

Karol Wyleżych, Józef Kapłanek  
Instytut Mechaniki  
i Podstaw Konstrukcji Maszyn

## PROGNOZOWANIE WŁASNOŚCI LEPKOSPĘŻYSTYCH W OPARCIU O ANALOGIĘ TEMPERATURO- WO-CZASOWĄ

Streszczenie. W pracy przedstawiono wyniki badań zmian podatności na scinanie walca gumowego w podwyższonych temperaturach. Na podstawie analogii temperaturowo-czasowej pokazano sposób prognozowania pewnych własności lepkospężytych gumy przy czasach nie objętych badaniem. Potwierdzona została również teza, że kształt lg a ( $\bar{T}$ ) nie zależy od wyboru temperatury odniesienia.

### Wstęp

Stosując lepkospężyte modele ciał, oprócz ogólnych związków między naprężeniami, odkształceniami i czasem można otrzymać zależności uwzględniające wpływ innych czynników. Najistotniejszym takim czynnikiem jest temperatura  $T$ .

Największy wpływ temperatury uwidacznia się w zachowaniu elementów lepkich, a odpowiednio mniejszy w sprężystych, co pozwala w występującym w praktyce przedziale zmian temperatur z wystarczającą dokładnością przyjmując niezależne od temperatury własności sprężyste [1]. W celu ujęcia równoczesnego wpływu czasu i temperatury na zachowanie się polimerów poddanych odkształceniu stosować można między innymi metodę zmiennych zredukowanych [2,3], pozwalającą na znaczne uproszczenie przy rozdzieleniu tych dwu głównych zmiennych. Umożliwia to przy wykorzystaniu temperaturowo-czasowej analogii przewidywać zachowanie się polimerów w pewnym przedziale czasów nieobjętych doświadczeniem.

W pracy [4] badano pewien gatunek smoły poddanej pełzaniu i wykazano, że analogię temperaturowo-czasową można stosować nie tylko dla polimerów. Warunki istnienia temperaturowo-czasowej analogii w stacjonarnych i niestacjonarnych polach temperatur zostały podane w pracy [5].

### 1. Podstawy analogii temperaturowo-czasowej

Dogodną formą przedstawiającą wzajemne zależności między dewiatorem stanu naprężenia i odkształcenia w czasie dla liniowych ciał lepkospężytych w warunkach izotermicznych stanowi równanie [1,2]:

$$\vartheta_{ij}(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) ds_{ij}, \quad (1)$$

gdzie:

$\Phi(t-\tau)$  - funkcja pełzania odkształcenia postaciowego,

$\vartheta_{ij}$  - składowa dewiatora stanu odkształcenia,

$s_{ij}$  - składowa dewiatora stanu naprężenia.

Całkując równanie (1) przez części i zakładając że:

$$s_{ij}(0) = 0,$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2G_0},$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = 2G_0 \kappa(t),$$

gdzie

$G_0$  - natychmiastowy moduł sprężystości poprzecznej,

$\kappa(t)$  - jądro pełzania odkształcenia postaciowego,

otrzymuje się

$$2G_0 \vartheta_{ij}(t) = s_{ij}(t) + \int_0^t \kappa(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Bardziej ogólnym jest przypadek, kiedy własności materiału zależą od jakiegoś fizycznego parametru  $T$ , który w ogólnym przypadku może być także funkcją czasu. Pod tym parametrem w dalszych rozważaniach będziemy rozumieć temperaturę. Związek fizyczny (2) w przypadku nieizotermicznego procesu obciążenia jest następujący:

$$2G_c [T(t)] \vartheta_{ij} = s_{ij}(t) + \int_0^t \bar{\kappa}(T; t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Największy wpływ temperatury uwidacznia się w zachowaniu elementów lepkich i jest pomijalnie mały dla elementów sprężystych [1].

Wprowadzając wielkość  $a_T$  będącą funkcją temperatury, można współczynnik lepkości dowolnego elementu w temperaturze  $T$  zapisać jako:

$$\mu_m = \mu_m(T) = \mu_m^0 a_T, \quad (4)$$

gdzie

$\mu_m^0$  - lepkość standardowa, niezależna od temperatury.

Jeśli opór dowolnego lepkiego elementu scharakteryzować przez operator

$$\mu_m \frac{d}{dt'}$$

wtedy uwzględniając (4) otrzymuje się:

$$\mu_m \frac{d}{dt} = \mu_m^0 a_T \frac{d}{dt} = \mu_m^0 \frac{d}{dt'}, \quad (5)$$

gdzie

$t'$  - czas zredukowany.

Ze wzoru (5) wynika, że:

$$dt' = \frac{dt}{a_T},$$

skąd

$$t' = \int_0^t \frac{dt}{a_T}. \quad (6)$$

Wprowadzenie zmiennej zredukowanej  $t'$  pozwala złożoną zależność funkcji pełzania od temperatury i czasu zastąpić dwoma funkcjami jednej zmiennej  $\Phi(t')$  oraz  $a_T(T)$  w wyniku czego związek (1) przyjmie postać:

$$\Theta_{ij}(t') = \int_0^t \Phi(t' - \tau') ds_{ij}(\tau'), \quad (7)$$

gdzie

$$\tau' = \int_0^t \frac{d\tau}{a_T}. \quad (8)$$

W związkach tych temperatura i czas mają wzajemnie uzupełniający się wpływ w tym sensie, że wchodzi w nie jedynie kombinacja "czas-temperatura"  $t'$ .

Współczynnik przesunięcia temperaturowego  $a_T$  można wyznaczyć z równania wyprowadzonego przez Williamsa, Landela i Ferryego, zwanego równaniem WLF [3]

$$\lg a_T = -c_1 \frac{T - T_0}{c_2 + T - T_0}, \quad (9)$$

gdzie

$c_1^0; c_2^0$  - stałe, zależne od wyboru temperatury odniesienia,  
 $T_0$  - temperatura odniesienia.

Jeśli temperaturą odniesienia będzie pewna charakterystyczna temperatura  $T_g = T_g + 50^\circ$  [°K], gdzie  $T_g$  jest temperaturą przemiany polimeru w stan szklisty, to współczynniki  $c_1^0$  i  $c_2^0$  są stałymi uniwersalnymi. Zależność (9) przedstawia się wtedy wzorem:

$$\lg a_T = - 8,86 \frac{T - T_g}{101 + T - T_g} \quad (10)$$

## 2. Badania własne

### 2.1. Stanowisko badawcze. Materiał badany.

Stanowisko, na którym przeprowadzono pomiary składa się z urządzenia pozwalającego realizować statyczną próbę pełzania na skręcanie oraz układu utrzymującego stałą temperaturę badanej próbki. Urządzenie do statycznej próby pełzania opisano w pracy [6]. Pomiary przeprowadzono na próbkach walcowych o średnicy 30 mm i długości pomiarowej 90 mm, wykonanej z mieszanki gumowej WT-01 [6] o twardości 75<sup>0</sup> Sh.

### 2.2. Opis i wyniki badań

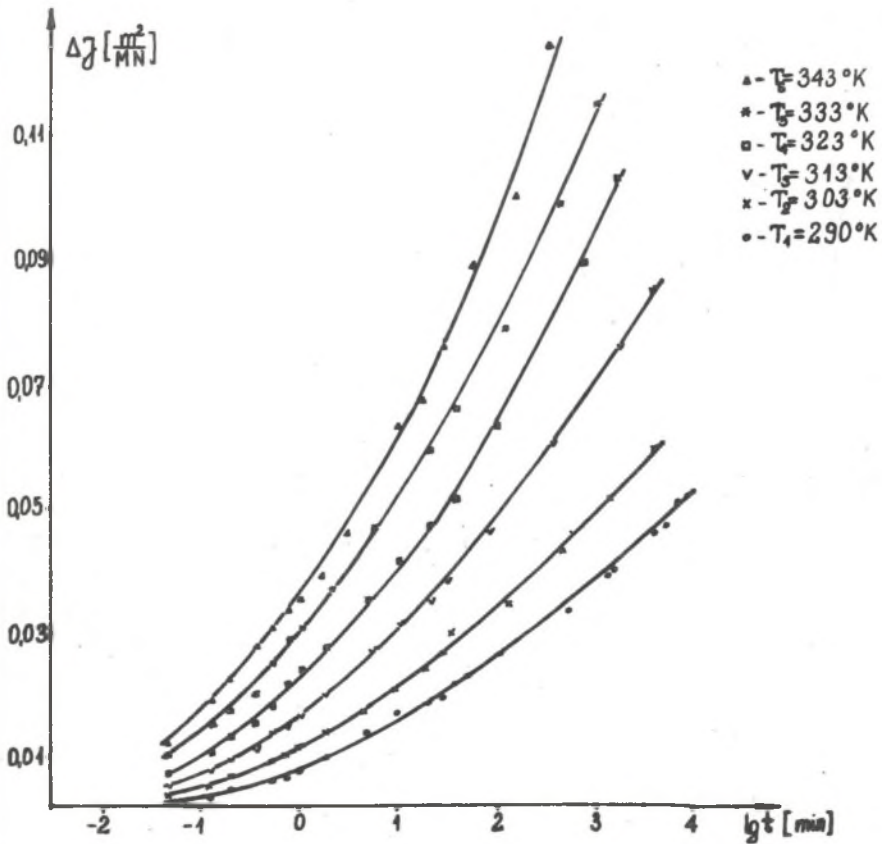
Badania przeprowadzono w temperaturach od 303 °K do 343 °K co 10 °K oraz w temperaturze pokojowej 290 °K. Próbkę wygrzaną w danej temperaturze przez jedną godzinę obciążano momentem skręcającym  $M_g = 0,981$  Nm, mieszczącym się w zakresie liniowości [6] i odczytywano kąty skręcenia w czasie. Po odjęciu kąta  $\varphi_0$  odpowiadającego chwili czasowej  $t_0 = 1$  sek obliczono przyrosty podatności  $\Delta J$  w funkcji czasu  $t$  ze wzoru:

$$\Delta J = \frac{\pi d^4}{32 M_g l} (\varphi - \varphi_0), \quad (11)$$

gdzie:

$\Delta J$  - przyrost podatności na skręcanie,  
 $M_g$  - moment skręcający,  
 $l$  - długość pomiarowa próbki,  
 $\varphi$  - kąt skręcenia,  
 $\varphi_0$  - kąt skręcenia dla chwili początkowej  $t_0 = 1$  sek,  
 $d$  - średnica próbki.

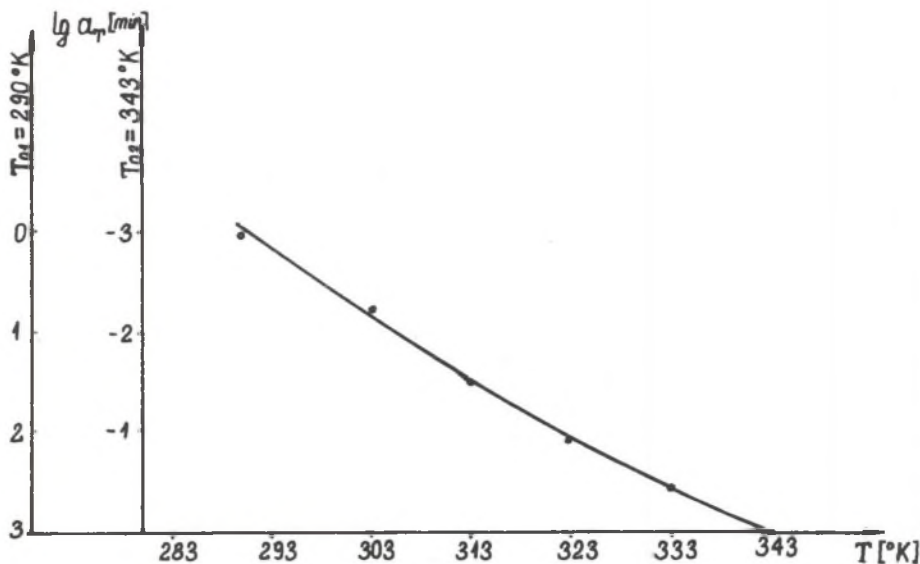
Doświadczalnie uzyskane wyniki posłużyły do opracowania wykresu szeregu izoterm we współrzędnych w których na osi odciętych odłożono  $\lg t$ , a na osi rzędnych  $\Delta J$  (rys. 1).



Rys. 1. Wykres logarytmiczny przyrostu podatności  $\Delta J$  w zależności od czasu dla różnych temperatur

Pomiędzy tymi izotermami będzie istniała analogia temperaturowo-czasowa tylko wtedy, gdy dadzą się one nasunąć tak na siebie że pokryją się z jedną izotermą w temperaturze  $T_0$ , zwaną temperaturą odniesienia. Przesunięcie może być dokonane tylko równoległe do osi odciętych. Wybór temperatury  $T_0$  jest dowolny. W pracy jako temperaturę odniesienia przyjęto  $290^{\circ}\text{K}$  i  $343^{\circ}\text{K}$ .

Wielkość przesunięcia wzdłuż osi czasu określa współczynnik przesunięcia temperaturowego  $\lg a_{Tn}$  dla danej temperatury. Aby go wyznaczyć krzywe zależności przyrostu podatności  $\Delta J$  od czasu  $t$  przecięto równooddalonymi prostymi poziomymi. Wartość  $\lg a_{Tn}$  określono jako średnią odległość dwu sąsiednich izoterm  $T_n$  oraz  $T_{n-1}$ , mierzona wzdłuż tych pro-



Rys. 2. Zależność współczynnika temperaturowego  $\lg a_{Tn}$  od temperatury  $T$  stych poziomych. Następnie sporządzono wykres zależności  $\lg a_{Tn}$  od temperatury  $T$  (rys. 2). Otrzymane krzywe przybliżono równaniem WLF(12) określając jego współczynniki  $c_{11}^0$  oraz  $c_{21}^0$ , które wynoszą:

$$c_{11}^0 = -10,71; \quad c_{21}^0 = 141,3 \text{ } ^\circ\text{K}$$

$$c_{12}^0 = -16,50; \quad c_{22}^0 = 340 \text{ } ^\circ\text{K}$$

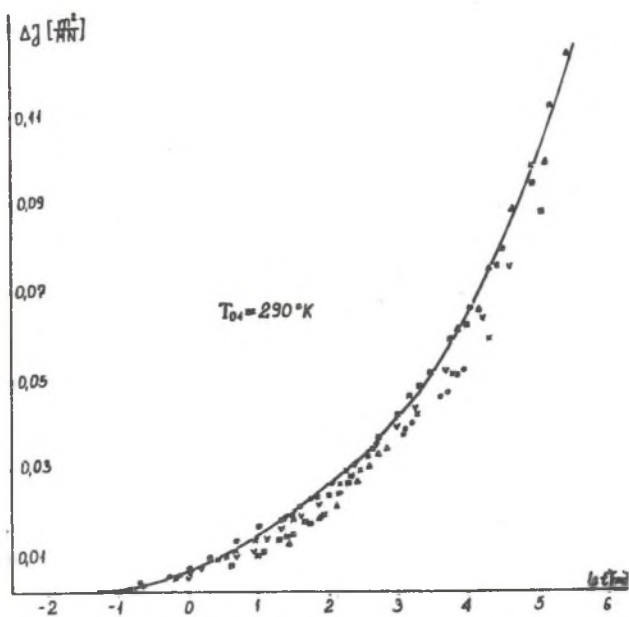
Dla temperatury odniesienia  $T_{01} = 290 \text{ } ^\circ\text{K}$  wzór WLF ma postać

$$\lg a_{T1} = \frac{10,71(T - 290)}{141 + T - 290},$$

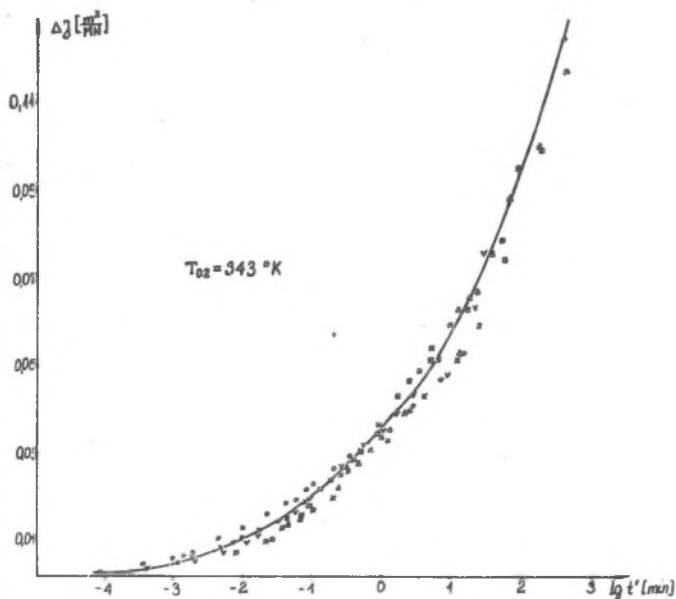
a dla  $T_{02} = 343 \text{ } ^\circ\text{K}$

$$\lg a_{T2} = \frac{16,5(T - 343)}{340 + T - 343}.$$

Dysponując zależnością  $\lg a_T$  od temperatury  $T$  zbudowano uogólnioną zależność przyrostu podatności  $\Delta J$  od  $\lg t'$ . Dokonano tego przez redukcję przebiegów  $\Delta J$  z różnych temperatur do krzywej w temperaturze odniesienia  $T_{01}$  oraz  $T_{02}$ . W tym celu przemieszczono krzywe  $\Delta J$  równolegle do osi czasu o wielkość  $\lg a_{T1}$  w stronę dłuższych czasów oraz o



Rys. 3. Uogólniona krzywa przyrostu podatności zredukowana do temperatury  $T_{01} = 290 \text{ }^\circ K$



Rys. 4. Uogólniona krzywa przyrostu podatności zredukowana do temperatury  $T_{02} = 343 \text{ }^\circ K$

$\lg a_{T_2}$  w stronę krótszych czasów. Przez otrzymane punkty poprowadzono uogólnioną krzywą  $\Delta J$ , zredukowaną do temperatur  $T_{01}$  (rys. 3) i  $T_{02}$  (rys. 4).

### 3. Wnioski

1. Pokrywanie się krzywych przyrostów podatności  $\Delta J$  z różnych temperatur świadczy o istnieniu jednego współczynnika tarcia, opisującego ruch cząstek polimeru.
2. Kształt krzywej  $\lg a_T(T)$  nie zależy od wyboru temperatury odniesienia.
3. Analogia temperaturowo-czasowa pozwala znacznie rozszerzyć efektywne skale czasu, umożliwiając przewidywanie własności lepkosprężystych w czasach nieobjętych badaniem. I tak, niska temperatura odniesienia rozszerza skalę w stronę dłuższych czasów, a wysoka w stronę krótszych czasów. Mimo, że pojedyncza próba pełzania nie przekraczała sześciu dekad logarytmicznej skali czasu, a więc trwała kilka dni, to dzięki analogii można przeprowadzić uogólnienie krzywej pełzania na około osiem dekad, tj. na okres prawie dwóch lat.

### LITERATURA

1. A.A. Iljuszin. B.E. Pobiedrja: Osnovy matematicheskoj teorii termo-wiasko-uprugosti, Nauka, Moskwa 1970.
2. P.M. Ogibałow: Konstrukcionnye polimery. T. 1,2. Izd. Moskovskogo Uniwersiteta, Moskwa, 1972.
3. J.D. Ferry: Lepkosprężystość polimerów, WNT, Warszawa 1965.
4. J.S. Urzumciew: Mechanika polimerów 3, 1972, 498.
5. M.A. Kołtunow, I.E. Trojanowski: Mechanika polimerów 2, 1970, 217.
6. K. Wyleźnych: Wyznaczanie niektórych własności lepkosprężystych walca gumowego poddanego skręcaniu. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika 52, 1973.

### ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВЯЗКО-УПРУГИХ СВОЙСТВ НА ОСНОВЕ ТЕМПЕРАТУРНО-ВРЕМЕННОЙ АНАЛОГИИ

#### Резюме

В работе указано результаты исследований по изменам податливости к сдвигу резинового вала в повышенных температурах. На основе температурно-временной аналогии указано метод прогнозирования некоторых вязко-упругих свойств резины в периоде необработанном исследованием. Одновременно подтвержден тезис, что форма кривой  $\lg a_T(T)$  не зависит от температуры приведения



FORECASTING OF LIGHT-ELASTIC PROPERTIES BASED ON THE  
TEMPERATURE-TIME ANALOGY

## S u m m a r y

In the paper the results of investigations concerned with the flexibility changes on the shearing of a rubber cylinder in raised temperatures have been presented. On the ground of temperature-time analogy a way of forecasting some properties of light-elastic rubber within time which was not used in investigations, has been shown. A thesis assuming that the shape of  $\lg a_T(T)$  curve does not depend on the choice of the referred temperature has been also proved.