACD$ sei φ und $\sphericalangle BCD = \psi$. Dann ist im Dreieck ADC nach dem Sinussatz:

$$\sin\varphi : \sin\left(90^0 - \frac{\varphi+\psi}{2}\right) = u : x, \quad \text{oder}$$

$$\sin\varphi = \frac{u}{x}\cdot\cos\frac{\varphi+\psi}{2}.$$

Ebenso ist im Dreieck BDC nach dem Sinussatz:

$$\sin\psi : \sin\left(90^0 - \frac{\varphi+\psi}{2}\right) = v : x, \quad \text{oder}$$

$$\sin\psi = \frac{v}{x}\cdot\cos\frac{\varphi+\psi}{2}.$$

Also ist:

$$\sin\varphi - \sin\psi = \frac{u-v}{x}\cdot\cos\frac{\varphi+\psi}{2} = 2\frac{c}{x}\cdot\cos\frac{\varphi+\psi}{2},$$

oder:

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi+\psi}{2}.$$

4. Nach dem Kosinussatz ist im Dreieck ADC:

$$\cos\varphi = \frac{x^2+t^2-u^2}{2tx}.$$

Ebenso ergibt sich aus dem Dreieck BDC:

$$\cos\psi = \frac{x^2+t^2-v^2}{2tx}.$$

Also ist: $\cos\varphi - \cos\psi = -\dfrac{u^2-v^2}{2tx}$, oder wenn man $AB = 2c$ und $ED = z$ nennt,

$$\underline{\cos\varphi - \cos\psi} = -\frac{(c+z)^2-(z-c)^2}{2tx} = -\frac{2cz}{tx}$$

$$= -2\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi+\psi}{2}.$$

Eine goniometrische Formelgruppe.

Von K. Emde (Bremen).

Bei goniometrischen Umformungen dürfte die nachstehend hergeleitete Formelgruppe bisweilen von Nutzen sein. Wegen der einfachen Rechnung lassen sich aus der Herleitung auch Aufgaben für den Schulunterricht schöpfen.

Zugrunde liegen die Gleichungen:

1) $\sin 2x = \sin(2x+a-a) = \sin(2x+a)\cos a - \cos(2x+a)\sin a$

2) $\sin 2x = \sin(2x-a+a) = \sin(2x-a)\cos a + \cos(2x-a)\sin a$

3) $\sin 2(a+x) = \sin(2x+a+a) = \sin(2x+a)\cos a + \cos(2x+a)\sin a$

4) $\sin 2(a-x) = -\sin(2x-a-a) = \cos(2x-a)\sin a - \sin(2x-a)\cos a$

5) $\cos 2x = \cos(2x+a-a) = \cos(2x+a)\cos a + \sin(2x+a)\sin a$

6) $\cos 2x = \cos(2x-a+a) = \cos(2x-a)\cos a - \sin(2x-a)\sin a$

7) $\cos 2(a+x) = \cos(2x+a+a) = \cos(2x+a)\cos a - \sin(2x+a)\sin a$

8) $\cos 2(a-x) = \cos(2x-a-a) = \cos(2x-a)\cos a + \sin(2x-a)\sin a$

Addition der Gleichungen 1) und 3) ergibt:

9) $\sin 2x + \sin 2(a+x) = 2\sin(2x+a)\cos a.$

Wird 7) von 5) subtrahiert, so folgt:

10) $\cos 2x - \cos 2(a+x) = 2\sin(2x+a)\sin a.$

Aus 9) und 10) fließt:

11) $\dfrac{\sin 2x + \sin 2(a+x)}{\cos 2x - \cos 2(a+x)} = \operatorname{cotg} a.$

Subtraktion der Gleichung 1) von 3) ergibt:

12) $\sin 2(a+x) - \sin 2x = 2\cos(2x+a)\sin a.$

Werden die Gleichungen 5) und 7) addiert, so folgt:

13) $\cos 2(a+x) + \cos 2x = 2\cos(2x+a)\cos a.$

Aus 12) und 13) fließt:

14) $\dfrac{\sin 2(a+x) - \sin 2x}{\cos 2(a+x) + \cos 2x} = \operatorname{tg} a.$

Werden die Gleichungen 2) und 4) addiert, so ist:

15) $\sin 2x + \sin 2(a-x) = 2\cos(2x-a)\sin a.$

Addition der Gleichungen 6) und 8) ergibt:

16) $\cos 2x + \cos 2(a-x) = 2\cos(2x-a)\cos a.$

Aus 15) und 16) fließt:

17) $\dfrac{\sin 2x + \sin 2(a-x)}{\cos 2x + \cos 2(a-x)} = \operatorname{tg} a.$

Subtraktion der Gleichung 4) von 2) ergibt:

18) $\sin 2x - \sin 2(a-x) = 2\sin(2x-a)\cos a.$

Wird 6) von 8) subtrahiert, so folgt:

19) $\cos 2(a-x) - \cos 2x = 2\sin(2x-a)\sin a.$

Aus 18) und 19) fließt:

20) $\dfrac{\sin 2x - \sin 2(a-x)}{\cos 2(a-x) - \cos 2x} = \operatorname{cotg} a.$

Durch Uebergang von den doppelten Winkeln zu den einfachen ergibt sich aus 14) und 17):

21) $\dfrac{\sin(a+x) - \sin x}{\cos(a+x) + \cos x} = \dfrac{\sin x + \sin(a-x)}{\cos x + \cos(a-x)}.$

Ebenso findet sich aus 11) und 20):

22) $\dfrac{\sin x + \sin(a+x)}{\cos x - \cos(a+x)} = \dfrac{\sin x - \sin(a-x)}{\cos(a-x) - \cos x}.$

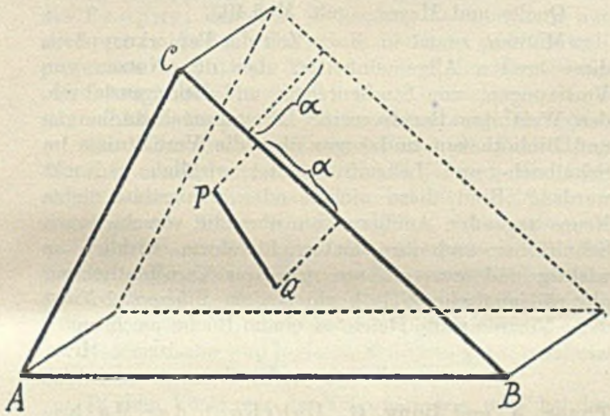
Die Richtigkeit der beiden Proportionen 21) und 22) läßt sich auch leicht durch Bildung der Produktengleichung nachweisen.

Zum Beweise des Dreistreifensatzes.

Von Prof. Osk. Herrmann (Leipzig-Marienbrunn).

Die Projektionen einer beliebigen Strecke PQ auf die Seiten eines Dreiecks ABC seien α, β, γ. Dann ist das größte der drei Rechtecke $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ gleich der Summe der beiden andern. Für diesen in Nr. 8 der Unterrichtsbl. 1917 von Herrn Stucke und gleichzeitig von Herrn Kleiber entwickelten Satz möchte ich in diesen Zeilen einen etwas anderen Beweis geben. Ich benutze dabei, wie Herr Stucke, den Satz des Pappus.

Da in den drei „Streifen" die Rechtecksseiten, die gleich den Seiten des Dreiecks sind, senkrecht auf diesen stehen, liegt es nahe, das Dreieck noch einmal hinzuzeichnen, aber um 90^0 gedreht, und durch die Ecken Strecken zu ziehen parallel und gleich PQ. Dieselbe gegenseitige Lage der Dreiecksseiten und dieser Strecken erhält man aber einfacher, wie ich es in der vorliegenden Figur getan habe, indem man das



ursprüngliche Dreieck beibehält und durch die Ecken Strecken von der Länge PQ zieht, die senkrecht auf PQ stehen. Zieht man dann noch die Verbindungslinien der Endpunkte dieser Strecken, so erhält man ohne weiteres die gewöhnliche Figur für den Lehrsatz des Pappus.

Persönliche Nachrichten.

Am 6. Februar d. J. hat Professor Dr. Siegmund Günther in München seinen siebzigsten Geburtstag gefeiert. Der Vorstand des Vereins hat dem verehrten Jubilar seine Glückwünsche dargebracht und ihm für die unermüdliche Tätigkeit gedankt, die er auch im Dienste des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts entfaltet hat. Seit dem Jahre 1886 wirkt er als ordentlicher Professor der Erdkunde an der technischen Hochschule in München. Ein großer Teil seiner Arbeiten gehört naturgemäß diesem Gebiet an; wir nennen davon nur das „Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie" (1884—85), das „Handbuch der mathematischen Geographie" (1890), das „Lehrbuch der physikalischen Geographie" (1891) und die vergleichende Mond- und Erdkunde (1911). Daneben aber stehen umfassende Veröffentlichungen zur Geschichte der Wissenschaft, von denen besonders erwähnt seien die „Geschichte der anorganischen Naturwissenschaften im 19. Jahrhundert" (1901) und die „Geschichte der Mathematik bis Cartesius" (1908). Auch eine „Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter" (1877) hat Günther verfaßt. Auf die weit über 100 betragende Zahl von wissenschaftlichen Einzelaufsätzen Günthers näher einzugehen, müssen wir uns aus Mangel an Raum versagen. Dankbar sei nur des Vortrages über das geschichtliche Element im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht gedacht, den er auf der Jahresversammlung des Vereins in München zu Pfingsten 1913 gehalten hat.

P.

* * *

Geheimer Studienrat Dr. Friedrich C. G. Müller in Brandenburg a. H. vollendet am 27. Juni d. J. sein siebzigstes Lebensjahr. Er steht noch in voller Rüstigkeit im Schuldienst an den v. Saldernschen h. Lehranstalten in Brandenburg a. H. Durch seine zahlreichen Veröffentlichungen, besonders in der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht und durch sein bei Otto Salle erschienenes Werk „Technik des physikalischen Unterrichts nebst Einführung in die Chemie", hat er sich hervorragende Verdienste um den naturwissenschaftlichen Unterricht erworben. P.

Uebersicht über die Lehrgänge der Königlichen Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht. — Sommer 1918.

A. Lehrgänge für Lehrer und Lehrerinnen an den Schulen Groß-Berlins.

1. Lehrmittel und Hilfsmittel für den erdkundlichen Schulunterricht.
   Vortragender: Studienrat Dr. Lampe.
2. Erdkundliche Ausflüge.
   Leiter: Direktor Heinrich Fischer.
3. Pflanzenkundliche Ausflüge.
   Leiter: Dr. E. Ulbrich.
4. Ergänzungen zu den pflanzenkundlichen Ausflügen. 1. Teil.
   Leiter: Dr. E. Ulbrich.
5. Versuche zur methodischen Einführung in die Chemie.
   Leiter: Studienrat Ohmann.
6. Uebungen in der wissenschaftlichen Lichtbildkunst.
   Leiter: R. Schmehlik.
7. Uebungen in der mechanischen Werkstatt.
   Leiter: Mechaniker und Optiker Hintze.

B. Besondere Lehrgänge für Lehrer und Lehrerinnen an den höheren Schulen Groß-Berlins.

8. Erdkundliche Ausflüge.
   Leiter: Oberlehrer Urbahn.
9. Uebungen in einfachen Aufgaben der Landmessung.
   Leiter: Studienrat Heyne.
10. Geologische Ausflüge.
    Leiter: Professor Dr. Schneider.
11. Pflanzenkundliche Ausflüge.
    Leiter: Professor Dr. Kolkwitz.
12. Mikroskopische Uebungen zur Biologie der Wirbellosen.
    Leiter: Direktor Dr. Röseler.
13. Die wichtigsten Schulversuche aus der allgemeinen Mechanik und über die Eigenschaften fester Stoffe.
    Leiter: Dr. Wilhelm Volkmann in Verbindung mit Oberlehrer Dr. Fischer.

14. Physikalische Schülerversuche.
    Leiter: Professor Hahn in Verbindung mit Oberlehrer Dr. Fischer.
15. Uebungen über Elektrizität im Hause. (Nur für Oberlehrerinnen.)
    Leiter: Oberlehrer Dr. Fischer.
16. Chemische und elektrochemische Uebungen.
    Leiter: Studienrat Dr. Böttger in Verbindung mit Studienrat Schwarz.
17. Schulversuche aus der organischen Chemie.
    Leiter: Oberlehrer Dr. Franz.

Bücher-Besprechungen.

Geographischer Anzeiger vereinigt mit der Zeitschrift für Schulgeographie. Herausgegeben von Dr. Hermann Haack, Prof. Heinrich Fischer und Lehrer Albert Müller. Verlag von Justus Perthes in Gotha. 19. Jahrgang 1918. Preis M 6.—.

Heft 1/2. Dr. Jos. Reindl-München: Siegmund Günther zum 70. Geburtstag, den 6. Februar 1918. — Prof. Dr. Th. Arldt-Radeberg: Die Frage der Permanenz der Kontinente und Ozeane. — Oberlehrer Dr. Konrad Olbricht-Breslau: Braucht Deutschland Kolonien? — Dr. R. Hennig-Berlin, z. Zt. Libau: Das Wetter in Norddeutschland im Herbst 1917. — Direktor Prof. Heinrich Fischer-Berlin: Kriegs- und schulgeographische Schnitzel: Das deutsche Gymnasium und die Erdkunde. — Prof. Dr. P. Wagner-Dresden: Die Frage der Auslandsstudien in Sachsen. — Dr. E. Wunderlich-z. Zt. Warschau: Die Geographie und ihre Bedeutung für die Ausbildung im Auslandsdienst. — Univ.-Prof. Dr. Wilhelm Rein-Jena: Unterricht in Erdkunde. — Kleine Mitteilungen. — Geographischer Literaturbericht Nr. 1 bis 57. — Sonderbeilage 1: Abbildungen zum Aufsatz von Arldt, Die Frage der Permanenz der Kontinente und Ozeane.

* * *

Kerschensteiner, Georg, Das Grundaxiom des Bildungsprozesses und seine Folgerungen für die Schulorganisation. Aus „Deutsche Erziehung", Schriften zur Förderung des Bildungswesens im neuen Deutschland. Herausg. von Karl Mathesius. Union, Deutsche Verlagsgesellschaft Zweigniederlassung Berlin. M 1.80.

Alle Schriften Kerschensteiners gravitieren auf dieses neueste Werk, das als Einleitung in eine umfassendere Darstellung seiner pädagogisch-psychologischen Anschauungen angesehen werden kann. Der Grundgedanke Kerschensteiners, dem er für die Erziehungswissenschaft die Bedeutung eines Axioms zuerkennt, ist in Kürze der: Alle Kulturgüter entspringen der menschlichen Psyche und können als Bildungsgüter nur auf eine gleichartig gerichtete Psyche wirken. Daraus ergibt sich ihm eine grundlegende Reform unseres Bildungswesens. Bildung darf nicht mit Wissen verwechselt werden, sondern bedeutet Formung der individuellen Persönlichkeit. Nicht mit dem Vielerlei einer wesentlich den theoretischen Wissenschaftsgütern der Kultur entnommenen „allgemeinen" Bildung darf angefangen werden, sondern mit Spezialbildung der Triebe und Strebungen, die sich in dem einzelnen Individuum finden. Von der Berufsbildung zur Allgemeinbildung lautet die aus seinem Axiom sich ergebende Folgerung. Das bedeutet also Individualisieren im Unterricht, nicht bloß in der Methode des Unterrichts, sondern in dem Stoff des Unterrichts. Kerschensteiner beschäftigt sich dann ausführlich mit den Einwendungen gegen seine Ideen und mit der Möglichkeit der praktischen Durchführung. Das Ganze ist höchst anregend geschrieben und reizt zum Nachdenken. Und gerade die Oberlehrer der mathematischen und Naturwissenschaft haben allen Grund, sich mit Kerschensteiners Gedanken auseinanderzusetzen, in denen sich ein gesunder theoretischer Realismus mit einem von hohem Optimismus getragenen praktischen Idealismus vereint. Wir empfehlen die Lektüre dringend.
Mr.

* * *

Speck, J., Die wissenschaftliche und pädagogische Weiterbildung der akademisch gebildeten Lehrer. Leipzig 1917, Verlag von Quelle und Meyer. geb. M 3.40.

Mußten, zumal in dieser Zeit der Papierknappheit, diese breiten Allgemeinheiten über den Nutzen von Vorlesungen, von Studienreisen und Lehreraustausch, den Wert der Berufsvereine, Programmabhandlungen und Bibliotheken und sogar über die Verhältnisse im Schulbuch- und Lehrmittelhandel wirklich gedruckt werden? Sind diese nichts- oder wenigstens nichts Neues sagenden Aeußerungen über die verschiedenen Schulfächer und ihre Unterrichtsreform wirklich so wichtig und wertvoll, um mit ihrer Veröffentlichung die pädagogische Welt beglücken zu müssen? Nicht jeder Vortrag sollte gleich zu einem Buche ausgeweitet werden.
Mr.

* * *

Thaer, A. und Lony, G., Lehrbuch der Mathematik. Ausgabe B. Für Oberrealschulen, Realgymnasien und verwandte Anstalten. In zwei Bänden. I. Band: Unterstufe mit 259 Figuren im Text. 268 S. geb. M 2.80. Ausgabe C. Für Realschulen. In einem Bande. Mit 259 Figuren im Text. 268 S. geb. M 2.80. Breslau 1915, F. Hirt.

Das Lehrbuch von Thaer und Lony, von dem bis jetzt die Unterstufe vorliegt, ist ein methodisches. Ueber die Grundsätze, von denen sich die Verfasser bei der Bearbeitung leiten ließen, sprechen sie sich in dem Vorwort ausführlicher aus. Besonders bemerkenswert ist das anfangs ausschließlich angewandte induktive Verfahren, sowohl im geometrischen als auch im algebraischen Teile. In der Geometrie wird nach einer kurzen Einleitung über Körper, Flächen, Linien und Punkt zum Zeichnen von Figuren übergegangen und hieraus die wichtigsten Begriffe wie Gerade, Strecke, Strahl, Winkel gewonnen. Hierbei wird sehr bald zum Zeichnen verwickelter Figuren, zu Dreiecken mit Höhen, Seitenhalbierenden, zu Parallelogrammen, Trapezen übergegangen und aus ihnen lediglich durch Anschauung und Messung eine ganze Reihe von Gesetzmäßigkeiten gewonnen. Durch Erörterung der Zusammenhänge zwischen diesen Gesetzmäßigkeiten wird allmählich das Bedürfnis nach dem logischen Beweise geweckt. Auf der Grundlage eines Teiles der empirisch gewonnenen Ergebnisse wird durch Hinzunahme des Parallelenaxioms die Planimetrie logisch weiter aufgebaut. Auch in dem zweiten Teile tritt gleich wie im ersten das Bestreben nach anschaulicher Darbietung, durch Heranziehung von praktischen Beispielen, Tatsachen und Beobachtungen aus den verschiedensten Gebieten und durch ausgiebige Benutzung der Beweglichkeit der Figuren angenehm in den Vordergrund. Auch einer bereits früher und zuletzt wieder in unserer Zeitschrift von Schmiedeberg (Jahrg. XIII, Nr. 7, S. 100 ff.) von neuem erhobenen Forderung, auf der Mittelstufe das räumliche Anschauungsvermögen mehr zu pflegen, suchen die Verfasser durch Verallgemeinerung von in der Ebene bestehenden Beziehungen auf den Raum gerecht zu werden.

Sehr geschickt ausgewählt ist der reichliche Uebungsstoff der Aufgaben zum selbständigen Ueben im Beweisen und zu geometrischen Konstruktionen. Ich verweise nur auf § 25 (I. Teil), wo unter anderem der Feuerbachsche Kreis, das Höhenfußpunktdreieck, die Simsonsche Gerade, die Pothenotsche Aufgabe behandelt wird. Bemerkenswert ist auch die Ableitung des pythagoreischen Lehrsatzes aus dem Satze des Pappus, den man in neueren Schulbüchern nur noch selten findet. Das über Parallel- und Zentralprojektion in § 34 (I. Teil) und über die Herstellung von Schrägbildern in § 7 (IV. Teil) Gebrachte erscheint mir reichlich knapp und dürfte weiter ausgeführt sein.

Besonders bemerkenswert ist auch die Darstellung der Arithmetik, namentlich die Einführung der relativen Zahlen. Erst nachdem bei dem Schüler an einer ganzen Reihe von Einzelfällen durch die notwendigen Beschränkungen und Ausnahmen das Bedürfnis nach Erweiterung des Zahlenbegriffs lebendig geworden und er sich an das Rechnen mit Zahlen mit Vorzeichen gewöhnt hat, kommt verhältnismäßig spät die systematische und logische Erörterung der relativen Zahlen zu ihrem Rechte.

In dem Vorkursus der Trigonometrie wird bei der Einführung der trigonometrischen Funktionen, abweichend von dem sonst üblichen Vorgehen, wohl unter dem Einfluß von Höflers Didaktik des mathematischen Unterrichts, von der Tangensfunktion ausgegangen. Die trigonometrischen Funktionen werden an dem rechtwinkligen Dreieck nur für spitze Winkel definiert; da, wo bei dem Kosinus- und Sinussatz sich das Bedürfnis nach der Erweiterung der Begriffe für stumpfe Winkel notwendig erweist, wird der Sinus und Kosinus stumpfer Winkel durch Verabredung festgesetzt und so die Notwendigkeit der Erweiterung der Begriffe geweckt. Diese Erweiterung bleibt der Oberstufe vorbehalten.

Auf S. 201 wird bei der Erörterung der Diskriminante der quadratischen Gleichung von den imaginären Wurzeln gesprochen; es handelt sich doch um komplexe Wurzeln.

Das Lehrbuch steht auf dem Boden der Meraner Vorschläge; daß die funktionale Betrachtungsweise und die graphischen Methoden ausgiebige Verwendung finden, ist daher selbstverständlich.

Der vorliegende erste Teil dieses Lehrbuches der Mathematik läßt bereits erkennen, daß wir es mit einer höchst beachtenswerten, auf reicher Unterrichtserfahrung beruhenden Neuerscheinung zu tun haben, auf deren zweiten Teil man mit Recht gespannt sein darf.

K. Schwab (Frankfurt a. M.)

* * *

Thaer und Wimmenauer, Arithmetische Aufgaben für höhere Schulen. Ausgabe B. Für Oberrealschulen, Realgymnasien und verwandte Anstalten. In zwei Teilen. I. Teil, Unterstufe. 146 S. geb. M 1.75. II. Teil, Oberstufe. 152 S. geb. M 1.75. Ausgabe C. Für Realschulen. geb. M 1.75.

Ergebnisse zu den arithmetischen Aufgaben für höhere Schulen. Ausgabe B. I. Teil. 44 S. geh. M 0.80. II. Teil. 80 S. geh. M 1.60. Ausgabe C. 52 S. geh. M 1.60. Breslau 1915, F. Hirt.

Die vorliegende Aufgabensammlung zur Arithmetik und Algebra, die in ihrem rechnerischen Teile sich auf die Aufgabensammlung von Wimmenauer aufbaut, bildet den Abschluß der Neubearbeitung des Kamblyschen Unterrichtswerkes durch Herrn Direktor Dr. Thaer. Bei der Bearbeitung ist der durch Herrn Geheimrat Klein angeregten Reformbewegung des mathematischen Unterrichtes in weitestem Umfange Rechnung getragen worden. Als einheitliches Ziel schwebt den Verfassern die Erziehung zum funktionalen Denken vor; daher wird von einem wichtigen Hilfsmittel hierzu, der graphischen Darstellung, weitgehender Gebrauch gemacht; ob man so weit gehen kann, wie es hier beabsichtigt ist, wird sicherlich davon abhängen, ob die nötige Zeit zur Verfügung steht. Aber auch der Lehrer, der vielleicht der zeichnerischen Behandlung noch ablehnend gegenübersteht, findet in dem Werke reichlichen und interessanten Stoff zum rein rechnerischen Unterrichtsbetriebe. Dadurch, daß der graphisch zu behandelnde Uebungsstoff den einzelnen Abschnitten in besonderen Paragraphen vorangestellt ist, ist diesem wohl hoffentlich bald ganz verschwindenden Verfahren ausgiebig Rechnung getragen.

Das Aufgabenmaterial der eingekleideten Aufgaben enthält solche aus den verschiedensten Gebieten des alltäglichen Lebens, der Versicherungsrechnung, der Statistik zur Erschließung des Verständnisses wirtschaftlicher Verhältnisse, aus Geometrie, Physik und Astronomie. Aufgaben zur Einübung des Gebrauches des logarithmischen Rechenstabes sind mir bis jetzt in keiner für höhere Schulen bestimmten Aufgabensammlung begegnet. Besonders reichhaltig, aber auch weitgehend ist das Aufgabenmaterial zur Infinitesimalrechnung, das mehr als die Hälfte des für die Oberstufe bestimmten Teiles bildet. Meines Erachtens gehen hier die Anforderungen über das auf den höheren Schulen zu bewältigende und zu erstrebende Maß vielfach hinaus; zur Durcharbeitung fehlt ganz entschieden die Zeit. Die hier geforderten Kurvenuntersuchungen von anderen Kurven als Kegelschnitten tragen, wie ich aus eigener Erfahrung im Unterricht bestätigen kann, sehr zur Belebung desselben bei, können aber doch nur bei kleinen Klassen und besonders guten Jahrgängen eingehende Behandlung erfahren. Die Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlichen, die Integration von gebrochenen und irrationalen algebraischen Funktionen gehen über das Schulpensum hinaus. Statt der Sterblichkeitstafel der „Assicurazioni Generali“ in Triest wäre die Sterblichkeitstabelle der deutschen Lebensversicherungsgesellschaften erwünschter.

Die Aufgabensammlung verdient sicherlich die Beachtung der mathematischen Lehrerwelt in hervorragendem Maße. Ein in ihrem Geiste erteilter Unterricht darf mit Recht ein zeitgemäßer genannt werden.

Schwab (Frankfurt a. M.).

* * *

Heis-Druxes, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra zum Gebrauch an höheren Schulen. Teil II. Pensum der Ober-Sekunda, Unter- und Ober-Prima. 325 S. Cöln 1914, M. Du Mont-Schauberg.

Die Druxessche Neubearbeitung der älteren Generationen wohlbekannten trefflichen Heisschen Aufgabensammlung hat bei ihrem ersten Erscheinen im Jahrg. XVII, S. 38, eine eingehende zustimmende Besprechung gefunden, der man sich anschließen kann. Die zweite Auflage des für die Oberklassen bestimmten Teiles (die 113. der alten Auflage) enthält eine Reihe von Verbesserungen durch Vermehrung der Zeichnungen, von denen ganz besonders auf die in auf besonderen Tafeln gegebenen trefflichen Darstellungen der Funktionen e^x, $\sin x$, $l(1+x)$, $(1+x)^{-2}$ nebst ihren Schmiegungsparabeln verwiesen sei; ferner sind in vielen Abschnitten, so besonders in dem Kapitel über größte und kleinste Werte, neue Aufgaben, die die Verwendbarkeit der Mathematik auf die Verhältnisse des praktischen Lebens besonders betonen, aufgenommen worden.

Es seien hier noch einige kleine Ausstellungen, die den Wert der trefflichen Bearbeitung nicht herabsetzen können, angeführt. Die Darstellung würde an den Stellen, wo Zeichnungen zur Erläuterung beigegeben sind, an Klarheit gewinnen, wenn die Zeichnungen mit Nummern versehen wären und auf diese in der Darstellung Bezug genommen würde. Daß zu einigen Kapiteln die Auflösungen, meist bei aus der alten Heisschen Bearbeitung entnommenen Aufgaben, beigegeben sind, stört die Einheitlichkeit; in für Schüler bestimmte Aufgabensammlungen sollten die Auflösungen überhaupt nicht aufgenommen werden. Der § 31 (Weitere Aufgaben über Funktionen und ihre Steigung) würde meines Erachtens besser geteilt und der Abschnitt über die Integralrechnung dann an das Ende vor § 39 als besonderer Paragraph gestellt werden. Die Behandlung der Asymptoten einer Kurve (§ 31, S. 187 und 188) erscheint mir nicht recht klar. Die Reihenlehre in § 37 und 38 ist für Realanstalten zu knapp und nicht übersichtlich genug; auch könnte bei der logarithmischen Reihe etwas näher auf die Berechnung der Logarithmen eingegangen werden. In § 4 wird $\alpha + \beta i$ als imaginäre Wurzel bezeichnet, richtiger wäre doch komplexe Wurzel.

An Druckfehlern, die bei einer Neuauflage zu beseitigen sind, fielen mir auf:

S. 131, Z. 9 v. u.: $\frac{r}{p^{n'}}$ statt $\frac{r}{q^{n'}}$.

S. 195, Z. 6 v. o.: $\frac{F(x, y, \lambda + \varDelta u) - F(x, y, \lambda)}{\varDelta u} = 0$

statt $\frac{F(x, y, \lambda + \varDelta \lambda) - F(x, y, \lambda)}{\varDelta \lambda} = 0$.

S. 195, Z. 15 v. o.: $y^2 = \frac{x^2}{4}$ statt $y = \frac{x^2}{4}$.

S. 201, Z. 1 v. o.: $\frac{dy}{dx} = F'(x) - f(x)$ statt

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x).$$

S. 206. In der Zeichnung fehlt der Buchstabe B.

S. 206, Z. 4 v. u.: $\sum_{x=a}^{x=b} y \cdot \varDelta y$ statt $\sum_{x=a}^{x=b} y \cdot \varDelta x$ und

$$\int_a^b y \cdot \varDelta y \text{ statt } \int_a^b y \cdot \varDelta x.$$

S. 229, Fußnote: Götting statt Göring.

S. 244, Z. 5 v. o.: $\sphericalangle FBM$ statt $\sphericalangle FMB$.

S. 261, Z. 1 v. o.: $y = f'(x)$ statt $y = f(x)$.

S. 262, Z. 5 v. u.: Hier heißt es: „Die in den Figuren II, IV und V mit W bezeichneten Punkte heißen Wendepunkte der Kurve“; in Fig. V befindet sich kein Wendepunkt.

Die durch Druck und gute Ausstattung ausgezeichnete Sammlung kann bestens empfohlen werden.

Schwab (Frankfurt a. M.).

* * *

Sellenthin, B., Mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. 3. umgearbeitete Auflage. Mit 331 Figuren im Text. 455 S. Leipzig-Berlin 1917, B. G. Teubner. geb. M 8.40.

Der in dritter Auflage vorliegende Leitfaden der Mathematik ist für den mathematischen Unterricht in den Steuermannsklassen der Kaiserlichen Deckoffizierschule, an Bord der Seekadetten-Schulschiffe und auf der Kaiserlichen Marineschule bestimmt. Wenn hier auf das bei seinem ersten Erscheinen eingehend besprochene Werk nochmals aufmerksam gemacht wird, so geschieht es in der Absicht, die Lehrer der Mathematik an höheren Lehranstalten, die ihren Unterricht durch Beispiele aus der Navigation beleben wollen, darauf hinzuweisen, daß sie in dem Buche reichliches Material hierzu für alle Klassenstufen, ganz besonders aber für den Unterricht in der ebenen und sphärischen Trigonometrie finden. Schwab (Frankfurt a. M.)

* * *

Sünderhauf, K., Einführung in die höhere Mathematik. Beihefte zur Zeitschrift „Lehrerfortbildung“. 1. Heft Kombinationslehre. 50 S. Leipzig 1917, A. Haase. Preis M 1.25.

Das zum Selbstunterricht bestimmte Heft bringt als Einleitung die Kombinationslehre nebst dem binomischen Lehrsatz für ganzzahlige Exponenten in klarer, leichtfaßlicher Darstellung. Zahlreiche Uebungsaufgaben nebst vollständiger Lösung dienen zur Einübung des Lehrstoffes. Bei Vorbereitung zu Prüfungen und beim Selbstunterricht kann das Heft gute Dienste leisten. Schwab (Frankfurt a. M.)

* * *

Hamanke, E., Kriegsmathematik. Eine Sammlung einfacher Aufgaben aus der Geometrie. 36 S. Breslau 1916, F. Hirt. geh. M —.60.

Das Büchlein behandelt an sich in flüssiger Form eine Reihe geometrischer Anwendungen, die im militärischen Leben, insbesondere im Kriege, vermeintlich von Bedeutung sind. Aber es hat all die Fehler der Bücher, die von Kriegsschriftstellern verfaßt werden, die dem militärischen Leben völlig fern stehen. Der Berichterstatter, der über zwölf Jahre Artillerist ist und dreißig Monate im Felde als Batterieführer tätig war, war sehr erstaunt, im Abschnitt IV, Nr. 13, bei der Besprechung des indirekten Richtens zu lesen, wie das Einrichten geschehen soll. Das vom Verfasser angegebene Verfahren ist dem Artilleristen unbekannt! In Nr. 38 (Bahn des Geschosses) schreibt der Verfasser nach Ableitung der Formel für die Schußweite im luftleeren Raum

$$\text{Schußweite } E = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (4)$$

„Im Felde handelt es sich ausschließlich darum, aus der bekannten Größe von c und der gemessenen Entfernung bis zum Ziele P festzustellen, welcher Wert dem Abgangswinkel a gegeben werden muß, wenn P getroffen werden soll. Man findet ihn durch Umformung von (4) aus

$$\sin 2a = \frac{g \cdot E}{c^2}.$$

Das ist direkt falsch! Diese Probe zeigt, daß der Verfasser keine Ahnung von dem Vorhandensein der Schußtafeln hat und sich nicht einmal die Mühe genommen hat, die für die Einjährigen der Fuß- oder Feldartillerie geschriebenen Bücher in die Hand zu nehmen. Sie bildet einen Beitrag für das berühmte Kapitel der unpraktischen Schulmathematik, die sich den Anschein der Wirklichkeit gibt und dem Leser oft falsches bietet. Die im wirklichen Kriegs- und Soldatenleben vorkommenden Methoden, die vielfach so einfach sind, daß sie auch der Volksschüler verstehen kann, sind nicht berücksichtigt. Zum mindesten hätte die Tatsache erwähnt werden müssen, daß die kleinste Winkelgröße, mit der der Artillerist arbeitet, $^1/_{16}$ Grad oder $^{360}/_{6400}$ Grad beträgt. Die Gründe und Vorteile dafür sind einfach und lehrreich. Das Entfernungsschätzen mit Hilfe der Strichplatten im Doppelglas oder Scherenfernrohr ist nicht erwähnt. An Stelle des englischen Entfernungsmessers nach Barr und Stroud wäre besser ein deutscher besprochen worden. Das oben Gesagte gilt auch für alle Anwendungen, die bei der Marine in Gebrauch sein sollen.

Das Buch gibt ein vollständig falsches Bild der Wirklichkeit. Schon der Haupttitel ist irreführend, da die Kriegsarithmetik nicht berücksichtigt ist.

Der Berichterstatter bezweifelt, daß das Heft, das nach dem Vorwort ursprünglich nur für Lehrerbildungsanstalten gedacht ist, auch für Mittelschulen und die älteren Jahrgänge mehrklassiger Volksschulen verwendbar sein soll.

Lötzbeyer (Berlin-Wilmersdorf).

* * *

Brehms Tierbilder. Zweiter Teil: Die Vögel. 60 farbige Tafeln aus Brehms Tierleben. Von Wilhelm Kuhnert und Walter Heubach. Mit Text von Dr. Victor Franz. Leipzig und Wien 1913, Bibliographisches Institut.

Es war ein guter Gedanke des Bibliographischen Instituts, aus seinem großen Besitz an schönen Tierbildern besondere Bildermappen zusammenzustellen und der Oeffentlichkeit zu übergeben. Nicht nur die Naturkenntnis wird so gefördert, es wird vor allem der Sinn für den Reichtum und die Schönheit der Natur geweckt und angeregt. Jedes einzelne bunte Blatt der vorliegenden Vogelmappe betrachtet man mit reiner Freude. Was hier von bewährten Maler- und Zeichnerhänden aus der Formen- und Farbenpracht aller Zonen und Länder, auch der deutschen Heimat, gezeigt wird, kann auch jeder Schulsammlung als wertvolle Ergänzung dienen und die Bemühung des Lehrers um die Kenntnis und Erhaltung schöner deutscher Vogelarten, die seltener geworden sind oder zu verschwinden drohen, wie des Pirols oder der Mandelkrähe, unterstützen.

Die den Bildtafeln beigegebenen Textblätter, die sich zumeist an Brehms Tierleben, aber auch an Naumann und andere Vogelkundige anlehnen, enthalten neben kurzen beschreibenden Angaben auch Bemerkungen über Ernährungs- und Nistweise und über die Bedeutung der einzelnen Arten für den Menschen.

Gräntz (Frankfurt a. M.).

Lehrbuch der Zoologie. Von Dr. Richard Hertwig, o. ö. Prof. der Zoologie und vergl. Anatomie a. d. Univ. München. 11. vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 588 Abb. im Text. Jena 1916, Gustav Fischer. Preis broschiert M 13,50, geb. M 15.—.

Das gediegene Werk ist auch in dieser neuesten Auflage seinem alten Wesen treu geblieben: es ist kein wissenschaftliches Handbuch, sondern ein wirkliches Lehrbuch für Studierende, Lehrer und Freunde der wissenschaftlichen Zoologie. Was aus der Menge neuer, bedeutender Forschungsergebnisse hinzugetreten ist, hat manches Aeltere verdrängt. Vielfach wurde die Darstellung gekürzt oder vereinfacht, um dem Neuen Raum zu schaffen. So ist ein weiteres Anschwellen des Umfangs glücklich vermieden und gleichwohl das Buch auf die Höhe der gegenwärtigen Forschung gehoben worden. Besonderen Reiz gewährt es bei einem Vergleich der verschiedenen Auflagen, dem Entwicklungsgang der neueren Zoologie zu folgen, vor allem zu beobachten, wie mehr und mehr die physiologisch-experimentelle Richtung über die ältere rein-morphologische die Herrschaft gewonnen hat.

Das mit guten Textbildern vorzüglich ausgestattete Werk wird sich auch in verjüngter Gestalt alten und jungen Zoologen als unentbehrlich erweisen.

Gräntz (Frankfurt a. M.).

* * *

Der geologische Unterricht als Grundlage und Abschluß des erd- und naturkundlichen Unterrichts. Erfahrungen und Vorschläge von Johannes Walther, Prof. a. d. Univ. Halle. Leipzig u. Berlin 1915, B. G. Teubner. geh. M 1.40.

Der Verfasser fordert einen geologischen Tatsachenunterricht, eine geologische Heimatkunde im Freien, streift die Beziehungen seines Faches zu anderen Wissenschaften, behandelt sehr anregend manche Einzelfragen, wie das Kartieren, das Zeichnen nach der Natur, die Schulsammlung, die Nutzbarmachung der geologischen Karte, das Bedenkliche am geologischen Experiment, und weist in klaren und guten Sätzen auf die bildenden Werte der Geologie hin, die in einer Vertiefung und Weitung des Zeitbegriffs, in der Einordnung der leblosen Erdnatur in große Entwicklungsreihen, im Erkennen der Einheit der uns umgebenden Welt, in der geschichtlich ursächlichen Verbindung von Vergangenheit und Gegenwart liegen. Die schärfere Scheidung der Geologie von der Geographie, die dem Universitätsgelehrten nahe liegt, wird im Unterrichtsbetrieb der höheren Schule von selbst verschwinden, nicht zum Schaden des Unterrichts. Auch wird sich mancher Einzelvorschlag kaum oder selten oder nur auf Kosten anderer Fächer durchführen lassen. Die Grundforderung bleibt zu Recht bestehen: zur geistigen Bildung gehört auch ein gewisses Maß geologischer Kenntnisse. Und da jeder Schulort seine eigene Geologie hat, versteht sich hier eine erfreuliche, schablonenfreie Mannigfaltigkeit von selbst.

Gräntz (Frankfurt a. M.).

* * *

Die Kriegsschauplätze. Herausgegeben von Prof. Dr. Alfred Hettner. Leipzig u. Berlin 1916, B. G. Teubner. 2. Heft: Der französisch-belgische Kriegsschauplatz, von Prof. Dr. Philippson; geh. M 1.80; 3. Heft: Der östliche Kriegsschauplatz, von Prof. Dr. Partsch, geh. M 2.—.

4. Heft: Die Kriegsschauplätze auf der Balkanhalbinsel, von Prof. Dr. Krebs und Prof. Dr. Braun, geh. M 2.40.

Aus Aufsätzen und Aufsatzreihen der Geographischen Zeitschrift erwachsen, heben sich diese von Hettner, dem Heidelberger Geographen, herausgegebenen Hefte deutlich ab von manchen äußerlich ähnlichen Darstellungen. Sie sind von bedeutenden Fachgelehrten im Geiste wissenschaftlicher Geographie, dabei so anschaulich und ausführlich geschrieben, daß sich auch ein weniger gut mit erdkundlichen und geologischen Voraussetzungen vertrauter Leser mit Gewinn in sie vertiefen kann. Das zweite Heft enthält zu diesem Zwecke noch eine kleine geologische Karte von Frankreich, zwei geologische Profile und eine Formationstabelle. Es kommt diesen Arbeiten nicht allein auf eine gründliche Darstellung der Kriegsschauplätze selbst an, sondern immer auch auf die Zusammenhänge, die zwischen der geographischen Natur der Schauplätze und dem Verlauf der Feldzüge und einzelnen kriegerischen Ereignissen bestehen. Allen dreien ist es gut gelungen, die wichtigsten dieser zum Teil verwickelten Zusammenhänge herauszuarbeiten. Am eindringlichsten und lebhaftesten tut es Partsch, der Leipziger Geograph, in seiner prächtigen Schilderung des östlichen Kriegsschauplatzes.

Wer nach einer geographischen Erfassung des großen Weltgeschehens verlangt — und heute empfindet nicht mehr nur der Geograph dieses Bedürfnis —, der findet hier gute Führer und kenntnisreiche Lehrmeister. Gräntz (Frankfurt a. M.).

* * *

Henneberg, Dr. **W.** und **Bode**, Dr. **G.** vom Institut für Gärungsgewerbe zu Berlin, Die Gärungsgewerbe und ihre naturwissenschaftlichen Grundlagen. Mit 64 Abbildungen, 128 S. Preis M 1.25. Aus „Wissenschaft und Bildung", Bd. 110. Leipzig 1913, Quelle u. Meyer.

Den ersten Teil, die Gärungsbakteriologie, behandelt Henneberg eingehend, indem er die Formen, die Vermehrung sowie die übrigen biologischen Eigenheiten der Organismen, die bei der Gärung auftreten können (Hefepilze, Kultur- und wilde Hefen, der Spalt- und Schimmelpilze), beschreibt; die beigegebenen Zeichnungen unterstützen die Charakterisierung der im Text erwähnten Organismen. Der zweite Teil des Buches, von Bode verfaßt, bringt die Biochemie der Gärung; der Verfasser beschreibt zunächst die Vorgänge in der Pflanzenzelle, die gärungsfähige Stoffe, Kohlehydrate, Zuckerarten, entstehen lassen, spricht von den mit ihnen in Wechselwirkung tretenden, als Druckregulatoren wirkenden Enzymen und behandelt dann, nachdem diese für das Verständnis der Gärung notwendigen Vorkenntnisse erworben worden sind, die technische Gärung im einzelnen, z. B. die Wein- und Malzbereitung, die Brennerei, die Brauerei, die Brotbereitung, die Milchsäuregärung, die Essigfabrikation u. a. m.; die technischen Vorgänge werden eingehend erklärt, die in den Betrieben gebrauchten Apparate und Maschinen beschrieben; Textzeichnungen helfen den Bau und die Arbeit, die die Apparate zu leisten haben, begreifen. Chemikern wie Biologen, die sich über Gärung schnell und sicher unterrichten wollen, sei das Büchlein warm empfohlen; es wird sie nicht im Stich lassen.

Prof. Dr. W. Hirsch (Berlin-Lichterfelde).

* * *

Schleuker, Georg, Lebensbilder aus deutschen Mooren, Einführung in das Studium der heimischen Tier- und Pflanzenwelt. Mit 124 Abbildungen, 164 S. Preis M 2.75. Aus „Der Naturforscher", Thomas' Sammlung von Anleitungs-, Exkursions- und Bestimmungsbüchern. Leipzig, Theod. Thomas' Verlag.

Der mit den Mooren sehr vertraute Verfasser gibt in populär-wissenschaftlicher Art im Erzählertone den Lesern Bilder von der Entstehung der Flach- und Hochmoore; gut gelungene photographische Aufnahmen nach der Natur süddeutscher Moore veranschaulichen den Text. Das reiche Wissen erlaubt dem Verfasser, seinen Lesern einen Ueberblick über die artenreiche Flora und Fauna, im besonderen die Kleinlebewelt der Moore, zu verschaffen; schon das Ufer des Moorweihers bringt eine Fülle von Pflanzen und Tieren, die durch merkwürdigen Bau das Interesse erregen; nicht minder reich ist das Leben an der Oberfläche des Moorwassers zumal zu der Zeit, wenn das Wasser blüht; schier unübersehbar wird die Beute, wenn die Oberfläche oder der Grund des Moorweihers abgesucht wird. Die sehr sauber ausgeführten Zeichnungen lassen leicht erkennen, welche Formen man erjagt hat. Aber nicht nur faunistisch und floristisch sind die Kenntnisse, die wir durch das Studium des Buches erwerben. Der Verfasser macht zum Schlusse aufmerksam auf die Ernährungsverhältnisse im Moorweiher, er deckt die eigenartigen Ernährungsgenossenschaften auf und zeigt, daß die Tier- und Pflanzenwelt großartige Lebensgemeinschaften sind, denen nachzuspüren ein besonderer Reiz für den kundigen Naturforscher ist. Die rein praktische Seite erschließt das Endkapitel, welches die Bedeutung der Moore für den menschlichen Haushalt (die Moornutzung, die Torfgewinnung, die Moorkultur) hervorhebt. Ein Anhang bringt die systematische Uebersicht über die wichtigsten Mikroorganismen unserer Moorgewässer, führt die Pflanzenbestände des Flach- und Hochmoores auf und gibt schließlich eine Anleitung für das Sammeln und die Behandlung der einfachsten Lebensformen des Süßwassers. Ohne Zweifel ist Schleukers Leitfaden ein brauchbarer, zuverlässiger Wegweiser für die, welche sich auf und im Moore naturwissenschaftlich zurecht finden wollen.

Prof. Dr. W. Hirsch (Berlin-Lichterfelde).

Verzeichnis der zur Besprechung eingegangenen Bücher.

NB. Die Verpflichtung zu einer Besprechung von unaufgefordert eingehenden Werken kann nicht übernommen werden; auch liegt es nicht in der Möglichkeit, solche zurückzusenden.

Thaer und Lony, Lehrbuch der Mathematik. Ausgabe B. I. Band. Unterstufe. geb. M 2.80. Ausgabe C. Für Realschulen. geb. M 2.80. Breslau 1915, Hirt.

Thaer und Wimmenauer, Arithmetische Aufgaben. Ausgabe B. I. Teil. Unterstufe. M 1.75. II. Teil. Oberstufe. M 1.75. Ausgabe C. Für Realschulen. M 2.40. Ebenda.

— Ergebnisse zu den arithmetischen Aufgaben. Ausgabe B. Unterstufe. M —.80. Oberstufe. M 1.60. Ausgabe C. Für Realschulen. M 1.60. Ebenda.

Verworn, M., Die Frage nach den Grenzen der Erkenntnis. 2. Aufl. Jena 1917, Fischer. M 1.20.

Biedermann, R., Die Sprengstoffe, ihre Chemie und Technologie. 2. Aufl. Mit 12 Fig. (Aus Natur u. Geisteswelt 286.) Leipzig 1917, Teubner. M 1.50.

Bock, H., Die Uhr, Grundlagen und Technik der Zeitmessung. 2. Aufl. Mit 55 Abb. (Aus Natur und Geisteswelt 216.) Leipzig 1917, Teubner. M 1.50.

Boll, Fr., Sternglaube und Sterndeutung. Mit einer Karte und 20 Abb. (Aus Natur u. Geisteswelt 638.) Leipzig 1918, Teubner. geb. M 1.50.

Abschluß dieser Nummer am 5. Juni 1918.