ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973

Seria: Mechanika z. 52 Nr kol. 389

Józef Wojnarowski

Instytut Mechaniki i Podstaw
Konstrukcji Maszyn

GRAF JAKO JĘZYK STRUKTURY UKŁADU

Streszczenie. W pracy po wprowadzeniu pojęcia układu wykazano, że złożony układ mechaniczny można zastąpić grafem biegunowym albo grafem przepływu sygnału uzyskanym przez połączenie grafów elementarnych - identycznych z grafami czwórników. W tym sensie graf w sposób przejrzysty przedstawia złożone zależności wewnętrzne i spełnia funkcję języka struktury układu. Izomorfizm między układem konkretnym a grafem pozwala sprowadzić analizę układu konkretnego do badania topologicznych własności grafów.

1. Wstęp

Współczesne tendencje algorytmizacji i automatyzacji obliczeń prowadzą w konsekwencji do poszukiwania i wprowadzenia nowych metod do analizy układów mechanicznych. Te wymagania spełniają grafy biegunowe i grafy przepływu sygnału [1,2], które jako gałąź teorii homologii pozwalają w prosty sposób przedstawić złożone zależności wewnętrzne struktury układu. W tym sensie teoria grafów pozwala określić konfigurację układu mechanicznego jak również w oparciu o zdegenerowany graf biegunowy wyznaczyć widmo częstości drgań własnych. Zastosowanie metody grafów pozwala ponadto na prowadzenie analizy i syntezy układu wprost w oparciu o przekształcenia grafów, co ma istotną wartość tak w dziedzinie identyfikacji modeli, jak i w spełnianiu funkcji języka struktury układu.

W szerszym pojęciu teorię grafów można więc uważać za język struktury systemu, a jako taki zarówno za środek do wyrażania struktury układu, jak i opracowywania metody obliczeń, umożliwiającej przedstawienie algorytmu do analizy i syntezy określonej klasy układów mechanicznych.

2. Pojęcie układu

Podstawowym pojęciem w przedmiocie badań obiektów materialnych jest pojęcie układu. Ściśle związane z nim są inne, również wymagające dyskusji pojęcia relacji i struktury. Pojęcia te są często rozumiane w sposób intuicyjny. W szerokim znaczeniu sformalizowanie tych pojęć z wyodrębnieniem układu: abstrakcyjnego, topologicznego i fizycznego można znaleźć w pracy [3], z której podane zostały ważniejsze definicje wykorzystywane w dalszych rozważaniach.

Zakładając, że dany jest podzbiór M w przestrzeni euklidesowej E^n, relację dwuargumentową R można określić jako podzbior iloczynu kartezjańskiego X^2M

$$R \subset X^2 M.$$

Relacja R jest zbiorem par uporządkowanych $\langle x,y \rangle$ pewnych elementów zbioru M. Para $\langle x,y \rangle$ nazywa się zrelacjonowaną, jeżeli

$$xRy \Leftrightarrow \langle x,y \rangle \in R \tag{1}$$

Definicja 1

Relacja dwuaragumentowa R nazywa się relacją strukturalną w zbiorze M wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary zbiorów niepustych X i Y takich, że

$$X \cup Y = M, \qquad X \cap Y = \emptyset \tag{2}$$

istnieją elementy $x \in X$ i $y \in Y$, dla których zachodzi conajmniej jedna z relacji

$$xRy \quad \text{lub} \quad yRx. \tag{3}$$

Definicja 2

Układem abstrakcyjnym U nazywa się relację dwuargumentową R, strukturalną w zbiorze M przestrzeni euklidesowej E^n.
Z określenia tego wynika, że układ nie może zawierać elementów izolowanych, tzn., że każdy element zbioru M pozostaje w określonej relacji R z conajmniej jednym innym elementem zbioru M.
Zbiór M jest polem relacji strukturalnej R

$$M = \mathcal{F} R. \tag{4}$$

Elementy pola relacji R (elementy zbioru M), nazywa się wierzchołkami układu R. Jeżeli element r jest parą $\langle x,y \rangle$, to x jest początkiem, zaś y końcem elementu r, czyli

$$r = \langle x,y \rangle \longrightarrow x = \text{początkiem}, \quad y = \text{końcem elementu } r.$$

Definicja 3

Układ abstrakcyjny nazywa się układem zorientowanym, jeśli określająca go relacja jest antysymetryczna, tzn. spełnia warunek

$$x,y \in M \Rightarrow (xRy \longrightarrow y \text{ non } Rx). \tag{6}$$

Dla określenia układu topologicznego wykorzystuje się pojęcie jednowymiarowego sympleksu $s_r (s_r \in S_r)$, napiętego na wierzchołkach x_r, y_r. Jeżeli dany jest układ abstrakcyjny R i przekształcenie przyporządkowujące elementom $r = \langle x_r, y_r \rangle$ układu podzbiór S_r sympleksów jednowymiarowych, to mówi się, że przekształcenie jest reprezentacją geometryczną układu R.

Oznaczając

$$S = \Gamma(R), \tag{7}$$

przekształcenie Γ można opisać zależnością

$$S = \Gamma(R) \Longrightarrow \Gamma(r) = S_r \subset S; \quad S_r \neq \emptyset, \tag{8}$$

gdzie S jest zbiorem sympleksów jednowymiarowych o własnościach

$$s_r \in S_r \Longleftrightarrow s_r = (x_r, y_r), \quad r = \langle x_r, y_r \rangle. \tag{9}$$

Definicja 4

Kompleks simplicjalny jednowymiarowy określony przez wzory (8) i (9) nazywa się układem topologicznym T, rozpiętym na relacji strukturalnej R.

Sympleksy $s \in S$ nazywa się krawędziami układu a wierzchołki sympleksów - wierzchołkami układu.

Zgodnie z definicją sympleksu krawędzie układu można dowolnie rozciągać nie zmieniając własności topologicznych układu, które są konsekwencją określonej konfiguracji połączeń elementów układu czyli jego struktury.

Definicja 5

Strukturą układu topologicznego nazywa się klasę $\bar{S}$ układów homemorficznych, spełniającą warunek

$$\bar{S}_1 = \bar{S}_2 \Longleftrightarrow (\text{układy } S_1 \text{ i } S_2 \text{ są homeomorficzne}).$$

Jeżeli istnieje taka funkcja f, która przyporządkowuje każdemu sympleksowi $s_i \in S$ inną liczbę naturalną α_i, to jest to funkcja opisująca określona na zbiorze spójnym S sympleksów jednowymiarowych.

Definicja 6

Układ topologiczny T, dla którego została określona funkcja opisująca f nazywa się grafem zdeterminowanym G

$$f: \; T \longrightarrow G. \tag{10}$$

Dla analizowanych zagadnień zachodzi konieczność powiązania podstawowych pojęć topologii z obiektami, gdyż bez takiego związku pojęcia te nie

przedstawiają wartosci dla fizyka. Stąd celowym jest wprowadzenie pojęcia układu k o n k r e t n e g o, rozumianego jako reprezentację fizyczną układu topologicznego.

Zajmując się dalej taką sytuacją, w której T ma strukturę fizykalną co oznacza, że układ topologiczny T jest nie tylko przestrzenią topologiczną ale, że wśród wszystkich sympleksów dwuwymiarowych określonych na T wyróżnia się pewne, posiadające określone cechy fizyczne.

Definicja 7.

Homeomorfizm φ kompleksu symplicjalnego T, zachowujący klasę określonych cech fizycznych nazywa się układem konkretnym K

$$\varphi : T \longrightarrow K, \tag{11}$$

gdzie φ przekazuje strukturę cech fizycznych z układu topologicznego T do układu konkretnego K.

Szczególnym przypadkiem układu konkretnego będzie układ mechaniczny M. Wtedy jednak grupa φ cech fizycznych będzie "słabsza" niż dla układu konkretnego

Definicja 8.

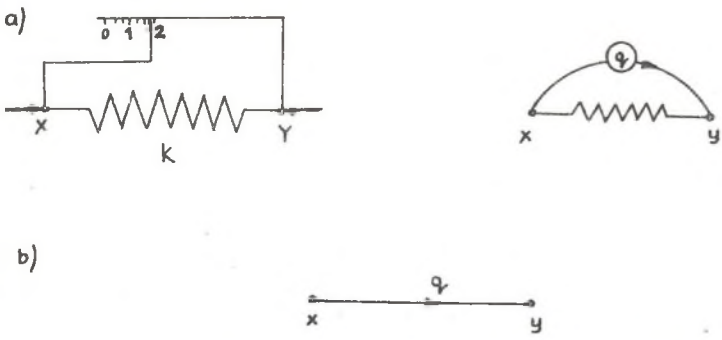
Obiektem nazywa się układ konkretny o zdeterminowanej strukturze $\bar{S}$, realizujący w pewnym języku l określone zadanie z

$$O \longrightarrow K\ (\bar{S})^{z}_{l}. \tag{12}$$

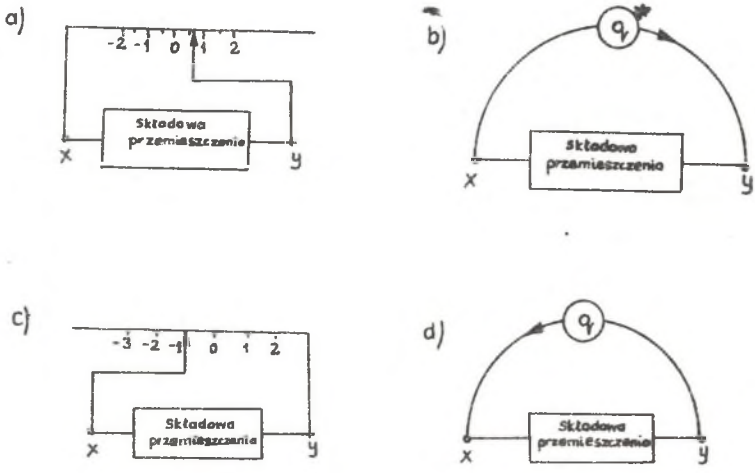
3. Graf jako język struktury układu

Każdy układ mechaniczny można opisać modelem topologicznym w postaci grafów, zbudowanych z sympleksów jednowymiarowych z wyróżnionymi punktami, zwanymi biegunami. Sympleksy te mogą być czwórnikami bądź krawędziami - w grafach biegunowych. Graf układu mechanicznego to struktura sympleksów jednowymiarowych s_r, których bieguny x_r, y_r są reprezentowane przez punkty - grafy zerowe, pomiędzy którymi można dokonać pomiaru zmiennych.

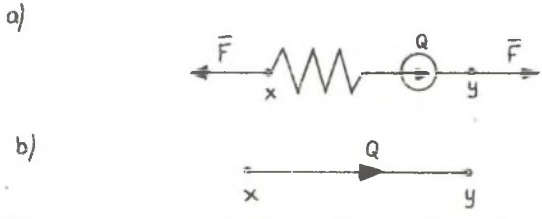
Zmienne opisujące układy fizyczne wyraża się ilościowo przez porównanie, czyli pomiar z wielkością przyjętą za wzorzec. Każdy pomiar jest związany z istnieniem dwu punktów, zwanych biegunami, które mogą być obiektami fizycznymi, np. w układzie mechanicznym mogą to być końce sprężyny (rys. 1). W sensie topologicznym pomiar można przedstawić krawędzią - linią łączącą dwa bieguny (grafy zerowe). Dla każdego pomiaru potrzebne są więc co najmniej dwa grafy zerowe, czyli wierzchołki x_r i y_r. Wynik pomiaru może być wyrażony liczbą dodatnią lub ujemną zależnie od sposobu włączenia przyrządu pomiarowego (rys. 2). Oznacza to, że orientacja grafu zależy od koncepcji wykorzystanej do topologicznego przedstawienia składowych.



Rys. 1. Łączenie przyrządu do pomiaru zmiennej biegunowej q
a) układ sprężyny, b) graf biegunowy obrazujący pomiar



Rys. 2. Wpływ sposobu włączenia przyrządu na wynik pomiaru;
x) oznacza dodatnie wskazanie przyrządu pomiarowego



Rys. 3. Włączenie przyrządu do pomiaru zmiennej przepływowej Q;
a) układ sprężyny, b) graf biegunowy obrazujący pomiar

Wszystkie możliwe pomiary i odpowiadające im zmienne zależnie od możliwości pomiarów wielkości fizycznej dzielą się na dwie grupy. Zmienne, podczas pomiaru których, miernik włączony jest równolegle do biegunów, nazywa się zmiennymi biegunowymi (równoległymi) i oznaczane są symbolem q (rys. 2). W układach mechanicznych zalicza się do nich przemieszczenia liniowe lub kątowe oraz odpowiadające im prędkości i przyspieszenia. Zmienne, mierzone za pomocą miernika włączonego bezpośrednio do układu, nazywa się zmiennymi przepływowymi (szeregowymi) i oznaczone są symbolem Q. Zalicza się do nich siłę $\vec{F}$ lub moment $\vec{M}$ (rys. 3).

Możliwość wykonania pomiarów zmiennych biegunowych i przepływowych dla każdej pary biegunów pozwala przyporządkować im te zmienne. Do typowych mechanicznych elementów dwubiegunowych należą: sprężyna, tłumik oraz pary złożone ze środka masy poruszającego się ciała bądź osi ciała w ruchu obrotowym i środka masy Ziemi. Wynika to z prawa równości masy bezwładnej i ważkiej. Odpowiednio bowiem do tego jak rozpatruje się pojęcie bezwładności i grawitacji, te same masy występują raz pod wpływem jedynie sił bezwładności, a drugi raz pod wpływem zarówno sił bezwładności, jak i grawitacji [4]. Innymi słowy powstające siły bezwładności są generowane przez pola grawitacji, co oznacza, że istnieje biegun pola g wytwarzający te siły, utożsamiany z Ziemią Z przyjmowany za ogólny biegun dla elementów dwubiegunowych[x)].

Równanie biegunowe elementów dwubiegunowych wynikają z praw fizyki i można je zapisać w przyjętym układzie współrzędnych.

Niech $Q = Q_{n1} = (Q_i, Q_d, Q_s)$ - oznacza jednokolumnową macierz składowych przepływowych: inercji, dyspacji i sprężystości, zaś $q = q_{n1} = (\ddot{q}, \dot{q}, q)$ - macierz kolumnę składowych biegunowych przyśpieszenia prędkości i przemieszczenia. Związki fizyczne zwane równaniami biegunowymi przyjmą postać

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{q}, \tag{13}$$

gdzie

$$\mathbf{A} = |a_{ij}| = \begin{Vmatrix} \mu D^2 & 0 & 0 \\ 0 & bD & 0 \\ 0 & 0 & K \end{Vmatrix} \tag{14}$$

μ - miara inercji, b - współczynnik tłumienia, k - stała sztywności sprężyny, $D = \frac{d}{dt}$.

Zmienne Q i q mogą generować nowy układ zmiennych, np. prędkość $v = \dot{q}$ oraz impuls J

$$J = \int_0^t Q \cdot dt = D^{-1} Q \tag{15}$$

x) w układach pneumatycznych uogólniony biegun utożsamiany jest z atmosferą.

i wtedy równania biegunowe (13) przyjmują postać

$$\mathbf{J} = \mathbf{B}\mathbf{v} \,, \tag{16}$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \left|b_{ij}\right| = \left\|\begin{array}{c|c|c} \mu & 0 & 0 \\ \hline 0 & bD^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & kD^{-2} \end{array}\right\| \tag{17}$$

Stosując zapis rachunku operatorowego, macierze kwadratowe współczynników równań biegunowych (14) i (17) można zapisać w postaci

$$\mathbf{A} = \left\|\begin{array}{ccc} \mu s^2 & 0 & 0 \\ 0 & bs & 0 \\ 0 & 0 & K \end{array}\right\| \tag{14a}$$

oraz

$$\mathbf{B} = \left\|\begin{array}{c|c|c} \mu & 0 & 0 \\ \hline 0 & bs^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & ks^{-2} \end{array}\right\| , \tag{14b}$$

gdzie

s - argument przekształcenia Laplace'a.

Wykorzystując podstawowe własności zmiennych przepływowych i biegunowych grafu, można opisać strukturę układu mechanicznego i jego konfigurację.

Zasadnicza własność tych zmiennych polega na tym, że spełniają one postulaty analogiczne do praw Kirchhoffa [1].

I P o s t u l a t w i e r z c h o ł k o w y

Algebraiczna suma zmiennych przepływowych(szeregowych)w każdym wierzchołku grafu układu jest równa zeru. Dla grafu układu postulat wierzchołkowy przyjmuje zwięzłą postać macierzową

$$\mathbf{HQ} = \mathbf{0}, \tag{18}$$

gdzie

H - macierz zbieżności (incydencji) grafu,

Q = Q_{n1} - macierz kolumnowa zmiennych przepływowych wraz z wymuszeniem siłowym.

Wyodrębniając liniowo niezależną część z równania (18) otrzymuje się

$$\mathbf{SQ} = \mathbf{0}, \tag{19}$$

gdzie S - macierz odcięć grafu z elementami s_{ij}, wyraża strukturę układu i nazywa się macierzą s t r u k t u r y u k ł a d u.

Zero - jedynkowe elementy tej macierzy są:

$$si_j = \begin{cases} 1, \text{ jeśli j-ta krawędź wychodzi z i-tego wierzchołka } x_i, \\ -1, \text{ jeśli j-ta krawędź wchodzi do i-tego wierzchołka } x_i, \\ 0, \text{ jeśli j-ta krawędź nie jest indydentna w wierzchołku } x_i. \end{cases}$$

II P o s t u l a t dla zamkniętych ścieżek krawędzi grafa.

Algebraiczna suma zmiennych biegunowych (równoległych), przyporządkowanych skierowanym krawędziom w każdym wyodrębnionym konturze grafu układu, jest równa zeru. Postulat ten w zapisie macierzowym przyjmuje postać

$$\mathbf{Cq} = \mathbf{0}, \tag{20}$$

gdzie **C** - macierz cyklomatyczna grafu z elementami c_{ij}

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jeśli j-ta krawędź w i-tym konturze jest skierowana zgodnie} \\ -1, \text{ jeśli j-ta krawędź w i-tym konturze jest skierowana niezgodnie} \\ 0, \text{ jeśli j-ta krawędź nie wchodzi w i-ty kontur;} \end{cases}$$

q = q_{n1} - macierz kolumnowa zmiennych biegunowych wraz z kinematycznymi źródłami wymuszenia.

Wyodrębniając z grafu drzewo napinające D_0 (najlepiej drzewo Langrange'a) można wyodrębnić gałęzie $\mathcal{T}$ i cięciwy $\mathcal{V}$, tworzące jego dopełnienie. W takim przypadku macierze odcięć i cyklomatyczną można zapisać w postaci [6]

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} E & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & E & S_{21} & S_{22} \end{Vmatrix} \tag{21}$$

oraz

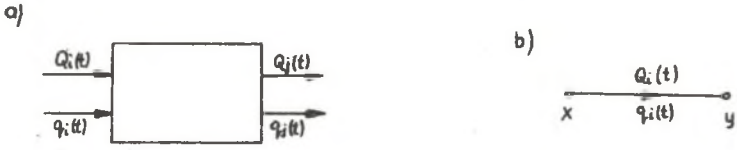
$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} & E & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & E \end{Vmatrix}, \tag{22}$$

gdzie **E** - macierz jednostkowa,
0 - macierz zerowa.

Łatwo zauważyć, że analiza układów mechanicznych w oparciu o metodę grafów sprowadza się do spełnienia równań węzłowych dla zmiennych przepływowych oraz równań oczkowych dla zmiennych biegunowych. Równania te wyrażają odpowiednio zasadę d'Alemberta i równania więzów nałożonych na układ.

4. Różniczkowanie równania ruchu układu

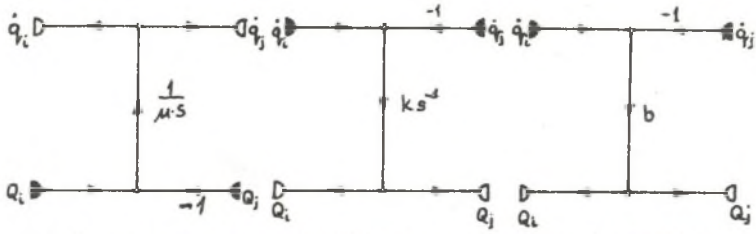
Graf jako model układu opisuje zarówno jego strukturę jak i związki między zmiennymi biegunowymi i przepływowymi. Stanowi więc reprezentację równań różniczkowych ruchu układu. W sensie teorii grafów analizuje się model układu, który może być albo strukturą czwórników (rys. 4a), albo grafów biegunowych, czyli tzw. dwójników (rys. 4b). Zgodnie z równaniami (13) i (16) w dowolnej chwili czasowej iloraz zmiennej przepływowej i biegunowej jest stały i wyraża transmitancję mechaniczną sympleksu s_i (krawędź grafu).



Rys. 4. Czwórnik i graf biegunowy (dwójnik)

W układzie zmiennych siła uogólniona Q i przemieszczenie q - transmitancje te wynoszą odpowiednio:

- dla masy o inercji μ ; μs^2,
- dla sprężyny o sztywności k : k,
- dla tłumika wiskotycznego o współczynniku tłumienia b : bs.



Rys. 5. Grafy czwórników masy, sprężyny i tłumika

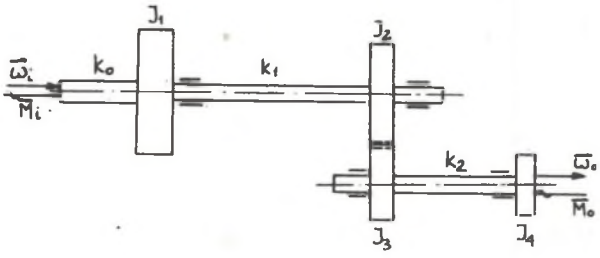
W układzie zmiennych siła uogólniona Q i prędkość uogólniona $\dot{q}$ transmitancje są odpowiednio równe μs, b, ks^{-1}. Odwrotność transmitancji krawędzi zwie się impedancją mechaniczną. Na rysunku 5 pokazano tylko jedne z możliwych grafy czwórników dla masy, sprężyny i tłumika. Drogą inwersji ścieżek można uzyskać inne kombinacje czwórników [2]. Na rysunku tym węzły - źródła zaciemniono w przeciwieństwie do węzłów-upustów.

Na rysunku 6 przedstawiono dla analogicznych elementów grafy zdegenerowane dwójników ale w układzie zmiennych Q i q.

Rys. 6. Grafy zdegenerowane dwójników masy, sprężyny i tłumika

Na przykładzie przekładni prostej o przełożeniu i (rys. 7) pokazano sposób praktyczny konstruowania grafu przepływu sygnału (rys. 8) i grafu biegunowego (rys. 9).

Stosując regułę Masona dokonano redukcji grafu do czwórnika zastępczego (rys. 8c). Na rysunku 9b pokazano drzewo napinające graf D_o. Tworząc graf jako strukturę zdegenerowanych dwójników zakodowanych elementami a_{ij} macierzy równań biegunowych, można wyznaczyć równanie charakterystyczne układu. Z założeń analizy układów mechanicznych interesujące jest wyznaczenie reakcji dowolnego członu na przyłożone siłowe $Q_{\gamma 2}$ bądź kinematyczne wymuszenie $q_{\gamma 1}$. Przyjmując za współrzędne uogólnione $q_{\gamma 2}$, równanie różniczkowe można zapisać metodą gałęzi w oparciu o równanie (19).

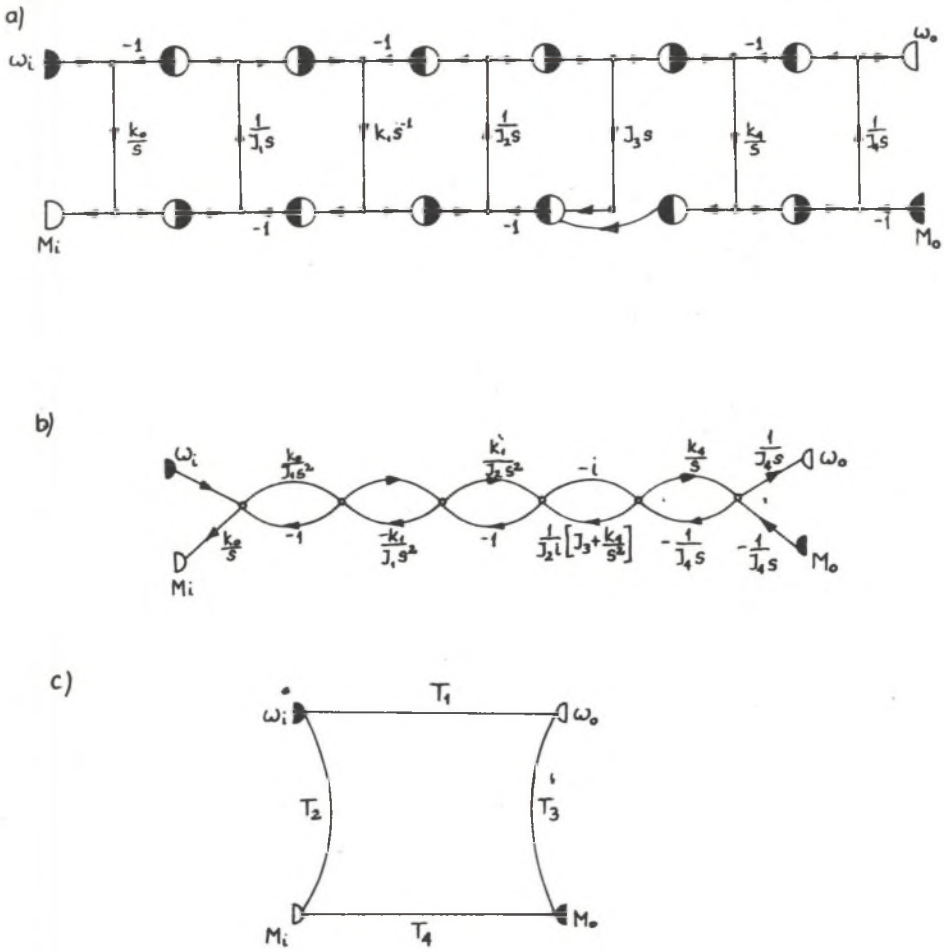


Rys. 7. Schemat jednostopniowej przekładni

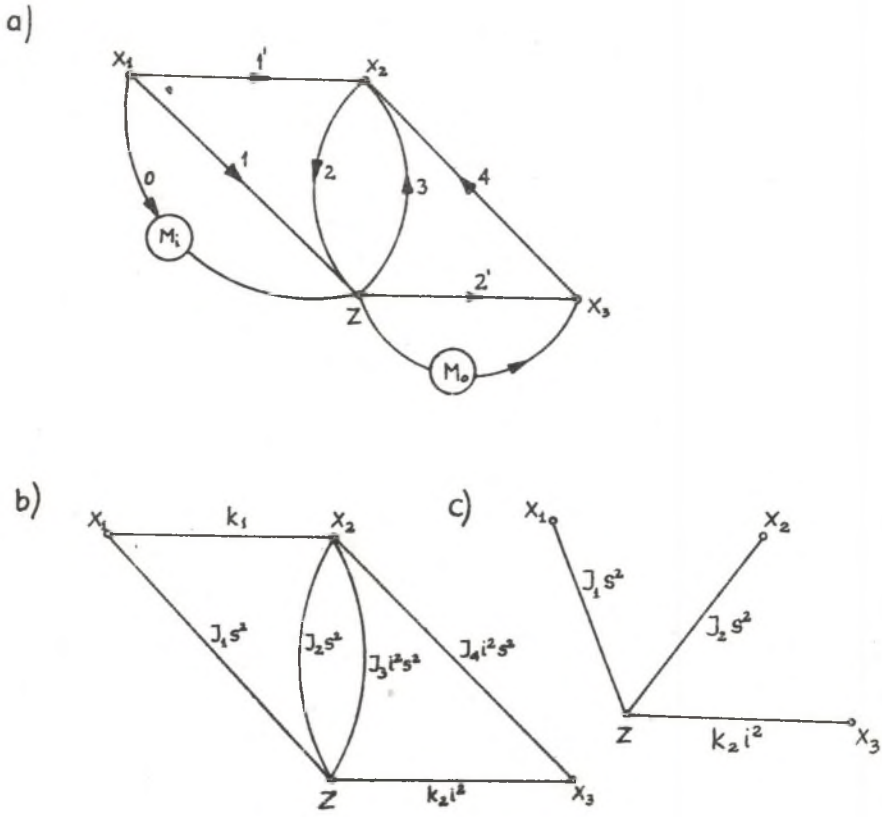
Podstawiając do równania (19) zależność (21) oraz za $Q = Q_{n1} = (Q_{n1}, Q_{\gamma 2}, Q_{\gamma 1}, Q_{\gamma 2})$.

Otrzymuje się

$$\begin{Vmatrix} E & O & S_{11} & S_{12} \\ O & E & S_{21} & S_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Q_{\gamma 1} \\ Q_{\gamma 2} \\ Q_{\gamma 1} \\ Q_{\gamma 2} \end{Vmatrix} = 0. \tag{23}$$



Rys. 8. Graf przepływu sygnału
(a), uproszczony (b), zastępczy (c); T_1, T_2, T_3 i T_4 - zastępcze transmitancje gałęzi wyznaczone regułą Massona



Rys. 9. Graf biegunowy
(a), zdegenerowany graf biegunowy (b), drzewo napinające D_o (c)

$$\begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} & E & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & E \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} q_{\gamma 1} \\ q_{\gamma 2} \\ q_{\gamma 1} \\ q_{\gamma 2} \end{Vmatrix} = 0. \tag{24}$$

Uwzględniając w zależności (23) równania biegunowe (13) w postaci

$$\begin{Vmatrix} Q_{\gamma 2} \\ Q_{\gamma 1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} q_{\gamma 2} \\ q_{\gamma 1} \end{Vmatrix} = A \begin{Vmatrix} q_{\gamma 2} \\ q_{\gamma 1} \end{Vmatrix}, \tag{25}$$

otrzymuje się po przekształceniach

$$\begin{Vmatrix} E \\ 0 \end{Vmatrix} Q_{\gamma 1} + \begin{Vmatrix} 0 & S_{11} \\ E & S_{21} \end{Vmatrix} A \begin{Vmatrix} 0 & E \\ S_{11}^T & S_{21}^T \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} q_{\gamma 2} \\ q_{\gamma 1} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} S_{12} \\ S_{22} \end{Vmatrix} Q_{\gamma 2} = 0 \tag{26}$$

Jeżeli uwzględnić zależność

$$q_{\gamma 1} = - \begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} q_{\gamma 1} \\ q_{\gamma 2} \end{Vmatrix} \tag{27}$$

wynikającą z równań (24), to równanie (26) można przekształcić do następującej postaci

$$Q_{\gamma 1} + \begin{Vmatrix} 0 & S_{11} \end{Vmatrix} A \left\{ \begin{Vmatrix} E \\ S_{21}^T \end{Vmatrix} q_{\gamma 2} + \begin{Vmatrix} 0 \\ S_{11}^T \end{Vmatrix} q_{\gamma 1} \right\} + S_{12} Q_{\gamma 2} = 0 \tag{28}$$

oraz

$$\begin{Vmatrix} E & S_{21} \end{Vmatrix} A \left\{ \begin{Vmatrix} E \\ S_{21}^T \end{Vmatrix} q_{\gamma 2} + \begin{Vmatrix} 0 \\ S_{11}^T \end{Vmatrix} q_{\gamma 1} \right\} + S_{22} Q_{\gamma 2} = 0. \tag{29}$$

Układ równań (29) określa przestrzeń konfiguracyjną, opisaną przez blok macierzy $q_{\gamma 2}$, natomiast układ równań (28) po wyznaczeniu współrzędnych uogólnionych $q_{\gamma 2}$ pozwala określić reakcję więzów, które opisuje blok macierzy $Q_{\gamma 1}$, czyli

$$Q_{\gamma 1} = - S_{11} A_{21} q_{\gamma 2} - S_{11} A_{22} \left\| S_{11}^T \; S_{21}^T \right\| \left\| \begin{matrix} q_{\gamma 1} \\ q_{\gamma 2} \end{matrix} \right\| - S_{12} Q_{\gamma 2} \tag{30}$$

5. Równanie charakterystyczne układu

Znane metody wyznaczania równań charakterystycznych względnie częstości związane są z ustaleniem różniczkowych równań ruchu. Mimo że postać tych równań zależy od przyjętego układu współrzędnych to widmo częstości i współczynników tłumienia jest niezmiennicze względem uogólnionych współrzędnych układu. Ten fakt wpływa na racjonalny ich wybór.

Zastosowanie metody grafów spełnia ten warunek, mało tego, właściwy wybór kolejności redukcji zabezpiecza automatycznie uzyskanie równania częstości według kolejności potęg. Metoda topologiczna wyznaczania równania charakterystycznego oparta jest na zasadzie Maxwella [5].

Z A S A D A M A X W E L L A. Wyznacznik Grafu G jest równoważny wyznacznikowi charakterystycznemu układu równań różniczkowych zaprezentowanych przez graf

$$\Delta(s^2) = \Delta G = 0. \tag{31}$$

Dla otrzymania równania charakterystycznego wystarczy wyznaczyć wyznacznik zdegenerowanego grafu układu, który jest równy sumie wielkości wszystkich t możliwych drzew grafu

$$\Delta G = \sum_{k=1}^{t} T_k, \tag{32}$$

gdzie

$T_k = \prod_{i=1}^{m} T_{ki}$ - wielkość drzewa grafu,

m - liczba krawędzi k-tego drzewa,

T_{ki} - transmitancja i-tej gałęzi drzewa k.

Równanie (32) jako iloczyn ilorazów zmiennych biegunowych i przepływowych czyli iloczyn transmitancji, reprezentowanych przez gałęzie zdegenerowanego grafu biegunowego jest niezmienne dla opisywanego układu i przedstawia równanie charakterystyczne. Wykorzystując algorytm redukcji grafu można uzyskać równanie charakterystyczne wprost dokonując rozwinięcia według drzewa napinającego graf Do [6], bądź przez rozłożenie na elementarne łańcuchy. Równanie charakterystyczne zapisuje się wtedy w postaci

$$\Delta(s) = \Delta G(D_o) + \sum_{1 \leq i \leq r} T_{ki} \Delta G(D_o, S_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq r} T_{ki} \cdot T_{kj} \Delta G(D_o, s_i, s_j) + \ldots + \prod_{1 \leq i \leq r} T_{ki} \tag{33}$$

gdzie

$G(D_o)$ - wyznacznik podgrafu z usuniętym drzewem D_o

$T_{ki}, T_{kj}, \ldots T_{kr}$ - transmitancja krawędzi s_i, $s_j, \ldots$, s_r drzewa D_o ($r = n - 1$ - liczba wierzchołków grafu bez ogólnego bieguna z),

$\Delta G(D_o, s_i)$ - wyznacznik podgrafu z usuniętym drzewem D_o i krawędzią s_i po koincydencji wierzchołka, który ta krawędź łączyła z biegunem z.

$\Delta G(D_o, s_i, s_j)$ - wyznacznik podgrafu z usuniętym drzewem D_o i krawędziami s_i, s_j, po koincydencji wierzchołków, które te krawędzie łączyły z biegunem z, itd.

$\Delta G(D_o, s_i, \ldots s_r) = 1$ - wyznacznik podgrafu zredukowanego do punktu.

Jako przykład rozważona zostanie przekładnia prosta o przełożeniu i (rys. 7). Po zredukowaniu układu na oś 1 zdegenerowany graf i drzewo napinające D_o przedstawia rys. 9b,c.

Dokonując redukcji podgrafu z usuniętym drzewem D_o uzyskuje się zgodnie ze wzorem (33) ciąg podgrafów, których wyznaczniki zestawiono w piątej kolumnie tablicy 1.

Równanie charakterystyczne, które jest wprost równaniem częstości przyjmuje postać

$$\omega^6 \left[I_1 I_4 i^2 (I_3 i^2 + I_2)\right] - \omega^4 \left[I_3 I_4 k_1 i^4 + I_1 I_4 k_1 i^2 + I_2 I_4 k_1 i^2 + I_1 I_3 K_2 i^4 + \right.$$

$$\left. + I_1 I_4 k_2 i^4 + I_1 I_2 k_2 i^2\right] - \omega^2 i^2 k_1 k_2 \left[(I_3 + I_4) i^2 + I_1 + I_2\right] = 0. \qquad (34)$$

W niektórych przypadkach korzystnie jest rozłożyć graf na elementarne łańcuchy [5]. Wtedy wyznacznik grafu można zapisać w postaci

$$\Delta G = \sum_{i=1}^{v} T_i \, \Delta G \, (T_i), \qquad (35)$$

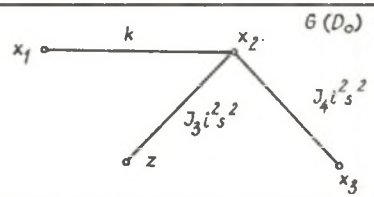
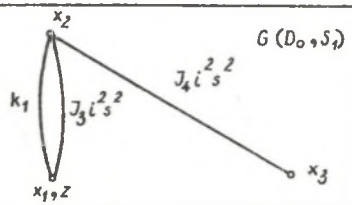
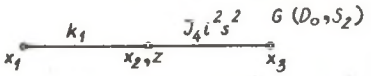
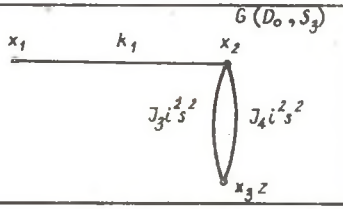
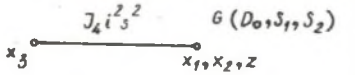
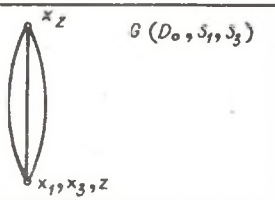
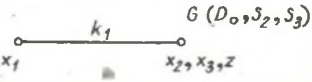
gdzie

T_i - wielkość i-tego elementarnego łańcucha łączącego wybrane wierzchołki X_r, X_s;

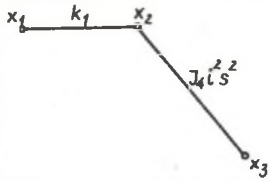
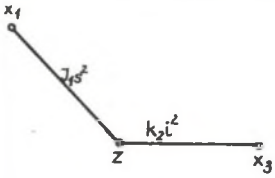
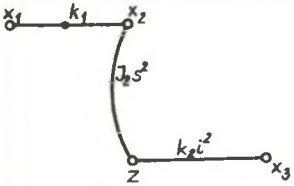
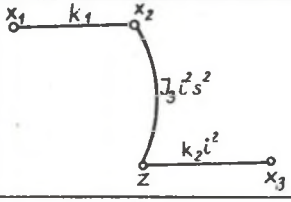
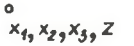
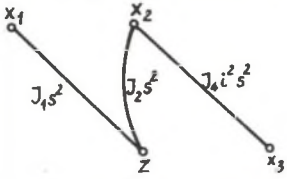
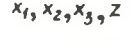
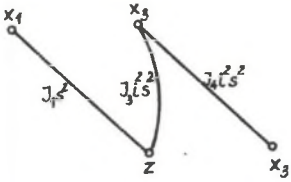
$\Delta G(T_i)$ - wyznacznik podgrafu otrzymanego przez koincydencje wszystkich wierzchołków i tego elementarnego łańcucha,

v - wszystkie elementarne łańcuchy grafu.

Tablica 1

Iloczyn transmitancji gałęzi drzewa D_o T_{ki}	Numery koincydentnych wierzchołków x_i, z	Podgraf po usunięciu drzewa D_o krawędzi si...sr $Gi(D_o,S_i.....S_r)$	Wyznacznik podgrafu $\Delta G_i(D_o,Si..Sr)$
-	-		$k_1I_3I_4i^2S^4$
I_2, s^2	x_1,z		$I_4i^2(k_1+I_3S^2)$ S^2
I_2, z			$I_4k_1i^2S^2$
K_2i^2	x_3, z		$(I_3+I_4)k_1i^2S^2$
$I_1I_2S^4$	x_1,x_2,z		$I_4i^2S^2$
$I_1k_2S^2i^2$	x_1, x_3, z		$I_3i^2S^2$ + $+I_4i^2S^2+k_1$
$I_2k_2i^2S^2$	x_2,x_3, z		k_1
$I_1I_2K_1$ i^2S^4	x_1,x_2, x_3, z		1

Tablica 2

Elementarny łańcuch (x_r, x_3) napięty na wierzchołkach x_1 i x_3	Wielkość elementarnego łańcucha T_i	Podgraf otrzymany na koincydencji wierzchołków i-tego łańcucha $G(T_i)$	Wyznacznik podgrafu $\Delta G(T_i)$
	$k_1 I_4 i^2 s^2$		$I_1 s^2 + I_2 s^2 + I_3 i^2 s^2 + I_4 i^2 s^2$
	$I_1 k_2 i^2 s^2$		$I_1 + I_2 + (I_3 + I_4) i^2 s^2$
	$I_2 k_1 k_2 i^2 s^2$		1
	$k_1 k_2 I_3 i^4 s^2$		1
	$I_1 I_2 I_4 i^2 s^6$		1
	$I_1 I_3 I_4 i^4 s^6$		1

W tablicy 2 pokazano sposób praktycznego zastosowania metody rozkładu na elementarne łańcuchy $\tau(x_i, x_j)$*). Po wyznaczeniu sumy zgodnie ze wzorem (35) uzyskuje się równanie częstości (34). Warto zauważyć że rozwinięcie według elementarnych łańcuchów może być łatwo przystosowane do obliczenia na maszynie cyfrowej.

Jeszcze bardziej wygodną metodę otrzymywania równania charakterystycznego jest metoda degenerowania drzewa grafu. Istota tej metody polega na tym, że graf G rozdziela się na dwa podgrafy G_I i G_{II} przez rozcięcie grafu wyjściowego poprzez k wierzchołków. Przy umiejętnym wykonaniu przekroju grafu uzyskuje się minimalne zbiory drzew D_I i D_{II} podgrafów składowych. Upraszcza to wyznaczanie zbioru drzew D złożonego grafu G.

Zgodnie z [7] zbiór drzew D napinający graf G określa zależność

$$\{D\} = \frac{\partial^{k-1}(D_I \times D_{II})}{\partial(\tau'_{12} \cup \tau''_{12})\,\partial(\tau'_{23} \cup \tau''_{23}) \ldots \partial(\tau'_{k-1,k} \cup \tau''_{k-1,k})}, \qquad (36)$$

gdzie

$D_I \times D_{II}$ - iloczyn kartezjański zbiorów drzew podgrafu G_I i G_{II},

$\tau'_{rs} \cup \tau''_{rs}$ - podgraf, otrzymany jako suma zbiorów krawędzi łańcuchów τ'_{rs} i τ''_{rs} pomiędzy rozciętymi wierzchołkami.

6. Wnioski

Konstruując graf przepływu sygnału lub graf biegunowy można jasno przedstawić strukturę układu i określić szereg jego własności. Wykorzystując bowiem postulaty wierzchołkowe i zamkniętych ścieżek grafu łatwo ustalić równania różniczkowe ruchu, a w oparciu o zdegenerowany graf biegunowy układu można uzyskać wprost równanie charakterystyczne bądź równanie częstości. Prowadzenie analizy w oparciu o graf można również dokonać drogą bezpośredniej jego redukcji, wykorzystując przekształcenia elementarne bądź regułę Masona. Można też graf układu wykorzystać wprost jako schemat modelujący.

W podanym sensie, graf jest więc zarówno środkiem wyrażania struktury układu, jak i sposobem postępowania z siecią sprzężeń między elementami a więc całkowicie spełnia funkcję języka układu.

*) Łańcuchem $\tau(x_i, x_j)$ nazywa się ciąg wzzłów i krawędzi prowadzące od wierzchołka x_i do wierzchołka x_j.

LITERATURA

1. N.F. Ilinskij, W.K. Cacenkin; Priłożenije tieorii grafow k zadaczam elektromiechaniki, Energia, Moskwa 1968.
2. L. Robichand, M. Boisvert, J. Robert; Grafy przepływu sygnałów, PWN, Warszawa 1968 (tłum,z j. franc.).
3. S. Bellert, H. Woźniacki; Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych, WNT, Warszawa 1968.
4. E. Einstein; Istota teorii względności, PWN, Warszawa 1958, 70. (Tłum. z j. ang.),
5. S. Sieszy, N. Bałabanian; Analiz liniejnych cepiej, Gos.Energet.,Moskwa - Leningrad 1963.
6. J. Wojnarowski; Proceed. Polish-Chechoslowak Conf., Machine Dynamics V2, Gliwice 1971,
7. S. L. Hakimi, D.G. Green; Generation and realisation of trees and k - - trees, I EEE trans. on Circ. Theory V. CT11, 1964.

ГРАФ КАК ЯЗЫК СТРУКТУРЫ СИСТЕМЫ

Р е з ю м е

В работе после введения понятия системы было доказано, что сложную механическую систему можно заменить полюсным графом или графом протекания сигнала полученным путём соединения элементарных графов идентичных с графами четверичными. В этом смысле граф ясним образом представляет сложные внутренние зависимости и исполняет функцию языка структуры системы. Изоморфизм между реальной системой и графом позволяет свести анализ реальной системы к исследованию топологических свойств графов.

GRAPH AS A LANGUAGE OF THE SYSTEM'S STRUCTURE

S u m m a r y

In the paper fter introduction of the system the idea was prooved that combined mechanical system can be replaced by terminal graph or signal-flow graphs which were obtained by connection of elementary graphs - identical with four - terminal graphs. In this meaning graph in a simple way represents internal complicated depedencies and performs the function of the language system's structure. Isomorphisms between the real system and the graph permit to bring the analysis of the real system to the investigation of topological properties of graphs.