Jahrgang XXIV. 1918. No. 5 u. 6.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**, von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von Professor **Karl Schwab**, Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule in Frankfurt am Main unter Mitwirkung von Dr. **August Maurer**, Direktor des Kgl. Realgymnasiums in Wiesbaden.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle Mitteilungen und Sendungen werden an Prof. K. Schwab, Frankfurt am Main, Günthersburgallee 33, erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 8 Nummern ist 4 Mk. pränum., für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift kostenlos; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhandlung zu beziehen.

Inhalt:

Der mathematische und naturwissenschaftliche Lehrplan der Berliner Begabtenschulen.

Unter der Parole „Freie Bahn dem Tüchtigen" macht sich gegenwärtig in den Schulleitungen vieler Städte ein großer Reformeifer bemerkbar, der von der Meinung ausgeht, daß seither zahlreiche Talente bei uns aus Mangel an Förderung verkümmert seien. Aus dem sozialpolitischen Gesichtspunkt heraus, solche Talente systematisch zu entdecken und zu heben, sucht man Uebergangsmöglichkeiten von den Volks- zu den Mittel- und höheren Schulen zu schaffen, Weichen und Uebergangsgeleise — um mit J. Tews zu reden — von einem Schulgeleise zu einem anderen, auf dem dann die lebendigen Seelen schier wie die Güterwagen hin und her geschoben werden, damit sie in den richtigen Zug kommen. Rückständige Pädagogen haben früher gemeint, der Aufbau eines Schulsystems müsse sich aus seinen inneren Bildungszielen ergeben, sie haben gemeint, daß es weniger der papierene Lehrplan als die lebendige, durch Jahre fortgesetzte Beziehung von Lehrer und Schüler sei, die erst die rechte Bildung bewirke, und daß der Lehrgang einer gewissen Einheitlichkeit und Stetigkeit je nach dem Ziel bedürfe, um wirksam zu werden. Jetzt aber schießen die Universal-Lehrpläne wie die Pilze hervor, und ihre graphischen Darstellungen sehen immer komplizierter aus. Alles wegen des Aufstiegs der Talente, dessentwegen die Frage ganz zurückzutreten scheint, ob denn vor all den Fahrgelegenheiten hinüber und herüber das Hauptgeleise für die Menge der mittleren Begabungen, über deren Entwicklungsmöglichkeiten zudem noch garnichts feststeht, fahrbar bleibt.

Es ist hier nicht der Ort über die großen Bedenken zu sprechen, welche dieser Reformeifer fortschrittlich gesinnter Schulverwaltungen für systematische Züchtung von Talenten hervorrufen muß. Der Grundgedanke der freien Bahn für den Tüchtigen ist gewiß gut, aber es muß eine Bahn nach aufwärts sein, die nicht ohne die charakterstärkende Aufwendung der eigenen Kräfte zum Ziel führen und dem Staatsganzen Nutzen bringen kann.

Den vielen Organisationen fügt nun die Stadt Berlin etwas ganz Neues hinzu. Sie gliedert unmittelbar an die Volksschule eine höhere Schule an, derartig, daß sich an 7 Volksschuljahre eine sechsstufige höhere Schule (Realgymnasium und Gymnasium) anschließt, in die jedoch nur begabte Kinder, über deren Zulassung nach Vorschlag der Rektoren die Schuldeputation entscheidet, eintreten können, wobei Befreiung von der Zahlung des Schulgeldes stattfinden und sogar eine Erziehungsbeihilfe von M 300 gewährt werden kann. Es können diese Schüler also in 13 Jahren wie die meisten anderen, die nach 4 Volksschuljahren in die Sexta eintreten, die Reife erlangen. Daß die ganze Schullaufbahn damit in zwei ganz heterogene Teile auseinanderfällt, liegt auf der Hand. In der Zeit jugendfrischer Arbeitskraft wird der Schüler an geistiger Unterernährung, in der schwierigen Zeit der beginnenden Pubertät an Ueberernährung leiden. Aber begabte Schüler, wenn sie zugleich die Gabe des Fleißes besitzen, mögen diesen klaffenden Spalt überwinden, zumal man verständiger Weise von jedem weiteren Einschnitt wie den der Einjährigen-Berechtigung abgesehen hat. Man wird zunächst zugestehen können, daß das Ganze großzügig gedacht und gut durchberaten ist. Man wird es als einen wertvollen Versuch gelten lassen und die Erfolge abwarten, vor allem aber auch die Lebenserfolge der Schüler beobachten müssen, was erst in Jahren möglich sein wird. Man wird aber auch davor warnen müssen, daß der Versuch eilige Nachahmung finde, wie denn der Ehrgeiz der Schulverwaltungen bei diesen Reform-Bestrebungen gewiß nicht ohne Einfluß ist.

Aber wir wollen uns die Lehrpläne zumal auf unsre Fächer ansehen und daraufhin prüfen, wieweit sie wirklich der freien Entwicklung des Talents Spielraum gewähren.[1]

In dem Realgymnasium sind für die Mathematik 25 Wochenstunden angesetzt (in U III 5 und in den folgenden Klassen je 4 Stunden), im Gymnasium 21 Stunden (in U III 5, O III 4 und in den folgenden Klassen je 3 Stunden). Selbst wenn man von der Geometrie in IV ganz absehen und an ihrer Stelle die Raumlehre der Volksschule gelten lassen will, ergibt sich also im Realgymnasium von O III bis O I eine Minderzahl von je 1 Stunde, im Gymnasium dasselbe von U II bis O I, wogegen der Unterricht in III (U III und O III sind in beiden Schularten vollständig übereinstimmend) um 2 bezw. 1 Stunde verstärkt ist. Da man den Vorteil hat, von einem relativen Abschluß in U II absehen zu können, tritt die Trigonometrie erst in O II, die Stereometrie im Realgymnasium ebenfalls in O II, im Gymnasium erst in U I auf. Die „Lehraufgaben" tragen den neueren Bestrebungen nur an einer Stelle mit der dürftigen Angabe „Graphische Auflösung von Gleichungen" in U II des Realgymnasiums bezw. U I des Gymnasiums Rechnung, die „Erläuterungen" dazu betonen zwar die Wichtigkeit des Begriffs der Funktion, wollen ihn aber ausdrücklich den Oberklassen vorbehalten wissen. Eine stark formale Auffassung der Aufgabe des mathematischen Unterrichts tritt in ihnen überhaupt hervor, wie denn trotz mancher guten Bemerkung die Erläuterungen zur Mathematik an Tiefe und Gründlichkeit neben denen zu den sprachlich-historischen Fächern unverkennbar eine Aschenbrödelrolle spielen. Daß aber die Schüler alle auch eine besondere mathematische Begabung zeigen werden, ist nicht anzunehmen. Schon deswegen erscheint die bedeutende Verkürzung der Stundenzahl einem Fach von so hohem bildenden und wissenschaftlichen Wert gegenüber höchst ungerechtfertigt. Aber auch, wenn es sich durchgängig um mathematisch gut begabte Schüler handelte, hätte eine so moderne Schule der Bedeutung des Faches und seiner vielseitigen Aufgaben, zumal auch nach der zeichnerischen Seite, ganz anders gerecht werden müssen. Aber da drängten die auf 6 Jahreskurse zusammengedrückten sprachlichen Aufgaben, und die Kosten dafür mußte die Mathematik zahlen. Noch mehr die Naturwissenschaften!

Für die gesamten Naturwissenschaften sind dem Realgymnasium 19, dem Gymnasium 12 Stunden zur Verfügung gestellt. Daß das letztere damit auch nicht im entferntesten dem Umfang und der Bedeutung der Naturwissenschaft gerecht werden kann, liegt auf der flachen Hand. Man könnte dagegen erwarten, daß es sich um eine Art Gabelung handele und dem Realgymnasium, die nach der mathematisch-naturwissenschaftlichen Seite Begabten zugewiesen werden sollten, wobei wir einmal von der Notwendigkeit einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Schulung für alle Gebildeten ganz absehen wollen. Aber wie kümmerlich sind auch hier neben der Mathematik die Naturwissenschaften bedacht. Sehen wir uns die Lehraufgaben für das Realgymnasium genauer an.

In U III und O III wird Biologie gelehrt (zwei Stunden). In U II zwei Stunden Physik und nur eine Stunde Chemie. In den drei Oberklassen (je vier Stunden) werden nur im Sommer je zwei Stunden Biologie (nebst Paläontologie) und zwei Stunden Physik, nur im Winter je vier Stunden Chemie erteilt, wobei auch eine Stunde Physik an Stelle von Chemie erteilt werden kann. Anzuerkennen bleibt die Bewertung der Biologie, unmöglich aber ist es, daneben der Physik und Chemie mit dieser knappen und zerrissenen Zeit gerecht zu werden. Für eine

[1] Vergleiche Moede-Piorkowski-Wolff: Die Berliner Begabtenschulen, ihre Organisation und die experimentellen Methoden der Schülerauswahl. Beyer & Mann, Langensalza 1918, Preis M 4,80.

praktische Tätigkeit der Schüler, für ein Lernen durch eigenes Tun und Beobachten bleibt erst recht keine Zeit, der Unterricht wird nicht anders als in vortragender, demonstrativer Form gegeben werden können. Damit geht aber der beste Teil desselben, die Ausbildung der Sinne, die Weckung der Beobachtungsgabe, die scharfe Unterscheidung von Tatsachen und Urteilen, die ganze für das Leben der Einzelnen wie des Staatsbürgers so notwendige induktive Logik verloren. Es muß auch von jeder manuellen Ausbildung abgesehen werden, „um die Stetigkeit der geistigen Entwicklung nicht zu stören", wie Wolff so schön sagt. Und das nennt sich Realgymnasium!

Und mit diesen ganz einseitig auf die sprachlichen Fächer aufgebauten Schulen, in denen sich unter 190 Wochenstunden 44 bezw. 33 in Mathematik und Naturwissenschaften, dazu noch 12 bezw. 4 Zeichenstunden befinden, will man eine der Eigenart des Talentes (wenn auch nur des auf theoretische Interessen gerichteten) gerecht werden? Mit dem Flickwerk dieses Lehrplans glaubt man die Bedeutung unsrer Fächer, die nie stärker als in diesem Krieg hervorgetreten ist, richtig zu bewerten? Es kann im Interesse einer sozialen Pädagogik nur bedauert werden, wenn auf diese Weise die begabten Berliner Kinder, deren sprachliche Fixigkeit ja ohnedies nicht gering zu sein pflegt, ganz einseitig in eine Richtung gedrängt werden, die ihnen wesentlich eine sprachlich formale Bildung verleiht, sie aber von allem was in Wissenschaft, Technik und Industrie produktiv schaffend ist, abdrängt. Da wird es schließlich doch auch in Berlin dabei bleiben, daß das mathematische, naturwissenschaftliche oder technische Talent in letzter Linie aus eigner Kraft seinen Aufstieg finden muß. Ich hätte mir noch denken können, daß die Begabtenschule auf dem Prinzip einer wissenschaftlichen Gabelung aufgebaut worden wäre. In den beiden gemeinsamen Klassen der U III und O III sind allenfalls die Begabungsrichtungen schon zu erkennen. Schlösse sich daran ein mehr sprachlich-historischer und ein mehr mathematisch-naturwissenschaftlicher Lehrgang, so war zwei Hauptrichtungen des geistigen Interesses Rechnung getragen. So aber handelt es sich in der Berliner Begabtenschule um eine ganz einseitige Sprachenschule, deren Lehrplan wir als einen bedenklichen Rückschritt gegenüber der wissenschaftlichen und pädagogischen Entwicklung unsrer Zeit bezeichnen müssen. Das, wenn auch geteilte Interesse, mit dem ich dieser Schöpfung zuerst entgegen getreten bin (Köln. Ztg. 1917, Nr. 326) muß daher einer bitteren Enttäuschung Platz machen, nicht etwa nur aus partikularistischen Rücksichten des Faches, sondern aus allgemeinen Erwägungen über Ziel und Bedeutung eines solchen Volksgymnasiums.

Aber mit den beiden Lehrgängen ist noch ein dritter verbunden. Vielleicht daß dieser den Bedürfnissen der mathematisch oder naturwissenschaftlich Begabten entgegenkommt. Eine Realschule mit dreijährigem Lehrgang, Kaempf-Realschule genannt, wird eingerichtet, durch die zunächst dem Handel, der Industrie und dem Handwerk hervorragende Intelligenzen zugeführt werden sollen. Dort finden wir zwar für Mathematik sechs Stunden in jeder Klasse angesetzt, von denen aber in allen Klassen ein erklecklicher Teil der Ausbildung im kaufmännischen Rechnen dient. Daneben finden wir in U III 1 Biologie, 1 Physik, in O III 2 Biologie, 2 Physik und in U II 2 Physik und 2 Chemie. also auch hier beträchtlich weniger wie in der gewöhnlichen Real- bezw. Oberrealschule. Der gegenüber diesen Schulen stark verkürzte Lehrgang in den Fremdsprachen soll wesentlich praktisch utilitarischen Interessen dienen, wie denn der ganze Lehrplan hauptsächlich solchen Interessen in durchaus gesunder und verständiger Weise nutzbar gemacht werden soll.

Aber nicht genug damit soll zugleich nach diesen drei Jahren der Anschluß an die Oberklassen der Oberrealschule erreicht werden. Die arme Oberralschule, die von der Stufe einer dem Gymnasium und dem Realgymnasium ebenbürtigen humanistischen Schule immer mehr durch die Verbindung mit Mittel-, Rektorats- und Begabtenschulen zu einem Mädchen für alles herabsinkt, einem großen Sammelbecken für die verschiedensten Elemente, die ihre Kenntnisse bis zur Reifeprüfung ausbauen oder besser zusammenflicken wollen! Hervorragend wissenschaftlich gerichtete Geister werden sich aus eigner Kraft auch auf diesem Wege eine solche Reife aneignen. Nur meine man nicht mit diesen Uebergangsmöglichkeiten einen allgemein gangbaren Plan von besonderem organisatorischem Wert gefunden zu haben. Wir haben hier die Einheitsschule von Tews fast in Reinkultur vor uns und sehen deutlich, wohin der Weg geht: erst sieben (Tews will nur sechs) Volksschuljahre, dann drei Jahre aufs praktische gerichtete Mittelschuljahre und zuletzt drei Jahre Oberschule. Von einem einheitlichen, zielbewußten Aufstieg und einer dem entsprechenden erziehlichen und unterrichtlichen Bildung kann da keine Rede ein. Uebergangsmöglichkeiten für die Begabten, das ist das Schibboleth, dem sich alle innere Gesetzlichkeit des Aufbaus beugen muß. „Nicht das Individualinteresse des Einzeln, sondern das allgemeine Interesse der Gesamtheit ist für uns maßgebend", so sagte einer der Väter des Gedankens, der Abgeordnete Cassel im preußischen Abgeordnetenhause (S. 18 der angeführten Schrift). Aber nicht dadurch dient man diesem Gesamtinteresse, daß man in den Schulplänen die Nebensachen zu Hauptsachen macht und sie einseitig auf die Förderung der wenigen Talente (wenn es überhaupt welche sind) zuspitzt, sondern dadurch, daß man in einheitlichen, Ziel und Richtung weisenden Schularten harmonische Persönlichkeiten und tüchtige Menschen ausbildet, und sie zugleich zur Staatsgesinnung erzieht, damit sie der Gesamtheit dienstbar zu werden als höchste Lebensaufgabe erkennen.

Die Lehrpläne der Berliner Begabtenschule haben die Billigung des Kultusministeriums gefunden. Allzu wenig hat man dort auf die Wertung unsrer Fächer gesehen. Daß man dort nicht allzu bedächtig in der Zustimmung zu dem neuen Plan überhaupt war, kann man anerkennen, ein Versuch mit einer solchen Schule mochte unter den besonderen Verhältnissen Berlins begrüßt werden. Aber man hätte besser durch Beschränkung des Sprachunterrichts auf zwei Fremdsprachen — die doch kommen muß — Raum für die mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächer, für eine auf größere Selbsttätigkeit sich aufbauende Weckung geistiger Kräfte, für eine bessere Ausbildung der Sinne und der praktischen Geschicklichkeit schaffen sollen.

Für den wahren Aufstieg der Begabten aus allen Ständen und Berufskreisen, das heißt die Geltung und soziale Wertung jeder tüchtigen Arbeit, ob Kopf- oder Handarbeit, leistet aber die Berliner Begabtenschule nichts. Die Erschwerungen für einen solchen Aufstieg liegen in unsrem Berechtigungswesen. Den bestehenden Zustand, wonach nur ein mit einem Zeugnis einer höheren Schule Abgestempelter auf der sozialen Leiter empor kommen kann, erkennt die neue Schule dadurch ausdrücklich an, daß sie die gleichen Berechtigungen wie die Normalschulen erstrebt und ihren Lehrplan davon abhängig macht. Sie zeigt keinen anderen Weg als den der rein intellektuellen, ja der einseitig sprachlichen Bildung, um vorwärts zu kommen. Sie will den begabten Volksschülern lediglich dieselben „Berechtigungen“ verschaffen wie den Schülern der höheren Schulen und lenkt sie damit ganz einseitig auf den Weg der theoretischen Verstandesbildung, auf den Weg des Schulwissens und der „Kopfarbeit“, und trägt weiter bei zur Entwertung der praktischen Leistungen und der „Handarbeit“.

Mag man den Versuch für Berlin auch trotz seiner großen Mängel gelten lassen, als eine Grundlage für eine allgemeine Neuordnung des Schulwesens kann der Berliner Plan nicht gelten. Man hüte sich im besonderen in der Richtung auf die Einheitsschule weiter zu gehen. Hier stehen allzu große Werte der wissenschaftlichen Bildung unsres Volkes auf dem Spiel, die für das Volksganze nicht minder wichtig ist wie die allgemeine Volksbildung. Die Einheitsschule würde aber ebensowohl den Tod unsres hochentwickelten höheren Schulwesens als den Tod unsres gediegenen Volksschulwesens bedeuten und würde statt des sozialen Ausgleichs nur einen unerträglichen Gegensatz zwischen Begabten und Unbegabten, zwischen höher und geringer Gebildeten, zwischen Emporgehobenen und Ausgeschlossenen schaffen. Maurer.

Die Geschichte der Naturwissenschaften in ihrer Bedeutung für die Lehrervorbildung und für den Unterricht.

Von Direktor Dr. Friedrich Dannemann (Barmen).

In der Ordnung der Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen von 1917 findet sich für das Gebiet der Physik und der Chemie die Forderung ausgesprochen, daß für die Lehrbefähigung ein „Ueberblick über die geschichtliche Entwicklung der physikalischen Wissenschaft“, sowie ein „Ueberblick über die geschichtliche Entwicklung der chemischen Theorien“ zu verlangen sei. In nachfolgendem soll in aller Kürze darauf hingewiesen werden, wie diesen Forderungen, die bis zu einem gewissen Grade auch für die übrigen Naturwissenschaften, die Mathematik und die Erdkunde gelten, wenn es hier noch an einem bestimmten Hinweis in der Prüfungsordnung fehlt, entsprochen werden kann, und welche Wirkung sie auf den Unterricht ausüben müssen.

Für die Vorbereitung zum höheren Lehramt wird es sich in erster Linie um Vorlesungen und um literarische Hilfsmittel handeln. An letzteren ist schon heute kein Mangel, während besondere, das geschichtliche Gebiet betreffende Vorlesungen selten anzutreffen sind. Geboten werden in der Regel nur Vorlesungen über eng begrenzte Gebiete. So weisen die Verzeichnisse für das Sommersemester 1911 einige einstündige Kollegs auf über neuere Geschichte der Chemie, die Experimentierkunst des Paracelsus, die Kulturgeschichte der Nutz- und Medizinpflanzen und ähnliches. Systematische Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Astronomie, Geologie, Botanik, Zoologie, Geographie sucht man überall vergebens. Ja es gibt sogar eine ganze Anzahl von Universitäten, an denen nicht einmal das bescheidenste historische Spezialkolleg über die Entwicklung der Naturwissenschaften gehalten wird, während Vorlesungen über die Geschichte der Kunst, der Literatur, der philosophischen Systeme usw., fast nirgends fehlen. Im Sommer 1911 waren es nicht weniger als 15 deutsche Universitäten, an denen überhaupt keine historische Vorlesung aus den Gebieten der Mathematik und der Naturwissenschaften gehalten wurde. [1]

[1] Ich verdanke diese Angaben Prof. Ruska in Heidelberg.

Günstiger steht es um die literarischen Hilfsmittel. Hier ist vor allem das großartige Unternehmen der Bayrischen Akademie der Wissenschaften zu nennen. Sie ließ nämlich die Geschichte der einzelnen Disziplinen durch hervorragende Fachleute bearbeiten. So entstanden die Geschichte der Botanik von Sachs, die Geschichte der Zoologie von Carus, die Geschichte der Astronomie von Wolff usw. Etwa zur selben Zeit entstand Poggendorffs biographisch-literarisches Handwörterbuch, das noch heute und wohl für lange Zeit als eins der wichtigsten Hilfsmittel der historischen Forschung zu betrachten ist[2]. Die Geschichtsschreibung auf naturwissenschaftlichem Gebiete nahm während des 19. Jahrhunderts nicht nur an Umfang zu, sie ging auch mehr in die Tiefe. Das bloße Registrieren der Tatsachen und das biographische Moment traten zurück gegenüber dem Bestreben, die allmähliche Entwicklung der Gedanken zu verfolgen. In dieser Hinsicht fand die Geschichte der Naturwissenschaften gute Vorbilder in der neueren Behandlung der Geschichte der Philosophie und in der Literaturgeschichte. Wie man es auf diesen Gebieten gelernt hatte, vor allem in das Werden und in das Reifen der philosophischen oder der literarischen Richtungen und Einzelschöpfungen einzudringen, so erblickte man auch auf unserem Gebiete die Hauptaufgabe immer mehr in der Darstellung des Werdens und der Klärung der fundamentalen Begriffe und darin, diesen Vorgang des Werdens aus möglichst allen Umständen und treibenden Ursachen heraus zu verstehen. Was die Wissenschaftsgeschichte im 19. Jahrhundert bot, blieb indessen von wenigen Ausnahmen abgesehen, Spezialgeschichte. Neben besonderen Geschichtswerken über Mechanik und Wärmelehre entstanden solche über Optik, Elektrizitätslehre, Elektrochemie, Geologie, Meteorologie, Mineralogie usw. Ein Mangel, der den meisten anhaftet, besteht darin, daß solche Werke zu wenig die Beziehungen zwischen den einzelnen Wissensgebieten und zum allgemeinen Gange der Kulturentwicklung aufdecken. Eine Geschichtsschreibung, wie wir sie für die Naturwissenschaften neben den historischen Spezialwerken brauchen, muß diese Wissenschaften im Rahmen der Gesamtentwicklung darstellen. Ferner ist der Werdegang der Naturwissenschaften nicht nur als ein Ergebnis der gesamten Kultur, sondern auch unter Bezugnahme auf die Entwicklung der übrigen Wissenschaften, insbesondere der Philosophie, der Mathematik, der Medizin und Technik zu verfolgen. Vor allem ist zu zeigen, wie sich diese Zweige des Denkens und der Forschung gegenseitig gefördert und bedingt haben.

Noch wichtiger als die Beschäftigung mit einer zusammenhängenden Darstellung der Geschichte der Wissenschaften ist das Eindringen in die Originalarbeiten, auf denen das Gebäude der Wissenschaften ruht. Sind doch in ihnen nicht nur die Keime, die inzwischen Früchte getragen haben, sondern zahllose andere Keime, die noch der Entwicklung harren, vorhanden. Von mehr als einer Seite wird das Drängen und Hasten beklagt, das oft dazu führt, nach einigen schlecht ausgenützten Semestern möglichst rasch die Doktordissertation zu erledigen. Gerade dieser ersten wissenschaftlichen Leistung sollten eine geschichtliche Vertiefung und das eingehende Studium wenigstens einiger großen Meisterwerke vorangehen. Die bei Engelmann in Leipzig erschienenen Klassiker der exakten Wissenschaften bieten hierzu eine Fülle von geeignetem Material.

Im großen und ganzen ist dies Unternehmen nach dreißigjähriger Arbeit als abgeschlossen zu betrachten, wenn auch nach Friedensschluß noch einige Bändchen als zweite Serie erscheinen werden. Ein Blick in den vom Verlage kostenfrei zu beziehenden Katalog der „Klassiker der exakten Wissenschaften"[3] beweist, daß die Herausgeber gehalten haben, was in der Ankündigung von 1889 versprochen wurde. Die 195 Bändchen verteilen sich in folgender Weise auf die einzelnen Wissenschaften: Mathematik 41 Bände, Physik 79 Bände, Chemie 35 Bände, Physiologie 22 Bände, Astronomie 10 Bände und Krystallographie 8 Bände. Gleichsam als Rahmen für dies reiche Material dient das im selben Verlage erschienene, vier Bände umfassende Werk „Die Naturwissenschaften in ihrer Entwicklung und in ihrem Zusammenhange". Wer endlich sich nur mit den allerwichtigsten Bruchstücken aus den Quellenwerken bekannt machen will, sei hingewiesen auf das ebenfalls bei W. Engelmann erschienene, zugleich für reifere Schüler berechnete Buch von Dannemann „Aus der Werkstatt großer Forscher". Es liegt schon in dritter Auflage vor.

Eine ähnliche Bedeutung wie für die Forschung und das Studium besitzt das geschichtliche Element für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Allerdings wird seine Bedeutung hier bislang noch wenig gewürdigt, während doch nichts so sehr imstande ist, den natur-

[2] Genannt seien ferner: F. Rosenberger, Geschichte der Physik (1882—1890). E. Hoppe, Geschichte der Elektrizität (1884). E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. E. Mach, Prinzipien der Wärmelehre. E. v. Meyer, Geschichte der Chemie. Ausführlichere Literaturangaben enthält die bei A. Duncker in Weimar erschienene Kritische Bücherkunde (Teil II: Naturwissenschaften) 1913.

[3] Daß die Neudrucke, von denen bisher nur wenige eine 2. Auflage erlebt haben, wiederholt werden, ist nicht anzunehmen. Die Sammlung wird daher in ihrer Vollständigkeit später immer schwieriger zu beziehen sein, und damit wächst naturgemäß ihr Wert für Lehrerbibliotheken.

wissenschaftlichen Unterricht wahrhaft humanistisch zu gestalten wie die genetische Betrachtungsweise. Dementsprechend fordern auch die neuesten Lehrpläne, daß der reifere Schüler die Wege verstehen lerne, auf denen man zur Erkenntnis der Naturgesetze gelangt ist. Selbstverständlich sollen nach wie vor Beobachtung und Versuch im Vordergrunde stehen und die fundamentalen Gesetze mit den Schülern auf induktivem Wege erarbeitet werden. Aber gerade auf diesem Wege kann die genetische Betrachtungsweise in viel höherem Maße, als es bisher geschehen, das Eindringen in den Zusammenhang der Erscheinungen unterstützen. Zu den lehrreichsten Beispielen, wie auf dem Gebiete der Erfindungen und Entdeckungen eins aus dem anderen mit zwingender Notwendigkeit entstanden ist, gehört z. B. die allmähliche Besiegung der Spiegelteleskope durch das dioptrische Fernrohr, sowie die Entwicklung der Spektralanalyse und der Photographie aus unscheinbaren Beobachtungen zu den wichtigsten Wissenszweigen. Dinge, wie die galvanischen Elemente, der Funkeninduktor oder die Dynamomaschine lassen sich erst wirklich begreifen, indem man verfolgt, wie sie schrittweise und ihren Ausgang von der Erforschung der Grunderscheinungen nehmend, geschaffen wurden. Und welche Klarheit gelangt in das Gebiet der Reibungselektrizität, wenn man den Ausbau dieses im 17. Jahrhundert erschlossenen Gebietes im Verlaufe des 18. Jahrhunderts vor sich gehen sieht! Der Einblick in solche Zusammenhänge wird sehr oft erst dadurch ermöglicht, daß man an die Quellen herantritt oder als Lehrer an sie heranführt, um mit dem Gedankengang, der zu einem wissenschaftlichen Fortschritt geführt hat, vertraut zu machen. Auch für den Unterricht besteht nämlich die wirksamste Art, das geschichtliche Element zu verwerten, darin, daß man den Schüler in geeigneten Fällen unmittelbar an die Quelle führt und ihn mit leicht verständlichen, wichtigen Abschnitten aus den epochemachenden Schriften der großen Forscher bekannt macht. Der eigentümliche Reiz, der ihren Gedankenentwicklungen innewohnt, insbesondere die Ursprünglichkeit und Klarheit, die uns daraus entgegenleuchten, lassen sich durch keine mittelbare Wiedergabe ersetzen. Diese hervorstechenden Eigenschaften der unmittelbaren persönlichen Kundgebung sind es, die gerade auf den jugendlichen Geist einen tiefen Eindruck ausüben und das Interesse für den behandelten Gegenstand in hohem Grade beleben. Für diesen Zweck geeignete Abschnitte finden sich in dem erwähnten Buche „Aus der Werkstatt großer Forscher“. Das biographische Moment wird man im Unterricht dagegen sehr zurücktreten lassen dürfen. Daß man es bisher in manchen Lehrbüchern allzu sehr betonte, hat die Wissenschaftsgeschichte oft diskreditiert. Nur dort sollte man dies Moment verwerten, wo es zum Verständnis der Entwicklung wesentlich beiträgt, oder wo die ethische Wirkung eine ganz hervorragende sein kann. Bieten doch die Forscher mitunter glänzende Beispiele geistiger und sittlicher Selbstzucht. Auch wird es für das heranwachsende Geschlecht gut sein, darauf hinzuweisen, daß die Taten, die jene Männer auf dem Felde der Wissenschaft verrichteten, oft in höherem Grade Bewunderung verdienen als gewonnene Schlachten. Hoffentlich ist die Zeit nahe, in der wir die Jugend mehr als bisher für die wahren Führer der gesamten Menschheit begeistern können, zu denen die Schöpfer der Wissenschaften nicht minder zählen als die großen Dichter und Denker.

Zur Verdeutschung der Fremdwörter im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

Von Geh. Studienrat Dr. Poske (Berlin-Lichterfelde).

An die Schriftleitung der Unterrichtsblätter wie auch an den Vereinsvorstand ist die Anregung gelangt, Schritte für eine einheitliche Verdeutschung der im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht gebrauchten Fremdwörter zu tun. Diese Anregung trifft zusammen mit Bestrebungen von anderer Seite. Der Vorstand des Vereinsverbandes akademisch gebildeter Lehrer Deutschlands hat beschlossen, die Angelegenheit auf seiner nächsten, voraussichtlich Ostern 1920, stattfindenden Tagung zu behandeln. Es sollen dazu für alle Unterrichtsfächer Listen aufgestellt werden, in denen die entbehrlichen Fremdwörter nebst deren Ersatz aufgeführt sind. Man hofft, daß die Listen auf der Tagung genehmigt und dann von den Schulbehörden den Verfassern von Lehrbüchern sowie den Lehrern für ihren Unterricht zur Beachtung empfohlen werden; man denkt sogar daran, daß die Befolgung dieser Listen behördlicherseits vorgeschrieben würde. Aus einem kurzen Aufsatz von Geh. Rat B. Buchrucker in der Zeitschrift des Allgemeinen Deutschen Sprachvereins (Juni 1918) erfahren wir, daß die Herstellung der Listen im Gange ist, daß es aber noch an Mitarbeitern fehlt und darum die Hilfe der Schulmänner erbeten wird.

Wir glauben auch an unserem Teil und für die von uns vertretenen Unterrichtsgebiete der Frage der Verdeutschung der Fremdwörter näher treten zu sollen. Wir können allerdings nicht der Absicht zustimmen, daß eine Liste von Verdeutschungen von einer Versammlung, deren Zusammensetzung doch von vielen Zufällen abhängt, schlechthin gutgeheißen und der Schulbehörde zur Beachtung, ja wohl gar zu verbindlicher Einführung empfohlen werde. Ein solches Verfahren hieße doch dem Sprachgeist Gewalt antun und ein Kunsterzeugnis an die Stelle eines natürlich Gewachsenen und Gewordenen setzen. Neubildungen auf dem Gebiet der Sprache können nicht der Willkür von beliebigen Einzelnen, sie müssen mit einer gewissen Notwendigkeit aus der sprachschöpferischen Kraft besonders dafür begabter Persönlichkeiten hervorgehen und dürfen auch dann nicht der Gesamtheit aufgezwungen werden, sondern müssen ihre Berechtigung dadurch erweisen, daß sie allmählich und von selbst in den allgemeinen Sprachgebrauch übergehen. So ist es mit zahlreichen Wortschöpfungen unserer Dichter gegangen, während die vor hundert Jahren unter ähnlichen Bedingungen wie heute hervorgetretenen gewaltsamen Neubildungen größtenteils der Vergessenheit, ja der Lächerlichkeit anheimgefallen sind.

Wir halten es bei dieser Sachlage nicht für angezeigt, uns dem Vorgehen des vorher genannten Vereinsverbandes schlechthin anzuschließen. Wir glauben vielmehr der Sache am besten zu dienen, wenn wir die Angelegenheit zunächst innerhalb unseres Vereins zur Erörterung bringen und es dahingestellt sein lassen, ob und wie weit sich späterhin ein Zusammengehen mit dem Vereinsverband daran wird anknüpfen lassen. Wir richten deshalb an unsere Vereinsmitglieder die Bitte, uns Listen entbehrlicher Fremdwörter nebst Vorschlägen zu ihrer Verdeutschung einzusenden, und behalten uns vor, zu gegebener Zeit unter Hinzuziehung der Einsender einen Sonderausschuß einzusetzen, der sich mit der weiteren Bearbeitung des Gegenstandes zu befassen hätte.

Wir verhehlen uns im übrigen nicht, daß einer durchgängigen Verdeutschung der bisher gebräuchlichen Fremdwörter gerade auf unseren Unterrichtsgebieten besondere Schwierigkeiten entgegenstehen. Mehr als jeder andere ist der mathematische und der naturwissenschaftliche Unterricht an die in der Wissenschaft herrschende Terminologie gebunden. Die Beantwortung der Frage, in welchem Umfange sich in der Wissenschaft selbst fremdsprachliche Ausdrücke durch deutsche ersetzen lassen, würde unsere Zuständigkeit überschreiten. Hier spielen nicht blos Rücksichten auf den historischen Zusammenhang mit der Vergangenheit und auf die internationalen Beziehungen eine Rolle; wesentlicher noch ist, daß die in der Wissenschaft gebrauchten Fremdwörter zumeist eigenartigen Begriffsgebilden entsprechen, die sich zwar mit deutschen Worten umschreiben, aber selten durch ein einziges deutsches Wort zutreffend und völlig sinngemäß wiedergeben lassen. Selbst in der Amtssprache der Behörden fehlt es nicht an unverdeutschbaren Wörtern, wie die Verfügung des preußischen Finanzministeriums vom Juni 1917 beweist. Hingewiesen sei auch auf das „deutsche Fremdwörterbuch für die gesamte Optik“ (angezeigt in den Unterrichtsblättern 1918, Nr. 1/2, S. 20), dessen Urheber sich ausdrücklich gegen das planlose und unbedingte Verdeutschen verwahren, daher z. B. schon im Buchtitel das Fremdwort „Optik“ aus zureichenden Gründen beibehalten haben. Das Gleiche wird man wohl auch bei den Bezeichnungen Mathematik, Physik, Chemie gelten lassen müssen. Und schließlich wäre es auch nicht ratsam, einen Gegensatz zwischen den Bezeichnungen der Wissenschaft und denen der Schule hervorzurufen, was dazu führen müßte, daß das heranwachsende Geschlecht die Sprache der Wissenschaft nicht mehr versteht.

Es wäre dankenswert, wenn die Herren Einsender auch solche Wörter angeben wollten, bei denen ihnen eine Verdeutschung nicht am Platze zu sein scheint, oder bei denen es ihnen nicht gelungen ist, eine solche zu finden.

Zur Geschichte der elementar-mathematischen Fachwörter.

Von Oberrealschuldirektor Dr. Tropfke (Berlin).

Der Grundstock mathematischer Fachausdrücke stammt aus der griechischen Sprache, die sie aus Wörtern des täglichen Gebrauches, aber auch aus anderssprachigen Stämmen (Pyramide) ableitete. Nur dürftig nahm der Römer griechische Mathematik an. Auf die klassische Latinität gehen wenig Fachwörter der heutigen Zeit zurück (z. B. summa). Cicero bildete in seinem Timäus das jetzt noch gebräuchliche Proportion, das sich aber erst im 16. Jahrhundert gegen das von Boëthius gewählte und seitdem übliche proportionalitas durchsetzt. Eine andere Timäusstelle, von Ramus (1515—1572, Paris) falsch aufgefaßt, ist Schuld an dem Worte radius. Die römischen nachchristlichen Feldmesser geben in ihren Schriften eine reichere Fundgrube von Fachwörtern, mehr noch Mpartianus Capella (um 470 n. Chr.) und Boëthius (Rom 480 — Pavia 524). Immerhin sind es kümmerliche Reste, die aus einer gewiß umfangreicheren Uebersetzungs-, Kommentier- und Lehrtätigkeit auf uns gekommen sind.

Lateinische Uebersetzungen der euklidischen Elemente sind nur in knappen Bruchstücken vorhanden; sie übernahmen meist unmittelbar die griechischen Fachwörter, ohne weiter an sinngemäße Uebertragung zu denken. Viel reichere Fäden schlingen sich über arabische Wissenschaft zum Abendland. Atelhart von Bath (um 1120) und Gerhard von Cremona (1114—1187, Toledo) haben sich bei ihren Uebersetzungen arabischer Euklidhandschriften nachweisbar einer direkten griechisch-lateinischen Uebertragung bedient und infolgedessen meistens die arabischen Termine nicht lateinisch sinngemäß wiedergegeben, sondern durch die griechischen Vokabeln wieder ersetzt; sonst würde der heutige mathematische Wortschatz weit mehr lateinische als griechische Bestandteile haben. Selbstverständlich glitten arabische Fachwörter im Laufe der Zeit mit hinüber ins Abendland, entweder unter Beibehaltung als Fremdwort (z. B. Algebra) oder in anlehnender, allerdings oft falscher Uebersetzung (z. B. sinus).

Eine Hochwelle sprachlicher Verdeutschung setzte im 15. Jahrhundert ein; sie fand im 16. und 17. Jahrhundert ihren Höhepunkt. Die Mehrzahl der allerdings oft sehr eigenartigen deutschen Wortgebilde fand keinen Anklang in der Folgezeit, manche aber haben sich bis auf den heutigen Tag gehalten (z. B. Grundsatz, Durchmesser). Wir nennen als sprachschöpferisch besonders verdienstvoll Rudolf 1525, Dürer 1525, Holtzmann 1562, Kepler 1616, Sturm 1670; die Reihe der Namen ist aber viel größer. Es wäre nicht unlohnend, diese alten Verdeutschungen wieder einmal daraufhin durchzusehen, ob nicht unter ihnen doch noch diese oder jene für die moderne Sprachreinigung geeignet ist.

Glückliche Wortwahl traf in seinen deutschen Schriften der Freiherr v. Wolff (1679—1754), nicht in dem Sinne, daß er neue Wortformen erfand, sondern dadurch, daß er schon vorhandene in besonderem mathematischen Sinn umprägte. Eine Inventur des Bestandes nahmen die mathematischen Wörterbücher v. Wolff's (1716) und Klügels (1803) auf.

Seit dem 18. Jahrhundert hat aber die Fachwortbildung nicht stillgestanden. Man betrachte unser so allgemein beliebtes Wort Abstand: es ist eine wörtliche Wiedergabe des lateinischen distantia; zuerst in der Militärsprache gebräuchlich (vgl. Abstand nehmen) dringt es in die mathematische Sprache ein, wird aber erst in der Mitte des 19. Jahrhunderts häufiger.

Die stark anschwellende Literatur des 19. Jahrhunderts erschwert die historische Durchmusterung der neuen Fachwörter ungemein, auch wenn man von den Kunstausdrücken der höheren Mathematik ganz absieht. Verfasser will in einer zweiten Auflage seiner Geschichte der Elementarmathematik (1. Aufl. 1902, 1903 Veit & Comp.) dem Bildungsverlauf der elementarmathematischen Fachwörter besondere Beachtung schenken und ihrer Geschichte breiteren Raum zuweisen. Aber für das 19. Jahrhundert reicht die Kraft des einzelnen nicht aus. Dankbar würde die Hilfe aller Fachgenossen angenommen werden. Besonders handelt es sich um folgende Bezeichnungen, über deren erstmaliges Auftreten geschichtliche Aufklärung noch aussteht:

Außenwinkel (für 1820 belegt), Basiswinkel (1865), Ergänzungsparallelogramm, Ergänzungswinkel, sphärischer Exzeß, Exponentialreihe (1829), goldener Schnitt (1847), goniometrische Funktion (1826), homologe Stücke (bei kongruenten und ähnlichen Dreiecken), Inkreis, Ankreis, Umkreis, Kreisfunktionen, Kugelkappe, Kugelschicht, Mantel, geometrisches Mittel (arithmetisches Mittel schon 18. Jahrhundert), Mittellinie (im allgemeinen Dreieck), numerisch (1808), Quersumme, Raumgebilde, Sehnentangentenwinkel, Strahl (1860), Transversale (in allgemeiner Bedeutung am Dreieck), Wahrscheinlichkeitsrechnung, sphärisches Zweieck.

Auch das Auftreten der Buchstabenindizes bei $h_a\, h_b\, h_c$ (für h', h'', h''') und $\varrho_a\, \varrho_b\, \varrho_c$ (Feuerbach 1822: $r'\, r''\, r'''$), ferner die Spezialisierung des ϱ für den Radius des Inkreises wie des σ für die halbe Winkelsumme im sphärischen Dreieck ist zeitlich noch nicht festgelegt.

Wechselstromtheorie ohne Differential- und Integralrechnung.

Von St.-R. Dr. Franz Hochheim (Weißenfels a. S.)

(Schluß.)

6. Die Induktion des Wechselstroms und das Ohmsche Gesetz der Effektivwerte.

Verbindet man die Enden einer Spule mit den Indikatorspulen[1] einer Braunschen Röhre (entsprechend mit einem Oszillographen) und nähert man der Spule eine von Wechselstrom durchflossene andere, so beschreibt der Fluoreszenzfleck auf dem Röhrenschirm eine gerade Linie, die analysiert wieder eine Wechselstromkurve zeigt: ein Wechselstrom induziert also auf einen benachbarten Stromkreis wieder die E. M. K. eines Wechselstromes. Der Vorgang hierbei ist ein doppelter: der seine Intensität ständig ändernde Wechelstrom erzeugt ein beständig sich änderndes Magnetfeld, Kraftlinien, deren Zahl und Richtung sich periodisch ändert, und diese Aenderung der Kraftlinienzahl, die man als Austreten und Eintreten der Kraftlinien in die Sekundärspule auffassen kann, induziert dort eine periodisch sich ändernde E. M. K., aus der je nach dem Widerstande des Sekundärkreises ein Strom bestimmter Scheitelintensität entsteht. Die beiden Vorgänge (Entstehung der Kraftlinienzahl aus dem Primärstrom, Entstehung der induzierten E. M. K. aus den Aenderungen der Kraftlinien) lassen sich in zwei Gesetze zusammenfassen, die ich beide mit Hilfe des oben (Nr. 3) angegebenen Apparates mit Gleichstrom demonstriere. Das erste ist das oben unter Nr. 3 angegebene Induktionsgesetz, das man aber hier schärfer präzisieren muß[2], um die quantitativen Beziehungen genauer festzulegen: die induzierte E. M. K. E_{II} ist der pro sek. geschnittenen Kraftlinienzahl proportional; das gibt, wenn in t sek. ν Kraftlinien geschnitten werden, $E_{II} = k \cdot \frac{\nu}{t}$, oder wenn in der kurzen Zeit dt die geschnittene Kraftlinienzahl $d\nu$ ist,

$$E_{II} = k \cdot \frac{d\nu}{dt}. \qquad (5)$$

Zweitens ist die auf ein Flächenstück fallende Kraftlinienzahl ν der Primärstromstärke

---

[1] Z. U. 29, S. 3.

[2] In einer demnächst in der Z. U. erscheinenden Abhandlung „Ueber die Selbstinduktion und die Eigenfrequenz von Schwingungskreisen“ habe ich ein Verfahren angegeben, durch das man mit Hilfe einer Reihe von Experimenten direkt zu den Formeln (7) und (10) gelangt.

i_I proportional (genau nur bei Abwesenheit ferromagnetischer Substanz):

$$\nu = f \cdot i_I. \tag{6}$$

Da die Kraftlinienzahl der Primärstromstärke proportional ist, wird bei veränderlicher Primärstromstärke auch die Zunahme der Kraftlinienzahl $d\nu$ (während dt) der Zunahme di_I von i_I (während dt) proportional sein: $d\nu = f \cdot di_I$, also $\frac{d\nu}{dt} = f \cdot \frac{di_I}{dt}$, und darum setzt man statt (5) als „Gleichung der Fremdinduktion"

$$E_{II} = f \cdot k \cdot \frac{di_I}{dt} = -M \cdot \frac{di_I}{dt}. \tag{7}$$

Das negative Vorzeichen wählt man darum, weil die Zunahme des Primärstromes gerade eine entgegengesetzte E. M. K. hervorruft und umgekehrt.

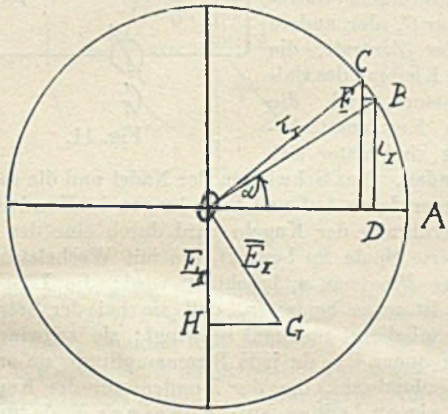


Fig. 7.

Ist nun (Fig. 7) BD der Augenblickswert der primären Wechselstromstärke i_I (Radius $\bar{i}_I$) nach Drehung des Vektors um ∢ α aus der Lage OA, so ist $CF = di_I$ die Zunahme von i_I während der kleinen Zeit dt, die beim Bestreichen des Bogens BC durch den Vektor vergeht. Es ist aber (∢ $BCF = \alpha$)

$$di_I = CF = CB \cdot \cos\alpha, \tag{8}$$

und aus der Wegzeitproportion

$$CB : 2\pi \bar{i}_I = dt : \frac{1}{n} \text{ folgt}$$

$$dt = \frac{CB}{2\pi n \bar{i}_I} = \frac{CB}{\omega \cdot \bar{i}_I}. \tag{8a}$$

Durch Division von (8) und (8a) folgt für (7), wenn die Zeitrechnung von A aus erfolgt,

$$E_{II} = -M\omega \bar{i}_I \cos\alpha = -M\omega \bar{i}_I \cdot \cos\omega t. \tag{9}$$

Die sekundäre E. M. K. E_{II} hat also den Scheitelwert

$$\bar{E}_{II} = M\omega \bar{i}_I \tag{9a}$$

und ist nach (2c) hinter dem Primärstrom um $\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4}\text{ Schwingung}\right)$ zurück; darum ist in Fig. 7 $\bar{E}_{II} = M\omega\bar{i}_I = OG \perp OB$ anzutragen, und $OH = E_{II}$ ist dann der jeweilige Augenblickswert von E_{II}.

Der Faktor M führt den Namen Induktions- oder Koppelungskoeffizient; er ist offenbar den Windungszahlen primär und sekundär, also deren Produkt (ungefähr) proportional, da den ersteren die erzeugte, den letzteren die geschnittene Kraftlinienzahl proportional ist; er vermindert sich aber außerdem mit der Entfernung der beiden Spulen, wie man sich durch ein Experiment an der Braunschen Röhre leicht überzeugen kann, und man redet darum von enger (Spulen nahe) und weiter (Spulen entfernt) Koppelung: bei weiterer Entfernung können ja nur wenige Kraftlinien der primären Spule die sekundäre treffen. Durch einen rings geschlossenen Eisenkern, auf den die Spulen geschoben sind (Transformator), wird offenbar erreicht, daß (fast) alle Kraftlinien induktiv wirken.

Kraftlinien treten nun nicht nur in die Sekundärspule ein und aus, sondern auch in die Primärspule und zwar immer, auch wenn gar kein Sekundärkreis vorhanden ist. Es findet also immer, wenn ein Wechselstrom durch eine Spule fließt, in dieser eine Induktion statt, die als Selbstinduktion bezeichnet wird. Ihre E. M. K. ist offenbar ebenfalls durch (9) charakterisiert; für M hat man aber einen besonders großen Wert zu setzen, den höchsten Wert, den M bei gleichen Windungszahlen der Spulen annehmen würde; dieser Wert L, der Selbstinduktionskoeffizient oder das Selbstpotential, wächst offenbar dem Quadrat der Windungszahl (etwa) proportional, und die E. M. K. der Selbstinduktion ist nach (7) und (9)

$$E_S = -L \cdot \frac{di}{dt} = -L\omega\bar{i} \cdot \cos\omega t = -\bar{E}_S \cdot \cos\omega t \tag{10}$$

zu setzen. In allen Fällen, in denen der Wechselstrom durch eine Spule fließt, kann man also das Ohmsche Gesetz nur in der Form anwenden, daß man zwei E. M. K. in Rechnung setzt, die der Maschine E und die der Selbstinduktion E_S:

$$i w = E + E_S, \tag{11}$$

und zwar ist nach Nr. 5 die resultierende Scheitelspannung $\bar{i} w$ die Diagonale des aus den Scheitelspannungen $\bar{E}$ und $\bar{E}_S$ konstruierten Parallelogramms.

Da $\bar{E}_S$ hinter $\bar{i} w$ um $\frac{\pi}{2}$ zurück ist, muß $\bar{i} w$ hinter $\bar{E}$ um einen näher zu bestimmenden Winkel φ zurück sein (Fig. 8); für ihn ergibt sich aus $\triangle OCD$, weil (10) $\bar{E}_S = L\omega\bar{i}$ ist,

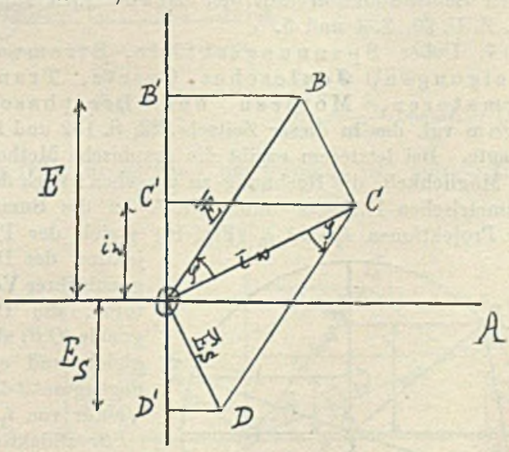


Fig. 8.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{w}. \tag{11a}$$

Die Scheitelstromstärke folgt aus $\triangle OBC$

$$\bar{i} = \frac{\bar{E}}{w}\cos\varphi. \tag{11b}$$

Da aber in dem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten w und ωL und dessen Hypotenuse daher die sog. „Impedanz" (Fig. 9)

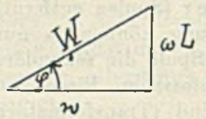


Fig. 9.

$$W = \sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}, \quad (11c)$$

$\frac{w}{\cos\varphi} = W$ ist, so folgt für die Scheitel- und nach Division mit $\sqrt{2}$ für die Effektivwerte

$$\bar{i} = \frac{\bar{E}}{W} = \frac{\bar{E}}{\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}}, \; i_\varepsilon = \frac{E_\varepsilon}{W} = \frac{E_\varepsilon}{\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (11d)$$

Das ist das sog. Ohmsche Gesetz der Effektivwerte des Wechselstroms.

Ueber die Konstruktion des Parallelogramms der Fig. 8, wenn $\bar{E}$, L, w und n gegeben sind, vgl. diese Zeitschrift 22, S. 132, Fig. 2. Wie man sieht, muß $\bar{i}\,w$ (als Kathete OC in Fig. 8) stets kleiner sein als $\bar{E}$, i_ε also kleiner als $\frac{E_\varepsilon}{w}$ werden; i_ε kann sogar sehr klein werden bei großem L! Praktisch benutzen und einprägen wird man Gesetz und Formeln durch Messung der Größen w (Gleichstrom) und W (Wechselstrom) von Spulen mit Hilfe von Hitzdrahtinstrumenten (22, S. 132), sowie der Frequenz mit Tourenzähler und Stoppuhr und Benutzung der Werte zur Feststellung der Größen ωL, L und φ; das erste und letzte erledigt man am besten konstruktiv (Fig. 9), nur L (in „Henry") bedarf der Berechnung. Gerade die praktische Festlegung der Größe L halte ich für das wichtigste, um von dem Begriff des Selbstpotentials (mit und ohne Eisenkern) eine Vorstellung zu schaffen; denn die übliche Definition (aus (10) als der Anzahl Volts beim Stromgefälle 1 Amp./sek.) pflegt nicht sehr tief zu gehen! Zur Vertiefung dieser Definition und der Formeln (7) und (10) pflege ich an dieser Stelle die Vorgänge im primären[3] und im sekundären[4] Stromkreis des mit Gleichstrom und Hammerunterbrecher betriebenen Funkeninduktors zu besprechen und an der Braunschen Röhre zu demonstrieren. — Ueber den experimentellen Nachweis der Phasenverschiebung durch Selbstinduktion mit der Braunschen Röhre vgl. Z. U. 29, S. 4 und 5.

7. Ueber Spannungsabfälle, Stromverzweigungen, Joulesches Gesetz, Transformatoren, Motoren und Dreiphasenstrom vgl. das in dieser Zeitschr. 22, S. 132 und 133 gesagte. Bei letzterem ergibt die graphische Methode die Möglichkeit, die Rechnung zu umgehen: nach dem geometrischen Hilfssatz unter Nr. 5 ist die Summe der Projektionen i_2 und i_3 (Fig. 10) gleich der Projektion der Diagonale ihrer Vektoren, die Diagonale (OB) aber gleich und entgegengesetzt dem Vektor von i_1.

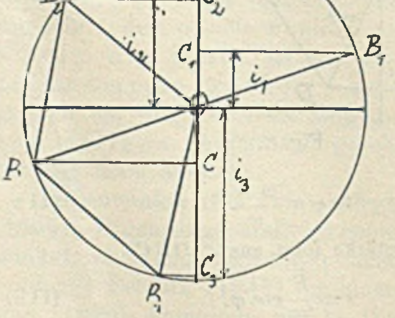


Fig. 10.

8. Didaktisch nicht ganz leicht ohne Differential- und Integralrechnung und doch besonders wichtig ist die Behandlung der Kapazitätserscheinungen des Wechselstroms. Wesentlich ist hier zunächst die praktische Bestimmung von Kapazitäten (in Farad) und die Festigung dieses Begriffes dadurch. Ich habe ein Verfahren ausgearbeitet, das in kürzester Zeit und leicht verständlich Kapazitäten zu messen gestattet, und das hier nur kurz angedeutet sein möge[5]: Eine isoliert befestigte Stricknadel N (Fig. 11) ist an einem Ende mit der einen Belegung eines Kondensators C verbunden, das andere kann zwischen den Kugeln einer „Funkenstrecke" schwingen; die Kugeln sind mit dem einen Pol einer Gleichstromzentrale El bez. mit einem Galvanometer G, der andere Pol der Zentrale, die zweite Klemme des Galvanometers und die zweite Kondensatorbelegung sind unter sich verbunden. Das Schwingen der Nadel und die dadurch hervorgerufenen Auf- und Entladungen des Kondensators bei Berührung der Kugeln wird durch eine der Nadel genäherte Spule Sp bewirkt, die mit Wechelstrom bekannter Frequenz n beschickt wird; die Länge der Nadel ist so zu bemessen, daß sie bei der betr. Frequenz möglichst maximal schwingt; sie schwingt mit der Frequenz $2n$, da jede Stromamplitude sie anzieht. Die Coulombzahl, die der Kondensator der Kapazität C bei einer Ladung auf- und einer Entladung abgibt, ist dann $Q = C \cdot V$, wo V die Spannung der Zentrale ist; die durch das Galvanometer in 1 sek. fließende Stromstärke ist $i = 2n\,Q = 2n\,C\,V$, woraus

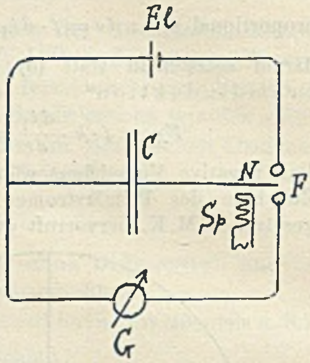


Fig. 11.

$$C = \frac{i}{2n \cdot V} \quad (12)$$

folgt. Bei bekanntem Reduktionsfaktor und genügender Empfindlichkeit des Galvanometers kann man so Kapazitäten bis zu Plattenkondensatoren leicht und schnell bestimmen, sogar die Dielektrizitätskonstanten eingeschobener Platten annähernd festlegen.

Die Beeinflussung eines Stromkreises durch einen eingeschalteten Kondensator wird zweckmäßig durch einige Experimente vorbereitet, über die ich in dieser Zeitschr. 22, S. 133, einiges gesagt habe. Die Experimente (zunächst mit Gleichstrom) zeigen, daß immer ein Strom fließt, wenn nicht (Fig. 12) die einem Pol der Stromquelle zugewandte Kondensatorseite dasselbe Potential hat wie dieser Pol oder wenn die Spannungsdifferenz V der Kondensatorplatten verschieden ist von der E. M. K. der Stromquelle E. Die Stromgleichung hierfür ist

$$i\,w = E - V; \quad (13)$$

der Strom erlischt, wenn $V = E$ geworden ist. Da bei einem Wechselstrom der Maschinenpol fortwährend sein Potential ändert, muß auch ein beständiger Fluß zum Kondensator erfolgen. Der Strom ist dabei durch Gleichung (13) gegeben, in der aber E und damit V

Fig. 12.

[3] Z. U. 29, S. 5. [4] Z. U. 30, S. 32.

[5] Genauer ist dasselbe beschrieben in der Z. U. 30, S. 113, erschienenen Arbeit „Die Verteilung des Lehrstoffs der Elektrizität auf die oberen Klassen der Realanstalten und die Behandlung der elektrischen Einheiten".

periodische Funktionen der Zeit sind. Setzt man $E_c = -V$, so ist

$$i\,w = E + E_c; \qquad (13\text{a})^{6}$$

es liegen wieder zwei E.M.K. vor wie bei der Selbstinduktion und zwar ist

$$E_c = -V = -\frac{Q}{C}, \qquad (13\text{b})$$

wo Q die augenblickliche Ladung des Kondensators (in Coulombs) ist. Es kommt nun darauf an, die Phase und den Scheitelwert von E_c festzulegen. Rechnet die Zeit von dem Stromdurchgang durch A (Fig. 13), so

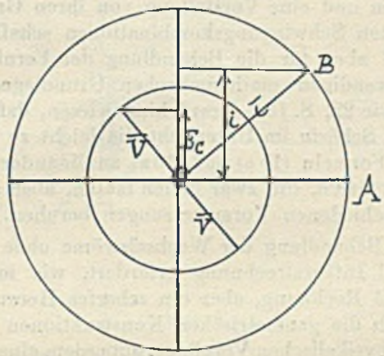


Fig. 13.

hat die zugewandte Kondensatorseite im Momente A ($t = 0$, $i = \bar{i} \sin 0^0$), wenn der Strom seinen Sinusverlauf beginnt, offenbar das höchste negative Potential ($V = -\bar{V}$); denn bis dahin ist ihr nur negative Elektrizität zugeflossen und vom Durchgang durch A ab fließt ihr positive Elektrizität zu; nach einer halben Schwingung ($i = \bar{i} \cdot \sin 180^0$) hat die zugewandte Kondensatorseite das höchste positive Potential ($V = +\bar{V}$). Dazwischen, wenn der Strom $\frac{1}{4}$ Schwingung vollendet hat ($i = \bar{i} \cdot \sin 90^0$), also seinen höchsten positiven Wert hat, ist $V = 0$ und beginnt seinen Sinusverlauf also $\frac{1}{4}$ Schwingung später als i, ist also hinter i um $\frac{1}{4}$ Schwingung zurück. Dann ist aber d i e E. M. K. $E_c = -V$, die sich nach (13a) mit E zusammensetzt, $\frac{1}{4}$ S c h w i n g u n g v o r d e m S t r o m v o r a u s (Fig. 13), man wird sie also nach (2b) schreiben

$$E_c = \bar{V} \cdot \cos \omega\, t. \qquad (13\text{c})$$

Der Scheitelwert $\bar{V}$ stellt das höchstmögliche Potential des Kondensators dar, z. B. für den Moment A ($i = \sin 0^0$), dann allerdings mit negativem Vorzeichen, und wird bewirkt durch die maximale (negative) Ladung $\bar{Q}$. Da der Kondensator nach $\frac{1}{4}$ Schwingung durch Zuführung von positiver Elektrizität gerade entladen ist, fließt in $\frac{1}{4}$ Schwingung gerade die Ladung $\bar{Q}$ zu, aus der man nach (13b) $\bar{V}$ findet. $\bar{Q}$ ergibt sich folgendermaßen: Bei Gleichstrom ist die in t sek. fließende Elektrizitätsmenge $Q = i \cdot t$, die in der kurzen Zeit dt fließende $dQ = i \cdot dt$. Auch den Wechselstrom kann man für die kurze Zeit dt als nicht verändert annehmen, um so genauer, je kleiner dt ist. Die in der Zeit dt (Be-

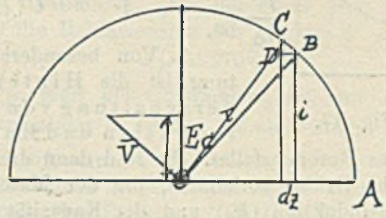


Fig. 14.

streichung des Bogens BC in Figur 14 durch den Vektor $\bar{i}$) dem Kondensator zufließende Elektrizitätsmenge ist also

$$dQ = i \cdot dt. \qquad (13\text{d})$$

Nun ist analog (8) $$dt = \frac{CB}{\omega \bar{i}}, \qquad (13\text{e})$$

$$i = \bar{i} \cdot \sin \alpha, \qquad (13\text{f})$$

also in (13d) $dQ = \frac{CB}{\omega} \cdot \sin \alpha = \frac{DB}{\omega} = \frac{dz}{\omega}$.

Die während dt zufließende Elektrizitätsmenge dQ wird also durch $\frac{1}{\omega}$ der Projektion des Bogens BC auf die Horizontale dargestellt. Teilt man nun (Fig. 15) den Quadranten in lauter schmale Sektoren und projiziert die entstandenen Bögen auf die Horizontale, so ist die Summe ihrer Projektionen auf die Horizontale gerade $= \bar{i}$, die in $\frac{1}{4}$ Periode fließende Elektrizitätsmenge $\bar{Q}$ also $= \frac{\bar{i}}{\omega}$ und das Höchstpotential (13b)

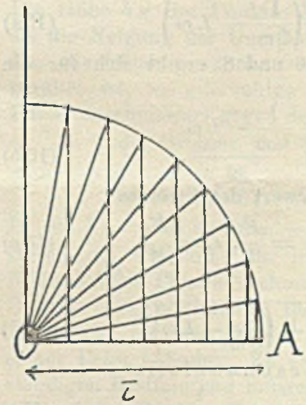


Fig. 15.

$$\bar{V} = \frac{\bar{i}}{C\omega}, \qquad (14)$$

darum (13c)

$$E_c = \frac{\bar{i}}{C\omega} \cdot \cos \omega t. \qquad (14\text{a})$$

Da (Fig. 16) E_c vor i um $\frac{\pi}{2}$ voraus ist, müssen i und

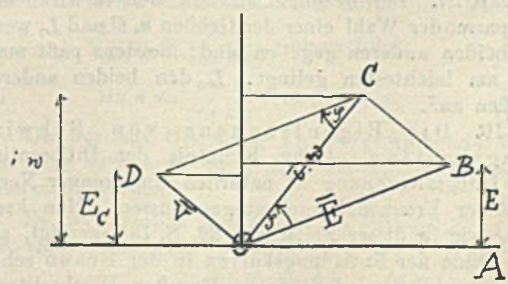


Fig. 16.

$i\,w$ vor der Maschinenspannung E um einen Winkel φ voraus sein, für den $\triangle\, ODC$ (Fig. 16) infolge (14) ergibt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{w \cdot C \cdot \omega}. \qquad (14\text{b})$$

Wie bei der Selbstinduktion ist ($\triangle\, OCB$):

$$\bar{i} = \frac{\bar{E}}{w} \cos \varphi = \frac{\bar{E}}{W}, \quad i_\varepsilon = \frac{E_\varepsilon}{W}, \qquad (14\text{c})$$

---

[6] Diese Gleichung unterscheidet sich (ebenso wie die folgenden) von der entsprechenden 22, S. 133, Gleichung 10, durch das Vorzeichen von E_C, da dort $E_C = +V$, hier bei der geometrischen Betrachtung $E_C = -V$ gesetzt ist. In Formel (10) von 22, 133, ist übrigens (Druckfehler) $i\,w$ statt w zu setzen.

wo aber die Impedanz (Fig. 17)

$$W = \sqrt{w^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \tag{14d}$$

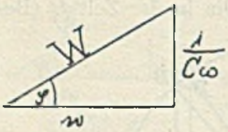


Fig. 17.

ist.

9. Von besonderer Bedeutung ist die Hintereinanderschaltung von Selbstinduktion und Kapazität wegen des Resonanzfalles. Es sind dann drei elektromotorische Kräfte vorhanden, die der Maschine (E), der Selbstinduktion (E_S) und der Kapazität (E_C):

$$iw = E + E_S + E_C \tag{15}$$

Da aber E_φ hinter i um $\frac{\pi}{2}$ zurück, E_C vor i um $\frac{\pi}{2}$ voraus ist, wirken sich E_S und E_C stets entgegen, statt ihrer ist also in dem Spannungsparallelogramm nur eine restierende E_R zu zeichnen, deren Scheitelwert $\bar{E}_R$ gleich der Differenz der Scheitelwerte von $\bar{E}_S$ (10) und $\bar{E}_C$ (14) zu setzen ist, und dieses E_R ist vor i um $\frac{\pi}{2}$ voraus oder hinter i um $\frac{\pi}{2}$ zurück, je nachdem $\bar{V} \gtreqless \bar{E}_S$, $\frac{1}{C\omega} \gtreqless L\omega$ ist. Man hat also Figur 16 oder 8 anzuwenden und darin $\bar{E}_R$ statt $\bar{V}$ bez. $\bar{E}_S$ zu setzen, und zwar ist der Scheitelwert in jedem der Fälle

$$\bar{E}_R = \pm\, i\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) \tag{15a}$$

Wie aus den Figuren 16 und 8 ergibt sich für die Phasenverschiebung

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{w}, \tag{15b}$$

für Scheitel- und Effektivwert des Stromes

$$i = \frac{E}{w}\cos\varphi = \frac{E}{W},\quad i_\varepsilon = \frac{E_\varepsilon}{W}, \tag{15c}$$

wo aber die Impedanz

$$W = \sqrt{w^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2} \tag{15d}$$

zu setzen ist. In dem Resonanzfalle

$$\frac{1}{C\omega} = L\omega,\quad n = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{15e}$$

ist W (15d) ein Minimum, i_ε (15c) ein Maximum, φ (15b) $= 0$, was auch aus den Figuren 8 und 16 folgt, wenn $\bar{E}_R = 0$ ist. Der Resonanzfall läßt sich verwirklichen bei passender Wahl einer der Größen n, C und L, wenn die beiden anderen gegeben sind; meistens paßt man, was am leichtesten gelingt, L den beiden anderen Größen an[7].

10. Die Eigenfrequenz von Schwingungskreisen. Ohne Kenntnis der Differential- und Integralrechnung ist natürlich ein strenger Nachweis der Frequenzformel ausgeschlossen. Man kann aber, wie in dieser Zeitschrift 22, S. 134, gezeigt, aus dem Bilde der Entladungskurven in der Braun'schen Röhre[8] schließen, daß ein gedämpfter Wechselstrom entsteht, der bei Abwesenheit von Ohmschem Widerstand ohne merkliche Aenderung der Frequenz in einen reinen Wechselstrom übergehen würde. Da hier keine Maschine vorhanden ist ($E = 0$), ist, wenn $w = 0$ ist, nach (15)

$$E_S + E_C = 0 \tag{16}$$

zu setzen; da E_S und E_C entgegengesetzte Phasen haben, bedingt dies Gleichheit ihrer Scheitelwerte (10 und 14), d. h. $\omega L = \frac{1}{C\omega}$, woraus die Frequenzformel

$$n = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{16a}$$

folgt. Wie Z. U. 29, S. 6, gezeigt, ist wenigstens die qualitative Bestätigung der Formel (16a) mit Hilfe der Braunschen Röhre leicht. Auch kann man, wenn Selbstpotentiale und Kapazitäten, wie oben gezeigt, gemessen sind, leicht aus (16a) beliebige Frequenzen berechnen und eine Vorstellung von ihren Größen bei bestimmten Schwingungskombinationen schaffen. Damit sind aber für die Behandlung der Ferninduktion die notwendigen mathematischen Grundlagen gelegt. Es sei wie 22, S. 134, darauf hingewiesen, daß mit besonderer Schärfe im Unterricht die leicht zu verwechselnden Formeln (15e) und (16a) auseinander gehalten werden müssen, die zwar gleich lauten, aber auf gänzlich verschiedenen Voraussetzungen beruhen.

Die Behandlung der Wechselströme ohne Differential- und Integralrechnung erfordert, wie man sieht, nicht viel Rechnung, aber ein scharfes Herausarbeiten der durch die geometrischen Konstruktionen symbolisierten physikalischen Vorgänge, außerdem eine schärfere Betrachtung der letzteren, was an sich ein Vorteil ist. Leichter und dazu reicher in der Verwendbarkeit ist aber zweifellos die Behandlung mit der Infinitesimalrechnung, der ich darum in einer mathematisch gut durchgebildeten OI immer den Vorzug geben würde. Für weniger günstige Verhältnisse dürfte aber das hier beschriebene Verfahren einen brauchbaren Ersatz liefern.

[7] Ueber den praktischen Nachweis der Resonanz habe ich in dieser Zeitschrift (23, S. 126) einen Artikel veröffentlicht.

[8] Z. U. 29, S. 6 und 30, S. 61 und 62.

Ueber den Phasendurchmesser des Mondes und seine Neigung zum Horizont.

Von Studienrat P. Kiesling (Bromberg).

In den folgenden Betrachtungen soll die Frage behandelt werden, welchen Winkel die Lichtgrenze der Mondphasen mit dem Horizont eines gegebenen Beobachtungsortes zu einer gegebenen Zeit bildet. Jedem aufmerksamen Beobachter unseres Nachbargestirnes wird schon aufgefallen sein, daß die Richtung dieser Lichtgrenze gegen den Horizont zu verschiedenen Zeiten verschieden ist. Zuweilen scheint sie fast senkrecht zum Horizont zu sein, während sie zu anderer Zeit einen kleineren oder größeren schiefen Winkel mit der Horizontalebene bildet. Außerdem ist diese Neigung für verschiedene Orte der Erde zu derselben Zeit verschieden.

Die unseren Betrachtungen zugrunde gelegte Lösungsmethode ist durchaus elementar und schulgemäß, so daß sie unter Umständen für den Unterricht in der Astronomie verwertet werden kann, soweit die Knappheit der verfügbaren Zeit, die sich je länger je mehr in jedem Unterrichtsfache geltend macht, dies überhaupt zuläßt.

Das Auge des Beobachters ist in dem Mittelpunkt der Erde befindlich gedacht und von allen Korrektionen, die sich aus der Tatsache ergeben, daß dies nicht so ist, abgesehen worden. Denn diese Korrektionen würden hier, wo der Grundgedanke der Lösung ohne Rücksicht auf praktische Anwendung gegeben werden soll, nur als störendes Beiwerk empfunden werden.

I.

Betrachten wir das Gestirn kurz nach Neumond, so haben wir den Anblick des zunehmenden Mondes, einer Sichel, die in unseren Gegenden nach Osten hin geöffnet ist. Die Verbindungslinie der beiden Sichelspitzen, die Hörner des Mondes, wollen wir den Phasendurchmesser nennen, weil sich um diese die einzelnen Phasen des Mondes zu bilden scheinen. Sind nun S, O, M die Mittelpunkte der Sonne bezw. der Erde und des Mondes, so ist leicht zu zeigen (Fig. 1)[1], daß der Phasendurchmesser $C C_1$ auf der

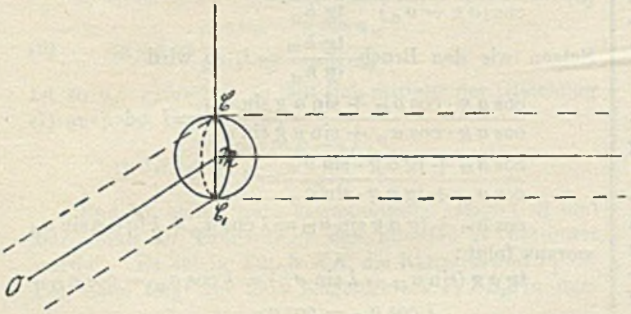


Fig. 1.

Ebene SOM senkrecht steht. Die von der Sonne S ausgehenden, den Mond treffenden Strahlen können als parallel der Geraden SM angesehen werden, der Mond wird also von einem Strahlenzylinder eingehüllt, dessen Grundkreis ein auf SM senkrechter Großkreis der Mondkugel ist. Der Phasendurchmesser ist offenbar ein Durchmesser dieses Kreises, und deshalb ist $CC_1 \perp SM$. Die vom Monde in das in O befindliche Auge gelangenden Lichtstrahlen sind parallel OM und bilden einen Zylinder, dessen Grundkreis auf OM senkrecht ist, und dem CC_1 ebenfalls als Durchmesser angehört, daher ist $CC_1 \perp OM$. Daraus folgt aber, daß $CC_1 \perp$ Ebene SOM.

Diese Tatsache führt zu besonders einfachen Folgerungen, wenn sich der Mond in einem Knoten seiner Bahn befindet. Er steht dann nämlich (mit dem Auge und der Sonne zusammen) in der Ekliptik; der Phasendurchmesser steht also in diesem Falle auf der Ebene der Ekliptik senkrecht. Ist P' (Fig. 2) der Pol der

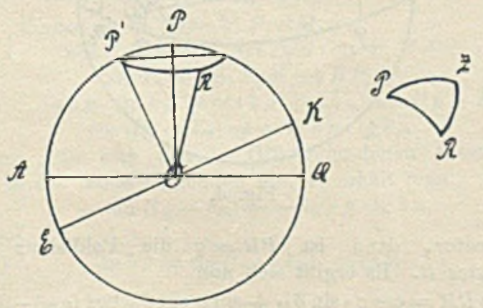


Fig. 2.

Ekliptik, d. h. der Punkt, in dem eine im Mittelpunkt O der Himmelskugel auf der Ebene der Ekliptik EK errichtete Senkrechte die Oberfläche der Himmelskugel schneidet, so ist die ekliptische Achse OP' dem Phasendurchmesser parallel. Statt also die Richtung des letzteren zu betrachten, dürfen wir auch die Richtung der ekliptischen Achse OP' und ihre Neigung zum Horizont bestimmen. Aus der Figur geht nun hervor, daß die Rektaszension des Punktes P' ist:

$$\alpha_{P'} = 270^0.$$

Denn $\alpha_{P'}$ muß übereinstimmen mit der $A.R.$ des Winterstoltitiums E, letztere ist aber 270^0.

Im Laufe eines Tages beschreibt die ekliptische Achse OP' einen Kegelmantel, dessen Grundkreis der Breitenkreis des Punktes P' ist (Fig. 2). Beobachten wir nun den Punkt P' zur Sternzeit ϑ, wo er sich in R befinde, so ist bekanntlich der Stundenwinkel τ des Punktes R:

$$\tau = \vartheta - \alpha_{P'} = \vartheta - 270^0.$$

Nunmehr kennen wir von dem bekannten sphärischen Dreieck PZR drei Stücke, nämlich: 1. $PZ = 90^0 - \varphi$ (φ geographische Breite des Beobachtungsortes), 2. $PR = \varepsilon = 23^0, 45^0$ (Schiefe der Ekliptik) und 3. $\tau = \vartheta - 270^0$, daher ist die Zenitdistanz ZR durch die Gleichung gegeben:

$$\cos ZR = \cos\varepsilon \cdot \cos(90^0 - \varphi) + \sin\varepsilon \cdot \sin(90^0 - \varphi)\cos(\vartheta - 270^0)$$

oder, wenn h_R die Höhe des Punktes R bedeutet:

$$\sin h_R = \cos\varepsilon \cdot \sin\varphi - \sin\varepsilon \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta.$$

Die Höhe h_R des Punktes R ist aber nichts anderes als die Neigung der Geraden OR gegen den Horizont. Da, wie früher erwähnt, OR dem Phasendurchmesser parallel ist, so gibt obige Formel die Neigung des Phasendurchmessers gegen den Horizont zur Sternzeit ϑ.

Ist t die Ortszeit der Beobachtung und α_σ die $A.R.$ der Sonne, so ist

$$\vartheta = t + \alpha_\sigma, \text{ also}$$

$$\text{Ia} \quad \sin h_R = \cos\varepsilon \cdot \sin\varphi - \sin\varepsilon\cos\varphi\sin(\alpha_\sigma + t).$$

Durch die Gleichung Ia ist also das Problem, die Richtung des Phasendurchmessers zu einer gegebenen Ortszeit t zu bestimmen, für den speziellen Fall gelöst, daß sich der Mond in einem Knotenpunkte seiner Bahn befindet. Zu einer eindeutigen und vollständigen Bestimmung müssen wir allerdings noch das Azimut des Punktes R haben, da die Gerade OR unendlich viele Lagen haben kann, für welche ihre Neigung gegen den Horizont $= h_R$ ist.

Das Azimut a des Punktes R finden wir nun leicht aus demselben Polardreieck PZR durch die Gleichung

$$\frac{\sin a}{\cos\vartheta} = \frac{\sin\varepsilon}{\cos h_R}, \text{ woraus folgt:}$$

$$\text{Ib} \qquad \sin a = \frac{\sin\varepsilon}{\cos h_R} \cdot \cos(\alpha_\sigma + t).$$

Ob der aus Gleichung Ib zu gewinnende Wert von $a \gtreqless 90^0$, muß in jedem Einzelfalle besonders untersucht werden.

Es ist nämlich $\cos PR = \cos PZ \cdot \cos ZR + \sin PZ \cdot \sin ZR \cdot \cos(180^0 - a)$ oder

$$+\cos a = \frac{\sin\varphi \cdot \sin h_R - \cos\varepsilon}{\cos\varphi \cdot \cos h_R}.$$

Für nördliche Breiten wird also $a \gtreqless 90^0$ sein, je nachdem

$$\text{Ic} \qquad \cos\varepsilon \gtreqless \sin\varphi \cdot \sin h_R \text{ ist.}$$

Ehe wir dazu übergehen, unser Problem allgemein zu behandeln, verlohnt es sich, noch einige Schlüsse aus der Gleichung Ia zu ziehen.

1. Für $\vartheta = 90^0$ erlangt h_R seinen kleinsten Wert:

$$h_R = \varphi - \varepsilon,$$

für Bromberg ($\varphi = 53{,}13^0$): $h_R = 29{,}68^0$.

[1] Figur 1 ist der Einfachheit wegen für den Fall gezeichnet, daß der Mond sich gerade im ersten Viertel befindet, so daß der Winkel $SMO = 90^0$ ist.

2. Für $\vartheta = 270^0$ erlangt h_R seinen größten Wert:

$$h_R = \varphi + \varepsilon,$$

für Bromberg: $h_R = 76{,}58^0$.

3. Für $\vartheta = 0^0$ wird $\sin h_R = \sin\varphi \cdot \cos\varepsilon$,

für Bromberg: $h_R = 47{,}22^0$.

4. Für $\vartheta = 180^0$ wird ebenfalls:

$$\sin h_R = \sin\varphi \cdot \cos\varepsilon.$$

Aus der Bedingung Ic ergibt sich auch für Bromberg, daß $a > 90^0$ ist, daß also die in den eben behandelten Fällen gefundenen spitzen Grenzwinkel für h_R mit dem nördlichen Teil des Horizontes gebildet werden. Denn es ist $\cos\varepsilon > \sin\varphi$, also um so mehr $\cos\varepsilon > \sin\varphi \cdot \sin h$, folglich $a > 90^0$.

II.

Nunmehr wollen wir den Mond in einem beliebigen Punkte seiner Bahn betrachten und die Richtung des Phasendurchmessers bestimmen.

Es sei (Fig. 3) $N_1 S_1$ der Durchmesser des Horizontes des Beobachtungsortes und Z das Zenit. Im Mittelpunkt O der Erde befinde sich das Auge des Beobachters; S und M seien die Mittelpunkte der Sonne bezw. des Mondes. Verbinden wir O mit S und M und legen durch die drei Punkte O, S, M die Ebene, welche die Himmelskugel in dem Bogen SM eines größten Kreises schneidet, so steht der Phasendurchmesser des Mondes, wie weiter oben erörtert wurde, auf der Ebene OSM senkrecht. Ziehen wir also durch O zu dem Phasendurchmesser die Parallele, welche das Himmelsgewölbe im Punkte R schneide, so ist auch OR senkrecht auf der Ebene OSM. Legen wir demnach größte Kreise durch R und S, sowie durch R und M, so sind die Bögen RS und RM beide $= 90^0$.

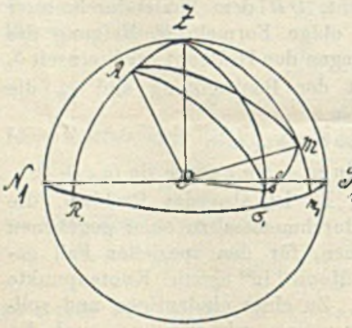


Fig. 3.

Endlich legen wir noch durch die Punkte Z und R einen größten Kreis ZRR_1, dieser steht auf dem Horizont senkrecht und ist der Höhenkreis des Punktes R. Daher gibt der Bogen $RR_1 = h_R$ die Neigung der Geraden OR also auch des Phasendurchmessers gegen den Horizont an. Der auf dem Horizont gemessene Bogen $SR_1 = a_R$ ist das Azimut des Punktes R. Die Größe a_R liefert uns also die Richtung, welche die Projektion des Phasendurchmessers im Horizont hat, so daß durch die Größen a_R und h_R die Lage des Phasendurchmessers im Raum bestimmt ist.

Der Vollständigkeit halber wollen wir im folgenden auch noch die Rektaszension und Deklination sowie die astronomische Länge und astronomische Breite des Punktes R berechnen.

Durch die Buchstaben $h, a, \alpha, \delta, l, b$ werden die Höhe, das Azimut, die Rektaszension, die Deklination, die Länge und Breite desjenigen Punktes am Himmel bezeichnet, der durch den beigefügten Index bestimmt ist. So bedeutet α_R die $A. R.$ des Punktes R, h_m die Höhe des Mondes, a_σ das Azimut der Sonne usw.

Aus dem Kugeldreieck ZRM (Figur 3) folgt:

$$\cos RM = \cos ZM \cdot \cos ZR + \sin ZM \cdot \sin ZR \cdot \cos \measuredangle RZM$$

oder

$$0 = \sin h_m \cdot \sin h_R + \cos h_m \cdot \cos h_R \cdot \cos(a_R - a_m)$$

folglich wird

$$(1) \qquad \cos(a_R - a_m) = -\operatorname{tg} h_m \cdot \operatorname{tg} h_R.$$

Ferner ist im $\triangle ZRS$:

$$\cos RS = \cos ZR \cdot \cos ZS + \sin ZR \cdot \sin ZS \cdot \cos \measuredangle (RZS)$$

$$0 = \sin h_R \cdot \sin h_\sigma + \cos h_R \cdot \cos h_\sigma \cdot \cos(a_R - a_\sigma)$$

$$(2) \qquad \cos(a_R - a_\sigma) = -\operatorname{tg} h_\sigma \cdot \operatorname{tg} h_R.$$

Durch Division von (1) und (2) folgt:

$$(3) \qquad \frac{\cos(a_R - a_m)}{\cos(a_R - a_\sigma)} = \frac{\operatorname{tg} h_m}{\operatorname{tg} h_\sigma}.$$

Setzen wir den Bruch $\frac{\operatorname{tg} h_m}{\operatorname{tg} h_\sigma} = \lambda$, so wird

$$\frac{\cos a_R \cdot \cos a_m + \sin a_R \sin a_m}{\cos a_R \cdot \cos a_\sigma + \sin a_R \sin a_\sigma} = \lambda \text{ oder}$$

$$\frac{\cos a_m + \operatorname{tg} a_R \cdot \sin a_m}{\cos a_\sigma + \operatorname{tg} a_R \cdot \sin a_\sigma} = \lambda, \text{ d. h.}$$

$$\cos a_m + \operatorname{tg} a_R \sin a_m = \lambda \cos a_\sigma + \lambda \operatorname{tg} a_R \sin a_\sigma,$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tg} a_R (\sin a_m - \lambda \sin a_\sigma) = \lambda \cos a_\sigma - \cos a_m$$

$$(4) \qquad \operatorname{tg} a_R = \frac{\lambda \cos a_\sigma - \cos a_m}{\sin a_m - \lambda \sin a_\sigma}.$$

Hat man durch die vorstehende Formel (4) a_R gefunden, so läßt sich h_R aus der Gleichung (1) bestimmen:

$$(5) \qquad \operatorname{cotg} h_R = -\frac{\operatorname{tg} h_m}{\cos(a_R - a_m)}.$$

Die Gleichungen (4) und (5) gestatten also, die Neigung des Phasendurchmessers zum Horizont zu bestimmen, wenn folgende Größen gemessen oder berechnet sind:

$$h_\sigma,\ h_m,\ a_\sigma,\ a_m.$$

Es sei nun weiter (Fig. 4) P der Nordpol, AQ der

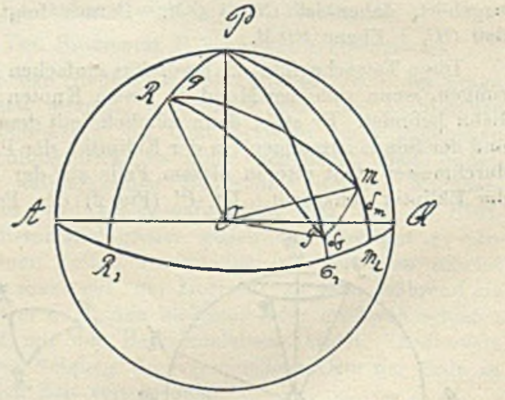


Fig. 4.

Aequator, dann ist $PR = q$ die Poldistanz des Punktes R. Es ergibt sich nun

$$\cos RM = \cos q \cdot \sin\delta_m + \sin q \cos\delta_m \cos(\alpha_m - \alpha_R)$$

oder:

$$0 = \sin\delta_R \cdot \sin\delta_m + \cos\delta_R \cdot \cos\delta_m \cdot \cos(\alpha_m - \alpha_R)$$

und:

$$(6) \qquad \cos(\alpha_R - \alpha_m) = -\operatorname{tg}\delta_R \cdot \operatorname{tg}\delta_m.$$

Ferner ist

$$\cos RS = 0 = \sin\delta_R \cdot \sin\delta_\sigma + \cos\delta_R \cdot \cos\delta_\sigma \cos(\alpha_R - \alpha_\sigma).$$

$$(7) \qquad \cos(\alpha_R - \alpha_\sigma) = -\operatorname{tg}\delta_R \cdot \operatorname{tg}\delta_\sigma.$$

Folglich ist:

(8) $$\frac{\cos(\alpha_R-\alpha_m)}{\cos(\alpha_R-\alpha_\sigma)}=\frac{\operatorname{tg}\delta_m}{\operatorname{tg}\delta_\sigma}.$$

Setzen wir $$\frac{\operatorname{tg}\delta_m}{\operatorname{tg}\delta_\sigma}=\varrho,$$

so wird $$\frac{\cos\alpha_R\cdot\cos\alpha_m+\sin\alpha_R\cdot\sin\alpha_m}{\cos\alpha_R\cdot\cos\alpha_\sigma+\sin\alpha_R\sin\alpha_\sigma}=\varrho$$

oder: $$\frac{\cos\alpha_m+\operatorname{tg}\alpha_R\sin\alpha_m}{\cos\alpha_\sigma+\operatorname{tg}\alpha_R\sin\alpha_\sigma}=\varrho$$

$$\varrho\cos\alpha_\sigma+\varrho\operatorname{tg}\alpha_R\sin\alpha_\sigma=\cos\alpha_m+\operatorname{tg}\alpha_R\cdot\sin\alpha_m$$

$$\operatorname{tg}\alpha_R(\varrho\sin\alpha_\sigma-\sin\alpha_m)=\cos\alpha_m-\varrho\cos\alpha_\sigma.$$

(9) $$\operatorname{tg}\alpha_R=\frac{\cos\alpha_m-\varrho\cos\alpha_\sigma}{\varrho\sin\alpha_\sigma-\sin\alpha_m}.$$

Ist so α_R gefunden, so läßt sich mittelst der Gleichung (7) auch δ_R bestimmen:

$$\operatorname{tg}\delta_R=-\frac{\cos(\alpha_R-\alpha_\sigma)}{\operatorname{tg}\delta_\sigma}.$$

Endlich sollen noch astronomische Länge (l_R) und astronomische Breite (b_R) des Punktes R bestimmt werden. Es sei in Fig. 5 EK die Ekliptik und P_1 ihr Pol, dann folgt aus dem Kugeldreieck P_1RS_1 in dem

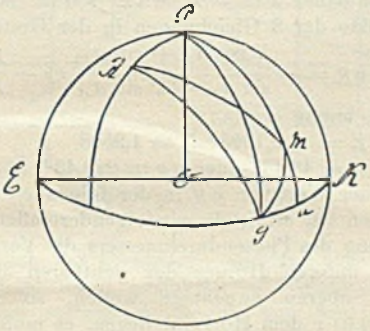


Fig. 5.

$P_1S=90^0$ und $RS=90^0$ ist:

$$\cos RS=0=\cos P_1R\cdot\cos P_1S+\sin P_1R\cdot\sin P_1S\cdot\cos RP_1S$$

oder: $$0=\sin P_1R\cdot\cos(360^0\,(l_R-l_\sigma))$$

$$0=\sin P_1R\cos(l_R-l_\sigma)$$

oder: $$\cos(l_R-l_\sigma)=0,\ \text{d. h. } l_R-l_\sigma=90^0.$$

(10) $$l_R=90^0+l_\sigma.$$

Ferner ist in dem $\sphericalangle P_1RM$:

$$\cos R_1M=0=\cos P_1R\cdot\cos P_1M+\sin P_1R\cdot\sin P_1M\cos RP_1M$$

$$0=\sin b_R\cdot\sin b_m+\cos b_R\cdot\cos b_m\cdot\cos(l_R-l_m);$$

$$\cos(l_R-l_m)=-\operatorname{tg}b_R\cdot\operatorname{tg}b_m.$$

Setzt man nun den in (10) gefundenen Wert von l_R in die letzte Gleichung ein, so erhält man

$$-\sin(l_\sigma-l_m)=-\operatorname{tg}b_R\cdot\operatorname{tg}b_m,$$

oder

(11) $$\operatorname{tg}b_R=\sin(l_\sigma-l_m)\cdot\operatorname{cotg}b_m.$$

III.

Es ist von Interesse zu untersuchen, ob wir imstande sind, die Neigung des Phasendurchmessers mit Hilfe eines geeigneten Fernrohres durch praktische Beobachtung zu messen. Denn dadurch würde es uns möglich werden, ein Kriterium für die voraufgegangene theoretische Betrachtung und Rechnung zu finden.

Richtet man das (mit Fadensystem versehene) Fernrohr auf den Mond, so bildet die Ebene des Fadensystems mit dem Horizont einen Winkel λ, der gleich dem Komplement der Höhe des Mondes ist: $\lambda=90^0-h_m$. Kann man nun den Winkel μ, den der Phasendurchmesser mit dem horizontalen Mittelfaden bildet, durch eine Mikrometervorrichtung messen, so läßt sich die Neigung h_R des Phasendurchmessers zum Horizont in folgender Weise auffinden.

Es sei (Fig. 6) OM die optische Achse des auf den Mittelpunkt M des Mondes gerichteten Fernrohres,

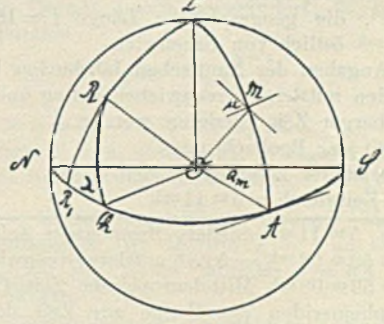


Fig. 6.

so bildet der horizontale Mittelfaden des letzteren mit dem Phasendurchmesser den $\sphericalangle\,\mu$. Beide Geraden erscheinen im Fernrohr als Durchmesser der Mondscheibe und liegen in der Ebene des Fadensystems. Zieht man nun durch O die Parallelen OR zum Phasendurchmesser und OQ zum horizontalen Mittelfaden, so ist die Ebene ROQ der Fadenkreuzebene parallel und $\sphericalangle\,ROQ=\mu$. Legt man ferner durch R und Q einen größten Kreis, so ist das Kugeldreieck RR_1Q rechtwinklig bei R_1. In ihm ist Seite $RQ=\mu$ und $\sphericalangle\,RQR_1=\lambda=90^0-h_m$, wo h_m die Höhe des Mondes bedeutet. Folglich ist:

(1) $$\sin RR_1=\sin h_R=\sin\mu\cdot\cos h_m.$$

Man kann also die Neigung h_R bestimmen, wenn die Winkel μ und h_m gemessen sind.

Es ist ferner: $\sphericalangle\,NOQ=90^0-a_m$ (a_m bedeutet das Azimut des Mondes), weil $\sphericalangle\,SOA=a_m$ und $\sphericalangle\,AOQ=90^0$ ist. Daher ist $\sphericalangle\,R_1OQ$ oder die Seite R_1Q des sphärischen $\triangle\,RR_1Q$

$$R_1Q=a_R-SQ=a_R-(90^0+a_m)=a_R-90^0-a_m.$$

Aus dem Kugeldreieck RR_1Q ergibt sich nun, daß

$$\sin R_1Q=\operatorname{tg}RR_1\cdot\operatorname{cotg}\lambda$$

oder

(2) $$\cos(a_R-a_m)=-\operatorname{tg}h_R\cdot\operatorname{tg}h_m$$

ist. Diese Formel stimmt mit der früher unter II, (5) gefundenen überein.

Der Winkel μ läßt sich immer — auch ohne Mikrometer — messen, wodurch die Bestimmung von h_R und a_R nach den Formeln III (1) und (2) besonders einfach ist. Trotzdem sind die in II geführten theoretischen Untersuchungen nicht überflüssig, und zwar aus zwei Gründen. Erstens nämlich bringen die dort gefundenen Formeln die Abhängigkeit des Phasendurchmessers von der gegenseitigen Stellung der Sonne und des Mondes deutlich zum Ausdruck, und zweitens ist es immer nützlich, die praktische Beobachtung durch theoretische Berechnung bestätigen zu können und umgekehrt.

IV.

Wir wollen nun die in II erhaltenen Ergebnisse an einem konkreten Beispiel erläutern und lösen zu diesem Zweck die Aufgabe:

„Welche Neigung hatte der Phasendurchmesser des Mondes gegen den Horizont von Bromberg am 28. März 1917 um 7^h wahrer Ortszeit?"

Die Ephemeriden der Sonne und des Mondes, sowie überhaupt alle astronomischen Angaben, welche für die Lösung der Aufgabe in Betracht kommen, entnehmen wir dem „Nautischen Jahrbuch 1917" (Berlin, Carl Heymanns Verlag).

Die geographische Breite von Bromberg ist $\varphi = 53{,}13^0$, die geographische Länge $l = 18{,}012^0 = 1^h\,12^m\,3^{sek}$ östlich von Greenwich.

Die Angaben des Nautischen Jahrbuches beziehen sich auf den mittleren Greenwicher Mittag und müssen für Bromberger Zeit-korrigiert werden.

1. Zeit der Beobachtung:

7^h wahrer Bromberger Zeit

$+$ Zeitgleich $= 5^m\,11^{sek}$

$= 7^h\ 5^m\ 11^{sek}$ mittlere Bromberger Zeit

$= 5^h\ 53^m\ 08^{sek} = 5{,}88^h$ mittlere Greenwicher Zeit

$= 6^h\ 53^m\ 08^{sek}$ Mitteleuropäische Zeit (M. E. Z.).

2. Ephemeriden der Sonne zur Zeit der Beobachtung:

$$A \cdot R = a_\sigma = 0^h\,26{,}6^m + 0{,}87^m = 0^h\,27{,}47^m = 6{,}87^0$$

Deklination: $\delta_\sigma = 2^0\,52{,}5' + 5{,}68' = 2^0\,58' = 2{,}97^0$.

Stundenw. für Bromberg: $\tau_\sigma = 105^0$; $\frac{\tau_\sigma}{2} = 52{,}50^0$.

3. Ephemeriden des Mondes zur Zeit der Beobachtung:

$$A \cdot R = a_m = 5^h\,6^m\,26^s + (2{,}31 \cdot 52{,}8)^s$$
$$= 5^h\,6^m\,26^s + 2^m\,2^s$$
$$= 5^h\,8^m\,28^s = 5{,}14^h = 77{,}10^0$$

$a_m - a_\sigma = 70{,}23^0$.

Stundenwinkel: $\tau_m = \tau_\sigma - (a_m - a_\sigma)$

$$= 105^0 - 70{,}23^0 = 34{,}77^0$$
$$\frac{\tau_m}{2} = 17{,}39^0.$$

Deklination: $\delta_m = 25{,}28^0$.

4. Wir berechnen Azimut und Höhe der Sonne mit Hilfe der Formeln:

$$\operatorname{cotg} \frac{a_\sigma + s}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi - \delta}{2}}{\cos \frac{\varphi + \delta}{2}} \operatorname{cotg} \frac{\tau_\sigma}{2}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{a_\sigma + s}{2} = \frac{\cos \frac{\varphi - \delta}{2}}{\sin \frac{\varphi + \delta}{2}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\tau_\sigma}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{90 - h_\sigma}{2} = \frac{\sin \frac{a - s}{2}}{\sin \frac{a + s}{2}} \operatorname{cotg} \frac{\varphi + \delta}{2}.$$

Hierin bedeutet s den sogenannten parallaktischen Winkel, dessen Scheitel eine Ecke des bekannten nautischen Dreiecks bildet und mit dem Sonnenmittelpunkt zusammenfällt. δ ist die Deklination der Sonne.

Es ist ferner:

$$\frac{\varphi + \delta}{2} = 28{,}05^0;\ \frac{\varphi - \delta}{2} = 25{,}08^0.$$

Die logarithmische Ausrechnung ergibt nun:

$$\frac{a + s}{2} = 69{,}77^0\quad \frac{a - s}{2} = 34{,}08^0.$$

Folglich ist das Azimut der Sonne zur Zeit der Beobachtung:

$$a_\sigma = 103{,}85^0.$$

Die dritte der oben angegebenen Formeln ergibt die Höhe der Sonne zu

$$h_\sigma = -6{,}54^0.$$

5. Azimut und Höhe des Mondes werden in genau derselben Weise berechnet

$$\left(\frac{\varphi + \delta}{2} = 39{,}21^0;\ \frac{\varphi - \delta}{2} = 13{,}93^0\right).$$

Es ergibt sich:

$$a_m = 56{,}80^0$$
$$h_m = 52{,}76^0.$$

6. Berechnung der Neigung des Phasendurchmessers. Der Rechnung werden die früher abgeleiteten Formeln zugrunde gelegt:

$$\operatorname{tg} a_R = \frac{\lambda \cos a_\sigma - \cos a_m}{\sin a_m - \lambda \sin a_\sigma}$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{tg} h_m}{\operatorname{tg} h_\sigma}$$

$$\operatorname{cotg} h_R = -\frac{\operatorname{tg} h_m}{\cos (a_R - a_m)}$$

Da $\operatorname{tg} h_\sigma < 0$, so ist auch $\lambda < 0$.

Setzen wir daher $\lambda = -\lambda'$, wo $\lambda' > 0$ ist, so erhalten wir die erste der 3 Gleichungen in der Gestalt:

$$\operatorname{tg} a_R = -\frac{\lambda' \cos a_\sigma + \cos a_m}{\sin a_m + \lambda' \sin a_\sigma} = -\frac{Z}{N}.$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$Z = 2{,}1995;\ N = 1{,}9508$$
$$a_R = 48{,}43^0 \text{ oder } a_R = 228{,}43^0.$$

Welcher Wert von a_R in der folgenden Rechnung zu benutzen ist, ermitteln wir folgendermaßen: Da wir als Richtung des Phasendurchmessers die Verbindungslinie des unteren Hornes der sichtbaren Mondsichel mit dem oberen annehmen wollen, so muß der Punkt R über dem Horizont liegen, es muß also auch $\operatorname{cotg} h_R > 0$ sein. Da

$$\operatorname{cotg} h_R = -\frac{\operatorname{tg} h_m}{\cos (a_R - a_m)} \text{ ist und } \operatorname{tg} h_m > 0,$$

so muß $\cos (a_R - a_m) < 0$ sein. Folglich ist $a_R - a_m > 90^0$. Nun war $a_m = 56{,}80^0$, also muß für a_R der größere Wert ($a_R = 228{,}43^0$) genommen werden.

Demnach wird:

$$\operatorname{cotg} h_R = -\frac{\operatorname{tg} h_m}{\cos 171{,}63^0} = \frac{\operatorname{tg} h_m}{\cos 8{,}37^0}$$
$$h_R = 36{,}94^0.$$

Die Neigung des Phasendurchmessers zum Horizont beträgt also $36{,}94^0$, seine Projektion auf den Horizont bildet mit dem nach Süden gerichteten Teil der Mittagslinie den Winkel $228{,}43^0$, sie hat also ungefähr nordöstliche Richtung.

Rechen-Netze.

Von Prof. Dr. G. Junge (Steglitz).

Auf *mm*-Papier seien Hyperbeln von der Gleichung $xy = a$ gezeichnet, und zwar für möglichst viele Zahlenwerte von a zwischen 1 und 100. Figur 1 zeigt im Intervall $1 < x < 10$ und $1 < y < 10$ die Hyperbel-Bogen für $a = 5$; 10; 15 ··· 90; 95. Eine solche Zeichnung läßt sich als Hilfsmittel zunächst beim Multiplizieren und Dividieren benutzen. Um etwa zu finden 40 : 6.7, suche man den Schnittpunkt der Hyperbel $xy = 40$ mit der Gerade $x = 6.7$ und bestimmen dessen Ordinate. Sie ist $y = 5.97$, und dies ist der gesuchte Quotient.

Eine solche Rechen-Tafel ist zuerst angegeben und gezeichnet worden von L. E. Pouchet, Métrologie terrestre, Rouen 1797, Kap. 12. Ein Bericht findet sich in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I. 2, Leipzig 1900—04, S. 1028, in dem Abschnitt über numerisches Rechnen von Mehmke.

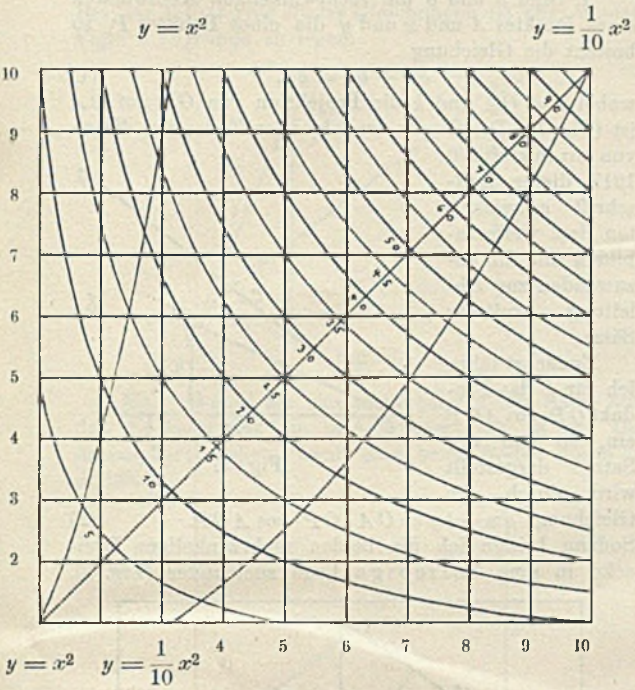


Fig. 1.

Um auch das Quadrieren und das Ausziehen der Quadratwurzel leicht ausführen zu können, ist noch die diagonal verlaufende Gerade von der Gleichung $y=x$ in die Zeichnung einzutragen. $\sqrt{40}$ ist dann gegeben durch den Schnittpunkt der Hyperbel $xy=40$ mit dieser Gerade; man findet $x=6.32$.

Zur Bestimmung der Kuben und der Kubik-Wurzeln sind noch die Parabeln von der Gleichung $y=x^2$ und $y=\frac{1}{10}x^2$ zu zeichnen. Die Bestimmung von $\sqrt[3]{40}$ würde die Hyperbel $xy=4$ erfordern, welche in unserer Skizze fehlt. Dagegen $\sqrt[3]{400}$ läßt sich finden als Abszisse des Schnittpunktes der Hyperbel $xy=40$ mit der Parabel $y=\frac{1}{10}x^2$. Man sieht, daß $x=7.37$ ist. Die Parabel $y=x^2$ wird verwandt, wenn die Kubik-Wurzel zwischen 1 und $\sqrt{10}=3.16$ liegt, die Kubik-Zahl zwischen 1 und 31.6. Die Parabel $y=\frac{1}{10}x^2$ tritt ein, wenn die Wurzel zwischen 3.16 und 10, der Kubus zwischen 31.6 und 1000 liegt.

Allgemein wird die Tafel zum Aufsuchen der n-ten Potenz und der n-ten Wurzel brauchbar, wenn die $n-1$ Parabeln

$$y=x^{n-1};\quad y=\frac{1}{10}x^{n-1};\quad \dots\, y=\frac{1}{10^{n-2}}x^{n-1}$$

eingezeichnet werden. —

Figur 1 läßt sich durch eine Transformation erheblich vereinfachen. Man ersetze den Punkt (x, y) durch den Punkt $(\log x, \log y)$. Am besten dient dazu logarithmisch geteiltes Papier, d. h. ein Papier, welches die Geraden $\xi=\log x$ und $\eta=\log y$ für viele Zahlenwerte von x und y zwischen 1 und 10 vorgedruckt enthält. Wenn jetzt x und y das konstante Produkt a ergeben, so haben die Logarithmen die konstante Summe $\log a=\alpha$, und an die Stelle der Hyperbel $xy=a$ tritt die Gerade $\xi+\eta=\alpha$. Alle Multiplikationen und Divisionen lassen sich also ausführen mit Hilfe der vorgedruckten Geraden und einer Schar von diagonal verlaufenden Geraden; siehe Figur 2. Von den Hilfslinien zur Bestimmung der Potenzen und Wurzeln bleibt die Gerade $y=x$ unverändert; dagegen wird aus der Parabel

$$y=\frac{1}{10^{\lambda}}x^{n-1}$$

die Gerade $\eta=(n-1)\,\xi-\lambda\log 10$.

In Figur 2 sind, ebenso wie in Figur 1, die beiden Linien zur Bestimmung der Kuben und Kubik-Wurzeln gezeichnet. Es sei etwa $\sqrt[3]{40}$ zu finden. Man suche den Schnittpunkt der Gerade $\xi+\eta=\log 4$ mit $\eta=2\xi-\log 10$. Seine Abscisse $\xi=3.4$ gibt die gesuchte Wurzel.

Dieser Gedanke eines logarithmischen Rechen-Netzes stammt von Lalanne. Erklärung und Figur finden sich in den „Annales des ponts et chaussées", Ser. 2, Bd. 11, Paris 1846; ein Bericht in der Enzyklopädie a. a. O. S. 1030—1032. Lalanne's Figur, von ihm Abacus genannt, hat ganz das Aussehen unserer Figur 2, nur ist sie größer und enthält noch mehr Hilfslinien, z. B. die Gerade von der Gleichung $\eta=2\xi+\log\frac{4\pi}{3}$, zur Bestimmung des Volumens der Kugel aus dem Radius und umgekehrt.

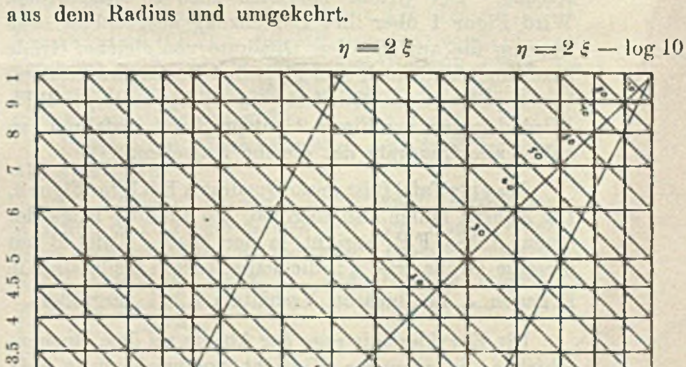


Fig. 2.

Die Tafel von Lalanne ist mehrmals nacherfunden worden, kürzlich von den Herren Mayr und Koch in Mannheim. Diese haben unter dem Namen „graphisch-logarithmische Rechentafel" ein Doppelblatt auf Pappe herausgegeben, das auf einer Seite, unter A, den Abacus von Lalanne bringt, mit einer Quadrat-Seite von fast 12 cm; auf der anderen Seite, unter B, eine ähnliche Tafel, die noch besprochen werden soll. Die Tafel A bleibt insofern hinter dem Abacus zurück, als sie außer den Hyperbeln nur die Gerade $\eta = \xi$ enthält.

Der Tafel B liegt der folgende, anscheinend neue Gedanke zugrunde. Wenn die Figuren 1 oder 2 nur zum Multiplizieren und Dividieren gebraucht werden, so kann man jede Operation an zwei Stellen des Quadrats ausführen, die zur Diagonale A C symmetrisch liegen (Figur 3). Die Rechen-Tafel kann sich also etwa auf $\triangle$ABC beschränken. Um die Form eines Quadrats beizubehalten, kann man etwa das Stück II' unter I setzen (s. die Figur), so daß das Quadrat AEBF entsteht, und in diesem alle Rechnungen vollziehen. Diese Ueberlegung, auf Figur 1 angewandt, führt allerdings zu einer Unstetigkeit längs der Geraden AB: die Bogen verschiedener Hyperbeln stoßen unter einem Winkel aufeinander. Dagegen bei Figur 2 bildet das Stück II', unter I angebracht, dessen natürliche Fortsetzung. Der Grund läßt sich auch so aussprechen. Wird Figur 1 über ihre Begrenzung ausgedehnt, etwa ringsum die anstoßenden Quadrate von gleicher Größe gezeichnet und auch von Hyperbel-Bogen erfüllt, dann bietet jedes neue Quadrat ein völlig anderes Bild. Wird dagegen bei Figur 2 entsprechend verfahren, so haben alle Quadrate das gleiche Aussehen.

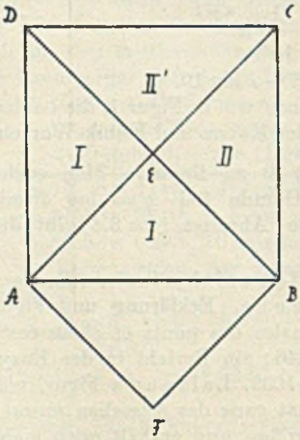


Fig. 3.

Mayr's Tafel B ist unser Quadrat AEBF für Figur 2. Die Achsen laufen also diagonal, die Zählung längs der einen Achse FE beginnt in der Mitte. Tafel B hat dieselbe Größe wie A; die dargestellten Teile sind in B gegen A im linearen Verhältnis $\sqrt{2} : 1$ vergrößert.

Die Enzyklopädie sagt, der Abacus sei dem Rechenschieber „in mancher Hinsicht vorzuziehen" (a. a. O. Anm. 437), nämlich höhere Potenzen und Wurzeln seien leichter zu bestimmen, das Verziehen des Papiers sei ohne Einfluß und der Preis geringer. Der Preis der Mayr'schen Tafel ist allerdings recht hoch, er beträgt einzeln M 1.20. Ein Rechenschieber aus Pappe, von reichlich 12 cm Länge, ist für M 1.30 zu haben.

Im Text der Mayr'schen Tafel wird gesagt, ihre Handhabung sei leichter erlernbar als die des Rechenschiebers. Auch dies wird kaum zutreffen. Jedenfalls, solange die Tafel nicht wesentlich billiger geliefert werden kann, ist ihre Benutzung für Schulen kaum zu empfehlen.

Auf ein wirklich billiges und leicht verständliches Rechen-Hilfsmittel, den einfachen logarithmischen Stab, hat der Verfasser schon früher hingewiesen (diese Ztschr. Bd. 14, 1908, S. 132. Leider kann die dort genannte Firma Wichmann in Berlin solche Pappstreifen z. Z. nicht liefern).

Erweiterung des Pythagoreischen Lehrsatzes für zwei rechtwinkelige Dreiecke.

Von Prof. Osk. Herrmann (Leipzig-Marienbrunn).

I. Sind a und b die rechtwinkeligen Koordinaten eines Punktes A und x und y die eines Punktes P, so besteht die Gleichung

$$ax + by = ck, \tag{1}$$

wobei $c = OA$ und k die Projektion von OP auf OA ist (Fig. 1). Der Zweck der folgenden Zeilen ist, diesen von mir in Heft 5/6 1917 dieser Zeitschrift entwickelten Satz weiterzubilden und ihn anzuwenden zur Ableitung weiterer Sätze.

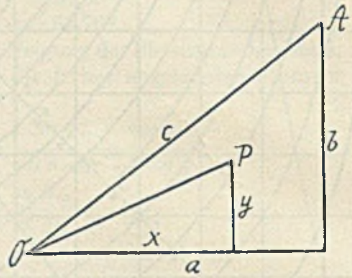


Fig. 1.

Zunächst führe ich für k das Produkt $OP \cdot \cos AOP$ ein, so daß der Satz dargestellt wird durch die Gleichung

$$ax + by = OA \cdot OP \cdot \cos AOP. \tag{2}$$

Sodann bringe ich die beiden rechtwinkeligen Dreiecke in eine beliebige Lage zueinander (Fig. 2).

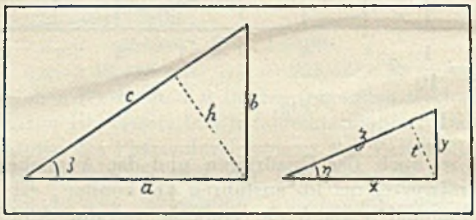


Fig. 2.

Ich bezeichne noch die Hypotenuse OP mit z und nenne die den Katheten b und y gegenüberliegenden Winkel β und η. Dann ist $\sphericalangle AOP = \beta - \eta$ und auch gleich der Differenz der beiden andern spitzen Winkel, und es besteht die Gleichung

$$S = ax + by = cz \cdot \cos(\beta - \eta). \tag{3a}$$

Für zwei beliebige, rechtwinkelige Dreiecke gilt demnach der Satz: Das Rechteck aus einer Kathete des ersten und einer des zweiten, vermehrt um das Rechteck aus den beiden andern Katheten, ist gleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusen, multipliziert mit dem Kosinus der Differenz von zwei solchen Winkeln, welche Katheten gegenüberliegen, die dasselbe Rechteck bilden.

Man sieht, daß dieser Satz eine Verallgemeinerung des Pythagoras ist und in diesen übergeht, wenn die Dreiecke kongruent sind.

Bei der Ableitung des Satzes 3a bin ich davon ausgegangen, daß die beiden Dreiecke der Figur 2 so liegen, wie es in Figur 1 der Fall ist. Ich erhalte nun drei weitere Sätze, wenn ich sie so lege, wie die Figuren 3, 4 und 5 zeigen. In Figur 3 sind die Koordinaten von P vertauscht, und es ist $\sphericalangle AOP = 90^0 - \eta - \beta$, also $\cos AOP = \sin(\beta + \eta)$. In Figur 4 sind die Koordinaten von P x und $-y$, $\sphericalangle AOP = \beta + \eta$. In Figur 5 endlich hat P die Koordinaten y und $-x$ und $\sphericalangle AOP$ ist $\beta + (90^0 - \eta)$, also cos

$AOP = -\sin(\beta - \eta)$. So ergeben sich die Gleichungen

$$S' \equiv ay + bx = cz \cdot \sin(\beta + \eta) \quad (3\,b)$$
$$D \equiv ax - by = cz \cdot \cos(\beta + \eta) \quad (3\,c)$$
$$D' \equiv bx - ay = cz \cdot \sin(\beta - \eta). \quad (3\,d)$$

Bei der Deutung dieser Gleichungen ist aber immer Figur 2 zugrunde zu legen.

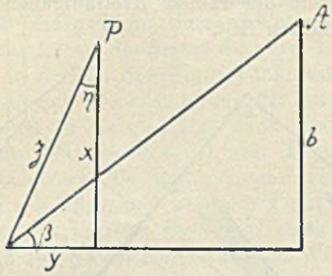


Fig. 3.

Man erkennt den Zusammenhang dieser Sätze mit den Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ usw., die in der Tat daraus hervorgehen, wenn man beide Seiten durch cz dividiert.

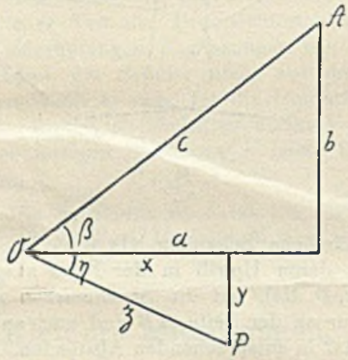


Fig. 4.

II. Was den Beweis der Ausgangsgleichung (1) anlangt, so habe ich a. a. O. den Satz zunächst für den besondern Fall bewiesen, daß P auf dem in A errich-

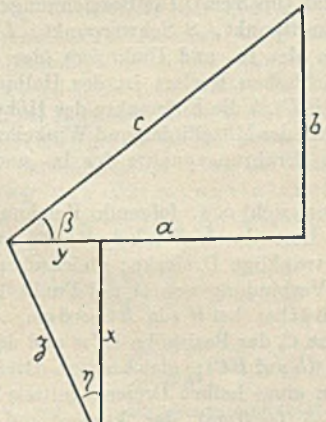


Fig. 5.

teten Lote von OA liegt (vgl. dazu den Aufsatz von Geheimrat Böttcher im 7. Hefte 1917), und bin dann durch eine Proportion zum allgemeinen Fall übergegangen. Einfacher ist es, wie es die Herren Stucke und Kleiber im 8. Hefte getan haben, den Satz aus dem Dreistreifensatz hervorgehen zu lassen. Man braucht nur die zu projizierende Strecke so zu legen, daß ein Endpunkt mit einem Endpunkte der Hypotenuse zusammenfällt. Ich bemerke dazu, daß die Figur symmetrischer wird, wenn man die Endpunkte der Strecke auf die Katheten legt. Dann ergibt sich ohne weiteres der Satz 3a.

Wenn ich hier kurz den Satz auch noch aus dem Ptolemäischen Lehrsatz entwickele, obgleich dieser Beweis weniger einfach ist, so tue ich es, um auf den Zusammenhang der beiden Sätze hinzuweisen.

Ich lege die Dreiecke der Figur 2 so aneinander, wie es in Figur 6 geschehen ist. Dann ist

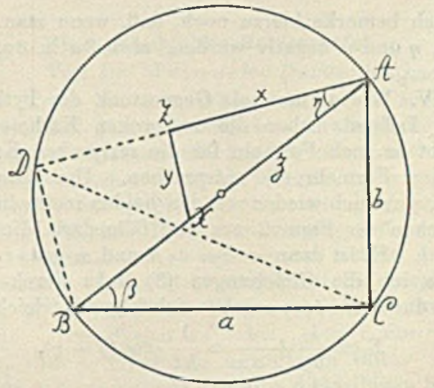


Fig. 6.

$BC \cdot AD + AC \cdot BD = AB \cdot CD = AB \cdot AB \cdot \sin CBD$. Es ist aber $\sin CBD = \sin(90^0 - \eta + \beta) = \cos(\beta - \eta)$. Setze ich noch für die Seiten des Dreiecks ABD die proportionalen Seiten des Dreiecks AXZ ein, so ergibt sich die Gleichung 3a.

In ähnlicher Weise entwickelt man die Gleichungen 3b, 3c und 3d.

III. Anwendung. Ueber zwei Durchmessern AB und XY zweier Kreise mit den Radien r und ϱ seien zwei beliebige rechtwinkelige Dreiecke ABC und XYZ konstruiert (Fig. 7). Die Dreiecke mögen in

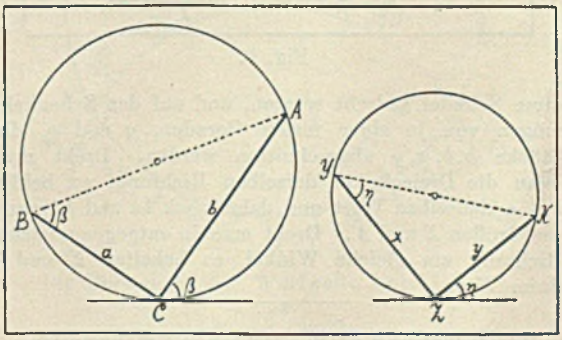


Fig. 7.

der genannten Reihenfolge der Ecken in demselben Sinne umfahren werden. Zieht man dann in C und Z die Tangenten, so erscheinen die Winkel β und η bei C und Z als Sehnentangentenwinkel. Bei einer Drehung der rechten Winkel um C, bezw. Z, ändern sich die Längen der Schenkel und natürlich auch β und η. Dreht man nun die beiden rechten Winkel um gleiche Winkel, so ändert sich $\beta - \eta$ nicht, wenn man in demselben Sinne dreht, dagegen $\beta + \eta$ nicht, wenn man in entgegengesetztem Sinne dreht. Nach den Gleichungen (3) besteht demnach folgender Satz: Bei der Drehung der rechten Winkel in demselben Sinne sind S und D', in entgegengesetztem Sinne S' und D konstant.

Die Werte dieser konstanten Größen ergeben sich aus den Gleichungen (3), nämlich $4\,r\varrho \cdot \cos(\beta - \eta)$ usw. Sie können aber auch aus dem Satze selbst hergeleitet werden, wenn man so weit dreht, daß einer der Schenkel $= 0$ wird. Dreht man z. B. um den Anfangswert von η rechts herum, so wird $y = 0$, $x = 2\,\varrho$, und der Winkel bei B wird $\beta - \eta$. Demnach wird $a = 2\,r \cdot \cos(\beta - \eta)$ und daher $S = 4\,r\varrho \cdot \cos(\beta - \eta)$, wie oben.

Ich bemerke hierzu noch, daß, wenn man weiterdreht, η und y negativ werden, also 3a in 3c, 3b in 3d übergeht.

IV. Wie es nun, als Gegenstück des Pythagoras, einen Lehrsatz über die reziproken Katheten gibt, so gibt es auch Formeln für die reziproken Katheten, die den Formeln (3) entsprechen. Um diese abzuleiten, gehe ich wieder von den beiden rechtwinkeligen Dreiecken der Figur 2 aus und fälle darin die Höhen h und t. Es ist dann $a \cdot b = c \cdot h$ und $x \cdot y = z \cdot t$. Dividiere ich die Gleichungen (3) links durch $abxy$, rechts durch $chzt$, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\Sigma = \frac{1}{by} + \frac{1}{ax} = \frac{1}{ht} \cdot \cos(\beta - \eta), \tag{4a}$$

$$\Sigma' = \frac{1}{bx} + \frac{1}{ay} = \frac{1}{ht} \cdot \sin(\beta + \eta), \tag{4b}$$

$$\Delta = \frac{1}{by} - \frac{1}{ax} = \frac{1}{ht} \cdot \cos(\beta + \eta), \tag{4c}$$

$$\Delta' = \frac{1}{ay} - \frac{1}{bx} = \frac{1}{ht} \cdot \sin(\beta - \eta). \tag{4d}$$

V. Anwendung. Zwei beliebige rechte Winkel mit den festen Scheiteln C und Z (Fig. 8) mögen um

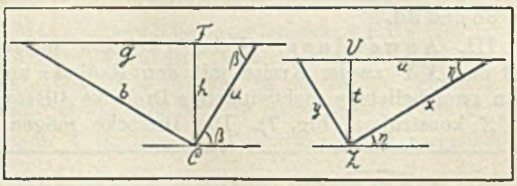


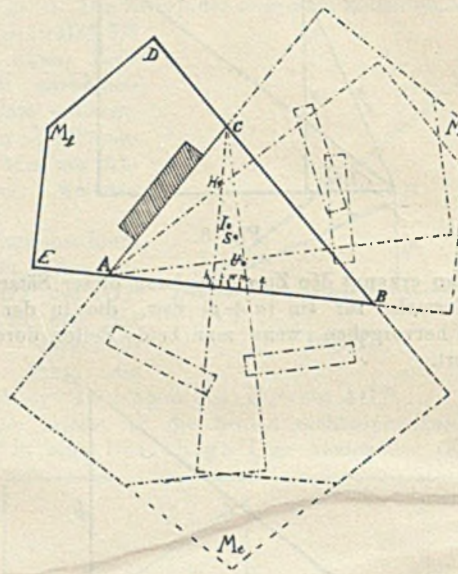
Fig. 8.

diese Scheitel gedreht werden, und auf den Schenkeln mögen von je einer festen Geraden, g und u, die Stücke a, b, x, y abgeschnitten werden. Dreht man dann die Dreiecke in derselben Richtung, so behält $\beta - \eta$ denselben Wert und daher nach 4a und 4d auch die Größen Σ und Δ'. Dreht man in entgegengesetzter Richtung um gleiche Winkel, so behalten Σ' und Δ ihren Wert.

Vereinfachung planimetrischer Zeichnungen.

Von Oberl. Joseph Frühling (Berlin-Weissensee).

Die Zeichnung einer Figur der Analysis zu planimetrischen Konstruktionsaufgaben beansprucht einen viel zu großen Teil der Unterrichtsstunde, da die Bestimmungsstücke meist mit Zirkel und Lineal in die Figur hineinkonstruiert werden müssen. Trotz aller Sorgfalt eifriger Schüler lassen dann die meisten Zeichnungen die nötige Genauigkeit doch noch vermissen; ja bei der sogen. ϱ-Figur wird es wohl nur den besten Zeichnern unter den Schülern gelingen, die vier Kreise mit den Dreiecksseiten bezw. ihren Verlängerungen in Berührung zu bringen. Nun läßt sich gerade aus dieser schwierigen ϱ-Figur eine Zeichenschablone gewinnen, die nicht nur die Zeichnung der ϱ-Figur mit der nötigen Genauigkeit in kürzester Zeit anfertigen hilft, sondern alle Figuren zu planimetrischen Konstruktionsaufgaben mit Ausnahme der reinen Kreisaufgaben leicht und schnell ausführen läßt.



Die käufliche Schablone (D. R. G. M., gesetzlich geschützt), deren Umriß in der Figur ausgezogen ist (E, A, B, C, D, Mb), hat die Strichmarken h, i, w, m, a, die hier nur an der Seite AB sind, auch an den Seiten BC und AC in entsprechenden Abständen. Die Punkte H, I, S, U sind durchlocht, um die Zeichenstiftspitze durchführen zu können; das schraffierte Rechteck ist zur Benutzung der Strichmarken ausgestanzt. Endlich trägt die lange Kante BD von B aus einen mm-Maßstab (bis 90 mm), die anstoßende kurze Kante einen $^1/_2$ cm-Maßstab (bis 3 cm). Die Bezeichnungen bedeuten: H Höhenschnittpunkt, S Schwerpunkt, I und U die Mittelpunkte des In- und Umkreises (der Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises ist der Halbierungspunkt der Strecke HU), h die Fußpunkte der Höhen, m und w die Endpunkte der Mittellinien und Winkelhalbierenden, i und a die Berührungspunkte des In- und Ankreises jeder Seite.

Es lassen sich u. a. folgende Zeichnungen sofort ausführen: Lote durch Winkel $BDMb$ oder $BEMb$ $(= R)$; rechtwinklige Dreiecke; gleichschenklige Dreiecke durch Verbindung von A mit Punkt 1 $(= 10\,\text{mm})$ des mm-Maßstabes bei B (da $BC = 6$ cm, $AC = 5$ cm), mit der Spitze C, der Basishöhe CIw und der Schenkelhöhe AHh (h auf BC); gleichseitige Dreiecke durch Konstruktion eines halben Dreiecks mittels Verbindung von Punkt 3 $(= 3\,\text{cm})$ der kurzen und Punkt 3.8 ($= 52$ mm von D aus) der langen Kante, Seite $2 \cdot 3 = 6$ cm, Höhe $5.2 \sim 3\sqrt{3}$ cm; Drachenfigur ganzer Umriß der Schablone und Verbindung DE; spitzwinklige Dreiecke (ABC) mit Höhen, Mittellinien, Winkelhalbierenden, Radien des In- und Umkreises mittels der Marken; stumpfwinklige Dreiecke (AHB) mit den Höhen AC, BC, Hh, dem Höhenschnittpunkt C, einer Mittellinie Hm (m auf AB); Parallelogramm nach Zeichnung des

Dreiecks ABC und Drehen der Schablone, bis B derselben auf C der Zeichnung und entsprechend C auf B fällt, durch nochmalige Zeichnung der Dreiecksseiten BA und AC; Parallele durch einen Punkt P zu einer Geraden in gleicher Weise, wobei AB auf der Geraden liegt und BC durch P geht, und Verschiebung der Dreiecksseite BC an CB der Zeichnung entlang, bis B auf P fällt; die ϱ-Figur durch Anlegen der Schablone nacheinander an die Seiten des gezeichneten Dreiecks ABC in den in der Figur punktgestrichelt-gezeichneten Lagen und Verlängerung der kurzen Kanten bis zum Schnitt in Mc und Ma, dann sind Ma, Mb, Mc und I die Mittelpunkte der vier Kreise und die kurzen Kanten sowie die Verbindungen von Ma, Mb, Mc mit dem zugehörigen a und von I mit i auf jeder Seite die nötigen Radien; Halbieren eines beliebigen Winkels entsprechend der Halbierung des Winkels CAB durch die Winkelhalbierende AMa; harmonische Teilung einer Strecke durch Verschieben der Schablone längs der Strecke, Seite CA der Strecke anliegend, Ziehen der Parallelen längs DB und Abtragen der Maße daselbst.

Durch diese Vereinfachung der Zeichnungen wird ein wesentlicher Teil der Unterrichtsstunde frei und kann zu Wiederholungen, Ergänzungen u. a. gebraucht werden. Damit die Schüler nicht aus der Uebung kommen, empfiehlt es sich, für die Hausarbeiten den Gebrauch des Zirkels beizubehalten, dessen Verwendung auch an der fertigen Zeichnung ja leicht kontrolliert werden kann.

Anm.: Die Schablone ist durch die Firma Hans Hilgers in Bonn (Preis 10 Stück M 2.—) zu beziehen.

Kleinere Mitteilungen.

Bemerkung zu: Eine Aufgabe der mathematischen Geographie. Von P. Kiesling (Bromberg).

Von Prof. Dr. E. Haentzschel (Berlin).

Die Aufgabe: In welcher Polhöhe ist die Abweichung der geozentrischen Breite φ_1 von der geographischen Breite φ eines Ortes der Erde am größten? findet sich meistens in Büchern über mathematische Geographie behandelt, so in Martus, Astronomische Erdkunde, 3. Aufl. 1904, S. 411—412, und auch in meinem Büchlein: Das Erdsphäroid und seine Abbildung. Leipzig, Teubner, 1903, S. 15 bis 17. An beiden Stellen wird die Aufgabe ohne Anwendung der Differentialrechnung gelöst. Meine Herleitung ist die folgende. Aus der Grundgleichung

$$(1)\ \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi \text{ folgt } \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{\sin(\varphi-\varphi_1)}{\sin(\varphi+\varphi_1)}.$$

Daher

$$(2)\qquad \sin(\varphi-\varphi_1) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\sin(\varphi+\varphi_1).$$

Bedeuten φ^1 und $\varphi_1{}^1$ die ausgezeichneten Werte, so hat die linke Seite von (2) ihren größten Wert, wenn auf der rechten: $\sin(\varphi+\varphi_1) = 1$ ist. Demnach ist

$$(3)\ \sin(\varphi^1-\varphi_1{}^1) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \sin\delta \text{ und } \varphi^1+\varphi_1{}^1 = 90^0,$$

woraus

$$\varphi^1 = 45^0 + \frac{\delta}{2} \text{ und } \varphi_1{}^1 = 45^0 - \frac{\delta}{2}$$

folgt. Dies wiederum ergibt $\operatorname{tg}\varphi^1 = \operatorname{cotg}\varphi_1{}^1$. Da nun nach der Grundgleichung $\operatorname{tg}\varphi_1{}^1 = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi^1$ ist, so ist $\operatorname{tg}\varphi_1{}^1 = \frac{b^2}{a^2}\cdot\operatorname{cotg}\varphi_1{}^1$, oder $\operatorname{tg}^2\varphi_1{}^1 = \frac{b^2}{a^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_1{}^1 = \frac{b}{a}$ und $\operatorname{tg}\varphi^1 = \frac{a}{b}$.

Legt man die Besselschen Werte der Erddimensionen zugrunde, so ist

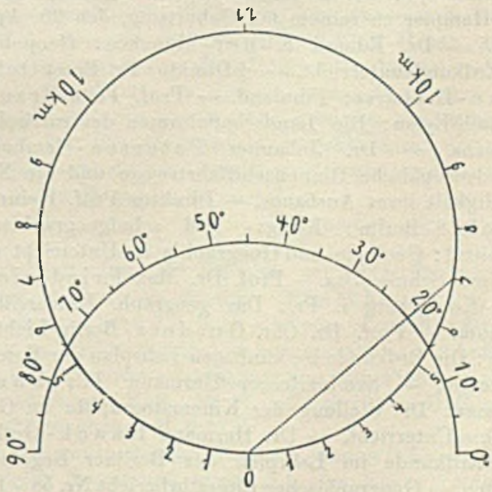
$$\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{299{,}1528} = 0{,}003\,342\,77.$$

Daher $\operatorname{tg}\varphi_1{}^1 = 1 - \alpha$, woraus $\varphi_1{}^1 = 44^0\,54'\,14{,}67''$ und $\varphi^1 = 45^0\,5'\,45{,}33''$, das ist ungefähr die Breite von Turin. Endlich ist $\varphi^1 - \varphi_1{}^1 = 0^0\,11'\,30{,}66''$.

Eine graphische Schusstafel.

Von Dr. Meinecke (Stettin).

Der Krieg hat alle Wissenschaften in sein Anwendungsgebiet gezogen, besonders im Artilleriewesen triumphiert die Mathematik. Im folgenden möchte ich ein nomographisches Beispiel bringen, um auch für dieses Gebiet der graphischen Darstellungen Interesse zu wecken. Wirken Tabellen mit ihrem Ziffernurwald gradezu abschreckend — ich erinnere nur an die Logarithmentafel —, so zieht umgekehrt das graphische Bild, z. B. die Skala des Rechenschiebers, selbst den Laien an. Um Skalen zu lesen, gehört nur wenig Uebung, zum Interpolieren genügt ein Blick. Es ist also nicht verwunderlich, wenn die dickleibigen Schußtafeln ins Nomographische übersetzt werden, denn selbst in der Ruhe des Stellungskrieges ist das Lesen von Schußtafeln für manchen Artillerieoffizier kein hervorragendes Vergnügen.



Die Formel für die Wurfweite lautet:

$$x = \frac{c^2}{g}\sin 2\varepsilon$$

worin x die Wurfweite, c die Anfangsgeschwindigkeit — es ist die Schußtafel für $c = 465$ m/sec entworfen — $g = 9{,}81$ $m/\sec^2$ die Erdbeschleunigung und ε der Erhebungswinkel. Setzt man $x = r$ und $2\varepsilon = \varphi$, so erhält man $r = \frac{c^2}{g}\sin\varphi$ die Gleichung eines Kreises in Polarkoordinaten mit $\frac{c^2}{g}$ als Durchmesser. Diesen Kreis bestrichelt man, indem man $r = 1, 2, 3, \ldots$ km als Sehne einträgt. Da $2\varepsilon = \varphi$ ist, so ist der Halbkreis nach doppelten Graden beziffert. In der Schußtafel ist nun die Gerade 0 km — 20° — 7 km als Beispiel gezogen; um 7 km weit zu schießen, brauche ich also eine Erhöhung von 20°. Als Physiklehrer wird man noch andere Aufgaben finden, die dem Schüler der oberen Klassen wenigstens einen Begriff der graphischen Tafel geben. — Die wirkliche Schußtafel berücksichtigt den Luftwiderstand und noch anderes mehr, aber das verrate ich dem Englishman nicht!

Persönliche Nachrichten.

Unser Vorstandsmitglied, Herr Studienrat Presler, hat auch seinen zweiten Sohn, den cand. math. Otto Presler, Leutnant der Reserve und Regiments-Adjutant in einem Inf.-Rgt., Ritter des Eisernen Kreuzes II. und I. Klasse und anderer Orden, am 1. April d. J. durch den Tod fürs Vaterland verloren, nachdem er auf dem Abtransport zum Feldlazarett zum zweiten Mal durch ein Sprengstück tödlich verwundet worden war.

Dr. Friedrich Graefe, Professor an der technischen Hochschule zu Darmstadt wurde zum Geheimen Hofrat ernannt und tritt zum 1. Oktober 1918 in den Ruhestand.

Bücher-Besprechungen.

Geographischer Anzeiger vereinigt mit der Zeitschrift für Schulgeographie. Herausgegeben von Dr. Hermann Haack, Prof. Heinrich Fischer und Lehrer Albert Müller. Verlag von Justus Perthes in Gotha. 19. Jahrgang 1918. Preis M 6.—.

Heft 3/4: Dr. Hermann Haack-Gotha: Ernst von Hammer zu seinem 60. Geburtstag, den 20. April 1918. — Dr. Eduard Ebner-München: Geopolitik im Erdkundeunterricht. — † Direktor Dr. Ernst Oehlmann-Hannover: Finnland. — Prof. Fritz Braun-Deutsch-Eylau: Die Landschaftsformen des russischen Litauens. — Dr. Johannes Petersen-Hamburg: Mitteleuropäische Binnenschiffahrtswege und die Notwendigkeit ihres Ausbaues. — Direktor Prof. Heinrich Fischer-Berlin: Kriegs- und schulgeographische Schnitzel: Geologie und Geographie im Unterricht der höheren Schule. Usa. — Prof. Dr. Max Friederichsen-Königsberg i. Pr.: Das geograph. Universitätsstudium. — Prof. Dr. Chr. Goeders-Berlin-Lichterfelde: Die Erdkunde im künftigen Lehrplan der Kriegsakademie. — Seminarlehrer Hermann Itschner-Weimar: Die Stellung der Kinematographie im Geographie-Unterricht. — Dr. Hermann Haack-Gotha: Die Erdkunde im Lehrplan der Berliner Begabtenschulen. — Geographischer Literaturbericht Nr. 58—142.

Heft 5/6: Direktor Prof. Dr. A. Rohrmann-Hannover: Ernst Oehlmann †. — Oberlehrer Dr. R. Fritzsche-Halle a. S.: Die Dobrudscha. — Prof. Dr. B. Mendelsohn-Posen: Probleme der Gebirgsbildung. — Prof. Dr. A. Sachs-Breslau: Ueber den Aufbau der Erde und die Eruptivgesteine. — Oberlehrer Dr. R. Rein-Düsseldorf: Zum Erlaß über den Geologieunterricht an preußischen höheren Lehranstalten. — Oberlehrer Dr. K. Krause-Leipzig: Schülervorträge im erdkundlichen Unterricht. — Dr. R. Hennig-Berlin, z. Zt. Libau: Das Wetter in Norddeutschland im Winter 1917/18. — Kleine Mitteilungen. — Geographischer Literaturbericht Nr. 143—220. — Sonderbeilage 2: Ernst Oehlmann †.

Hacks, Stadtschulrat Dr., **Jakob**, Die Grundbegriffe der Volkswirtschaftslehre. Breslau 1917. 116 S. M 1.40.

Wirtschaftliche und soziale Belehrungen sollen in Preußen mit dem Geschichts-Unterricht verbunden werden, und zwar geht diese Forderung z. T. auf Althoff zurück. Jetzt, infolge des Krieges, wird auch der Mathematiker und Naturwissenschaftler bisweilen auf volkswirtschaftliche Dinge zu sprechen kommen, etwa auf Fragen der Statistik oder der Volks-Ernährung. Hierzu kann das vorliegende Buch manche Anregung geben. Auf einige besonders gelungene und zeitgemäße Abschnitte sei kurz hingewiesen. Der volkswirtschaftliche Schaden des Alkohols wird eindringlich klargelegt und dabei gezeigt, daß in der Friedenszeit die Herstellung und der Vertrieb des Alkohols größere Werte verschlungen haben als unser Heer. Auch nach den Kosten des Weltkrieges wird gefragt. In diesen und in manchen anderen Fällen ergibt sich, daß das Geld kein geeigneter Wertmesser ist, ein besserer die erforderte Arbeit und die benutzte Bodenfläche. — In einer neuen Auflage könnte die Darstellung, namentlich im Eingang, etwas konkreter werden, und einige Besonderheiten wegfallen, die von dem österreichischen Volkswirtschaftler Effertz übernommen sind. G. Junge (Steglitz).

* * *

Grosse Männer. Studien zur Biologie des Genies. Herausgegeben von W. Ostwald. 4. Band. Richard Meyer, Victor Meyer. Leben und Wirken eines deutschen Chemikers und Naturforschers (1848-1897). 471 S. Mit 1 Titelbild, 79 Textabbildungen und der Wiedergabe eines Originalbriefes. Leipzig 1917, Akademische Verlagsgesellschaft. geh. M 18.—.

Auch der vierte Band des Ostwaldschen Sammelwerkes reiht sich würdig seinen Vorgängern an. In diesem Bande bringt Prof. R. Meyer in Braunschweig ein äußerst interessantes Bild von dem Entwickelungsgang und dem Wirken seines der chemischen Wissenschaft nur allzufrüh entrissenen Bruders, des berühmten Chemikers Victor Meyer. Als Grundlage bei der Abfassung des Werkes dienten seinem Verfasser die Erinnerungen einer gemeinsam verlebten, überaus glücklichen Jugend und die durch das ganze Leben fortgesetzten innigen Beziehungen sowie eine große Anzahl von Briefen an Verwandte, Freunde und an Fachgenossen. Aus diesen Schriftstücken, die zum Teil vollständig, zum Teil auszugsweise abgedruckt sind, tritt uns eine zauberhafte Persönlichkeit entgegen, die von Kindheit an bewundert und geliebt, frei vom materiellen Sorgen sich dem Forscherberuf in rastloser, überaus erfolgreicher Tätigkeit hingegeben hat. Wir lernen einen überaus vielseitigen Gelehrten kennen, der neben seiner wissenschaftlichen Arbeit erfüllt war von künstlerischen und literarischen Interessen, einen Lehrer, der durch sein liebenswürdiges, lebhaftes Wesen begeisternd wirkte auf seine Schüler im Hörsaal, seine Mitarbeiter im Laboratorium und der es verstand, eine große Anzahl von selbständigen Forschern heranzubilden, einen Meister der chemischen Wissenschaft, dessen schaffende Tätigkeit in erster Linie der organischen Chemie galt. Seine organischen Arbeiten führten ihn zum Ausarbeiten seiner klassischen Methoden zur Dampfdichtebestimmung, die wiederum den Ausgangspunkt bildeten zu Untersuchungen über das Verhalten der Gase und Dämpfe bei den höchsten zu seiner Zeit erreichbaren Temperaturen und an die sich andere physikalisch-chemische und anorganisch chemische Arbeiten anschlossen.

Das Werk zerfällt in zwei Teile; der erste schildert den Lebensgang, der zweite ist der wissenschaftlichen Lebensarbeit gewidmet. Den Schluß bildet ein Anhang mit biographischen Mitteilungen über die in dem Werke genannten Persönlichkeiten. Als Zierde des vornehm ausgestatteten Bandes sind die zahlreichen Textbilder der Männer, die im Leben des Gelehrten eine Rolle gespielt haben und das Titelbild des Forschers anzusehen.

Der beschränkte Raum verbietet es ausführlicher auf den Inhalt des trefflichen Werkes einzugehen; seine Lektüre, die einen großen Genuß bietet, kann aufs Wärmste empfohlen werden.

K. Schwab (Frankfurt a. M.).

* * *

Lübsen, H. B., 1. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Neubearbeitet von Prof. Dr. A. Donadt. 282 S. 28. Aufl. geb. M 4.80. 2. Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung (Differential- und Integralrechnung) zum Selbstunterricht. Mit Rücksicht auf das Notwendigste und Wichtigste. Neubearbeitet von Prof. Dr. A. Donadt. Mit 63 Figuren im Text. 440 S. 9. Aufl. Leipzig, F. Brandstetter. geb. M 8.75.

Die Lübsenschen Lehrbücher erfreuten sich früher, namentlich beim Selbststudium einer großen Beliebtheit; die noch immer notwendigen Neuauflagen zeugen dafür, daß sie auch heute noch, wo die Zahl der ähnliche Zwecke verfolgenden Darstellungen der verschiedensten Gebiete der Mathematik eine stets wachsende ist, noch im Gebrauche sind. Die Bücher sind in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt; daher erklärt sich die ausführliche, vielfach sehr breite Darstellung, die aber neueren Anforderungen nicht immer entspricht. Eine Umarbeitung in letzterem Sinne, unter Benutzung auch von graphischen Veranschaulichungen (das Lehrbuch der Arithmetik und Algebra enthält keine einzige Figur) könnte den Wert der Bücher, der für den Selbstunterricht, besonders auch in dem reichen, vollständig durchgerechneten Aufgabenmaterial, bezw. in der Beifügung der Aufgabenergebnisse in der Infinitesimalrechnung besteht, wesentlich erhöhen.

Die Einführung der negativen Zahlen in der Arithmetik ist ganz veraltet und läßt sich wesentlich klarer gestalten. Die Seite 162 gebrachte Erklärung des Wurzelziehens aus dem r des Wortes radix sollte endlich nach den ausführlichen Erörterungen in Tropfke's Geschichte der Elementarmathematik I. S. 215—220 verschwinden.

Die Infinitesimalrechnung bietet ein gewisses historisches Interesse insofern, als nach der Erklärung des Differentialquotienten mittelst des Grenzbegriffes, in den §§ 79—99 sich eine Darstellung der Leibnizschen Infinitesimalmethode findet, ein „mystisches Operieren mit unendlich kleinen Größen", wie es Klein in seiner Elementarmathematik von höherem Standpunkt I, S. 471, bezeichnet. Diese Erörterungen, die beim Benutzen des Buches übergangen werden können, dürften auch ganz verschwinden.

K. Schwab (Frankfurt a. M.).

* * *

Neuendorff, R., Praktische Mathematik. I. Teil. Aus Natur und Geisteswelt. Band 341. 2. verbesserte Auflage. 106 S. Mit 29 Figuren im Text und einer Tafel. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. geb. M 1.50.

Bevor der 2. Teil der „Praktischen Mathematik" erscheinen konnte, ist von dem 1. Teil, der 1911 zum ersten Male erschien, eine Neuauflage notwendig geworden. Aus dem ersten Bändchen wurde das Kapitel über Flächen- und Körpermessung für den 2. Teil herausgenommen und dafür zwei Abschnitte über das kaufmännische Rechnen und über Wahrscheinlichkeitsrechnung an ihre Stelle gesetzt, so daß das erste Bändchen außer diesen beiden Kapiteln jetzt noch graphische Darstellungen, verkürztes Rechnen, das Rechnen mit Tabellen und mechanische Rechenhilfsmittel bringt. Das Bändchen ist sehr gut geeignet, um über die Bedeutung des Rechnens für das praktische Leben und der dazu vorhandenen Hilfsmittel zu unterrichten.

K. Schwab (Frankfurt a. M.).

* * *

Großmann, M., Darstellende Geometrie. Teubners Leitfäden für den mathematischen und technischen Hochschulunterricht. Mit 109 Fig. im Text. V u. 137 S. Leipzig 1915, B. G. Teubner. geb. M 2.80.

Das Bändchen ist als Ergänzung des eigentlichen Unterrichts in darstellender Geometrie gedacht. Es behandelt zuerst die Darstellungsmethoden: Grund- und Aufrißverfahren (das als bekannt vorausgesetzt wird) mit Anwendung auf Schattenkonstruktionen, Axonometrie, Zentralprojektion und Photogrammetrie, sodann gibt es eine Auslese über die Darstellung von Kurven und Flächen: Allgemeine Eigenschaften, Topographische, Kegel-, Zylinder-, Drehungs- und Kegelflächen, Kurven und Flächen zweiten Grads, sowie Durchdringungen von Kegel- und Zylinderflächen. Die Figuren sind, wie es sich in einem Buch über darstellende Geometrie von selbst versteht, sauber ausgeführt. Das Bändchen enthält verschiedenes, was sonst nur in ausführlichen Werken zu finden ist und vermag mancherlei Anregungen zu geben.

E. Beutel (Stuttgart).

* * *

Großmann, Prof. Dr. **M.**, an der Eidg. Technischen Hochschule in Zürich. Einführung in die darstellende Geometrie. Leitfaden für den Unterricht an höheren Lehranstalten. 3. Auflage, mit 85 Uebungsaufgaben und 121 Figuren in besonderem Heft. 88 S. Basel 1917, Helbing & Lichtenhahn. M 3.60.

Ein ansprechendes Büchlein, das in 7 Kapiteln behandelt: Normalprojektion auf eine Ebene; Normalprojektion auf zwei zueinander rechtwinklige Ebenen; Darstellung der Vielflache, ihrer Netze, Schnitte und Durchdringungen; Darstellung von krummen Flächen; die Kegelschnitte als kollineare Bilder des Kreises; Elemente der Axonometrie; Elemente der Zentralprojektion. Die Darstellung ist sehr knapp, doch im allgemeinen für das Verständnis des Lesers ausreichend; die Figuren sind gelegentlich recht klein ausgefallen. Geschichtliche Angaben fehlen ganz. Aufgefallen sind mir: Tetraëder, normal (statt senkrecht), Strichelung (statt Punktieren) bei unsichtbaren Gebilden. Der Preis des Büchleins scheint mir trotz der gegenwärtigen Teurung zu hoch, da doch die Klischees schon vorhanden waren.

E. Beutel (Stuttgart).

Düsing, Prof. Dr. K., Die Elemente der Differential- und Integralrechnung in geometrischer Methode. Ausgabe B. Für höhere technische Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Mit zahlreichen Beispielen aus der technischen Mechanik von Diplom-Ingenieur Ernst Preger, sowie vielen Uebungen und 77 Figuren. XI. und 111 S. 4. verbesserte Aufl. Leipzig 1917. Dr. Max Jänecke. M 2.30.

Die Herleitung der Differentialformeln auf geometrischem Wege führt bei manchen Formeln rasch und anschaulich zum Ziel; will man jedoch sämtliche Formeln an der Hand von Figuren herleiten, so ist dies zuweilen nur durch eine gewisse Künstlichkeit in der geometrischen Deutung zu erreichen, so z. B. S 17, wo in $y = x^4 = x^3 x$ sowohl x als x^3 Seiten eines Rechtecks sind. Bei der Ableitung der Potenz ist das arithmetische Verfahren mittels des binomischen Satzes entschieden das Bessere. Doch wird mancher Lehrer gerne zur Abwechslung oder zur Erzielung größerer Anschaulichkeit sich gelegentlich der geometrischen Methode bedienen, wozu das vorliegende Büchlein als Führer empfohlen werden kann, das mir auch für den Selbstunterricht recht geeignet erscheint. An Einzelheiten wären noch zu erwähnen: S. 44 bei der IV. Regel führt zweckmäßige Substitution rascher zum Ziel; S. 45, Zeile 7 von oben, ist der Satzbau mangelhaft; S. 54, Zeile 10 v. o. ist zu beanstanden, ebenso S. 66, 2. Beispiel; die hier behandelte Spitze ist die sog. Schnabelspitze oder Spitze 2. Art, die sich von der gewöhnlichen Spitze 1. Art, dem Rückkehrpunkt sowohl analytisch wie gestaltlich unterscheidet; eine kurze Bemerkung hierüber sollte jedenfalls nicht fehlen. Zu bedauern ist, daß unter den zahlreichen Beispielen sich nur ganz wenige finden, die nicht schon in anderen Aufgabensammlungen vorhanden sind. Es gibt doch sicherlich in den technischen Wissenschaften genügend rechnerisch einfache Beispiele, die anderweitig, z. B. in der Sammlung von Dingeldey, noch nicht behandelt sind und jeder Lehrer ist außerordentlich dankbar für neue und reizvolle Uebungsaufgaben.

E. Beutel (Stuttgart).

* * *

A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig 1916, J. A. Barth. 64 S. M 2.40.

Die Ansicht Kants, daß Raum und Zeit a priori gegebene Formen des menschlichen Erkenntnisvermögens sind, hat die Mathematiker, insbesondere C. F. Gauß, nie befriedigen können. Die alte Streitfrage ist in neuerer Zeit wieder lebendig geworden. Der Versuch von Michelson (1881) veranlaßte den holländischen Physiker H. A. Lorentz zur Aufstellung der (speziellen) Relativitätstheorie (1892), die dann von dem zu früh verstorbenen H. Minkowski und insbesondere von A. Einstein weiter ausgebaut wurde. Sie läßt „Raum für sich und Zeit für sich zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbstständigkeit bewahren.“ (Minkowski).

Einsteins Arbeit ist für das bezeichnete Forschungsgebiet von historischer Bedeutung. Sie bietet die denkbar weitgehendste Verallgemeinerung der speziellen Relativitätstheorie von Lorentz, deren Kenntnis sie voraussetzt.

Im Abschnitt A legt der Verfasser die prinzipiellen Erwägungen zum Postulat der Relativität dar. Während die spezielle Relativitätstheorie die Naturgesetze für den Fall gleichförmig gegeneinander bewegter Bezugssysteme untersucht, wünscht die allgemeine Relativitätstheorie die Gesetze der Physik so zu fassen, daß sie in bezug auf beliebig bewegte Systeme gelten. Nun fordert unser Verstand, daß die allgemeinen Naturgesetze durch Gleichungen ausdrückbar sind, die für alle Koordinatensysteme gelten, die also beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sind. Daraus fließt, daß der formale Teil der Relativitätstheorie nichts anderes ist als die Invariantentheorie der in Frage kommenden Substitutionsgruppen.

Diese Invariantentheorie bietet E. im Abschnitt B dar und zwar im Anschluß an Ricci und Levi-Civita, unter Benutzung der von diesen Autoren angewandten Symbolik. Es werden da die Gesetze der Bildung und Verknüpfung zahlreicher Vektoren, Tensoren, Gradienten und Skalare kurz erörtert. Diese mathematische Theorie ermöglicht im Abschnitt C die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes im Gravitationsfelde abzuleiten sowie die Feldgleichungen der Gravitation bei Abwesenheit von Materie in mehrfacher Gestalt aufzustellen und zu erörtern. Daß auch die physikalischen Gesetze der Materie sich zwanglos in die allgemeine Relativitätstheorie einfügen, zeigt Abschnitt D an zwei Beispielen.

In Abschnitt E weist Einstein nach, daß aus den erwähnten Bewegungsgleichungen nebst den zugehörigen Feldgleichungen in erster Annäherung das Newtonsche Attraktionsgesetz, in zweiter Annäherung die Erklärung der von Leverrier entdeckten Perihelbewegung des Merkur fließt. Insbesondere das zweite Ergebnis war der speziellen Relativitätstheorie bisher unerreichbar. So darf man es wohl mit E. als einen überzeugenden Beweis für die Richtigkeit seiner Theorie ansehen.

Die Abhandlung ist ein Sonderdruck aus Bd. 49 der Ann. d. Physik. E. will also seine Untersuchungen weiteren Kreisen zugänglich machen. Da würde es sich wohl empfehlen, die mathematischen und physikalischen Untersuchungen einer solchen, naturgemäß hochgreifenden Abhandlung an genau bezeichnete Ergebnisse verbreiteter Handbücher anzuknüpfen, um so auch dem minder umfassend gerüsteten Leser die verständnisvolle Einarbeit zu ermöglichen.

Prof. Dr. W. Dieck (Sterkrade, z. Zt. im Felde).

Verzeichnis der zur Besprechung eingegangenen Bücher.

NB. Die Verpflichtung zu einer Besprechung von unaufgefordert eingehenden Werken kann nicht übernommen werden; auch liegt es nicht in der Möglichkeit, solche zurückzusenden.

Börner, H., Lehrbuch der Physik. 7. Aufl. Mit 382 Abb. Berlin 1917, Weidmann. geb. M 6.40.

Brohmer, P., Sexuelle Erziehung im Lehrerseminar. Mit 11 Abb. (Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. II. Folge, Heft 3.) Leipzig 1917, Teubner. M 0.80.

Eckstein, K., Die Schädlinge im Tier- und Pflanzenreich und ihre Bekämpfung. 3. Aufl. Mit 36 Fig. (Aus Natur und Geisteswelt 18.) Leipzig 1917, Teubner. geb. M 1.50.

Eucken, R., Der Sinn und Wert des Lebens. 5. Aufl. Leipzig 1917, Quelle & Meyer. geb. M 4.40.

Faraday, M., Naturgeschichte einer Kerze. 6. Aufl. Mit Bildnis und 35 Abb. Leipzig 1917, Quelle & Meyer. geb. M 2.60.

Fortschritte der Psychologie und ihrer Anwendungen. Herausg. Dr. K. Marbe. IV, 6 und V, 1. Leipzig 1917, Teubner. à M 3.—.

Glaser, Rob., Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie. (Sammlung Göschen 779.) Leipzig 1917, Göschen. geb. M 1.—.

Abschluß dieser Nummer am 14. Sept. 1918.