

RYSZARD GRYBÓŚ  
Katedra Mechaniki Technicznej

## PRZYZYNEK DO ENERGETYCZNEJ TEORII UDERZENIA

Streszczenie. Zaproponowano modyfikację energetycznej teorii uderzenia polegającą na tym, że dla obliczenia energii odkształceń sprężystych zakłada się pewien rozkład uogólnionych sił wewnętrznych (a nie kształt elementu odkształconego siłą uderzenia). W ten sposób wyprowadzono wzory na współczynnik dynamiczny zwielokrotnienia naprężeń w przypadku poprzecznego uderzenia środkowego w belkę dwuprzegubową oraz w przypadku uderzenia podłużnego w pręt prosty swobodny. Uwzględniono wpływ wyższych harmonicznych, sił poprzecznych oraz tłumienia (w przypadku pierwszym) lub wpływ miejscowej podatności zderzających się ciał (w przypadku drugim).

### 1. WSTĘP

Obliczanie przemieszczeń i naprężeń dynamicznych, wywołanych uderzeniem w ciało sprężyste przy zastosowaniu energetycznej teorii uderzenia polega na wykorzystaniu tzw. współczynnika dynamicznego. Wielkość tę wyznacza się za pomocą bilansu energetycznego stosując następujące rozumowanie.

Przypuśćmy, że sztywny białak uderza w ciało sprężyste powodując jego odkształcenia (ogólne i lokalne). Zwykle zakłada się, że są one wyłącznie liniowo-sprężyste, zaś samo uderzenie ma charakter plastyczny, wskutek czego białak pozostaje w zetknięciu z ciałem uderzonym co najmniej do chwili wystąpienia maksymalnych odkształceń i naprężeń. W chwili tej energia kinetyczna  $E_k$ , którą posiadały ciała przed uderzeniem zostaje zamieniona w energię potencjalną  $U$  odkształceń dynamicznych.

Aby obliczyć energię  $U$  przyjmuje się jakąś postać elementu odkształconego siłą uderzenia lub pewien rozkład przemieszczeń w ciele uderzonym w chwili największego odkształcenia. Wyraziwszy w ten sposób energię  $U$  przez maksymalne odkształcenie dynamiczne  $y_m$  (lub analogiczną siłę  $P_m$ ) z równania bilansu energetycznego znajdujemy odnośną wielkość dynamiczną. Ta wartość podzielona przez odpowiednią wielkość statyczną daje współczynnik dynamiczny. W licznych podręcznikach, a w ślad za tym i w praktyce inżynierskiej

rozpowszechniona jest metoda obliczeń przy obciążeniach udarowych oparta na wykorzystaniu współczynnika dynamicznego. Konfrontacja wyników takich obliczeń z wynikami pomiarów eksperymentalnych wskazuje [2, 4], że o ile dla przemieszczeń uzyskuje się na ogół zadowalającą dokładność, zwłaszcza gdy masa bijaka jest dużo większa od masy ciała uderzonego, o tyle przy obliczaniu naprężeń otrzymuje się z reguły błędy tak duże, iż stawiają one pod znakiem zapytania możliwość posługiwania się tą metodą.

Jedną z przyczyn tego stanu rzeczy jest pomijanie w metodzie energetycznej wpływu wyższych harmonicznych, jakie zostają wzbudzone przy uderzeniu. Tak np. rozpatrując uderzenie poprzeczne środkowe w belkę swobodnie podpartą przyjmuje się, iż ulega ona odkształceniu takiemu, jak podczas drgań swobodnych podstawowych (tzn. że wygina się w kształcie jednej półfali) lub nawet w taki sposób, jak przy obciążeniu statycznym siłą przyłożoną w punkcie uderzenia. To założenie eliminuje z rozważań wyższe harmoniczne. Tymczasem, jak wiadomo [9], w rzeczywistości przy uderzeniu poprzecznym wzbudzone zostają drgania złożone o dyskretnym widmie częstości, dzięki czemu wzajemne stosunki pomiędzy przemieszczeniami punktów ciała ulegają podczas ruchu ustawicznym zmianom. Ponieważ jednak amplitudy wyższych harmonicznych są znacznie mniejsze od amplitudy drgań podstawowych, przeto dokładność metody energetycznej w odniesieniu do przemieszczeń dynamicznych jest na ogół zadowalająca.

Natomiast momenty zginające, towarzyszące wyższym harmonicznym nie zmieniają się już w tym samym stosunku względem harmoniki podstawowej co ugięcia. Dlatego błąd względny w określeniu naprężeń dynamicznych, spowodowany pominięciem wyższych harmonicznych jest dużo większy niż w przypadku przemieszczeń.

Inne przyczyny błędu metody energetycznej w omawianym przypadku tkwią w pominięciu wpływu sił poprzecznych oraz tłumienia.

Rozważania ściśle teorii uderzenia wymagają przeprowadzenia analizy ruchu układu ciągłego, a więc rozwiązania odpowiedniego równania falowego przy zadanych warunkach początkowych i brzegowych oraz przy znanej geometrii powierzchni ciała w pobliżu punktu uderzenia. Tak sformułowane zagadnienie zostało rozwiązane dla dwóch technicznie ważnych przypadków, mianowicie dla poprzecznego uderzenia w belkę swobodnie podpartą (S.P. Timoshenko, 1912 [8]) oraz dla kolinearnego zderzenia prętów prostych z zaokrąglonymi półkuliście końcami (J.E. Sears, 1908 [5]). W obu przypadkach przyjęto, że odkształcenie miejscowe jest powiązane z siłą uderzenia statycznym wzorem H.R. Hertza.

Jednakże rozwiązania falowe uwzględniające nieliniową zależność H.R. Hertza są bardzo skomplikowane i aczkolwiek posiadają fundamentalne znaczenie teoretyczne, to ich przydatność praktyczna jest mała. W przeciwieństwie do tego wyniki metody energetycznej, odznaczające się dużą prostotą ujęcia matematycznego rozpowszechniły się szeroko w praktyce inżynierskiej mimo ich, wspomnianej już poprzednio, małej dokładności w odniesieniu do naprężeń.

W pracy niniejszej przedstawiono zmodyfikowany sposób wyznaczania naprężeń dynamicznych w oparciu o metodę energetyczną. Istota proponowanego podejścia do zagadnienia polega na następującym stwierdzeniu. Jeśli zakładając pewną postać elementu odkształconego lub ściślej - pewien rozkład odkształceń - otrzymujemy za pomocą metody energetycznej dobrą dokładność w odniesieniu do przemieszczeń, to dla wyznaczenia tą drogą maksymalnych naprężeń dynamicznych należy założyć odpowiedni rozkład uogólnionych sił wewnętrznych w chwili wystąpienia ich maksymalnych wartości w przekroju niebezpiecznym. Przez uogólnioną siłę wewnętrzną należy rozumieć siłę osiową przy uderzeniu podłużnym, zaś moment zginający lub skręcający odpowiednio przy uderzeniu poprzecznym lub skrętym. Jeśli w dodatku wspomniany rozkład sił wewnętrznych przyjmiemy w zgodności (lub przynajmniej w sposób w przybliżeniu zgodny) z wynikami, jakich dostarczają metody dokładniejsze (tzn. falowe), to słusznie można oczekiwać znacznie większej dokładności w określeniu naprężeń, niż przy założeniu pola odkształceń. Takie podejście w przypadku uderzenia poprzecznego pozwala ponadto uwzględnić wpływ sił poprzecznych oraz tłumienia wewnętrznego na wielkość maksymalnych naprężeń dynamicznych.

W ten sposób rozwiązano zagadnienie uderzenia poprzecznego w belkę dwuprzegubową oraz zagadnienie podłużnego uderzenia masy w pręt prosty swobodny. Otrzymane wzory obciążeniowe posiadają prostotę właściwą wzorom metody energetycznej, zaś konfrontacja z wynikami doświadczeń lub z wynikami teorii falowej świadczy o ich zadowalającej dokładności.

W podobny sposób można rozwiązać i inne ważne przypadki uderzenia, zwłaszcza te, dla których rozwiązania ściśle mają postać zbyt skomplikowaną dla praktycznych zastosowań.

## 2. POPRZECZNE UDERZENIE ŚRODKOWE W BELKĘ DWUPRZEGUBOWĄ

2.1. Niechaj na belkę o masie  $G_2/g$  i stałej sztywności na zginanie  $EI$ , spoczywającą poziomo na dwóch podporach przegubowych spada sztywny bijak o masie  $G_1/g$ , spuszczoney swobodnie z wysokości  $H$ . Uderzenie następuje w połowie rozpiętości belki (tzw. uderzenie środkowe) i ma charakter plastyczny (tzn. współczynnik restytucji równa się zero) tak, że bijak pozostaje w kontakcie z belką co najmniej do chwili osiągnięcia maksymalnego wygięcia.

Celem rozważań jest wyznaczenie maksymalnych naprężeń dynamicznych w belce. Pomijając będziemy przy tym odkształcenia miejscowe, a ponadto założymy, że odkształcenia ogólne belki są wyłącznie sprężyste.

Tak sformułowane zagadnienie na gruncie teorii energetycznej rozpatrywał jako pierwszy H. Cox (1849 r.). Otrzymał on znany wzór na współczynnik uderzenia

$$\mu_0 = 1 + \left( 1 + \frac{G_1}{G_1 + \varphi_0 G_2} \frac{2H}{\gamma_s} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$



gdzie:

$$y_s = G_1 l^3 / 48 EI, \quad \text{zaś współczynnik redukcji masy belki} \\ \varphi_0 = 17/35.$$

Przy wyprowadzaniu tego wzoru zakłada się m.in., że oś belki w chwili maksymalnego wygięcia ma taki sam kształt, jak przy drganiach z częstotnością podstawową, co jest równoznaczne z pominięciem wyższych harmonicznych. Jest to jedna z zasadniczych przyczyn niedokładności, jakie daje wzór (2.1) przy obliczaniu maksymalnych naprężeń dynamicznych.

2.2. Choćo uwzględnić wpływ wyższych harmonicznych na wartość tych naprężeń wykorzystamy wyniki teorii drgań giętych swobodnych belki podpartej przegubowo na obu końcach. Jeżeli belkę taką pobudzimy do drgań impulsem przyłożonym pośrodku, to ruch jej - przy pominięciu tłumienia - opisany jest funkcją [9]

$$y(x,t) = C \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i t \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (2.2)$$

We wzorze tym  $C$  jest stałą zależną m.in. od prędkości początkowej  $v_0$  przekroju uderzonego. Znak  $\sum$  oznacza sumowanie podług wskaźników nieparzystych, tzn. dla  $i = 1, 3, 5, \dots$  itd.

Częstota  $\omega_i$  drgań  $i$ -tej harmonicznej jest większa od częstoty podstawowej  $\omega_1$  w stosunku  $i^2$ , a więc w tym samym stosunku maleją wyrazy szeregu (2.2); dlatego jest to szereg szybko zbieżny.

Jednakże przechodząc do momentu zginającego za pośrednictwem wzoru  $M_g = -EI (\partial^2 y / \partial x^2)$  otrzymuje się szereg rozbieżny. W szczególności np. dla chwili

$$t = \frac{1}{4} T_1 = \frac{\pi}{2\omega_1} = t_d,$$

to znaczy po upływie ćwiartki okresu drgań podstawowych ( $T_1 = 2\pi/\omega_1$ ) licząc od chwili początkowej uderzenia, moment zginający w przekroju  $x$  określony jest wzorem

$$M_g(x, t_d) = CEI (\pi/l)^2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Okazuje się więc, że przy takim podejściu do zagadnienia amplitudalna wartość momentu odpowiadającego każdej harmonicznej

jest jednakowa. Wniosek ten jest m.in. rezultatem pominięcia dysypacji energii drgań, która w rzeczywistości powoduje ich tłumienie i to tym intensywniejsze, im wyższy jest rząd harmonicznej. Wskutek tego zanim podstawowa harmoniczna osiągnie po raz pierwszy swą amplitudalną wartość (co nastąpi w chwili  $t = t_d$ ), wyższe harmoniczne, które osiągnęły już do tego czasu wielokrotnie swe maksimum ulegną też odpowiednio silniejszemu przytłumieniu.

Choć ująć ten efekt w ramy ilościowe przyjmiemy, że tłumienie ma charakter liniowy, zgodnie z teorią zaproponowaną przez E.S. Sorokina [7]. W tym przypadku  $\sin \omega_1 t$  we wzorze (2.2) trzeba zastąpić funkcją "zanikającą"  $e^{-\beta_1 t} \sin \omega_1 t$ , przy czym współczynnik tłumienia  $i$ -tej harmonicznej

$$\beta_1 = \frac{\Delta}{T_1} = \frac{\Delta}{2\pi} \omega_1,$$

gdzie:  $\Delta$  - dekrement logarytmiczny.

Częstość drgań własnych tłumionych  $\omega'_1 = (\omega_1^2 - \beta_1^2)^{1/2}$  przy słabym tłumieniu różni się bardzo nieznacznie od  $\omega_1$ , tak że będziemy dalej przyjmować

$$\omega'_1 \approx \omega_1 = i^2 \omega_1.$$

A zatem w interesującej nas chwili  $t = t_d$  będzie

$$\beta_1 t_d = \frac{\Delta}{2\pi} i^2 \omega_1 \frac{\pi}{2\omega_1} = \eta i^2,$$

gdzie:  $\eta = \Delta/4$  oraz

$$e^{-\beta_1 t_d} \sin \omega'_1 t_d \approx e^{-\eta i^2}. \quad (2.3)$$

2.3. Uwzględniając powyższe rozważanie przypuścimy, że w chwili  $t = t_d$  rozkład momentów zginających w rozpatrywanej belce można opisać funkcją

$$M_g(x) = M_1 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{\frac{i-1}{2}} e^{-\eta i^2} \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad M_1 - \text{const.} \quad (2.4)$$

Jest to oczywiście przyjęcie przybliżone w tym sensie, że funkcja (2.4), a ściślej mówiąc – odpowiadająca jej funkcja ugięć dynamicznych  $y(x,t)$  – nie spełnia ściśle równania ruchu rozpatrywanego układu. Obecność masy skupionej pośrodku belki sprawia bowiem m.in., że częstotliwości własne takiego układu nie spełniają równości  $\omega_1 = i^2 \omega_1$ . Tym niemniej stałą niewiadomą  $M_1$  dobierzemy tak, aby spełnione było równanie bilansu energetycznego.

Nie trudno zauważyć, że  $M_1 e^{-\gamma}$  jest tą wartością momentu zginającego w przekroju środkowym belki, którą osiąga on w chwili pierwszego amplitudalnego wygięcia belki w kształcie jednej półfali, a więc tak, jak to ma miejsce przy drganiach podstawowych. Analogiczny moment zginający, towarzyszący 1-tej harmonicznej osiąga w tej samej chwili wartość

$$M_1 e^{-\gamma i^2} < M_1 e^{-\gamma}.$$

Maksymalny dynamiczny moment zginający, przy uwzględnieniu wpływu wszystkich harmonicznych wzbudzonych uderzeniem środkowym określimy przeto następującym wzorem

$$M_d = M_g (1/2) = M_1 \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\gamma i^2}$$

lub krócej

$$M_d = M_1 f_M(\gamma), \quad (2.5)$$

gdzie:

$$f_M(\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\gamma i^2}. \quad (2.6)$$

Maksymalną wartość energii sprężystej zginania belki wyznaczmy przy pomocy wzoru

$$U_g = \frac{1}{2EI} \int_0^l [M_g(x)]^2 dx.$$

Podstawiając tu (2.4) oraz uwzględniając ortogonalność funkcji  $\sin \frac{i\pi x}{l}$ , to znaczy

$$\int_0^l \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{j\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j, \\ 1/2 & \text{dla } i = j \end{cases} \quad (2.7)$$

otrzymujemy ostatecznie

$$U_g = \frac{M_1^2}{4EI} f_g(\eta), \quad (2.8)$$

gdzie:

$$f_g(\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2\eta i^2}. \quad (2.9)$$

Przy nierównomiernym rozkładzie momentu zginającego wzdłuż rozpiętości belki występują siły poprzeczne  $Q(x)$ . Wobec dużych gradientów momentu występujących po uderzeniu, siły te osiągają odpowiednio duże wartości, a związana z nimi energia sprężysta może mieć stosunkowo duży udział w ogólnym bilansie energii, zwłaszcza w przypadku belek o małej smukłości

Wpływ tego czynnika, pomijany zupełnie w teorii Coxa, może być uwzględniony bez trudu w proponowanym tu ujęciu zagadnienia. Mianowicie przy założonym rozkładzie momentu zginającego (2.4) dla siły poprzecznej otrzymujemy wzór następujący

$$Q(x) = \frac{dM}{dx} = M_1 \frac{\pi}{l} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{\frac{i-1}{2}} i e^{-\eta i^2} \cos \frac{i\pi x}{l}. \quad (2.10)$$

Energia sprężysta ścinania

$$U_t = \frac{k}{2GF} \int_0^l [Q(x)]^2 dx, \quad (2.11)$$

gdzie:

$G$  - moduł sprężystości postaciowej;  $k$  - współczynnik kształtu pola  $F$  przekroju poprzecznego belki; np. dla pro-

stokąta  $k = 1,2$ , dla przekrojów dwuteowych (walcowanych)  $k$  zmienia się w granicach od 3,3 (dla I 10) do 1,8 (dla I 60).

Podstawiając (2.10) w (2.11), przy uwzględnieniu warunku ortogonalności podobnego do (2.7) otrzymujemy

$$U_t = \frac{k M_1^2}{4 GFI} f_t(\eta),$$

gdzie:

$$f_t(\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 e^{-2\eta i^2}. \quad (2.12)$$

Całkowita energia sprężysta (tzn. energia zginania i ścinania) przy maksymalnym odkształceniu dynamicznym belki wynosi

$$\begin{aligned} U_g + U_t &= \frac{M_1^2 l}{4EI} f_g(\eta) + \frac{k\pi^2 M_1^2}{4GFI} f_t(\eta) = \\ &= \frac{M_1^2 l}{4EI} \left[ f_g(\eta) + k\pi^2 \frac{E}{G} \frac{I}{FI^2} f_t(\eta) \right]. \end{aligned}$$

Uwzględniając, że  $E/G = 2(1+\nu)$ ,  $\nu$  - włamek Poissona, zaś  $FI^2/I = \lambda^2$ ,  $\lambda$  - smukłość belki, piszemy ostatecznie

$$U_g + U_t = \frac{M_1^2 l}{4EI} \left[ f_g(\eta) + \Omega f_t(\eta) \right], \quad (2.13)$$

gdzie:

$$\Omega = \frac{2(1+\nu)\pi^2 k}{\lambda^2}. \quad (2.14)$$

2.4. Jeśli bijak o masie  $G_1/g$  uderza w belkę z prędkością  $v_1 = \sqrt{2gH}$ , to energia uderzenia

$$E_k = \frac{G_1}{2g} v_1^2. \quad (2.15)$$



Wskutek uderzenia plastycznego część tej energii zostaje stracona, a belka wraz z białkiem rozpoczyna ruch, przy czym początkowa energia kinetyczna układu

$$E'_k = \frac{G_1}{G_1 + \varphi G_2} E_k. \quad (2.16)$$

Współczynnik  $\varphi$  redukcji masy belki dobiera się tak, aby początkowa energia kinetyczna belki była równa energii kinetycznej odpowiedniej masy zastępczej  $\varphi G_2/g$ , skupionej w punkcie uderzenia. Ten warunek prowadzi do następującego wzoru (por. [4])

$$\varphi = \frac{1}{I} \int_0^1 \left[ \frac{y(x)}{y(0)} \right]^2 dx, \quad (2.17)$$

w którym  $y(x)$  jest funkcją ugięcia belki przy jej amplitudalnym odkształceniu, zaś  $o$  - odciętą przekroju uderzenia (w naszym przypadku  $o = 1/2$ ).

W związku z tym zachodzi konieczność ustalenia postaci osi odkształconej belki. W klasycznej teorii Coxa przyjęcie pewnej funkcji  $y(x)$  jest punktem wyjścia dla dalszych działań. W naszym ujęciu postać funkcji  $y(x)$  zdeterminowana jest przyjętą a priori funkcją rozkładu momentów zginających (2.4), albowiem

$$y(x) = -\frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x M_g(x) dx^2.$$

Podstawiając tu wzór (2.4) otrzymujemy po dwukrotnym scałkowaniu z uwzględnieniem odpowiednich warunków brzegowych

$$y(x) = \frac{M_1 l^2}{\pi^2 EI} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \frac{1-i}{2} \frac{1}{i^2} e^{-\eta i^2} \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (2.18)$$

Wynika stąd, że dynamiczna strzałka ugięcia

$$y_d = y(1/2) = \frac{M_1 l^2}{\pi^2 EI} f_y(\eta), \quad (2.19)$$

gdzie:

$$f_y(\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} e^{-\gamma i^2}. \quad (2.20)$$

Natomiast podstawienie wzoru (2.18) w (2.17) daje poszukiwany współczynnik redukcji mas

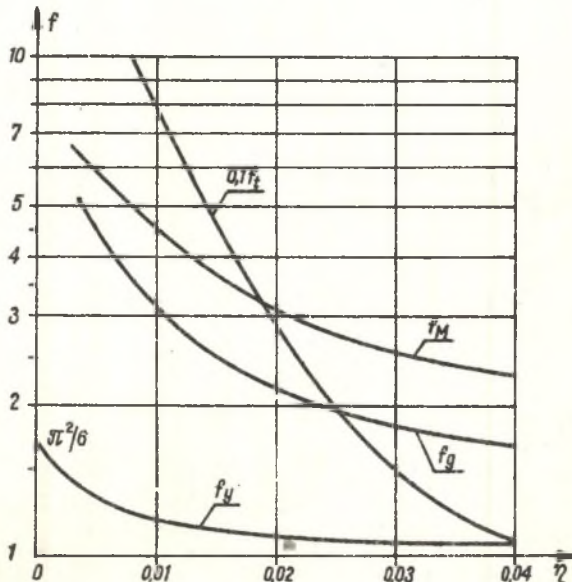
$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} e^{-2\gamma i^2} \cdot \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} e^{-\gamma i^2} \right]^{-2}, \quad (2.21)$$

który, jak się okazuje, zależy również od stałej tłumienia.

Na rys. 1 przedstawione są wykresy zależności współczynników  $f_M$ ,  $f_g$ ,  $f_t$ ,  $f_y$  i  $\varphi$  od stałej tłumienia  $\gamma$ , sporządzone wg wzorów (2.6, 9, 12, 20, 21). Dla  $0,01 < \gamma < 0,04$  zależności te można aproksymować następującymi wzorami:

$$(2.6.1) \quad f_M(\gamma) = 1,623 + 0,02808/\gamma,$$

$$(2.9.1) \quad f_g(\gamma) = 1,147 + 0,01987/\gamma,$$



Rys. 1

$$(2.12.1) \quad f_t(\gamma) = 0,9491/\gamma - 16,55,$$

$$(2.21.1) \quad \varphi(\gamma) = 0,364 + 1,4\gamma.$$

Zależność współczynnika  $f_y$  od  $\gamma$  jest tak słaba, że można go (w podanym powyżej przedziale wartości  $\gamma$ ) traktować jako stały i równy 1,12. Zwracając uwagę duże wartości współczynnika  $f_t$  zwłaszcza przy małych wartościach  $\gamma$ , co wskazuje na godny uwagi wpływ sił poprzecznych na naprężenia dynamiczne.

2.5. Przejdźmy do określenia niewiadomej stałej  $M_1$ . Wyznaczymy ją z równania bilansu energetycznego. Załóżmy, że cała energia kinetyczna  $E'_k$  (początkowa) układu, uzyskana przy uderzeniu plastycznym, powiększona o pracę

$$I_G = G_1 y_d \quad (2.22)$$

ciężaru bijaka wykonaną na przemieszczeniu dynamicznym  $y_d$ , zostaje w przedziale czasu  $[0, t_d]$  zamieniona w energię odkształceń sprężystych belki (tzn. energię zginania i ścinania). Na tej podstawie piszemy

$$U_g + U_t = E'_k + L_G. \quad (2.23)$$

W równaniu tym pominięto pracę sił tarcia, wykonaną w czasie od  $t = 0$  do  $t = t_d$ ; przy słabym tłumieniu jest to składnik bardzo mały wobec pozostałych wyrazów równania (2.23) i w ramach dokładności, jaką daje metoda energetyczna można go pominąć.

Podstawienie wzorów (2.13, 16, 22) w równanie (2.23) daje

$$\frac{M_1^2 l}{4EI} [f_g(\gamma) + \Omega f_t(\gamma)] = \frac{G_1}{G_1 + \varphi G_2} \frac{G_1}{2g} v_1^2 + G_1 \frac{M_1^2 l^2}{x^2 EI} f_y(\gamma),$$

skąd znajdujemy

$$M_1 = \frac{2G_1 l}{x^2} \frac{f_y}{f_g + \Omega f_t} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{x^4 EI}{G_1 l^3} \frac{v_1^2}{2g} \frac{f_g + \Omega f_t}{f_y^2 (1 + \varphi m)} \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (2.24)$$

a następnie dynamiczny moment zginający  $M_d = f_M M_1$ , zgodnie ze wzorem (2.5). Dzielać tę wielkość przez wskaźnik wytrzyma-

kości belki na zginanie znajdziemy maksymalne naprężenia dynamiczne. Natomiast gdy  $M_d$  podzielimy przez maksymalny moment zginający przy statycznym obciążeniu belki ciężarem bi-jaka  $G_1$ , tzn. przez  $\frac{1}{4} G_1 l$ , otrzymamy współczynnik dynamiczny zwielokrotnienia naprężeń maksymalnych

$$\mu = \frac{8}{\pi^2} \frac{f_M f_y}{f_g + \Omega f_t} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{\pi^4 EI}{G_1 l^3} \frac{v_1^2}{2g} \frac{f_g + \Omega f_t}{f_y^2 (1 + \varphi m)} \right)^{\frac{1}{2}} \right]; \quad (2.25)$$

$$m = G_2/G_1.$$

Ponieważ  $G_1 v_1^2 / 2g = E_k$ , zaś  $G_1 l^3 / 48 EI = y_s$ , a ponadto  $G_1 y_s / 2 = U_s$  jest energią sprężystą belki obciążonej statycznie ciężarem  $G_1$ , przeto wyrażenie podpierwiastkowe we wzorze (2.25) (z pominięciem jedynek) wyraża stosunek energii uderzenia do energii sprężystej belki przy obciążeniu statycznym; kładąc  $\pi^4 \cong 2.48$  można to napisać następująco

$$\frac{\pi^4 EI}{G_1 l^3} \frac{v_1^2}{2g} \frac{f_g + \Omega f_t}{f_y^2 (1 + \varphi m)} = \alpha \frac{E_k}{U_s},$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{f_g + \Omega f_t}{f_y^2 (1 + \varphi m)}.$$

Jeśli ponadto wprowadzimy oznaczenie

$$\zeta = \frac{8}{\pi^2} \frac{f_M f_y}{f_g + \Omega f_t},$$

to wzór (2.25) przyjmie postać

$$\mu = \zeta \left( 1 + \sqrt{1 + \alpha E_k / U_s} \right) \quad (2.25.1)$$



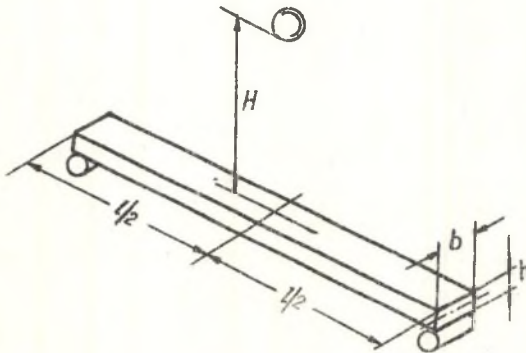
2.6. Gdy belka zajmuje położenie pionowe, a bijak porusza się poziomo, czyli gdy zachodzi tzw. uderzenie poziome, ciężar  $G_1$  nie wykonuje pracy na przemieszczeniu dynamicznym. W tym przypadku w równaniu (2.23) należy odrzucić składnik  $L_G$ , a we wzorach (2.24) i (2.25) jedynki stojące przed i pod pierwiastkiem. Wówczas współczynnik dynamiczny

$$\mu = 8f_M v_1 \left[ \frac{2gG_1 l^3}{EI} (1 + \varphi m)(f_g + \Omega f_t) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{lub} \quad (2.26)$$

$$\mu = \zeta \sqrt{\alpha E_k / U_s}$$

Tymi wzorami można posługiwać się w przybliżeniu również przy uderzeniu pionowym, o ile stosunek energii  $\alpha E_k / U_s$  jest liczbą dostatecznie dużą wobec jedności. Np. gdy  $\alpha E_k / U_s > 10^3$ , względna różnica wartości, jakie dają wzory (2.25) i (2.26) nie przekracza 2%.

2.7. Przeprowadźmy konfrontację wyników przedstawionej teorii z wynikami pomiarów. Wykorzystamy w tym celu wyniki badań przeprowadzonych w Instytucie Budowy Maszyn AN ZSRR w Moskwie [3]<sup>x)</sup>. Kulkę stalową o promieniu 1,51 cm ( $G_1 = 0,1128 \text{ kG}$ )





Rys. 2

<sup>x)</sup> Niektóre wyniki tych pomiarów przytoczone są w pracy W.W. Bagrejewa (Trudy Mosk. Inst. Inż. Żel. - dor. Transp. 1959, wyp. 102), z której zaczerpnięto poniższe dane.

spuszczano swobodnie z różnych wysokości  $H$  na środek belki stalowej, podpartej przegubowo na końcach (rys. 2). Rozpiętość belki  $l = 20$  cm, przekrój poprzeczny prostokątny o wymiarach  $b \times h = 1,20 \times 2,66$  cm. Badania wykonywano przy dwóch różnych położeniach belki, uzyskiwanych przez jej obrót wokół osi podłużnej o  $90^\circ$  (w pierwszej serii pomiarów:  $b = 2,66$  cm,  $h = 1,20$  cm; w drugiej:  $b = 1,20$  cm,  $h = 2,66$  cm). Wyniki pomiarów oraz obliczeń zestawione są w tabelicy 1.

Tabela 1

Położenie belki	Wysokość $H$ w cm	Wartości pomiarzone		Wartości obliczone			
		$\sigma_{\max}$ w $\text{kg/cm}^2$	$\mu_p$	$\mu$ wzór (2.25)	Błąd w %	$\mu$ wzór (2.1)	Błąd w %
	25	1270	1485	1530	+ 3,0	861	- 42,0
	50	1950	2280	2164	- 5,1	1218	- 46,0
	50	1430	3650	3300	- 9,6	2650	- 27,4
	75	1820	4640	4160	-10,4	3240	- 30,0
	100	2220	5660	4820	-14,8	3744	- 33,8

Należy zauważyć, że dekrement logarytmiczny  $\Delta$  w początkowej fazie ruchu, następującej bezpośrednio po uderzeniu jest znacznie większy niż w późniejszej fazie drgań swobodnych stopniowo zanikających, kiedy to następuje względne ustalenie się wartości  $\Delta$ . Wynika to z faktu, iż w rzeczywistości tłumienie wewnętrzne nie jest liniową funkcją prędkości odkształceń, przynajmniej w zakresie dużych odkształceń. W literaturze podawane są zwykle wartości dekrementu ( $\Delta = 4\eta$ ) lub współczynnika dysypacji  $\psi$  ( $\psi = 2\Delta$ ), wyznaczone właśnie w późniejszej fazie drgań swobodnych lub też z pomiaru pola pętli histerezy rezonansowej, powstającej przy ustalonych drganiach wymuszonych. Np. w książce [7] na str. 134 znajdujemy dla stali konstrukcyjnej  $\psi = 0,01 \div 0,03$ , czemu odpowiada  $\eta = \psi/8 = 0,00125 \div 0,00375$ .

Wyznaczone w ten sposób wartości stałych tłumienia nie mogą być zasadniczo wykorzystywane przy obliczeniach udarowych. N.K. Snitko [6] wyznaczył dekrement logarytmiczny z pierwszych dziesięciu amplitudalnych wychyleń belki stalowej (ocownika) po uderzeniu środkowym i otrzymał  $\Delta \approx 0,06$ ,  $\eta \approx 0,015$ . Są to, jak widać, wartości wielokrotnie wyższe od cytowanych w [7]. W niniejszych obliczeniach przyjęto  $\eta = 0,015$ , czemu odpowiadają następujące wartości współczynników  $f$  i  $\varphi$ :

$$f_M = 3,7; \quad f_g = 2,6; \quad f_t = 45; \quad f_y = 1,12; \quad \varphi = 0,38.$$

Tym niemniej nie należy zbyt preceniać znaczenia wartości stałej  $\gamma$ . Obliczenia wykazują bowiem, że nawet dość duże zmiany jej wartości w małym tylko stopniu odbijają się na współczynniku dynamicznym, przy czym im mniejsze przyjmujemy  $\mu$ , tym większą otrzymamy wartość  $\mu$ .

W piątej kolumnie tablicy 1 podane są wartości współczynnika dynamicznego, obliczone wzorem (2.25). Zgodność z wynikami pomiarów jest na ogół zadowalająca; największy błąd nie przekracza 15% i jest tym mniejszy, im mniejsza energia uderzenia.

W przedostatniej kolumnie tablicy 1 przytoczono dla porównania wartości współczynnika dynamicznego obliczone klasycznym wzorem H. Coxa (2.1). Tutaj rozbieżność z wynikami pomiarów jest rażąca, co jest potwierdzeniem znanego od dawna faktu, iż teoria Coxa jest zasadniczo nieprzydatna do obliczania naprężeń udarowych<sup>x)</sup>.

2.8. Obserwacje przebiegu uderzenia wykazały, że maksymalne naprężenia dynamiczne występowały w okresie drgań swobodnych belki, przy czym dla pewnych wysokości spadku bijaka występowały szybko po sobie następujące uderzenia wtórne. Wyniki pomiarów zestawione w tablicy 1 dotyczą wyłącznie tych przypadków, w których maksymalne naprężenia wystąpiły po uderzeniu jednorazowym.

Efekt uderzeń wtórnych komplikuje nieco przebieg zjawiska i wymaga odrębnego rozpatrzenia na gruncie teorii energetycznej, co pozwoliłoby wyprowadzić wzory łatwo stosowalne w praktyce inżynierskiej.

Wzory (2.25 i 26) spełniają ten postulat, jak również postulat dokładności, aczkolwiek mogą okazać się mniej dokładne w przypadku wystąpienia uderzeń wtórnych. Przedstawiona teoria wymaga także jeszcze konfrontacji z doświadczeniami, wykonanymi dla innych materiałów oraz przy innych stosunkach energii  $\frac{1}{2}E_k/U_S$ ; w omawianych powyżej doświadczeniach stosunek ten był wielkością rzędu  $10^7$ .

### 3. UDERZENIE PODŁUŻNE W SWOBODNY PRĘT PROSTY

3.1. Zagadnienie podłużnego zderzenia prętów rozwiązał de Saint Venant (1889 r.) przy założeniu, że powierzchnie osiowe prętów są płaskie. Falowa teoria de Saint Venanta okazała się jednak całkowicie niezgodna z wynikami doświadczeń. Przyczyną tego było zaniedbanie efektu odkształceń miejscowych, które w omawianym przypadku odgrywają istotną rolę. Na fakt ten zwrócił uwagę J.E. Sears (1908 r.[5]), który rozwiązał

<sup>x)</sup> Natomiast wzór (2.1) daje zadowalającą dokładność przy wyznaczaniu przemieszczeń.



zagadnienie zderzenia prętów z zaokrąglonymi półkuliście końcami, przy uwzględnieniu odkształceń miejscowych wg statycznej formuły H. Hertza

$$P = \alpha^{3/2} / \delta_H. \quad (3.1)$$

We wzorze tym  $P$  oznacza siłę uderzenia,  $\alpha$  - odkształcenie miejscowe (które jest równe zbliżeniu dwóch przekrojów wydzielonych w obu prętach w dostatecznej odległości od końców uderzających),  $\delta_H$  - współczynnik podatności miejscowej, zależny od geometrii powierzchni w miejscu zderzenia oraz od stałych sprężystości. Teoria J.E. Searsa, jakkolwiek całkowicie zgodna z doświadczeniem nie zaspokoiła jednakże potrzeb praktyki inżynierskiej z uwagi na swą skomplikowaną budowę. Należy stwierdzić, że komplikacja falowej teorii J.E. Searsa wynika przede wszystkim z nieliniowego charakteru zależności (3.1).

Uproszczenia teorii, zaproponowane przez kilku autorów ([1], [10]) polegają przede wszystkim na linearyzacji wspomnianej zależności, tzn. przyjmuje się, że  $P = \alpha / \delta$ . Zastępczy współczynnik podatności miejscowej  $\delta$  dobiera się tak, aby przy maksymalnej wartości siły uderzenia ( $P = P_m$ ) energia sprężysta odkształceń miejscowych była jednakowa zarówno dla zależności liniowej jak i nieliniowej. Z warunku tego wynika

$$\delta = \frac{4}{5} \delta_H \sqrt[3]{P_m} - \frac{1}{3}. \quad (3.2)$$

Zlinearyzowana teoria falowa znalazła również pełne potwierdzenie w wynikach doświadczeń [1]. Poza tym prowadzi ona do mniej skomplikowanych rachunków niż teoria J.E. Searsa, aczkolwiek stopień komplikacji silnie wzrasta w miarę zwiększania ilości fal odbitych do chwili wystąpienia siły  $P_m$ .

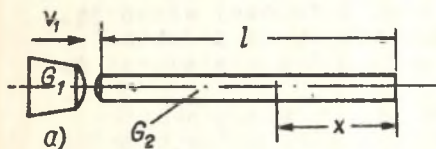
Z tego punktu widzenia najbardziej zachęcająco przedstawia się metoda energetyczna, która prowadzi zwykle do wzorów o najprostszej budowie. Jednakże metoda energetyczna w klasycznym ujęciu prowadzi do wzorów mało dokładnych, zwłaszcza gdy podatność miejscowa  $\delta$  jest mała w porównaniu z podatnością ogólną  $1/EF$  pręta. Poniżej wykazemy, że wykorzystując pewne wyniki teorii falowej można również za pomocą metody energetycznej uzyskać proste i dostatecznie dokładne wzory obliczeniowe.

3.2. Przypuśćmy, że ciało sztywne (bijak) o masie  $G_1/g$ , poruszające się z prędkością  $v_1$  uderza osiowo w swobodny, prosty pręt o stałym przekroju  $F$ , długości  $l$  i masie  $G_2/g$  (rys. 3a). Maksymalną siłę osiową  $P_m$ , jaka pojawia się w



pręcie w wyniku uderzenia wyznaczmy z równania bilansu energetycznego przy założeniu, że uderzenie nie spowodowało odkształceń plastycznych. Siła  $P_m$  wystąpi w tzw. środkowej

chwili uderzenia, kiedy oba ciała poruszają się z jednakową prędkością



b)

Rys. 3

$$v'_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} v_1;$$

wzór ten wynika z zasady zachowania pędu. Zatem w rozpatrywanym przypadku z całkowitej energii uderzenia

$$E_k = \frac{G_1 v_1^2}{2g}$$

tylko część zostaje zamieniona na energię potencjalną odkształceń sprężystych, ponieważ w chwili środkowej ciała posiadają energię kinetyczną

$$E'_k = \frac{(G_1 + G_2) v_1'^2}{2g} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot \frac{G_1 v_1^2}{2g}.$$

Zatem przekształceniu w energię potencjalną ulega część

$$\Delta E_k = E_k - E'_k = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{G_1 v_1^2}{2g}. \quad (3.3)$$

Przejdźmy z kolei do określenia energii potencjalnej odkształceń sprężystych pręta w chwili środkowej uderzenia. Należy tu wziąć pod uwagę energię odkształceń zarówno miejscowych  $U_1$ , jak i ogólnych  $U_{og}$ . Składnik pierwszy wobec założenia liniowej zależności  $P(\alpha)$ , określony jest wzorem

$$U_1 = \frac{1}{2} P_m^2 \delta. \quad (3.4)$$

Przechodząc do określenia energii odkształceń ogólnych należy założyć pewien rozkład siły osiowej  $P(x)$  w chwili, gdy osiąga ona wartość maksymalną. Wyniki teorii falowej wskazują, że na rozkład ten istotny wpływ wywiera miejscowa podatność pręta, lub ściślej mówiąc - stosunek podatności miejscowej do ogólnej

$$\frac{\delta_{EF}}{I} = \xi$$

Zagadnienie to ilustrują wykresy na rys. 3b, uzyskane za pomocą zlinearyzowanej teorii falowej [1]. Dla  $\xi = 0$  rozkład sił osiowych jest równomierny, zgodnie z teorią de Saint Venanta. Przy większych wartościach  $\xi$  kształt wykresu zbliża się do trójkąta, tzn. siła maleje prawie liniowo od wartości maksymalnej na końcu uderzonym do zera na końcu przeciwległym.

W związku z powyższym przyjmiemy, że

$$P(x) = P_m \left(\frac{x}{l}\right)^{\xi/2}.$$

Energia sprężysta odkształceń ogólnych

$$U_{og} = \frac{1}{2EF} \int_0^l [P(x)]^2 dx = \frac{P_m^2}{2EF} \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^{\xi} dx = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{P_m^2 l}{2EF}. \quad (3.5)$$

### 3.3. Równanie bilansu energetycznego

$$U_1 + U_{og} = \Delta E_k,$$

po uwzględnieniu wzorów (3.3, 4, 5) przyjmuje następującą postać

$$\frac{1}{2} P_m^2 \delta + \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{P_m^2 l}{2EF} = \frac{G_2}{G_1+G_2} \frac{G_1 v_1^2}{2g}.$$

Stąd

$$P_m = v_1 \sqrt{\frac{m}{m+1} \frac{G_1 EF}{g l \varphi(\xi)}}, \quad (3.6)$$

gdzie:

$$\varphi(\xi) \equiv \xi + \frac{1}{1+\xi}, \quad m = G_2/G_1.$$

Współczynnik  $\varphi(\xi)$  uwzględnia wpływ podatności miejscowej na maksymalną siłę w przecie uderzonym; dla  $\xi = 0$ ,  $\varphi(0) = 1$  i wzór (3.6) daje wartość  $P_m$  identyczną z wynikiem teorii de Saint Venanta (tzn. dla płaskich powierzchni zetknięcia).

Wzór (3.6) można łatwo wyspecjalizować dla przypadku, gdy pręt poruszający się z prędkością  $v_1$  uderza w nieruchomą przegrodę. W tym celu należy położyć  $G_1 \rightarrow \infty$ , a zatem  $m \rightarrow 0$  oraz  $m G_1 = G_2$ , wtedy otrzymujemy

$$P_0 = v_1 \sqrt{\frac{G_2 EF}{gI \varphi(\xi)}}. \quad (3.7)$$

Gdy ponadto przyjmiemy  $\xi = 0$  oraz uwzględnimy, że  $G_2 = \gamma F l$ , zaś  $\sqrt{Eg/\gamma} = a$  jest prędkością rozchodzenia się zaburzeń sprężystych ( $\gamma$  - ciężar właściwy materiału pręta), to otrzymamy

$$P_* = v_1 \sqrt{\frac{G_2 EF}{gI}} = EF \frac{v_1}{a}.$$

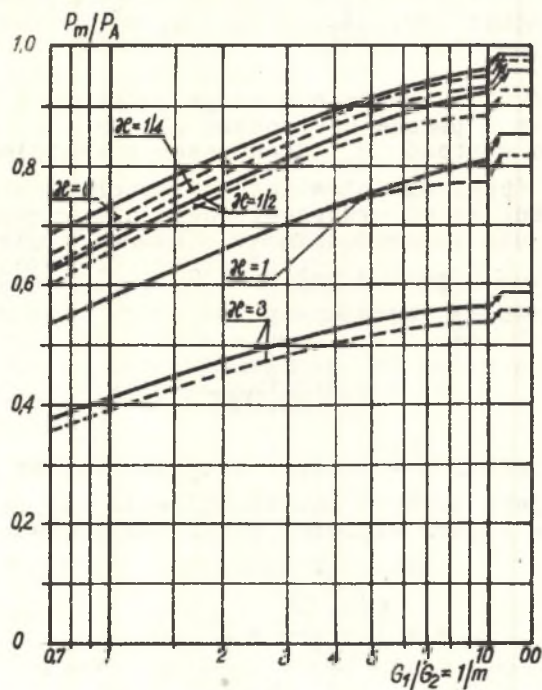
Wzór ten określa siłę, jaką należy przyłożyć do swobodnego końca pręta, aby wywołać przemieszczenie tego końca z prędkością  $v_1$ .

3.4. Dla oceny dokładności zmodyfikowanej metody energetycznej będziemy posługiwać się stosunkiem sił

$$\frac{P_m}{P_*} = [(m+1)\varphi(\xi)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.8)$$

Na rys. 4 przedstawione są krzywe zależności  $P_m/P_*$  od stosunku mas  $m = G_2/G_1$  sporządzone dla kilku wartości  $\xi = \delta EF/l$ . Linie ciągłe obrazują wyniki teorii falowej, linie przerywane wykreślone są wg wzoru (3.8). Przebieg krzywych jest na ogół zgodny, największa odchyłka (dla  $G_1/G_2 \geq 1$ ) nie przekracza 8%. Ponieważ zaś zlinearyzowana teoria falowa

została w pełni zweryfikowana licznymi pomiarami, przeto dokładność wzorów przybliżonych (3.6) i (3.7) można uznać za zadowalającą.



Rys. 4

## LITERATURA

- [1] Biderman W.L., Malukowa R.P.: Usilia i deformacji pri prodolnom udare, Rasčety na pročnost', t. 10, Moskva 1964.
- [2] Goldsmith W., Impact: The theory and physical behaviour of colliding solids, London 1960.
- [3] Macjulawičus D.A.: Naprjaženija i usilia pri poperečnom udare, Dysertacija, Bibl. im. Lenina, Moskva 1957.
- [4] Penomarijev S.D., Biderman W.L. i in.: Rasčety na pročnost' w mašinostrojenii, t. 3, Moskva 1959.
- [5] Sears J.E.: On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends, Trans. Cambr. Phil. Soc., t. XXI, 49, 1908.



- [7] Sorokin E.S.: Dinamičeskij rasčet niesuščich konstrukciji zdanij, Moskva 1956.
- [8] Timošenko S.P.: K woprosu o dejstvii udara na bałku, Izv. S. Petersb. Polit. Inst. t. XVII, 2, 1912.
- [9] Timoshenko S.P.: Vibration Problems in Engineering, 1955, tłum. ros. 1959.
- [10] Zegžda S.A.: O prodolnom udare pri učete mestnogo smiatia w liniejnoj postanovkie, Wiestnik Leningr. Univer. 13, 1965.

## К ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УДАРА

### Р е з ю м е

Принимая во внимание невысокую точность энергетической теории удара при определении максимальных динамических напряжений предложено некоторую ее модификацию. Она заключается в том, что для определения энергии эластических деформаций принимается некоторое распределение обобщенных внутренних сил, а не форму элемента деформированного силой удара, как это делается в классической теории. При определении этого распределения используется результаты более точных теорий (то есть волновых).

Таким образом рассматриваются два случая удара:

I. Поперечный центральный удар в призматическую свободно опертую балку,

II. Продольный удар в свободный прямой стержень.

Под обобщенной внутренней силой следует понимать изгибающий момент (в I случае) или осевую силу (во II случае).

Предлагаемый метод делает возможным принимать во внимание влияние гармоник более высокого порядка, поперечных сил, а также демпфирования (в I случае) или влияния локальной податливости ударяющихся тел (во II случае).

С помощью модифицированной энергетической теории выводятся простые формулы для динамического коэффициента, которые проявляют удовлетворительную точность в сравнении с экспериментами (в I случае) или с результатами линеаризованной волновой теории (во II случае).

## A SUPPLEMENT TO THE ENERGETIC THEORY OF IMPACT

## S u m m a r y

On account of the little accuracy of the energetic impact theory in determining the maximum dynamic stresses, a certain modification of this theory has been suggested.

It depends on an assumption for the computation of elastic strains, taking into account a certain distribution of generalized internal forces instead of the shape of the element deformed by the impact force, as it has been done in a traditional way.

At the determining of this distribution the results of more accurate theories, so called wave ones, have been useful. In this way two cases of impacts have been considered:

- I. Lateral central, in the prismatic double-joint beam.
- II. Longitudinal in the straight free rod.

As a generalized internal force, a bending moment ought to be understood (in case I) or the axial force (in case II). A suggested new way makes it possible to take into consideration the influence of higher harmonic, shearing forces and damping (in case I), or the influence of the local flexibility of the colliding bodies (in case II).

By means of a modified energetic theory the simple formulae have been derived for the dynamic coefficient of the stress multiplication.

These formulae show a satisfactory accuracy when confronted with the experimental measurements (in case I), or with the results of the linearized wave theory (in case II).