ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: MECHANIKA z. 27 Nr kol. 179

BOGDAN SKALMIERSKI, ANDRZEJ TYLIKOWSKI
Katedra Teorii Regulacji

DRGANIA PEWNEGO LEPKOSPRĘŻYSTEGO UKŁADU MECHANICZNEGO

Streszczenie. W pracy rozpatrzono problem przemieszczeń kołowego pręta lepkosprężystego, spoczywającego na ortotropowym podłożu lepkosprężystym pod wpływem zewnętrznego obciążenia stycznego. Zagadnienie rozwiązano stosując analogię sprężysto-lepkosprężystą oraz transformację Laplace'a i skończoną transformację Fouriera. Problem potraktowano zarówno z punktu widzenia quasistatyki jak i dynamiki. Rozpatrzono dokładnie przypadek mający szerokie zastosowanie techniczne, mianowicie obciążenie w postaci skupionej siły wędrującej. Do obliczeń przyjęto model reologiczny Voigta.

1. Rozwiązanie zagadnienia zginania pręta kołowego obciążonego siłami stycznymi

Punktem wyjścia rozważań są równania różniczkowe zginanego pręta [2]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{AE}{R^2}\left(\frac{d^2V(\varphi,t)}{d\varphi^2}+\frac{d\,W(\varphi,t)}{d\varphi}\right)-\frac{EI}{R^4}\left(\frac{d^3W(\varphi,t)}{d\varphi^3}-\frac{d^2V(\varphi,t)}{d\varphi^2}\right)+p^*(\varphi,t)=0\\ &-\frac{EI}{R^4}\left(\frac{d^4W(\varphi,t)}{d\varphi^4}-\frac{d^3V(\varphi,t)}{d\varphi^3}\right)-\frac{AE}{R^2}\left(\frac{dV(\varphi,t)}{d\varphi}+W(\varphi,t)\right)+q^*(\varphi,t)=0\end{aligned}\right\}\quad(1.1)$$

gdzie:

E - moduł sprężystości materiału pręta,
A - pole przekroju poprzecznego,
I - moment bezwładności przekroju poprzecznego,
R - promień krzywizny pierwotnej osi pręta,

W - ugięcie promieniowe mierzone na zewnątrz od pierwotnej osi pręta,

V - odkształcenie podłużne mierzone w kierunku matematycznie dodatnim.

Traktując problem jako quasistatyczny obciążenie określamy następująco:

$$\left.\begin{aligned} q^*(\varphi,t) &= -k_1 W(\varphi,t), \\ p^*(\varphi,t) &= p(\varphi,t) - k_2 V(\varphi,t). \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

We wzorze powyższym $p(\varphi,t)$ jest zewnętrznym obciążeniem stycznym. k_1 i k_2 są stałymi sprężystymi podłoża, na którym spoczywa pręt, odpowiednio w kierunku promieniowym i stycznym.

Wstawiając (1.2) do (1.1) po rozwiązaniu tych równań względem funkcji przemieszczeń $W(\varphi,t)$ i $V(\varphi,t)$ otrzymujemy

$$\left.\begin{aligned} \Omega_\varphi W(\varphi,t) &= \frac{R^4}{EI}\frac{d\,p(\varphi,t)}{d\varphi} - \frac{R^2}{AE}\frac{d^3 p(\varphi,t)}{d\varphi^3}, \\ \Omega_\varphi V(\varphi,t) &= -\frac{R^2}{AE}\frac{d^4 p(\varphi,t)}{d\varphi^4} - \frac{R^4}{EI}\left(1+\frac{k_1 R^2}{AE}\right)p(\varphi,t) \end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

gdzie:

$$\Omega_\varphi = \frac{d^6}{d\varphi^6} + \left(2-\frac{k_2 R^2}{AE}\right)\frac{d^4}{d\varphi^4} + \left[1+\frac{k_1}{E}\left(\frac{R^4}{I}+\frac{R^2}{A}\right)\right]\frac{d^2}{d\varphi^2} - \frac{k_2 R^4}{EI}\left(1+\frac{k_1 R^2}{AE}\right). \quad (1.4)$$

Wykonując transformację Laplace'a oraz korzystając z analogii sprężysto-lepkosprężystej uzyskamy transformowane równania dla pręta lepkosprężystego na podłożu lepkosprężystym

$$\bar{\Omega}_\varphi(s)\,\bar{W}(\varphi,s) = \frac{R^4}{I\,\bar{E}(s)}\frac{d\,\bar{p}(\varphi,s)}{d\varphi} - \frac{R^2}{A\bar{E}(s)}\frac{d^3\bar{p}(\varphi,s)}{d\varphi^3}, \quad (1.5)$$

$$\bar{\Omega}_{\varphi}(s)\,\bar{V}(\varphi,s) = -\frac{R^2}{A\bar{E}(s)}\frac{d^4\bar{p}(\varphi,s)}{d\varphi^4} - \frac{R^4}{I\bar{E}(s)}\left(1+\frac{\bar{k}_1(s)R^2}{A\bar{E}(s)}\right)\bar{p}(\varphi,s), \tag{1.5}$$

gdzie

$$\bar{\Omega}_{\varphi}(s) = \frac{d^6}{d\varphi^6} + \left(2-\frac{\bar{k}_2(s)R^2}{A\bar{E}(s)}\right)\frac{d^4}{d\varphi^4} + \left[1+\frac{\bar{k}_1(s)}{\bar{E}(s)}\left(\frac{R^4}{I}+\frac{R^2}{A}\right)\right]\frac{d^2}{d\varphi^2} -$$

$$-\frac{\bar{k}_2(s)R^4}{I\bar{E}(s)}\left(1+\frac{\bar{k}_1(s)R^2}{A\bar{E}(s)}\right).$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\bar{a}(s) = 2-\frac{\bar{k}_2(s)R^4}{I\bar{E}(s)}, \qquad \bar{b}(s) = 1+\frac{\bar{k}_1(s)}{\bar{E}(s)}\left(\frac{R^4}{I}+\frac{R^2}{A}\right),$$

$$\bar{c}(s) = -\frac{\bar{k}_2(s)R^4}{I\bar{E}(s)}\left(1+\frac{\bar{k}_1(s)R^2}{A\bar{E}(s)}\right)$$

operator $\Omega_{\varphi}(s)$ przyjmie postać

$$\bar{\Omega}_{\varphi}(s) = \frac{d^6}{d\varphi^6} + \bar{a}(s)\frac{d^4}{d\varphi^4} + \bar{b}(s)\frac{d^2}{d\varphi^2} + \bar{c}(s).$$

Obecnie wykonamy na równaniach (1.5) skończoną transformację Fouriera [3]. W przypadku, gdy końce pręta zamocowane są przegubowo z możliwością jedynie stycznego przesunięcia człony dodatkowe transformacji skończonej Fouriera znikają, a układ równań różniczkowych sprowadza się do równań algebraicznych:

$$\bar{E}(s)\left[-\mu_n^6+\bar{a}(s)\mu_n^4-\bar{b}(s)\mu_n^2+\bar{c}(s)\right]S\left[\bar{W}(\varphi,s)\right] =$$

$$= -\left(\frac{R^4}{I}\mu_n+\frac{R^2}{A}\mu_n^3\right)C\left[\bar{p}(\varphi,s)\right], \tag{1.6}$$

$$\bar{E}(s)\left[-\mu_n^6 + \bar{a}(s)\mu_n^4 - \bar{b}(s)\mu_n^2 + \bar{c}(s)\right] C\left[\bar{V}(\varphi,s)\right] =$$

$$= -\left[\frac{R^2}{A}\mu_n^4 + \frac{R^4}{I}\left(1 + \frac{\bar{k}_1(s)R^2}{A\bar{E}(s)}\right)\right] C\left[\bar{p}(\varphi,s)\right], \tag{1.6}$$

gdzie: $S[f(\varphi)]$ i $C[f(\varphi)]$ są odpowiednio skończonymi sinusowymi i cosinusowymi transformatami funkcji $f(\varphi)$, μ_n jest wartością własną rozpatrywanego zagadnienia, równą $\frac{n\pi}{\varphi_0}$,

$$S\left[\bar{W}(\varphi,s)\right] = \frac{\mu_n\left(\frac{R^2}{A}\mu_n^2 + \frac{R^4}{I}\right) C\left[\bar{p}(\varphi,s)\right]}{\bar{E}(s)\left[\mu_n^6 - \bar{a}(s)\mu_n^4 + \bar{b}(s)\mu_n^2 - \bar{c}(s)\right]},$$

$$C\left[\bar{V}(\varphi,s)\right] = \frac{\left[\frac{R^2}{A}\mu_n^4 + \frac{R^4}{I}\left(1 + \frac{\bar{k}_1(s)R^2}{A\bar{E}(s)}\right)\right] C\left[\bar{p}(\varphi,s)\right]}{\bar{E}(s)\left[\mu_n^6 - \bar{a}(s)\mu_n^4 + \bar{b}(s)\mu_n^2 - \bar{c}(s)\right]} \tag{1.7}$$

Wykonując odwrotną transformację Fouriera otrzymujemy

$$\bar{W}(\varphi,s) = \frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{\mu_n\left[\frac{R^2}{A}\mu_n^2 + \frac{R^4}{I}\right]\sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} C\left[\bar{p}(\varphi,s)\right]}{\bar{E}(s)\left[\mu_n^6 - \bar{a}(s)\mu_n^4 + \bar{b}(s)\mu_n^2 - \bar{c}(s)\right]}$$

$$\bar{V}(\varphi,s) = \frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{\left[\frac{R^2}{A}\mu_n^4 + \frac{R^4}{I}\left(1 + \frac{\bar{k}_1(s)R^2}{A\bar{E}(s)}\right)\right]\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} C\left[\bar{p}(\varphi,s)\right]}{\bar{E}(s)\left[\mu_n^6 - \bar{a}(s)\mu_n^4 + \bar{b}(s)\mu_n^2 - \bar{c}(s)\right]} \tag{1.8}$$

gdzie:

$$\lambda_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ 1 & n > 0. \end{cases}$$

Pozostają do wyznaczenia funkcje $W(\varphi,t)$ i $V(\varphi,t)$. W tym celu wykonujemy na równaniach (1.8) odwrotną transformację Laplace'a wykorzystując twierdzenie o splocie.

Oznaczając przez

$$\left.\begin{aligned} G_n(t) &= L^{-1}\left\{\frac{\mu_n\left(\frac{R^2}{A}\mu_n^2+\frac{R^4}{I}\right)}{\bar{E}(s)\left[\mu_n^6-\bar{a}(s)\mu_n^4+\bar{b}(s)\mu_n^2-\bar{c}(s)\right]}\right\}, \\ H_n(t) &= L^{-1}\left\{\frac{\frac{R^2}{A}\mu_n^4+\frac{R^4}{I}\left(1+\frac{\bar{k}_1(s)R^2}{A\,\bar{E}(s)}\right)}{\bar{E}(s)\left[\mu_n^6-\bar{a}(s)\mu_n^4+\bar{b}(s)\mu_n^2-\bar{c}(s)\right]}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

Otrzymujemy następujący wynik po dokonaniu wspomnianej transformacji

$$\left.\begin{aligned} W(\varphi,t) &= \frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\int_0^t G_n(t-\tau)C\left[p(\varphi,\tau)\right]d\tau, \\ V(\varphi,t) &= \frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\int_0^t H_n(t-\tau)C\left[p(\varphi,\tau)\right]d\tau, \end{aligned}\right\} \quad (1.10)$$

gdzie:

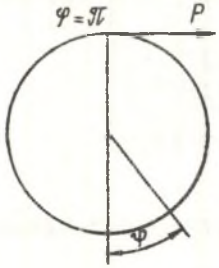
$$C\left[p(\varphi,\tau)\right] = \int_0^{\varphi_0} p(u,\tau)\cos\frac{n\pi u}{\varphi_0}\,du. \quad (1.11)$$

Wprowadzając (1.11) do (1.10) otrzymujemy

$$W(\varphi,t) = \frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\int_0^t G_n(t-\tau)\left[\int_0^{\varphi_0} p(u,\tau)\cos\frac{n\pi u}{\varphi_0}\,du\right]d\tau$$

$$V(\varphi,t) = \frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\int_0^t H_n(t-\tau)\left[\int_0^{\varphi_0} p(u,\tau)\cos\frac{n\pi u}{\varphi_0}\,du\right]d\tau. \tag{1.12}$$

Kładąc we wzorach (1.12) $\varphi_0 = \pi$ otrzymujemy przypadek półpierścienia. Rozwiązanie dla półpierścienia będzie zarazem rozwiązaniem dla całego pierścienia pod warunkiem, że funkcja obciążeń stycznych $p(\varphi, t)$ jest parzystą względem φ. W celu uwolnienia się od tego założenia dla pierścienia zamkniętego, obciążamy go w punkcie $\varphi = \pi$ siłą $P=1$. Obciążenie to przedstawimy w postaci dystrybucji Diraca



Rys. 1

$$p(u,\tau) = \frac{1}{2R}\,\delta(u-\tau) \tag{1.13}$$

Obliczone w ten sposób przemieszczenia oznaczamy $W^{(1)}$ i $V^{(1)}$:

$$\left.\begin{aligned} W^{(1)} &= \frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(-1)^n \sin n\varphi\, G_n(t),\\ V^{(1)} &= \frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(-1)^n \cos n\varphi\, H_n(t). \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

Przenosząc siłę P z położenia $\varphi = \pi$ do położenia określonego współrzędną ψ (rys. 1) oraz zważywszy że

$$\cos n\,(\pi+\varphi-\psi) = (-1)^n \cos n\,(\varphi-\psi),$$

$$\sin n\,(\pi+\varphi-\psi) = (-1)^n \sin n\,(\varphi-\psi),$$

na podstawie $W^{(1)}$ i $V^{(1)}$ wyznaczamy funkcję wpływu

$$\left.\begin{aligned} W(\psi,\tau,\varphi,t) &= \frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \sin n(\varphi-\psi)\; G_n(t-\tau), \\ V(\psi,\tau,\varphi,t) &= \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \cos n(\varphi-\psi)\; H_n(t-\tau). \end{aligned}\right\} \quad (1.15)$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że funkcja wpływu w postaci operatorowej jest funkcją przejścia dla kontinuum. Mając wyznaczone funkcje wpływu można dla dowolnego obciążenia określić odkształcenia na podstawie następujących form całkowych

$$W(\varphi,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \int_0^t\int_0^{2\pi} p(\psi,\tau)G_n(t-\tau)\sin n(\varphi-\psi)\, d\psi d\tau,$$

$$(1.16)$$

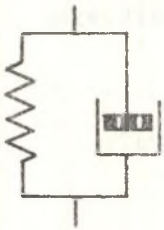
$$V(\varphi,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \int_0^t\int_0^{2\pi} p(\psi,\tau)H_n(t-\tau)\cos n(\varphi-\psi)\, d\psi d\tau$$

2. <u>Przypadek</u> $\bar{k}_1(s) = \alpha_1\bar{E}(s)$, $\bar{k}_2(s) = \alpha_2\bar{E}(s)$

Przy takich założeniach na podstawie (1.9) otrzymujemy

$$G_n(t) = \frac{n\left(\frac{R^2}{A}n^2 + \frac{R^4}{I}\right)}{E_0\left\{n^6-\left(2-\frac{2R^2}{A}\right)n^4+\left[1+\alpha_1\left(\frac{R^4}{I}+\frac{R^2}{A}\right)\right]n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I}\left(1+\frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)\right\}} L^{-1}\left\{\frac{E_0}{\bar{E}(s)}\right\}, \quad (2.1)$$

$$H_n(t) = \frac{\frac{R^2}{A} n^4 + \frac{R^4}{I}\left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)}{E_0\left\{n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A}\right) n^4 + \left[1 + \alpha_1\left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right)\right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I}\left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)\right\}} L^{-1}\left\{\frac{E_0}{\bar{E}(s)}\right\} \tag{2.1}$$



Rys. 2

Zgodnie z [1] dla modelu Voigta przy uwzględnieniu warunku nieściśliwości mamy

$$\frac{E_0}{\bar{E}(s)} = \frac{1}{1 + \lambda s}.$$

Model makroskopowy ciała Voigta przedstawia rysunek 2.

Wykonując odwrotną transformację otrzymamy

$$G_n(t) = \frac{n\left(\frac{R^2}{A} n^2 + \frac{R^4}{I}\right)}{E_0\lambda\left\{n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A}\right) n^4 + \left[1 + \alpha_1\left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right)\right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I}\left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)\right\}} e^{-\frac{t}{\lambda}} \tag{2.2}$$

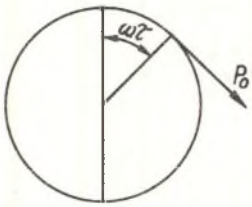
$$H_n(t) = \frac{\frac{R^2}{A} n^4 + \frac{R^4}{I}\left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)}{E\lambda_0\left\{n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A}\right) n^4 + \left[1 + \alpha_1\left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right)\right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I}\left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)\right\}} e^{-\frac{t}{\lambda}} \tag{2.2}$$

Wstawiając (2.2) do (1.16) otrzymujemy ogólne rozwiązanie dla modelu Voigta

$$W(\varphi,t) = \frac{1}{\pi E\lambda_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n\, n\left(\frac{R^2}{A} n^2 + \frac{R^4}{I}\right)}{n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A}\right) n^4 + \left[1 + \alpha_1\left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right)\right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I}\left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)} \int_0^t \int_0^{2\pi} p(\psi,\tau) e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \sin n(\varphi-\psi)\, d\psi d\tau, \tag{2.3}$$

$$V(\varphi,t) = \frac{1}{\pi E_0\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n\left[\frac{R^2}{A} n^4 + \frac{R^4}{I}\left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)\right]}{n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A}\right) n^4 + \left[1 + \alpha_1\left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right)\right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I}\left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)} \int_0^t \int_0^{2\pi} p(\psi,\tau) e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \cos n(\varphi-\psi)\, d\psi d\tau. \tag{2.3}$$

3. Przypadek wędrującej siły stycznej



Rys. 3

Rozpatrzmy przypadek, gdy siła wędruje z prędkością v po obwodzie koła będącego osią pręta (rys. 3). Zagadnienie w tym przypadku sprowadza się do obliczenia całek w równaniach (2.3) przy

$$p(\psi,\tau) = \frac{P_o}{R}\,\delta(\psi-\omega\tau), \qquad \omega = \frac{V}{R} \tag{3.1}$$

Wstawiając (3.1) do (2.3) otrzymamy

$$W(\varphi,t) = \frac{P_o}{\pi R E_o \lambda}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{\lambda_n\, n\left(\frac{R^2}{A}n^2 + \frac{R^4}{I}\right)}{n^6-\left(2-\frac{\alpha_2 R^2}{A}\right)n^4+\left[1+\alpha_1\left(\frac{R^4}{I}+\frac{R^2}{A}\right)\right]n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I}\left(1+\frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)}\int_o^t e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}}\sin n(\varphi-\omega\tau)\,d\tau, \tag{3.2}$$

$$V(\varphi,t) = \frac{P_o}{\pi R E_o \lambda}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{\lambda_n \frac{R^2}{A}n^4 + \frac{R^4}{I}\left(1+\frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)}{n^6-\left(2-\frac{\alpha_2 R^2}{A}\right)n^4+\left[1+\alpha_1\left(\frac{R^4}{I}+\frac{R^2}{A}\right)\right]n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I}\left(1+\frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)}\int_o^t e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}}\cos n(\varphi-\omega\tau)\,d\tau. \tag{3.2}$$

Obliczając całki otrzymujemy wynik dla tego szczególnego przypadku obciążenia:

$$W(\varphi,t) = \frac{P_o}{\pi E_o R} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\lambda_n\, n\left(\frac{R^2}{A} n^2 + \frac{R^4}{I}\right)}{n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A}\right) n^4 + \left[1 + \alpha_1\left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right)\right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I}\left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)} \times \frac{1}{\lambda\omega n + \frac{1}{\lambda\omega n}} \left[\frac{1}{\lambda\omega n} \sin n(\varphi - \omega t) + \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda\omega n} \sin n\varphi + \cos n\varphi\right)\right],$$

$$V(\varphi,t) = \frac{P_o}{\pi E_o R} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\lambda_n \left[\frac{R^2}{A} n^4 + \frac{R^4}{I}\left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)\right]}{n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A}\right) n^4 + \left[1 + \alpha_1\left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right)\right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I}\left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A}\right)} \times \frac{1}{\lambda\omega n + \frac{1}{\lambda\omega n}} \left[\frac{1}{\lambda\omega n} \cos n(\varphi - \omega t) - \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda\omega n} \cos n\varphi - \sin n\varphi\right)\right] \qquad (3.3)$$

4. Dynamika

Zagadnienie dynamiki pręta lepkosprężystego można rozwiązać w sposób analogiczny. W równaniach (1.2) należy uwzględnić składniki reprezentujące siły bezwładności

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}^*(\varphi,t) &= -k_1\, W(\varphi,t) - A\varrho\,\frac{d^2W(\varphi,t)}{dt^2}, \\ p^*(\varphi,t) &= p(\varphi,t) - k_2 V(\varphi,t) - A\varrho\,\frac{d^2V(\varphi,t)}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad (4.1)$$

gdzie: ϱ jest gęstością materiału pręta.

Będziemy rozpatrywać jedynie wpływ sił bezwładności na drgania promieniowe. Pomijamy zatem wpływ sił dynamicznych podłużnych, tak jak to zresztą czyni się powszechnie w teorii drgań. Błąd popełniany w ten sposób jest znikomy, gdyż energia podłużnych jest mała w stosunku do energii drgań poprzecznych.

Podstawiając (4.1) do (1.1) rozwiązujemy układ ze względu na $W(\varphi,t)$

$$\Omega W(\varphi,t) = \frac{R^4}{IE}\,\frac{dp(\varphi,t)}{d\varphi} - \frac{R^2}{AE}\,\frac{d^3p(\varphi,t)}{d\varphi^3} \quad (4.2)$$

gdzie:

$$\Omega = \Omega_{1\varphi} - \frac{A\varrho^2R^6}{IE^2}\,\frac{d^4}{dt^4} - \frac{\Omega_{2\varphi}}{E}\,\frac{d^2}{dt^2}$$

W powyższym wzorze $\Omega_{1\varphi}$ jest określone równaniem (1.4)

$$\Omega_{2\varphi} = A\varrho\left[\frac{R^2}{A}\,\frac{d^4}{d\varphi^4} - \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right)\frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{(k_1+k_2)R^6}{AIE} + \frac{R^4}{I}\right].$$

Wykonując transformację Laplace'a na równaniu uwzględniającym siły bezwładności w czasie ruchu pręta oraz stosując analogię sprężysto-lepkosprężystą, przy założeniu zerowych warunków początkowych

$$W(\varphi,0) = 0, \quad \dot{W}(\varphi,0) = 0$$

napiszemy

$$\bar{\Omega}(s)\bar{W}(\varphi,s) = \frac{R^4}{I\bar{E}(s)}\frac{d\,\bar{p}(\varphi,s)}{d\varphi} - \frac{R^2}{A\bar{E}(s)}\frac{d^3\bar{p}(\varphi,s)}{d\varphi^3} \tag{4.3}$$

Wykonując następnie skończoną transformację Fouriera przy tych samych warunkach brzegowych jak w przypadku równań (1.5) otrzymujemy

$$\bar{\Omega}_n(s)S\left[\bar{W}(\varphi,s)\right] = C\left[\bar{p}(\varphi,s)\right]\left[\frac{R^4}{I}\mu_n + \frac{R^2}{A}\mu_n^3\right]\cdot\frac{1}{\bar{E}(s)}, \tag{4.4}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\Omega}_n(s) = \bar{\Omega}_{1n}(s) + \frac{A\varrho^2R^6}{I\bar{E}(s)^2}s^4 + \frac{\bar{\Omega}_{2n}(s)}{\bar{E}(s)}s^2,\\
&\bar{\Omega}_{1n}(s) = \mu_n^6 - \bar{a}(s)\mu_n^4 + \bar{b}(s)\mu_n^2 - \bar{c}(s),\\
&\bar{\Omega}_{2n}(s) = A\varrho\left[\frac{R^2}{A}\mu_n^4 + \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right)\mu_n^2 + \frac{\bar{k}_1(s)+\bar{k}_2(s)}{AI\,\bar{E}(s)} + \frac{R^4}{I}\right],\\
&S\left[\bar{W}(\varphi,s)\right] = \frac{\left(\frac{R^4}{I}\mu_n + \frac{R^2}{A}\mu_n^3\right)C\left[\bar{p}(\varphi,s)\right]}{\left[\bar{\Omega}_{1n}(s) + \frac{A\varrho^2R^6}{I\,\bar{E}(s)^2}s^4 + \frac{\bar{\Omega}_{2n}(s)}{E(s)}s^2\right]\bar{E}(s)}
\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Po wykonaniu odwrotnej transformacji Fouriera otrzymamy

$$\bar{W}(\varphi,s) = \frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n\left(\frac{R^4}{I}\mu_n + \frac{R^2}{A}\mu_n^3\right)\sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}C\left[\bar{p}(\varphi,s)\right]}{\bar{E}(s)\,\bar{\Omega}_{1n}(s) + \frac{A\varrho^2R^6}{I\,\bar{E}(s)}s^4 + \bar{\Omega}_{2n}(s)\,s^2}. \tag{4.6}$$

Wprowadzając

$$R_n(t) = L^{-1}\left\{\frac{\frac{R^4}{I}\mu_n + \frac{R^2}{A}\mu_n^3}{\bar{E}(s)\,\bar{\Omega}_{1n}(s) + \frac{A\varrho^2R^6}{I\bar{E}(s)}s^4 + \bar{\Omega}_{2n}\,s^2}\right\} \tag{4.7}$$

wykonujemy odwrotną transformację Laplace'a, przy wykorzystaniu twierdzenia o splocie

$$W(\varphi,t) = \frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\int_0^t R_n(t-\tau)C\left[p(\varphi,\tau)\right]d\tau. \tag{4.8}$$

Wynik (4.8) pod względem budowy w sensie matematycznym jest identyczny z (1.10), z tą różnicą, że w miejsce $G_n(t-\tau)$ weszło wyrażenie $R_n(t-\tau)$. W $R_n(t)$ został uwzględniony wpływ sił bezwładności na ruch pręta lepkosprężystego. W związku z tym na przykład dla zamkniętego pręta kołowego można napisać równanie ruchu

$$W(\varphi,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}\lambda_n\int_0^t\int_0^{2\pi} p(\psi,\tau)\,R_n(t-\tau)\sin n(\varphi-\psi)\,d\tau d\psi. \tag{4.9}$$

Równanie powyższe, podobnie jak w przypadku zagadnienia quasistatycznego można dostosować do różnych modeli reologicznych podłoża i pręta. Dostosowanie to polega na odpowiednim doborze $\bar{k}_1(s)$, $\bar{k}_2(s)$ i $\bar{E}(s)$ we wzorze (4.7).

Założywszy że: $\bar{k}_1(s) = \alpha_1\bar{E}(s)$,

$$\bar{k}_2(s) = \alpha_2\bar{E}(s)$$

oraz przyjmując do obliczeń model Voigta, to znaczy

$$\bar{E}(s) = E_0\,(1 + \lambda s),$$

wzór (4.7) sprowadza się do postaci

$$R_n(t) = P_n L^{-1}\left\{\frac{1+\lambda s}{a_1 s^4+a_{2n}s^3+a_{3n}s^2+a_{4n}s+a_{5n}}\right\} \quad (4.10)$$

gdzie:

$$P_n = \frac{R^4}{I} n + \frac{R^2}{A} n^3,$$

$$a_1 = \frac{a c^2 R^6}{I E_0},$$

$$a_{2n} = \lambda \Omega_{2n}, \qquad a_{3n} = \Omega_{2n} + E_0 \lambda^2 \Omega_{1n},$$

$$a_{4n} = 2\lambda E_0 \Omega_{1n} \qquad a_{5n} = E_0 \Omega_{1n}.$$

We wzorach powyższych

$$\Omega_{1n} = n^6 - \left(2 - \frac{2R^2}{A}\right) n^4 + 1 + \alpha_1\left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right) n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I}\left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A}\right),$$

$$\Omega_{2n} = A c\left[\frac{R^2}{A} n^4 + \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right) n^2 + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{AI} R^6 + \frac{R^4}{I}\right].$$

Przystępujemy teraz do rozkładu wielomianu czwartego stopnia

$$T(s) = a_1 s^4 + a_{2n}s^3 + a_{3n}s^2 + a_{4n}s + a_{5n}, \quad (4.11)$$

Należy rozpatrzyć trzy przypadki

1. $T(s) = a_1(s-s_{1n})(s-s_{2n})(s-s_{3n})(s-s_{4n})$,
2. $T(s) = a_1(s-s_{1n})(s-s_{2n})(s^2+s\alpha_{2n}+\psi_{2n})$,
3. $T(s) = a_1(s^2+s\varphi_{1n}+\psi_{1n})(s^2+s\varphi_{2n}+\psi_{2n})$.

W każdym z trzech powyższych przypadków należy dokonać rozkładu wymiernej funkcji operatorowej występującej we wzorze (4.10) na ułamki proste.

W przypadku, gdy wielomian (4.11) ma cztery miejsca zerowe

$$R_n(t) = P_n L^{-1} \sum_{m=1}^{4} \frac{A_{mn}}{s-s_{mn}}, \tag{4.12}$$

gdzie:

$$A_{mn} = \frac{1+\lambda s_{mn}}{a_1 \prod_{i\neq m} (s_{mn}-\varepsilon_{in})}$$

Po wykonaniu odwrotnej transformacji

$$R_n(t) = P_n \sum_{m=1}^{4} A_{mn} e^{s_{mn}t} \tag{4.13}$$

Gdy wielomian $T(s)$ ma tylko dwa pierwiastki rzeczywiste

$$R_n(t) = P_n L^{-1} \left\{ \frac{B_{1n}}{s-s_{1n}} + \frac{B_{2n}}{s-s_{2n}} + \frac{B_{3n}s+B_{4n}}{s^2+s\varphi_{2n}+\psi_{2n}} \right\}, \tag{4.14}$$

gdzie:

$$B_{1n} = \frac{1+\lambda s_{1n}}{a_1(s_{1n}^2+\varphi_{2n}s_{1n}+\psi_{2n})(s_{1n}-s_{2n})}, \quad B_{2n} = \frac{1+\lambda s_{2n}}{a_1(s_{2n}^2+\varphi_{2n}s_{2n}+\psi_{2n})(s_{1n}-s_{2n})}$$

$$B_{3n} = -B_{1n} - B_{2n}, \qquad B_{4n} = \frac{1}{a_1 s_{1n} s_{2n}} + \left(\frac{B_{1n}}{s_{1n}} + \frac{B_{2n}}{s_{2n}}\right)\psi_{2n},$$

czyli

$$R_n(t) = P_n\left\{B_{1n}\, e^{s_{1n}t} + B_{2n}\, e^{s_{2n}t} + \right.$$

$$\left. + B_{3n}\, L^{-1}\left[\frac{s + \frac{2n}{2}}{(s+\frac{\varphi_{2n}}{2})^2 + \psi_{2n} - (\frac{\varphi_{2n}}{2})^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{B_{4n} - B_{3n}\cdot\frac{2n}{2}}{(s+\frac{\varphi_{2n}}{2})^2 + \psi_{2n} - (\frac{\varphi_{2n}}{2})^2}\right]\right\} \tag{4.15}$$

Ponieważ w rozważanym przypadku

$$\chi^2_{2n} = \psi_{2n} - (\frac{\varphi_{2n}}{2} > 0,$$

transformata odwrotna ma postać

$$R_n(t) = P_n\left[B_{1n}\, e^{s_{1n}t} + B_{2n} e^{s_{2n}t} + B_{3n} e^{-\frac{\varphi_{2n}}{2}t} \cos\chi_{2n}\, t + \right.$$

$$\left. + (B_{4n} - B_{3n}\frac{\varphi_{2n}}{2})\frac{1}{\lambda_{2n}}\, e^{-\frac{\varphi_{2n}}{2}t} \sin\chi_{2n}\, t\right]. \tag{4.16}$$

Na koniec przypadek, gdy wielomian $T(s)$ nie ma rzeczywistych miejsc zerowych

$$R_n(t) = P_n\, L^{-1}\left\{\frac{C_{1n}s + C_{2n}}{s^2 + \varphi_{1n}s + \psi_{1n}} + \frac{C_{3n}s + C_{4n}}{s^2 + \varphi_{2n}s + \psi_{2n}}\right\}, \tag{4.17}$$

gdzie:

$$C_{3n} = \frac{D_{3n}}{D_n}, \qquad C_{4n} = \frac{D_{4n}}{D_n},$$

$$C_{1n} = -C_{3n}, \qquad C_{2n} = \frac{1}{\psi_{2n}}\left(\frac{1}{a_1} - \psi_{1n} C_{4n}\right),$$

$$D_{3n} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{a_1\psi_{2n}} & 1 - \dfrac{\psi_{1n}}{\psi_{2n}} \\ \dfrac{1}{a_1}\left(\lambda - \dfrac{\varphi_{2n}}{\psi_{2n}}\right) & \varphi_{1n} - \varphi_{2n}\dfrac{\psi_{1n}}{\psi_{2n}} \end{vmatrix} \quad D_{4n} = \begin{vmatrix} \varphi_{1n} - \varphi_{2n} & -\dfrac{1}{a_1\psi_{2n}} \\ \psi_{1n} - \psi_{2n} & \dfrac{1}{a_1}\left(\lambda - \dfrac{\varphi_{2n}}{\psi_{2n}}\right) \end{vmatrix},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \varphi_{1n} - \varphi_{2n} & 1 - \dfrac{\psi_{1n}}{\psi_{2n}} \\ \psi_{1n} - \psi_{2n} & \varphi_{1n} - \varphi_{2n}\dfrac{\psi_{1n}}{\psi_{2n}} \end{vmatrix}.$$

Po wykonaniu odwrotnej transformacji

$$R_n(t) = P_n\Big(C_{1n} e^{-\frac{\varphi_{1n} t}{2}} \cos\chi_{1n} t + \frac{C_{2n} - C_{1n}\frac{\varphi_{1n}}{2}}{\chi_{1n}} e^{-\frac{\varphi_{1n}}{2} t} \sin\chi_{1n} t +$$

$$+ C_{3n} e^{-\frac{\varphi_{2n}}{n} t} \cos\chi_{2n} t + \frac{C_{4n} - C_{3n}\frac{\varphi_{2n}}{2}}{\varphi_{2n}} e^{-\frac{\varphi_{2n}}{2} t} \sin\chi_{2n} t\Big). \tag{4.18}$$

5. Przypadek wędrującej siły stycznej

Zagadnienie sprowadza się do obliczenia całki w równaniu (4.9) przy $p(\psi, \tau) = \frac{P_o}{R}\,\delta(\psi - \omega\tau)$, a

$$W(\varphi,t) = \frac{P_o}{\pi R} \sum_{n=o}^{\infty} \lambda_n \int_o^t R_n(t-\tau)\sin n(\varphi-\omega\tau)d\tau. \qquad (5.1)$$

Podstawiając do (5.1) kolejno (4.12), (4.16) i (4.18) otrzymujemy rozwiązanie interesującego nas problemu.

W pierwszym przypadku równanie opisujące przemieszczenia pręta lepkosprężystego ma postać

$$W(\varphi,t) = \frac{P_o}{\pi R} \sum_{n=o}^{\infty} \lambda_n P_n \sum_{m=1}^{4} A_{mn} \frac{\omega n}{\omega^2 n^2 + s_{mn}^2} \left[\frac{s_{mn}}{\omega n} \sin n(\varphi-\omega t) + \right.$$

$$\left. + \cos n(\varphi-\omega t) + e^{s_{mn}t} \left(\frac{s_{mn}}{\omega n} \sin n\varphi + \cos n\varphi \right) \right]. \qquad (5.2)$$

Przyjmiemy teraz oznaczenia

$$\beta_{2m-1,n} = \chi_{mn}\, t + n\varphi, \qquad \gamma_{2m-1,n} = \chi_{mn}\, t - n\varphi,$$

$$\varepsilon_{2m-1,n} = -\chi_{mn} - n\omega, \qquad \delta_{2m-1,n} = -\chi_{mn} + n\omega,$$

$$\varkappa_{mn} = \frac{\varphi_{mn}}{2},$$

dla $m = 1, 2$.

W drugim przypadku przemieszczenie wyraża się równością

$$W(\varphi,t) = \frac{P_o}{\pi R} \sum_{n=o}^{\infty} \lambda_n P_n \left\{ \sum_{m=1}^{2} \frac{B_{mn}\,\omega n}{\omega^2 n^2 + s_{mn}^2} \left[\frac{s_{mn}}{\omega n} \sin n(\varphi-\omega t) + \right.\right.$$

$$\left. + \cos n(\varphi-\omega t) - e^{s_{mn}t} \left(\frac{s_{mn}}{n} \sin n\varphi + \cos n\varphi \right) \right] +$$

$$+\frac{B_{3n}}{2}\left[\frac{\varepsilon_{3n}}{\varkappa_{2n}^2+\varepsilon_{3n}^2}\left(\frac{\varkappa_{2n}}{\varepsilon_{3n}}\sin n(\varphi-\omega t)-\cos n(\varphi-\omega t)-\right.\right.$$

$$\left.-e^{-\varkappa_{2n}t}\left(\frac{\varkappa_{2n}}{\varepsilon_{3n}}\sin\beta_{3n}-\cos\beta_{3n}\right)\right)+\frac{\delta_{3n}}{\varkappa_{2n}^2+\delta_{3n}^2}\left(\frac{\varkappa_{2n}}{\delta_{3n}}\sin n(\omega t-\varphi)+\right.$$

$$\left.\left.-\cos n(\omega t-\varphi)-e^{-\varkappa_{2n}t}\left(\frac{\varkappa_{2n}}{\delta_{3n}}\sin\gamma_{3n}-\cos\gamma_{3n}\right)\right)\right]$$

$$+\frac{B_{4n}-B_{3n}\varkappa_{2n}}{2\chi_{2n}}\left[\frac{\delta_{3n}}{\varkappa_{2n}^2+\delta_{3n}^2}\left(\frac{\varkappa_{2n}}{\delta_{3n}}\cos n(\omega t-\varphi)-\sin n(\omega t-\varphi)+\right.\right.$$

$$\left.-e^{-\varkappa_{2n}t}\left(\frac{\varkappa_{2n}}{\delta_{3n}}\cos\gamma_{3n}-\sin\gamma_{3n}\right)\right)\frac{\varepsilon_{3n}}{\varkappa_{2n}^2+\varepsilon_{3n}^2}\left(\frac{\varkappa_{2n}}{\varepsilon_{3n}}\cos n(\varphi-\omega t)-\sin n(\varphi-\omega t)-\right.$$

$$\left.\left.-e^{-\varkappa_{2n}t}\left(\frac{\varkappa_{2n}}{\varepsilon_{3n}}\cos\beta_{3n}-\sin\beta_{3n}\right)\right)\right]\Bigg\}. \tag{5.3}$$

Natomiast w ostatnim przypadku otrzymujemy równanie

$$W(\varphi,t)=\frac{P_o}{2\pi R}\sum_{n=o}^{\infty}\lambda_n P_n\sum_{m=1}^{2}C_{2m-1,n}\left[\frac{\varepsilon_{2m-1,n}}{\varkappa_{mn}^2+\varepsilon_{2m-1,n}^2}\right.$$

$$\left(\frac{\varkappa_{mn}}{\delta_{2m-1,n}}\sin n(\varphi-\omega t)-\cos n(\varphi-\omega t)+\right.$$

$$-e^{-\varkappa_{mn}t}\left(\frac{\varkappa_{mn}}{\varepsilon_{2m-1,n}}\sin\beta_{2m-1,n}-\cos\beta_{2m-1,n}\right)+$$

$$+\frac{\delta_{2m-1,n}}{\varkappa_{mn}^2+\bar{\delta}_{2m-1,n}^2}\left(\frac{\varkappa_{mn}}{\delta_{2m-1,n}}\sin n(\omega t-\varphi)-\cos n(\omega t-\varphi)+\right.$$

$$\left.-e^{-\varkappa_{mn}t}\left(\frac{\varkappa_{mn}}{\delta_{2m-1,n}}\sin\gamma_{2m-1,n}-\cos\gamma_{2m-1,n}\right)\right)\Bigg]+$$

$$+\frac{C_{2m.n}-C_{2m-1.n}\varkappa_{mn}}{\chi_{m,n}}\left[\frac{\delta_{2m-1.n}}{\varkappa_{mn}^2+\delta_{2m-1,n}^2}\left(\frac{\varkappa_{mn}}{\delta_{2m-1,n}}\cos n(\omega t-\varphi)+\right.\right.$$

$$-\sin n(\omega t-\varphi)-e^{-\varkappa_{mn}t}\left(\frac{\varkappa_{mn}}{2m-1,n}\cos\gamma_{2m-1,n}-\sin\gamma_{2m-1,n}\right)\Bigg)-$$

$$-\frac{\varepsilon_{2m-1,n}}{\varkappa_{mn}^2+\varepsilon_{2m-1,n}^2}\left(\frac{\varkappa_{mn}}{\varepsilon_{2m-1,n}}\cos n(\varphi-\omega t)+\sin n(\varphi-\omega t)-\right.$$

$$\left.\left.-e^{-\varkappa_{mn}t}\left(\frac{\varkappa_{mn}}{\varepsilon_{2m-1,n}}\cos\beta_{2m-1,n}-\sin\beta_{2m-1,n}\right)\right)\right]\Bigg] \qquad (5.4)$$

LITERATURA

[1] NOWACKI:W.: Teoria Pełzania; ARKADY - Warszawa 1963.

[2] SKALMIERSKI B.: Problemy statyki i dynamiki powłok walcowych użebrowanych; Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Nr 73, Mechanika z. 18 - Gliwice 1963.

[3] SNEDDON J.N.: Fourier Transforms; New York-Toronto--London 1951.

КОЛЕБАНИЯ НЕКОТОРОЙ ВЯЗКО-УПРУГОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Резюме

В работе приводится описание перемещений кругового вязкоупругого стрежня на вязкоупругой основании нагружённого касательными силами. Рассмотрена квазистатическая и динамическая задача.

Куравнениям упругого стержня применено упруго-вязкоупругую аналогию: Уравнения движения разрешено применя преобразовании Лапласа и Фуре. Обсуждая нагрузку сосредоточенной казательной силой (функция б Дирака) вычислено функцию Грина этой задачи. В динамической задачи принято во внимание только инертные силы поперечных колебаний. Ошибка вызвана этом слишком мала потому что, энергия поперечных колебаний на много больше энергии продольных колебаний. Подобно рассмотрено реологический модель Фойгта.

OSCILATIONS SOME VISCOELASTIC MECHANICAL SYSTEM

Summary

The paper discusses a quasistatic phenomena present in a viscoelastic drum loaded with a wandering radial external force. Modern construction of these drums has been made of welded plates.

The analysis takes into account the influence exerted by the closing disks stiffness on the rotation of the edge of the shell. The viscoelastic supports are treated like removing joints reacting on the drum shell only by a twisting moment and not allowing any radial and tangential displacements. The solution has been obtained by the application of the elastic and viscoelastic analogy using the Laplace transform under the assumption of the Voigt's body property. The analysis has been applied to the particular case of the drum - rope system.