ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: MECHANIKA z. 27 Nr kol. 179

BOGDAN SKALMIERSKI, ERNEST CZOGAŁA

ZAGADNIENIA DYNAMIKI PEWNEGO LEPKOSPRĘŻYSTEGO UKŁADU MECHANICZNEGO

Streszczenie. W pracy omówione zagadnienie quasistatyki i dynamiki powłoki lepkosprężystej na podłożu lepkosprężystym.

Założono, że obciążenia powłoki stanowią wyłącznie siły promieniowe. Rozwiązanie przeprowadzone w oparciu o analogię sprężysto-lepkosprężystą. Wyniki otrzymano jako odwrotną transformację Laplaca i Fouriera. Do szczegółowych rozważań przyjęto model Voigta. W zakończeniu zbadano zmienność przemieszczeń w czasie pod wpływem wędrującej siły promieniowej. Rozkład obciążeń przedstawiono za pomocą dystrybucji δ - Diraca, uzyskując w ten sposób funkcje przejścia dla rozpatrywanego continuum.

1. Wstęp

Układy mechaniczne dostarczają nam całego szeregu przykładów, w których znajdujemy odpowiedź układu na zadany sygnał wejściowy.

W niniejszej pracy będziemy badać sygnał wyjściowy, (którym jest przemieszczenie) cienkościennej powłoki walcowej zamkniętej, na zadane wymuszenie, którym jest dowolne obciążenie promieniowe.

Schemat blokowy układu przedstawia rys. 1.

Rys. 1

Zapis macierzowy zależności pomiędzy wejściem a wyjściem jest następujący

$$\begin{bmatrix} w(\xi,\varphi,p) \\ u(\xi,\varphi,p) \\ v(\xi,\varphi,p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}(p) & 0 & 0 \\ L_{21}(p) & 0 & 0 \\ L_{31}(p) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n(p) \\ q_w(p) \\ q_s(p) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

gdzie: w u v są odpowiednio przemieszczeniami: promieniowym, osiowym i stycznym w funkcji współrzędnych $\xi\varphi$ t; q_n, q_w, q_s są obciążeniami: promieniowym, osiowym i stycznym.

Operatory L_{i1} są odpowiednimi funkcjami przejścia dla continuum. Niżej wykażemy, że są to funkcje wpływu Greena.

2. Rozwiązania lepkosprężystych równań powłoki

Podstawą naszych rozważań będą równania różniczkowe walcowe powłoki zamkniętej [1]

$$
\begin{aligned}
G_w u &= \Phi_u w, \\
G_w v &= \Phi_v w, \\
\Omega w &= G_w z,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

gdzie:

$$
\Phi_u = \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi} - c^2\left[(2-\nu)\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\varphi} + \frac{\partial^3}{\partial\varphi^3}\right]\right\} -
$$

$$
- \nu\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + c^2\left[2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\right\},
$$

$$
\Phi_v = \nu\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\varphi} - \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \times
$$

$$
\times\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi} - c^2\left[(2-\nu)\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\varphi} + \frac{\partial^3}{\partial\varphi^3}\right]\right\},
$$

$$
\Omega = \nu(1+\nu)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\varphi^2}\left\{1 - c^2\left[(2-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\right\} -
$$

$$
-\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left\{1 - c^2\left[(2-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\right\}^2 -
$$

$$
- \nu^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left\{\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + c^2\left[2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\right\} + G_w(1+c^2\nabla^4),
$$

$$G_w = \frac{1-\nu}{2}\nabla^4 + c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left[2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right],$$

$$z = R^2\frac{1-\nu^2}{E\delta}q_n(\xi,\varphi,t) \tag{2.2}$$

Rozpatrujemy problem z punktu widzenia mechaniki jako quasistatyczny i przyjmiemy tylko obciążenie promieniowe w postaci

$$q_n(\xi,\varphi,t) = q(\xi,\varphi,t) - k.w(\xi,\varphi,t), \tag{2.3}$$

gdzie:

k - jest stałą sprężystości podłoża powłoki,
E - modułem sprężystości powłoki,
R - promieniem krzywizny walca,
δ - grubością powłoki.

Wstawiając (2.2) i (2.3) do ostatniego z układu równań (2.1) otrzymamy:

$$\Omega.w(\xi,\varphi,t) = G_w R^2\frac{1-\nu^2}{E\delta}\left[q(\xi,\varphi,t)-k\,w(\xi,\varphi,t)\right] \tag{2.4}$$

Korzystając z analogii sprężysto-lepkosprężystych i wykonując na równaniu (2.1) transformacje Laplace'a, dostajemy

$$\frac{\bar{E}(p)\delta}{R^2(1-\bar{\nu}^2(p)}\bar{\Omega}(p)\bar{w}(\xi,\varphi,p) = \bar{G}_w(p)\bar{q}(\xi,\varphi,p)-\bar{k}(p)\bar{G}_w(p).\bar{w}(\xi,\varphi,p) \tag{2.5}$$

Wykonując następnie podwójną skończoną transformację Fouriera na równaniu (2.5) mamy

$$\frac{\bar{E}(p)\delta}{R^2(1-\bar{\nu}^2(p))}\bar{\Omega}_{mn}(p)\bar{w}_{mn}(p)+\bar{k}(p)\bar{G}_{wmn}(p)\bar{w}_{mn}(p)=\bar{G}_{wmn}(p).\bar{q}_{mn}(p) \tag{2.6}$$

skąd po algebraicznych przekształceniach

$$\bar{w}_{mn}(p) = \frac{\bar{q}_{mn}(p)}{\bar{k}(p) + \frac{\bar{E}(p)\delta}{R^2(1-\bar{\nu}^2(p))}\frac{\bar{\Omega}_{mn}(p)}{\bar{G}_{wmn}(p)}} \tag{2.7}$$

gdzie dla $\bar{\nu}(p) = \nu$,

$$\bar{\Omega}_{mn}(p) = \Omega_{mn} = \nu(1+\nu)\frac{m^2n^2\pi^2}{l^2}\left\{1+c^2\left[(2-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2}+n^2\right]\right\} -$$

$$-\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2}+\frac{1-\nu}{2}n^2\right)n^2\left\{1+c^2\left[(2-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2}+n^2\right]\right\}^2 -$$

$$-\left\{\frac{1-\nu}{2}\frac{m^2\pi^2}{l^2}+n^2+c^2\left[2(1-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2}+n^2\right]\right\}\nu^2\frac{m^2\pi^2}{l^2}+$$

$$+\left[1+c^2\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2}+n^2\right)^2\right]\times$$

$$\times\left\{\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2}+n^2\right)+c^2\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2}+\frac{1-\nu}{2}n^2\right)\left[2(1-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2}+n^2\right]\right\},$$

$$\bar{G}_{wmn}(p) = G_{wmn} = \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2}+n^2\right)^2+c^2\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2}+\frac{1-\nu}{2}n^2\right)\times$$

$$\times\left[2(1-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2}+n^2\right],$$

przy

$$F_{wmn}(\xi,\varphi) = \sin\frac{m\pi\xi}{l}\cos n\varphi$$

dla przegubowego zamocowania brzegow powłoki.

Dokonując następnie podstawienia I.7.1 [1] s. 29 dla dwóch pierwszych równań układu (2.1) mamy

$$\left.\begin{aligned}\bar{G}_{wmn}(p)\,\bar{u}_{mn}(p) &= \bar{\Phi}_{umn}(p)\cdot\bar{w}_{mn}(p)\\ \bar{G}_{wmn}(p)\,\bar{v}_{mn}(p) &= \bar{\Phi}_{vmn}(p)\,\bar{w}_{mn}(p),\end{aligned}\right\}\qquad(2.8)$$

gdzie dla $\bar{\nu}(p) \equiv \nu$.

$$\bar{\Phi}_{umn}(p) = \Phi_{umn} = -\left\{\frac{1+\nu}{2}\frac{mn^2\pi}{l}\left\{1+c^2\left[(2-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2}+n^2\right]\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{m}{l}\left\{\frac{1-\nu}{2}\frac{m^2\pi^2}{l^2}+n^2+c^2\left[2(1-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2}+n^2\right]\right\}\right\},$$

przy

$$F_{umn}(\xi,\varphi) = \cos\frac{m\pi\xi}{l}\cos n\varphi,$$

$$\bar{\Phi}_{vmn}(p) = \Phi_{vmn} = -\left\{\left[\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2}n^2\right]n\left\{1+\sigma^2\left[(2-\nu)\frac{m^2\pi^2}{12} + n^2\right]\right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{1+\nu}{2}\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right\}n,$$

przy

$$F_{vmn}(\xi,\varphi) = \sin\frac{m\pi\xi}{l}\sin n\varphi.$$

Po dokonaniu odwrotnej transformacji Fouriera na równaniu (2.7) dostajemy

$$\bar{w}(\xi,\varphi,p) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{mn}\frac{\bar{q}_{mn}(p)}{\bar{k}(p) + \frac{E(p)\delta}{R^2(1-\nu^2)}\frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}}F_{wmn}(\xi,\varphi), \tag{2.9}$$

gdzie

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla} \quad m \quad 1 \geqslant n = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad m \quad 1 \geqslant n \geqslant 1 \end{cases}$$

Dla wyznaczenia przemieszczeń przy dowolnym obciążeniu, rozwiążemy zagadnienie prowadzące do wyznaczenia funkcji wpływu.
W tym celu obciążamy promieniowo powłokę siłą skupioną P=1, działającą w punkcie o współrzędnych $\xi = x$, $\varphi = \pi$.
Obciążenie to przedstawimy w postaci dystrybucji δ Diraca

$$q(\xi,\varphi,t) = \frac{1}{2R^2}\delta(\varphi-\pi)\delta(\xi-x)\delta(t). \tag{2.10}$$

Dzielenie przez 2 jest wynikiem złożenia dwu powłok "połówkowych" o kącie $\varphi = \pi$.

Po transformacji Laplace'a otrzymamy

$$\bar{q}(\xi,\varphi,p) = \frac{1}{2R^2}\,\delta(\varphi-\pi)\,\delta(\xi-x). \tag{2.11}$$

Współczynnik $\bar{q}_{mn}(p)$ obliczamy wzorem

$$\bar{q}_{mn}(p) = \frac{4}{\pi l}\int_0^l\int_0^{2\pi}\frac{1}{2R^2}\,\delta(\varphi-\pi)\,\delta(\xi-x)\,F_{wmn}(\xi,\varphi)\,d\xi\,d\varphi, \tag{2.12}$$

gdzie:

$l = \frac{L}{R}$ oznacza długość zredukowaną powłoki.

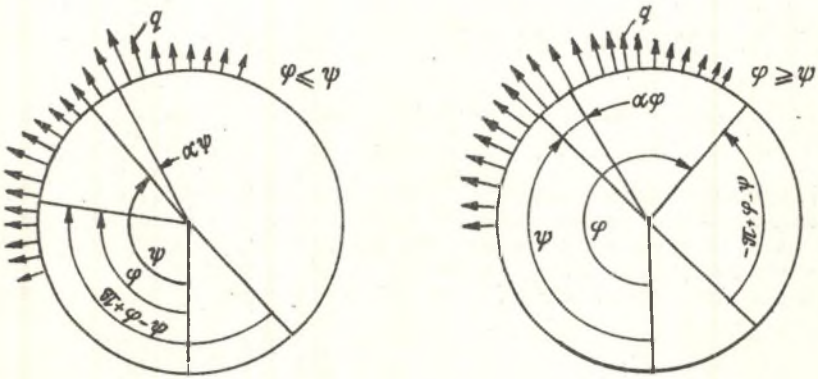
Całkując (2.12) dostajemy

$$\bar{q}_{mn}(p) = \frac{2(-1)^n}{\pi LR}\sin\frac{m\pi x}{l} \tag{2.13}$$

Wprowadzając nową współrzędną ψ dla jakiegoś innego położenia kątowego siły $P = 1$ (rys. 2) zauważymy, że

$$\sin n\,(\pi+\varphi-\psi) = \sin n\,(-\pi+\varphi-\psi) = (-1)^n \sin n\,(\varphi-\psi),$$

$$\cos n\,(\pi+\varphi-\psi) = \cos n\,(-\pi+\varphi-\psi) = (-1)^n \cos n\,(\varphi-\psi).$$



Rys. 2

Po wprowadzeniu ostatnich związków oraz (2.13) do równania (2.9) otrzymamy przemieszczenie, pochodzące od jednostkowego obciążenia, co zaznaczymy indeksem (1) u góry

$$w^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p) =$$

$$= \frac{2}{\pi l R} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{k(p) + \frac{\bar{E}(p)\delta}{R^2(1-\nu^2)} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}} F'_{wmn}(\xi,\varphi-\psi(p), \qquad (2.14)$$

gdzie:

$$F'_{wmn}(\xi,\varphi-\psi(p)) = \sin \frac{m\pi\xi}{l} \cos n(\varphi-\bar{\psi}(p)),$$

$\bar{\psi}(p) \hat{=} \psi(t)$ może oznaczać ruchomą współrzędną ψ.

Korzystając z układu równań (2.8) możemy otrzymać natychmiast pozostałe przemieszczenia dla siły jednostkowej

$$u^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p) =$$

$$= \frac{2}{\pi l R} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\Phi_{umn}}{G_{wmn}} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{\bar{k}(p) + \frac{\bar{E}(p)\delta}{R^2(1-\nu^2)} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}} \cdot F''_{umn}(\xi,\varphi-\bar{\psi}(p)),$$

(2.15)

gdzie:

$$F''_{umn}(\xi,\varphi-\bar{\psi}(p) = \cos \frac{m\pi\xi}{l} \cos n(\varphi-\psi(p));$$

$$v^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p) =$$

$$= \frac{2}{\pi l R} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\Phi_{vmn}}{G_{wmn}} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{\bar{k}(p) + \frac{\bar{E}(p)\delta}{R^2(1-\nu^2)} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}} F'''_{vmn}(\xi,\varphi-\bar{\psi}(p)),$$

(2.16)

gdzie:

$$F'''_{vmn}(\xi,\varphi-\psi(p)) = \sin\frac{m\pi\xi}{l}\sin n(\varphi-\bar{\psi}(p)).$$

Mając przemieszczenia od siły jednostkowej, możemy określić stan przemieszczeń dla dowolnego obciążenia $q(x,\psi,t) \triangleq q(x,\psi,p)$, a więc

$$\bar{w}(\xi,\varphi,p) = R^2 \iint_S \bar{w}^{(1)}\,\bar{q}\,dxd\psi, \tag{2.17}$$

$$\bar{u}(\xi,\varphi,p) = R^2 \iint_S \bar{u}^{(1)}\,\bar{q}\,dxd\psi, \tag{2.18}$$

$$\bar{v}(\xi,\varphi,p) = R^2 \iint_S \bar{v}^{(1)}\,\bar{q}\,dxd\psi, \tag{2.19}$$

gdzie całkowanie wykonujemy po całej powierzchni S.

Dokonując na powyższych równaniach transformacji odwrotnej Laplace'a otrzymamy

$$w(\xi,\varphi,t) = R^2 \iint_S \left[\int_0^t D_{mnw}(x,\psi,\xi,\varphi,t-)q(x,\psi,\tau)d\right]dxd\psi, \tag{2.20}$$

$$u(\xi,\varphi,t) = R^2 \iint_S \left[\int_0^t D_{mnu}(x,\psi,\xi,\varphi,t-)q(x,\psi,\tau)d\right]dxd\psi, \tag{2.21}$$

$$v(\xi,\varphi,t) = R^2 \iint_S \left[\int_0^t D_{mnv}(x,\psi,\xi,\varphi,t-)q(x,\psi,\tau)d\right]dxd\psi, \tag{2.22}$$

gdzie:

$$D_{mnw}(x,\psi,\xi,\varphi,t) = L^{-1}\left\{\bar{w}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p)\right\},$$

$$D_{mnu}(x,\psi,\xi,\varphi,t) = L^{-2}\left\{\bar{u}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p)\right\},$$

$$D_{mnv}(x,\psi,\xi,\varphi,t) = L^{-2}\left\{\bar{v}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p)\right\},$$

są wspomnianymi na początku funkcjami wpływu Greena.

3. Przypadek $\bar{k}(p) = \alpha \bar{E}(p)$ dla modelu Voigta

Rozważmy obecnie nasze dość ogólne równania przy pewnych uproszczeniach. Przyjmijmy mianowicie dla podłoża związek $k(p) = \alpha \bar{E}(p)$, gdzie α = const.

Oznacza to, że przyjmujemy dla podłoża ten sam model reologiczny jak dla powłoki.

Dla modelu Voigta [3] przy uwzględnieniu warunku nieściśliwości $\bar{\nu}(p) = \nu = \frac{1}{2}$ otrzymamy

$$\frac{E_o}{\bar{E}(p)} = \frac{1}{1+\lambda p}$$

W dalszych uproszczeniach przyjmujemy jeszcze

$$\bar{\psi}(p) = \psi .$$

Funkcja Greena dla przemieszczenia promieniowego przyjmie postać

$$D_{mnw}(x,\psi,\xi,\varphi,t) = \frac{2}{\pi L R} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{L} \cos n(\varphi-\psi)}{E_o \lambda \left[\alpha + \frac{\delta}{R^2(1-\frac{1}{4})} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}\right]} \left\{\frac{1}{\frac{1}{\lambda}+p}\right\}^{-1} \tag{3.1}$$

Wstawiając (3.1) do (2.20) otrzymamy przemieszczenia dla modelu Voigta

$$w(\xi,\varphi,t) = \frac{2R}{\pi L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{L}}{E_o \left[\alpha + \frac{\delta}{R^2(1-\frac{1}{4})} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}\right]} \times$$

$$\times \iint_S \left[\int_o^t \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n(\varphi-\psi) q(x,\psi,t)\, e^{\frac{t-\tau}{x}}\, d\tau \right] dx\, d\psi , \tag{3.2}$$

$$u(\xi,\varphi,t) = \frac{2R}{\pi L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\Phi_{umn} \cos \frac{m\pi\xi}{L}}{G_{wmn} E_o \lambda \left[\alpha + \frac{\delta}{R^2(1-\frac{1}{4})} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}\right]} \times$$

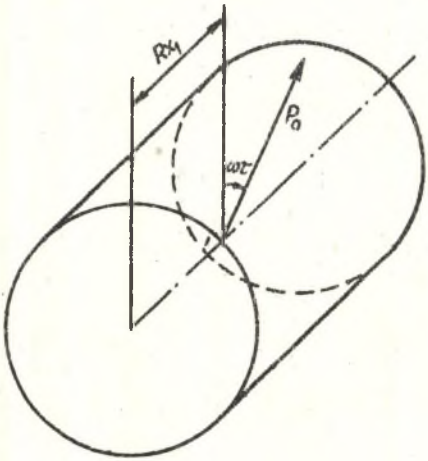
$$\times \iint_S \left[\int_0^t \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n(\varphi-\psi)\, q(x,\psi,t)\, e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}}\, d\tau \right] dx\, d\psi, \tag{3.3}$$

$$v(\xi,\varphi,t) = \frac{2R}{\pi L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\Phi_{mn}}{G_{wmn}} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{l}}{E_0 \lambda \left[\alpha + \frac{\delta}{R^2(1-\frac{1}{4})} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}} \right]} \times$$

$$\times \iint_S \left[\int_0^t \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n(\varphi-\psi)\, q(x,\psi,t)\, e^{-\frac{t-\lambda}{\lambda}}\, d\tau \right] dx\, d\psi \,.n \tag{3.4}$$

4. Przypadek wędrującej siły

Założymy obecnie poruszanie się siły P_0 po obwodzie koła, z prędkością kątową ω (rys. 3).



Rys. 3

Obciążenie przyjmiemy w postaci

$$q(x,\psi,\tau) = \frac{P_0}{R^2}\, \delta(\psi-\omega\tau)\, \delta(x-x_1) \tag{4.1}$$

Przypadek ten sprowadza się do obliczenia całek w równaniach (2.2) (2.3) (2.1).

W rezultacie otrzymujemy następujące wyniki

$$w(\xi,\varphi,t) = \frac{2P_o}{\pi l R E_o} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{m\pi x_1}{l}}{\left[\alpha + \frac{\delta}{R^2(1-\frac{1}{4})} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}\right]} \times$$

$$\times \frac{\lambda\omega n}{\lambda^2\omega^2 n^2+1} \left\{ \frac{1}{\lambda\omega n} \cos n(\varphi-\omega t) - \sin n(\varphi-\omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda\omega n} \cos n\varphi - \sin n\varphi\right)\right\}, \tag{4.2}$$

$$u(\xi,\varphi,t) = \frac{2P_o}{l R E_o} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos \frac{m\pi\xi}{l}}{\left[\alpha + \frac{\delta}{R^2(1-\frac{1}{4})} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}\right]} \frac{\Phi_{umn}}{G_{wmn}} \times$$

$$\times \frac{\lambda n\omega}{\lambda^2\omega^2 n^2+1} \left\{ \frac{1}{\lambda\omega n} \cos n(\varphi-\omega t) - \sin n(\varphi-\omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda\omega n} \cos n\varphi - \sin n\varphi\right)\right\} \tag{4.3}$$

$$v(\xi,\varphi,t) = \frac{2P_o}{\pi l R E_o} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{l} \cdot \sin \frac{m x_1}{l}}{\left[\alpha + \frac{\delta}{R^2(1-\frac{1}{4})} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}\right]} \frac{\Phi_{vmn}}{G_{wmn}} \times$$

$$\times \frac{\lambda\omega n}{\lambda^2\omega^2 n^2+1} \left\{ \frac{1}{\lambda\omega n} \cos n(\varphi-\omega t) + \cos n(\varphi-\omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda\omega n} \sin n\varphi + \cos n\varphi\right)\right\} \tag{4.4}$$

5. Zagadnienie drgań powłoki lepkosprężystej

Punktem wyjścia naszych rozważań będą nadal równania (2.1), opisujące stan równowagi powłoki. Obciążenie nadal pozostawimy promieniowe, uwzględniający siłę bezwładności

$$q^*(\xi,\varphi,t) = q(\xi,\varphi,t) - k\,w(\xi,\varphi,t) - \varrho\delta\frac{\partial^2 w(\xi,\varphi,t)}{\partial t^2}, \tag{5.1}$$

gdzie: ϱ jest gęstością materiału powłoki.

Pomijamy tutaj dynamiczny wpływ sił podłużnych zakładając, że energia drgań podłużnych jest mała w porównaniu z energią drgań poprzecznych [1].

Uwzględniając (5.1) w ostatnim równaniu układu (2.1), wykonując na nim transformację Laplace'a przy jednoczesnym wykorzystaniu analogii sprężysto-lepkosprężystych, otrzymamy

$$\frac{\bar{E}(p)}{R^2(1-\bar{\nu}^2(p))}\,\bar{\Omega}(p)\,\bar{w}(\xi,\varphi,p) + \bar{k}(p)\,\bar{G}_w(p)\,\bar{w}(\xi,\varphi,p) +$$

$$+ \bar{G}_w(p)\quad p^2\bar{w}(\xi,\varphi,p) = \bar{G}_w(p)\bar{q}(\xi,\varphi,p) + p\,\bar{G}_w(p)\varrho\delta f(\xi,\varphi,0) +$$

$$+ \bar{G}_w(p)\varrho\delta g(\xi,\varphi,0), \tag{5.2}$$

gdzie:

$$f(\xi,\varphi,0) = w(\xi,\varphi,0), \qquad g(\xi,\varphi,0) = \dot{w}(\xi,\varphi,0).$$

Dokonując na (5.2) podwójnej skończonej transformacji Fouriera, zachowując te same warunki brzegowe jak w równaniu (2.6) dostaniemy

$$\frac{\bar{E}(p)\delta}{R^2(1-\bar{\nu}^2(p))}\,\bar{\Omega}_{mn}(p)\,\bar{w}_{mn}(\xi,\varphi,p) + \bar{k}(p)\bar{G}_{wmn}(p)\bar{w}_{mn}(\xi,\varphi,p) +$$

$$+ \bar{G}_{wmn}(p)\varrho\delta p^2\bar{w}_{mn}(\xi,\varphi,p) = \bar{G}_{wmn}(p)\bar{q}_{mn}(\xi,\varphi,p) +$$

$$+ p\bar{G}_{wmn}(p)\varrho\delta f_{mn}(\xi,\varphi,0) + \bar{G}_{wmn}(p)\varrho\delta q_{mn}(\xi,\varphi,0) \tag{5.3}$$

Funkcje wpływu przy założeniu siły jednostkowej otrzymamy w następującej postaci

$$\bar{w}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\frac{2}{\pi LR} \sin \frac{m\pi x}{L} + (-1)^n p\varrho\delta f_{mn}(\xi,\varphi,0) + (-1)^n \varrho\delta g_{mn}(\xi,\varphi,0)}{\frac{\bar{E}(p)\delta}{R^2(1-\bar{\nu}^2(p))} \frac{\bar{\Omega}_{mn}(p)}{G_{wmn}(p)} + \bar{k}(p) + \varrho\delta p^2} \times$$

$$\times F'_{wmn}(\xi,\varphi-\psi(p)), \tag{5.4}$$

$$\bar{u}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{mn} \frac{\frac{2}{\pi LR} \sin \frac{m\pi x}{L} + (-1)^n p\varrho\delta f_{mn}(\xi,\varphi,0) + (-1)^n \varrho\delta g_{mn}(\xi,\varphi,0)}{\frac{\bar{E}(p)\,\delta}{R^2(1-\bar{\nu}^2(p))} \frac{\bar{\Omega}_{mn}(p)}{G_{wmn}(p)} + \bar{k}(p) + \varrho\delta p^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\bar{\Phi}_{vmn}(p)}{G_{wmn}(p)} \times F''_{umn}(\xi,\varphi-\psi(p)) \tag{5.5}$$

$$\bar{v}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\frac{2}{\pi LR} \sin \frac{m\pi x}{L} + (-1)^n p\varrho\delta f_{mn}(\xi,\varphi,0) + (-1)^n \varrho\delta g_{mn}(\xi,\varphi,0)}{\frac{\bar{E}(p)}{R^2(1-\bar{\nu}^2(p))} \frac{\bar{\Omega}_{mn}(p)}{G_{wmn}(p)} + \bar{k}(p) + \varrho\delta p^2}$$

$$\cdot \frac{\bar{\Phi}_{vmn}(p)}{G_{wmn}(p)} \cdot F'''_{vmn}(\xi,\varphi-\psi(p)) \tag{5.6}$$

Dla dowolnego obciążenia promieniowego $q(x,\psi,t) \hat{=} q(x,\psi,p)$ przy wykorzystaniu twierdzenia o splocie, dostajemy przemieszczenia

$$w(\xi,\varphi,t) = R^2 \iint\limits_S \Big[\int_0^t R_{mnw}(x,\psi,\xi,\varphi,t-\tau)q(x,\psi,\tau)d\tau \Big] dx d\psi, \tag{5.7}$$

$$u(\xi,\varphi,t) = R^2 \iint\limits_S \Big[\int_0^t R_{mnu}(x,\psi,\xi,\varphi,t-\tau)q(x,\psi,\tau)d\tau \Big] dx d\psi, \tag{5.8}$$

$$v(\xi,\varphi,t) = R^2 \iint\limits_S \Big[\int_0^t R_{mnv}(x,\psi,\xi,\varphi,t-\tau)q(x,\psi,\tau)d\tau \Big] dx d\psi, \tag{5.9}$$

gdzie

$$R_{mnw}(x,\psi,\xi,\varphi,t) = {}^{-1}\Big\{\bar{w}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p)\Big\},$$

$$R_{mnu}(x,\psi,\xi,\varphi,t) = {}^{-1}\Big\{\bar{u}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p)\Big\},$$

$$R_{mnv}(x,\psi,\xi,\varphi,t) = {}^{-1}\Big\{\bar{v}^{(1)}(x,\psi,\xi,\varphi,p)\Big\},$$

są również funkcjami wpływu Greena.

6. Przypadek $k(p) = \alpha E(p)$ dla modelu Voigta w drganiach powłoki lepkosprężystej

Dla przemieszczenia w (ξ,φ,t) napiszemy funkcję Greena w postaci

$$R_{mnw}(x,\psi,\xi,\varphi,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn}\Big[\frac{2}{\pi l R} \sin\frac{m\pi x}{l}\, \gamma_{1mn}(t) +$$

$$+(-1)^n \varrho\delta f_{mn}(\xi,\varphi,0)\, \gamma_{2mn}(t) +$$

$$+(-1)^n \varrho\delta g_{mn}(\xi,\varphi,0)\, \gamma_{1mn}(t)\Big] F'_{mnw}(\xi,\varphi-\psi(p)). \tag{6.1}$$

Zakładając warunek nieściśliwości $\nu(p) = \nu = \frac{1}{2}$ oraz oznaczając

$$a_{mn} = \frac{E_0}{\varrho\delta}\left[\frac{\delta}{B^2(1-\frac{1}{4})}\frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}} + \alpha\right]$$

gdzie: $\Omega_{mn}(p) \equiv \Omega_{mn}$,

$G_{wmn}(p) \equiv G_{wmn}$,

rozpatrzymy dwa przypadki

$$1^0 - \text{dla } 1 - a_{mn}\frac{\lambda^2}{4} > 0,$$

$$r_{1mn}(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}a_{mn}\lambda t}}{\varrho\delta\sqrt{a_{mn}(1-\frac{a_{mn}\lambda^2}{4})}}\sin\sqrt{a_{mn}(1-a_{mn}\frac{\lambda^2}{4})}\,t, \tag{6.2}$$

$$r_{2mn}(t) = \frac{1}{\varrho\delta}e^{-\frac{1}{2}a_{mn}\lambda t}\left[\cos\sqrt{a_{mn}(1-a_{mn}\frac{\lambda^2}{4})}\,t - \frac{a_{mn}\lambda\sin\sqrt{a_{mn}(1-\frac{a_{mn}\lambda^2}{4})}\,t}{\sqrt{a_{mn}(1-a_{mn}\frac{\lambda^2}{4})}}\right] \tag{6.3}$$

$$2^0 - \text{dla } 1 - a_{mn}\frac{\lambda^2}{4} < 0,$$

$$r_{1mn}(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}a_{mn}t}}{\varrho\delta\sqrt{a_{mn}(a_{mn}\frac{\lambda^2}{4}-1)}}\,\mathrm{sh}\sqrt{a_{mn}(\frac{a_{mn}\lambda^2}{4}-1)}\,t, \tag{6.4}$$

$$r_{2mn}(t) = \frac{1}{\varrho\delta}e^{-\frac{1}{2}a_{mn}\lambda t}\left[\mathrm{ch}\sqrt{a_{mn}(\frac{a_{mn}\lambda^2}{4}-1)}\,t -\right.$$

$$- \frac{a_{mn}\lambda \operatorname{sh}\sqrt{a_{mn}\left(a_{mn}\frac{\lambda^2}{4}-1\right)}\,t}{\sqrt{a_{mn}\left(a_{mn}\frac{\lambda^2}{4}-1\right)}}\Bigg] . \tag{6.5}$$

7. Wędrująca siła promieniowa

Dla wędrującego obciążenia promieniowego o postaci

$$q(x,\psi,t) = \frac{P_o}{R^2}\,\delta(\psi-\omega t)\,\delta(x-x_1) \tag{7.1}$$

przy uwzględnieniu sił bezwładności otrzymamy po scałkowaniu przemieszczenie dla przypadku $1 - a_{mn}\frac{\lambda^2}{4} > 0$ zakładając f_{mn}, $q_{mn} = 0$:

$$w(\xi,\varphi,t) = \frac{P_o \pi RL}{\varrho\delta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{a_{mn}\left(1-a_{mn}\frac{\lambda^2}{4}\right)}}\sin\frac{m\pi\xi}{L}\sin\frac{m\pi x_1}{L}$$

$$\Bigg\{\frac{\gamma_{1mn}}{\varkappa_{mn}^2+\gamma_{1mn}^2}\Bigg[\frac{\varkappa_{mn}}{\gamma_{1mn}}\sin n(\varphi-\omega t) - \cos n(\varphi-\omega t) -$$

$$- e^{-\varkappa_{mn}t}\left(\frac{\varkappa_{mn}}{\gamma_{1mn}}\sin\delta_{1mn} - \cos\delta_{1mn}\right)\Bigg] C +$$

$$+ \frac{\gamma_{2mn}}{\varkappa_{mn}^2+\gamma_{2mn}^2}\Bigg[\frac{\varkappa_{mn}}{\gamma_{2mn}}\sin n(-\varphi+\omega t) - \cos n(-\varphi+\omega t) -$$

$$- e^{-\varkappa_{mn}t}\left(\frac{\varkappa_{mn}}{\gamma_{2mn}}\sin\delta_{2mn} - \cos\delta_{2mn}\right)\Bigg]\Bigg\} \tag{7.2}$$

gdzie:

$$\gamma_{1mn,2mn} = -\sqrt{a_{mn}\left(1 - a_{mn}\frac{\lambda^2}{4}\right.} \mp n\omega,$$

$$\delta_{1mn,2mn} = +\sqrt{a_{mn}(1-a_{mn}\frac{\lambda^2}{4})}\ t \pm n\varphi,$$

$$\varkappa_{mn} = \frac{1}{2}\, a_{mn}\lambda$$

$$u(\xi,\varphi,t) = \frac{P_o \pi RL}{\varrho\delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{a_{mn}(1-a_{mn}\frac{\lambda^2}{4})}}$$

$$\frac{\Phi_{umn}}{G_{wmn}} \cos\frac{m\pi\xi}{l} \sin\frac{m\pi x_1}{l} \times \Big\{ \frac{\gamma_{1mn}}{\varkappa^2_{mn}+\gamma^2_{1mn}} \Big[\frac{\varkappa_{mn}}{\gamma_{1mn}} \sin n(\varphi-\omega t) -$$

$$- \cos n\,(\varphi-\omega t) - e^{-\varkappa_{mn} t} (\frac{\varkappa_{mn}}{\gamma_{1mn}} \sin\delta_{1mn} - \cos\delta_{1mn}) \Big] +$$

$$+ \frac{\gamma_{2mn}}{\varkappa^2_{mn}+\gamma^2_{2mn}} \Big[\frac{\varkappa_{mn}}{\gamma_{2mn}} \sin n(-\varphi+\omega t) - \cos n(-\varphi+\omega t) -$$

$$- e^{-\varkappa_{mn} t} (\frac{\varkappa_{mn}}{\gamma_{2mn}} \sin\delta_{2mn} - \cos\delta_{2mn}) \Big] \Big\} \qquad (7.3)$$

$$v(\xi,\varphi,t,) = \frac{P_o \pi RL}{\varrho\delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{a_{mn}(1-a_{mn}\frac{\lambda^2}{4}}}$$

$$\frac{\Phi_{vmn}}{G_{wmn}} \sin\frac{m\pi\xi}{l} \sin\frac{m\pi x_1}{l} \times \Big\{ \frac{\gamma_{2mn}}{\varkappa^2_{mn}+\gamma^2_{mn}} \Big[\frac{\varkappa_{mn}}{\gamma_{2mn}} \cos n(-\varphi+\omega t) +$$

$$+ \sin n(-\varphi+\omega t) - e^{-\varkappa_{mn} t} \left(\frac{\varkappa_{mn}}{\gamma_{2mn}} \cos \delta_{2mn} + \sin \delta_{2mn}\right)\Bigg] -$$

$$- \frac{\gamma_{1mn}}{\varkappa^2_{mn} + \gamma^2_{1mn}} \Bigg[\frac{\varkappa_{mn}}{\gamma_{1mn}} \cos n(\varphi-\omega t) + \sin n(\varphi-\omega t) -$$

$$-e^{-\varkappa_{mn} t} \left(\frac{\varkappa_{mn}}{\gamma_{mn}} \cos \delta_{2mn} + \sin \delta_{2mn}\right)\Bigg] \tag{7.4}$$

Dla przypadku $1 - a_{mn} \frac{\lambda^2}{4} < 0$ przy $f_{mn}, g_{mn} = 0$ mamy

$$w(\xi,\varphi,t) = \frac{P_0 \pi LR}{\varrho\delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{a_{mn}(a_{mn} \frac{\lambda^2}{4} - 1)}}$$

$$\sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{m\pi x_1}{l} \times \Bigg\{ \frac{1}{\varkappa^2_{2mn} + n^2\omega^2} \Bigg[\varkappa_{2mn} \cos n(\varphi-\omega t) -$$

$$- n\omega \sin n(\varphi-\omega t) - e^{-\varkappa_{2mn} t} (\varkappa_{2mn} \cos n\varphi - n\omega \sin n\varphi)\Bigg] -$$

$$- \frac{1}{\varkappa^2_{1mn} + n^2\omega^2} \Bigg[\varkappa_{1mn} \cos n(\varphi-\omega t) - n\omega \sin n(\varphi-\omega t) -$$

$$-e^{-\varkappa_{1mn} t} (\varkappa_{1mn} \cos n\varphi - n\omega \sin n\varphi)\Bigg]\Bigg\}, \tag{7.5}$$

gdzie

$$\varkappa_{1mn,2mn} = \frac{1}{2}\, a_{mn}\lambda \pm \sqrt{a_{mn}\left(a_{mn}\frac{\lambda^2}{4} - 1\right)},$$

$$u(\xi,\varphi,t) = \frac{P_0 \pi LR}{\varrho\delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{a_{mn}\left(a_{mn}\frac{\lambda^2}{4} - 1\right)}}$$

$$\frac{\Phi_{umn}}{G_{wmn}} \sin\frac{m\pi x_1}{l} \cos\frac{m\pi\xi}{l} \times \left\{ \frac{1}{\varkappa_{2mn}^2 + n^2\omega^2} \left[\varkappa_{2mn} \cos n(\varphi - \omega t) - \right.\right.$$

$$\left. - n\omega \sin(\varphi - \omega t) - e^{-\varkappa_{2mn} t} (\varkappa_{2mn} \cos n\varphi - n\omega \sin n\varphi) \right] -$$

$$- \frac{1}{\varkappa_{1mn}^2 + n^2\omega^2} \left[\varkappa_{1mn} \cos n(\varphi - \omega t) + n\omega \sin(\varphi - \omega t) - \right.$$

$$\left.\left. - e^{-\varkappa_{1mn} t} (\varkappa_{1mn} \cos n\varphi - n\omega \sin n\varphi) \right] \right\}, \tag{7.6}$$

$$v(\xi,\varphi,t) = \frac{P_0 \pi LR}{\varrho\delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{a_{mn}\left(a_{mn}\frac{\lambda^2}{4} - 1\right)}}$$

$$\frac{\Phi_{vmn}}{G_{wmn}} \sin\frac{m\pi x_1}{l} \sin\frac{m\pi\xi}{l} \times \left\{ \frac{1}{\varkappa_{2mn}^2 + n^2\omega^2} \left[\varkappa_{2mn} \sin n(\varphi - \omega t) + \right.\right.$$

$$+ \; n \cos n(\varphi - \omega t)\, e^{-\varkappa_{2mn} t} (\varkappa_{2mn} \sin n\varphi + n\omega \cos n\varphi)\Big] -$$

$$- \frac{1}{\varkappa_{1mn}^2 + n^2\omega^2}\Big[\varkappa_{1mn} \sin n(\varphi - \omega t) + n \cos n(\varphi - \omega t) -$$

$$- e^{\varkappa_{1mn} t} (\varkappa_{1mn} \sin n\varphi + n\omega \cos n\varphi)\Big]\Big\} \tag{7.7}$$

LITERATURA

[1] Skalmierski B.: Problemy statyki i dynamiki powłok walcowych użebrowanych, Zeszyty Naukowe Pol. Śl. nr 73, Mechanika, Gliwice 1963.

[2] Sneddon Jan N.: Fourier Transforms, New York Toronto London Mc Graw-Hill Book Company 1951.

[3] Nowacki W.: Teoria Pełzania, Arkady - Warszawa 1963.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НЕКОТОРОЙ БВЯЗКО-УПРУГОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Резюме

В работе обсуждается квазистатический и динамический вопрос вязкоупругой цилиндрической оболочки на вязкоупругом основании. Принято, что нагрузку составляют исключительно радиальные силы. Решение проблемы получено на основе упруго-вязкоупругой аналогии пользуясь преобразованиями Лапласа и Фурье.

Подробно рассмотрено модель Фоигта для вязкоупругой оболочки и вязкоупругого основания. В заключении исследовалась изменчивость перемещений во время подвижной радиальной силы. Нагрузка принята как гуикция б Дирака, даёт в этом случае передаточную функцию для рассматриваемой непрерывной среды.

DYNAMICAL PROBLEM SOME VISCO-ELASTIC MECHANICAL SYSTEM

Summary

In this paper the quasistatical and dynamical problem of the visocelastic shell on the viscoelastic medium of substructure has been presented. It has been assumed that the shell was loaded radialy only. The solution of this problem has been proved by the application of elastic-viscoelastic analogy and the results obtained through Laplace transform and multiple finite Fourier transforms.

In detail solutions, Voigts body has been assumed for the viscoelastic shell and for viscoelastic substructure as well. In conclusion of this work an instability of displacements has been investigated for a wandering radial external force. Loading has been given by Dirac δ distribution, getting in that way transfer function for the considered continuum.