

Karol Wyleżych

Instytut Mechaniki i Podstaw  
Konstrukcji Maszyn

## WYZNACZANIE NIEKTÓRYCH WŁASNOŚCI LEPKOSPĘŻYSTYCH WALCA GUMOWEGO PODDANE- GO SKRĘCANIU

**Streszczenie.** Praca zawiera wyniki długotrwałych badań na skręcanie walca gumowego wykonanego z mieszanki WT-01, na podstawie których wyznaczono zakres liniowości materiału, natychmiastowy moduł sprężystości poprzecznej oraz funkcję peźzania. Porównano doświadczalny przebieg funkcji peźzania z przebiegiem wyznaczonym analitycznie.

### 1. Wstęp

Jednym z najbardziej aktualnych zagadnień praktycznych w mechanice ciała stałego jest odkształcalność ośrodków lepkospężystych, gdyż w rzeczywistości każde ciało w odpowiednich warunkach wykazuje pewne odchylenia od prawa Hooke'a.

W celu ilościowego sposobu opisu zachowania się ciał lepkospężystych wprowadzono modele mechaniczne złożone z układów sprężyn gromadzących energię układu podczas odkształcenia i stosujących się do prawa Hooke'a, oraz tłumików wypełnionych cieczą newtonowską rozpraszających w postaci ciepła energię układu podczas odkształcania i podlegających prawu Newtona.

Aby opisać własności ciał lepkospężystych w zależności od metody badania, ciała te poddaje się obserwacji peźzania, relaksacji, reakcji materiału na obciążenia okresowo zmienne i inne [1,2,3]. Reologiczne równania stanu tworzywa o budowie łańcuchowej można zapisać równaniami różniczkowymi wiążącymi ze sobą naprężenia, odkształcenia i ich pochodne różnych rzędów względem czasu, które mogą być liniowe lub nieliniowe [4, 5]. Bardzo często zamiast równań różniczkowych do opisu rozpatrywanego zjawiska stosuje się zależności przedstawione w formie całkowej [5].

Podstawą teorii liniowych ciał lepkospężystych jest zasada superpozycji Boltzmanna stwierdzająca, że odkształcenie wywołane przez różne, przykładane z upływem czasu obciążenia jest sumą odkształceń wywoływanych przez obciążenia poszczególne.

Liniowymi ciałami stałymi lepkospężystymi podlegającymi prawu dziedziczenia, przyjęto nazywać ciała, których fizyczne zależności między naprężeniami a odkształceniami można zapisać w postaci

$$e_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t K(t, \tau) s_{ij}(\tau) d\tau \quad (1)$$

$i, j=1, 2, 3$

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (2)$$

gdzie

$e_{ij}(t)$  - dewiator stanu odkształcenia w chwili  $t$ ,

$\theta(t)$  - odkształcenie objętościowe w chwili  $t$ ,

$s_{ij}(t)$  - dewiator stanu naprężenia w chwili  $t$ ,

$\sigma(t)$  - średnie naprężenie hydrostatyczne w chwili  $t$ ,

$K(t, \tau)$  - jądro pełzania odkształcenia postaciowego,

$K_1(t, \tau)$  - jądro pełzania odkształcenia objętościowego.

Uwzględniając zasadę superpozycji Boltzmanna oraz przyjmując, że historia obciążenia nie zaczyna się od  $-\infty$ , lecz w chwili  $t_0 = 0^+$  powyższe związki można przedstawić następująco:

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \frac{\partial s_{ij}(\tau)}{\partial \tau} \Phi(t-\tau) d\tau \quad (3)$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \Phi_1(t-\tau) d\tau, \quad (4)$$

gdzie

$\Phi(t-\tau)$  - funkcja pełzania odkształcenia postaciowego

$\Phi_1(t-\tau)$  - funkcja pełzania odkształcenia objętościowego.

Funkcje pełzania określają wpływ historii obciążenia w chwili  $\tau$  na odkształcenie w chwili  $t$ .

Literatura techniczna zawiera cały szereg publikacji z zakresu badań własności mechanicznych i reologicznych szkieł, żelatyny oraz żywic syntetycznych [6, 7, 8, 10].

Przyjmując, że pełzanie przedstawia sobą sumę jego liniowej i nieliniowej części, Tietiers [9] podaje współczynniki równania aproksymacyjne go eksperymentalnej krzywej naprężenia odkształcenia przy skręcaniu walca gumowego.

Ponieważ zasada superpozycji Boltzmanna dotyczy materiałów lepkosprężystych w zakresie liniowym, przeto zachodziło pytanie, czy wybrany gatunek zwulkanizowanej gumy posiada ten zakres, a jeżeli tak, to w jakich granicach. O wybranym gatunku gumy zadecydowało jego dosyć powszechne zastosowanie w praktyce przemysłowej.

## 2. Cel badań

Dla oszacowania zachowania się elementów gumowych w warunkach eksploatacyjnych, przyjmowanie własności gumy uzyskanych z krótkotrwałych prób statycznych prowadzi często do mylnych osądów co do ich reologicznego zachowania się [2, 11]. Statystyczna teoria ciał gumopodobnych dowodzi, że ciała te podlegają prawu Hooke'a przy ścinaniu, mimo że nie podlegają jemu przy rozciąganiu i ściskaniu [12]. Dlatego też w badaniach własnych przeprowadzono skręcanie walca gumowego, pozwalające na realizację odkształcenia postaciowego i wyznaczenie ścinających charakterystyk lepko-sprężystych materiału.

Długotrwałe próby pełzania walca gumowego poddanego skręcaniu pozwalają między innymi na wyznaczenie:

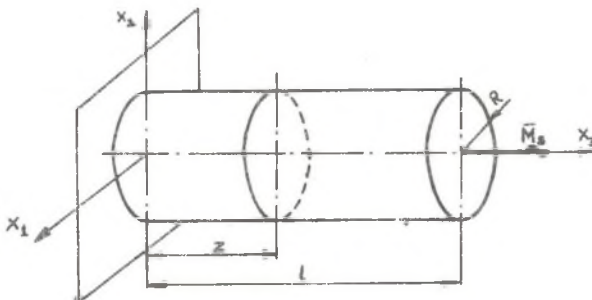
- zakresu liniowości,
- funkcji pełzania,
- natychmiastowego modułu sprężystości poprzecznej, oraz
- charakterystyki statycznej dla dowolnej chwili czasowej  $t$ .

Wyznaczony zakres liniowości pozwalał na wyznaczenie funkcji pełzania wynikającej z zasady superpozycji Boltzmanna oraz obliczenie natychmiastowego modułu sprężystości poprzecznej.

## 3. Funkcja pełzania przy skręcaniu walca lepko-sprężystego

Jeśli walec obciążyć w czasie stałym momentem skręcającym  $M_s$  przyłożonym na końcu próbki zgodnie z osią pręta (rys. 1), wtedy kąt skręcania jest funkcją zarówno czasu  $t$  oraz miejsca  $z$

$$\varphi = \varphi(z, t). \quad (5)$$



Rys. 1. Schemat skręcania walca

Przyjęto, że oś pręta pokrywa się z osią  $z$  oraz zastosowano układ współrzędnych walcowych  $(r, \varphi, z)$   $z = x_3$ .

Zasada superpozycji Boltzmana dla skręcania na podstawie (3) ma postać

$$\epsilon_{z\varphi}(t) = \int_0^t \frac{\partial \sigma_{z\varphi}(r, \tau)}{\partial \tau} \Phi(t-\tau) d\tau, \quad (6)$$

gdzie

$\epsilon_{z\varphi}$  - odkształcenie,

$\sigma_{z\varphi}(r, t)$  - naprężenie styczne w punkcie odległym o  $r$  od osi pręta w chwili  $t$ .

Ze względu na quasi statyczny stan obciążenia moment skręcający siłą, działający w dowolnym przekroju, jest stały i równy momentowi zewnętrznemu  $M_s$ . Między naprężeniem  $\sigma_{z\varphi}$  a momentem skręcającym dla przekroju kołowego o promieniu  $R$  zachodzi zależność [13]:

$$\sigma_{z\varphi}(r) = \frac{2 M_s}{\pi R^4} r, \quad (7)$$

przy czym składowa dewiatora odkształcenia ma postać

$$\epsilon_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} \right), \quad (8)$$

gdzie

$U_\varphi$  - składowa przemieszczenia w kierunku obwodowym,

$U_z$  - składowa przemieszczenia w kierunku osiowym.

Ponieważ  $U_z = 0$  i  $U_\varphi = r\varphi$ , to zależność (8) sprowadza się do postaci

$$\epsilon_{z\varphi} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (9)$$

Korzystając z warunku geometrycznego

$$\varphi = \int \frac{z}{r} \quad (10)$$

wzór (9) na odkształcenie przybiera postać

$$\epsilon_{z\varphi} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}, \quad (11)$$

gdzie

$\dot{\varphi}$  - kąt odkształcenia postaciowego.

Podstawiając (11) do (6) otrzymuje się

$$\frac{1}{2} \dot{f}(t) = \int_0^t \frac{\partial \sigma_{z\varphi}(r, \tau)}{\partial \tau} \Phi(t - \tau) d\tau. \quad (12)$$

Dla dalszych przekształceń wykorzystuje się funkcje pomocnicze Heavisidea  $H(t)$  oraz delty Diraca  $\delta(t)$ :

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases} \quad \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ \infty & \text{dla } t = 0 \end{cases} \quad (13)$$

posiadających następujące własności:

$$\frac{dH(t)}{dt} = \delta(t); \quad \int_0^t f(t, \tau) \delta(\tau) d\tau = f(t, 0) H(t); \quad \int_0^t f(t) \delta(t) dt = f(0). \quad (14)$$

Jeśli działające w chwili  $t = 0$  naprężenie wywołane przyłożonym na końcu próbki stałym momentem skręcającym wynosi  $\sigma_{z\varphi}^0(r)$ , to

$$\sigma_{z\varphi}(r, t) = \sigma_{z\varphi}^0(r) H(t). \quad (15)$$

Podstawiając (15) do (12) otrzymuje się

$$\frac{1}{2} \dot{f}(t) = \sigma_{z\varphi}^0(r) \Phi(t). \quad (16)$$

Między kątem odkształcenia postaciowego  $\dot{f}(t)$ , a kątem skręcenia końca próbki  $\varphi(l, t)$  na podstawie (10) istnieje związek

$$\dot{f}(t) = \varphi(l, t) \frac{r}{l}. \quad (17)$$

Uwzględniając (16) i (17) oraz (7) wzór na funkcję pełzania opisuje wyrażenie

$$\Phi(t) = \frac{\pi R^4}{4 l} \frac{\varphi(l, t)}{M_s(t)}. \quad (18)$$

skąd natychmiastowy moduł sprężystości wynosi

$$G_0 = \frac{2 l M(0)}{\pi R^4 \varphi(1,0)}, \quad (19)$$

gdzie

- l - długość próbki walcowej,
- R - promień próbki,
- M(0) - moment skręcający przyłożony na końcu próbki,
- $\varphi(1, t)$  - kąt skręcenia końca próbki w czasie próby pełzania,
- $\varphi(1, 0)$  - kąt skręcenia końca próbki w chwili przyłożenia obciążenia.

#### 4. Materiał badany

Badanie przeprowadzono na mieszance gumowej WT-01 stosowanej na tulejki i uszczelki, o składzie zestawionym w tablicy 1. Z mieszanki wykonano próbki cylindryczne o średnicy 30 mm i długości 90 mm zwulkanizowane w piecu laboratoryjnym w temperaturze 150° przez 30 min.

Podstawowe własności fizyko-mechaniczne próbek są następujące:

ciężar właściwy	1,24 G/cm <sup>3</sup>
twardość Shorea	75° Sh
wydłużenie przy zerwaniu	320%
moduł Younga przy wydłużeniu 300%	130 kG/cm <sup>2</sup>
plastyczność Defo	27000 G/mm
wydłużenie trwałe po 24 godz. przy wydłużeniu 200% i 1 godz. wypoczynku	32%.

#### 6. Omówienie badań

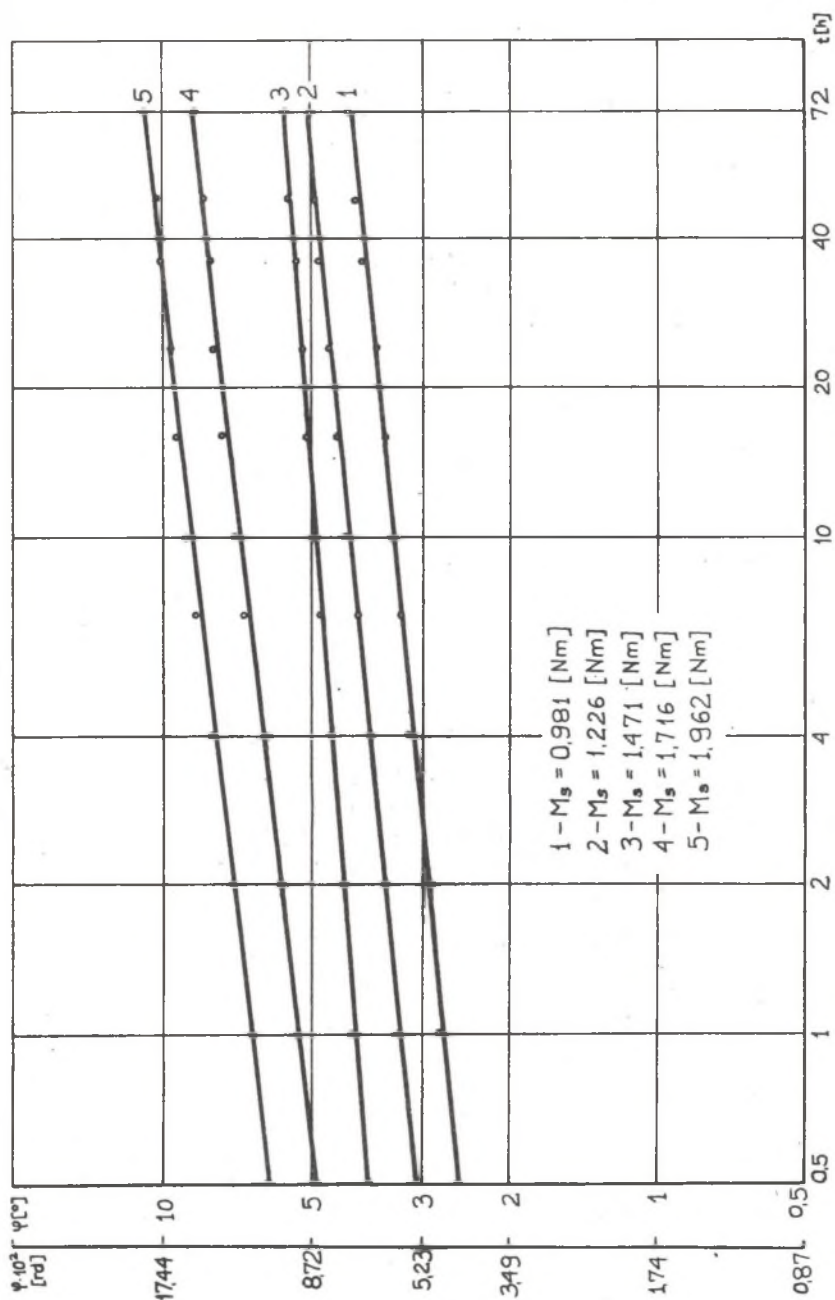
Próbe pełzania przeprowadzono w temperaturze pokojowej w czasie 72 godz. obciążając po trzy próbki wybranymi momentami skręcającymi. Uzyskane wyniki naniesiono na wykres w układzie podwójnie logarytmicznym - na osi poziomej odmierzone czas a na osi pionowej kąt skręcenia (rys. 2). Układ punktów wskazuje, że krzywą pełzania można dostatecznie dobrze aproksymować linią prostą.

Następnie w układzie liniowym  $M_g - \varphi$  (rys. 3) dla stałych czasów 1; 10; 120; i 960 minut wykreślono charakterystyki statyczne, z których wynika, że dla zakresu kąta skręcenia 4°30' materiał zachowuje się jako liniowo lepkosprężysty, czyli podlegający zasadzie superpozycji Boltzmanna.

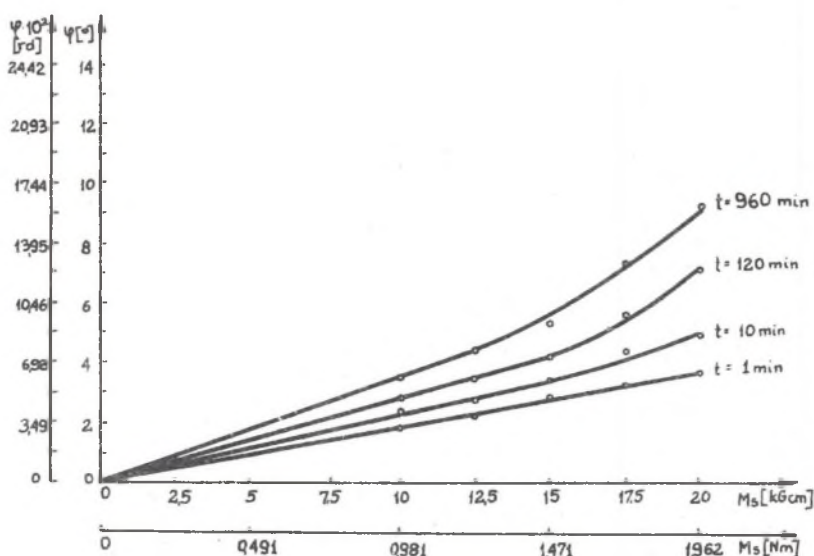
Ponieważ w zakresie liniowym w pełni mieści się tylko próba przy obciążeniu momentem skręcającym  $M_g = 0,981 \text{ Nm}$ , to na podstawie wyników tej próby wyznaczono funkcję pełzania przy skręcaniu  $\varphi(t)$ .

Krzywą pełzania w układzie podwójnie logarytmicznym opisano równaniem

$$y = b + ax, \quad (20)$$



Rys. 2. Przebieg pełzania walca gumowego przy różnych wielkościach momentu skręcającego



Rys. 3. Charakterystyki statyczne odpowiadające różnym czasom obciążenia

gdzie

$$y = \lg(\psi - A)$$

$$x = \lg t$$

$\psi$  - kąt skręcenia

$A$ ;  $B$ ;  $\alpha$  - stałe.

Wtedy

$$\lg(\psi - A) = \lg B + \alpha \lg t,$$

czyli

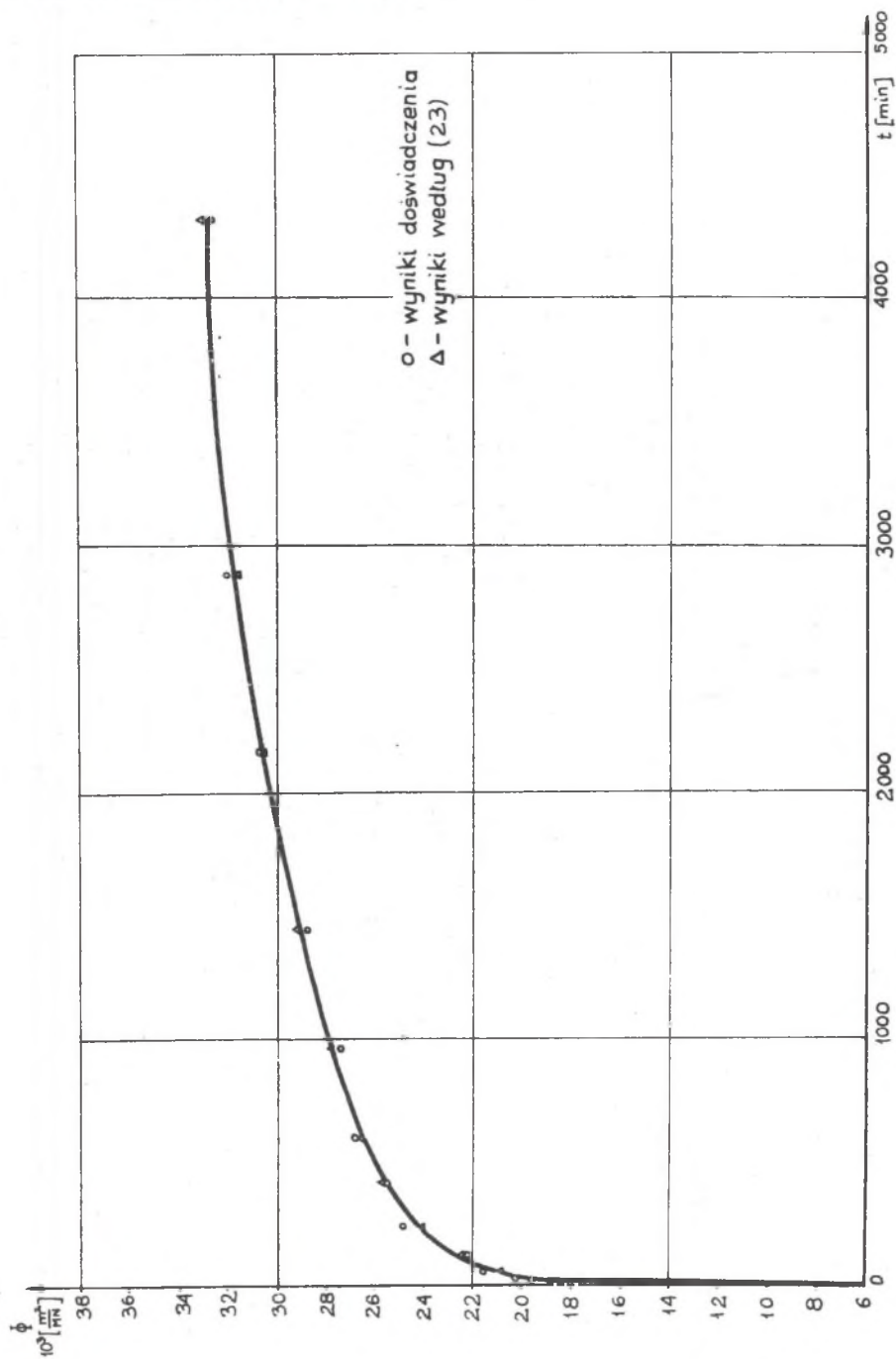
$$\psi = A + B t^\alpha \quad (21)$$

Stosując kryterium najmniejszych kwadratów, tzn. aby suma kwadratów odchyień między wielkościami zmierzonymi a obliczonymi na podstawie wzoru (21) była najmniejsza, obliczono wielkości  $A$ ;  $B$ ; i  $\alpha$ , które wynoszą

$$A = 1,630 \cdot 10^{-2} \text{ rd} \quad B = 1,660 \cdot 10^{-2} \text{ rd} \quad \alpha = 0,149.$$

Podstawiając obliczone wartości do wzoru (21) przebieg zmian kąta skręcenia w zależności od czasu wynosi





Rys. 4. Funkcja peźzania przy skręcaniu walca gumowego

$$\varphi(t)10^2 = 1,630 + 1,660 t^{0,149} \quad \text{rd.} \quad (22)$$

Dla tak przyjętych stałych, suma kwadratów odchyień bezwzględnych wynosi +0,2775, suma kwadratów odchyień względnych +0,0147, a przeciętny błąd procentowy +2,1227.

Uwzględniając (18) i (22) wzór na funkcję pełzania jest następujący:

$$\Phi(t) 10^3 = 7,330 + 7,471 t^{0,149} \frac{\text{m}^2}{\text{MN}}. \quad (23)$$

Funkcję pełzania przy skręcaniu walca gumowego otrzymaną z doświadczenia oraz wg wzoru (23) pokazano na rys. 4.

Natychniastowy moduł sprężystości poprzecznej  $G_0$  można obliczyć dwoma sposobami.

Pierwszy to korzystając ze wzoru (19) oraz znajomości kąta skręcenia odpowiadającego chwili czasowej  $t=0$ . W praktyce jednak nie da się odczytać tej wartości, gdyż musi istnieć pewien przedział czasu dla przyłożenia momentu skręcającego. Dlatego wartość kąta  $\varphi(0)$  odczytano z wykresu dla małych czasów - do 2 minut, przedłużając krzywą pełzania do czasu  $t_0=0,5$  sek. (rys. 5).

Obliczony na tej podstawie moduł sprężystości będący tzw. równoważnym modułem sprężystości poprzecznej ma wartość  $G_0=52,62 \text{ MN/m}^2$ .

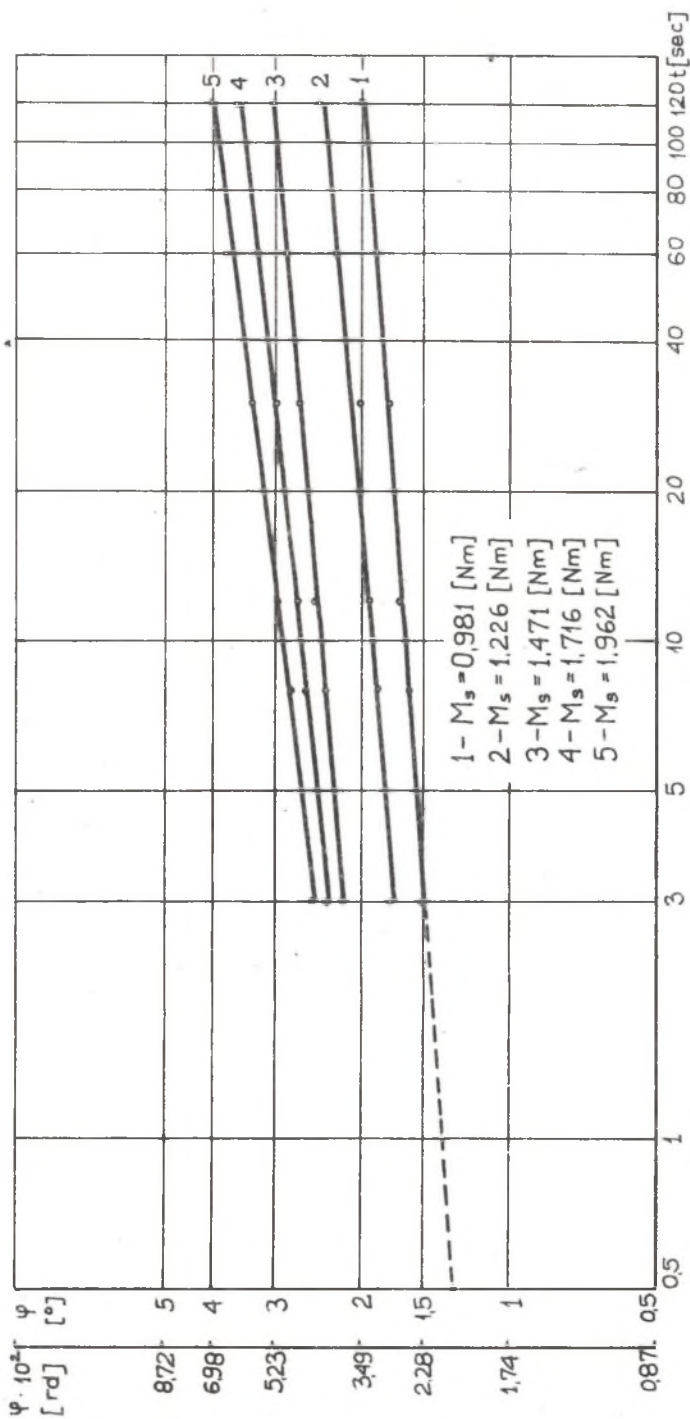
Drugi sposób obliczenia modułu  $G_0$  wynika ze znanej zależności

$$G_0 = \frac{1}{2\Phi(0)} \quad (24)$$

Korzystając z (23) oraz (24) natychmiastowy moduł sprężystości poprzecznej wynosi  $G_0 = 68,49 \text{ MN/m}^2$ .

### Wnioski

1. Przebieg funkcji pełzania  $\Phi(t)$  opisany wzorem (23) jest wystarczająco zgodny z przebiegiem uzyskanym doświadczalnie i może być wykorzystany do wyznaczania innych własności lepkosprężystych badanej gumy.
2. Krzywe pełzania dla zakresu liniowego i nieliniowego mogą być opisane tym samym równaniem (21).
3. Natychmiastowy moduł sprężystości poprzecznej wyliczony na podstawie funkcji pełzania (23) jest około 30% wyższy od obliczonego na podstawie odczytu kąta skręcenia dla czasu początkowego  $t_0=0,5$  sek. Z teoretycznego punktu widzenia moduł sprężystości poprzecznej obliczony z funkcji pełzania jest poprawniejszy.



Rys. 5. Przebieg pełzania walca gumowego dla małych czasów

Tablica 1

## Skład mieszanki WT-01

Lp.	Składniki	Na 100 części kautczuków	%	kg
1.	Kauczuk naturalny RSS-1	100,000	47,667	14,300
2.	ZnO gat. III	4,895	2,33	0,700
3.	Neftolen	6,294	3,000	0,900
4.	Staeryna	0,979	0,467	0,140
5.	Sadza aktywna	90,909	43,333	13,006
6.	Siarka	2,517	1,200	0,360
7.	Przyspieszacz M	1,049	0,500	0,150
8.	Stabilizator AR	1,748	0,833	0,250
9.	Bezwodnik kwasu ftalowego	1,399	0,667	0,200

## LITERATURA

1. J.D. Ferry: Lepkosprężystość polimerów. WNT, Warszawa 1965.
2. B. Rosen praca zbiorowa: Razruszenije twierdych polimierow. Chimija, Moskva 1971.
3. S. Midlman: Tieczienije polimierow. MIR. Moskva 1971.
4. W.W. Moskwitin: Soprotivlienije wjasko-uprugich materiałow. Nauka, Moskva 1972.
5. A.A. Iljuszyn, B.E. Pobiedrja: Osnovy matiematičeskoj teoriii tiermo-wjasko-uprugosti. Nauka, Moskva 1970.
6. K. Szublorski: Mechanika Teoretyczna i Stosowana nr 3.10. 1972, 391.
7. J.T. Pindera: Reologiczne własności materiałów modelowych. WNT, Warszawa 1962.
8. A. Wilczyński: Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 1,6, 1963, 35.
9. G.A. Tietiers: Słożnoje nagruzienije i ustoičivost obołočiek iz poli-miernych matieriałow. Zinatnie, Ryga 1969.
10. J. Halaunbrenner: Polimery - Tworzywa Wielocząsteczkowe, 6, 1965, 232.
11. G. Kraus - praca zbiorowa: Reinforcement of Elastomen. John Wiley and Sons, New York 1965.
12. L. Treloar: Fizika urpugosti kautczuka. IIL, Moskva 1953.
13. S. Timoszenko, J.N. Goodier: Teoria sprężystości Arkady, Warszawa 1962

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ВЯЗКО-УПРУГИХ СВОЙСТВ РЕЗИНОВЫХ ВАЛКОВ  
ПОД ВЕРГНУТЫМ КРУЧЕНИЕМ

## Р е з ю м е

В работе указано результаты долговременных исследований по кручению валков из резины марки ВТ-01, на основе которых определено предел линейности материала, мгновенно-упругий модуль сдвига а также функцию ползучести. Сравнено опытный процесс функции ползучести с процессом определённым аналитически.

DETERMINATION OF SOME VISCO-ELASTIC PROPERTIES OF A RUBBER CYLINDER  
UNDER TORSION

## S u m m a r y

In the paper the results of investigations dealing with the torsion of a rubber cylinder made of a WT-01 mixture have been presented. On the ground of these investigations the range of the material linearity, instantaneous modulus of lateral elasticity as well as the creep function have been determined. The experimental course of creep function with its course determined in an analytical way have been compared.