

**ZESZYTY  
NAUKOWE  
POLITECHNIKI  
ŚLĄSKIEJ**

**MARIAN WIERCIGROCH**

**DYNAMIKA DYSKRETYCH  
UKŁADÓW MECHANICZNYCH  
Z NIECIĄGŁOŚCIAMI**

**MECHANIKA**

**Z. 114  
GLIWICE  
1994**

**POLITECHNIKA ŚLĄSKA**

**ZESZYTY NAUKOWE**

**Nr 1228**

**MARIAN WIERCIGROCH**



**DYNAMIKA DYSKRETNYCH  
UKŁADÓW MECHANICZNYCH  
Z NIECIĄGŁOŚCIAMI**

**GLIWICE**

**1994**

## OPINIODAWCY

Prof. zw. dr hab. inż. Ryszard Tadeusiewicz  
Dr hab. Janusz Szopa — Profesor Politechniki Częstochowskiej

## KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY — Prof. dr hab. inż. Jan Bandrowski  
REDAKTOR DZIAŁU — Dr hab. inż. Jan Kaźmierczak  
Profesor Politechniki Śląskiej  
SEKRETARZ REDAKCJI — Mgr Elżbieta Lesko

## REDAKCJA

Mgr Aleksandra Kłobuszowska

## REDAKCJA TECHNICZNA

Alicja Nowacka

Wydano za zgodą  
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0817

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej  
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

---

Nakł. 150+83 Ark. wyd. 9 Ark. druk. 8,125 Papier offset. kl. III. 70x100,80 g  
Oddano do druku 28.12.93 Podpis. do druku 28.12.93 Druk ukończ. w styczniu 1994  
Zam. 567/93 Cena zł 31.000,—

---

Fotokopie, druk i oprawę  
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

## SPIS TREŚCI

1. WSTĘP	11
1.1. Wprowadzenie	11
1.2. Cel i zakres pracy	12
2. UKŁADY MECHANICZNE Z NIECIĄGŁOŚCIAMI	14
2.1. Fizyczne warunki występowania nieciągłości	14
2.2. Matematyczny opis układów z nieciągłościami	14
3. METODY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW Z NIECIĄGŁOŚCIAMI	17
3.1. Wprowadzenie	17
3.2. Metody analityczne dokładne i przybliżone	17
3.2.1. Rozwiązanie ściśle - drgania swobodne oscylatora z dowolną charakterystyką sprężystości	17
3.2.2. Metoda bilansu harmonicznego	19
3.2.3. Metoda Ritza	20
3.2.4. Metoda równoważnej linearyzacji	22
3.2.5. Metoda wolno zmieniającej się amplitudy i fazy	23
3.3. Metody numeryczne	24
3.3.1. Wprowadzenie	24
3.3.2. Sformułowanie zadania	25
3.3.3. Metody wielokrokowe	26
3.3.4. Metody kolokacji	28
3.3.5. Metody oparte na algorytmach Rungego-Kutty	33
4. METODY ANALIZY JAKOŚCI RUCHU	41
4.1. Wprowadzenie	41
4.2. Przebiegi czasowe	42
4.3. Płaszczyzna fazowa	42
4.4. Widmo drgań	44
4.5. Funkcja autokorelacji	45
4.6. Mapy Poincarégo	46
4.7. Wykresy bifurkacyjne	51
4.8. Wykładniki Lapunowa	52
4.9. Wymiar fraktalny, informacyjny i korelacyjny	54
4.10. Przybliżone kryteria oceny jakości ruchu	56

5. DYNAMIKA OSCYLATORA HARMONICZNEGO ZE SKOKOWO ZMIENNĄ SZTYWNOŚCIĄ	58
6. DYNAMIKA OSCYLATORA HARMONICZNEGO Z LUZEM	69
7. DYNAMIKA SILNIKA OBROTOWEGO Z LUZEM	80
8. DYNAMIKA UKŁADÓW Z TARCIEM COULOMBA	91
9. DYNAMIKA UKŁADU OBRABIARKA - PROCES SKRAWANIA	103
10. WNIOSKI KOŃCOWE	119
10.1. Podsumowanie	119
10.2. Wytoczne dalszych badań	120
LITERATURA	121

## CONTENTS

1. INTRODUCTION	11
1.1. Background	11
1.2. Aim and scope of the thesis	12
2. MECHANICAL SYSTEMS WITH DISCONTINUITIES	14
2.1. Physical conditions of discontinuity existence	14
2.2. Mathematical description of systems with discontinuities	14
3. SOLVING METHODS FOR SYSTEMS WITH DISCONTINUITIES	17
3.1. Background	17
3.2. Analytical and approximation methods	17
3.2.1. Close form solution - free vibration of oscillator in general case	17
3.2.2. Harmonic balance method	19
3.2.3. Ritz method	20
3.2.4. Equivalent linearization method	22
3.2.5. Slowly changing amplitude and phase method	23
3.3. Numerical methods	24
3.3.1. Background	24
3.3.2. Mathematical formulation	25
3.3.3. Multistep methods	26
3.3.4. Collocation methods	28
3.3.5. Runge-Kutta based methods	33
4. MOTION DETECTING TOOLS	41
4.1. Background	41
4.2. Time histories	42
4.3. Phase plane	42
4.4. Power spectrum	44
4.5. Autocerrelation	45
4.6. Poincaré map	46
4.7. Bifurcation diagrams	51
4.8. Liapunov exponents	52
4.9. Fractal, information and correlation dimension	54
4.10. Approximate criterion for identifying quality motion	56

5. DYNAMICS OF HARMONICALLY EXCITED PIECEWISE LINEAR OSCILLATOR	58
6. DYNAMICS HARMONICALLY EXCITED LINEAR OSCILLATOR WITH CLEARANCE	69
7. DYNAMICS OF ROTOR SYSTEM WITH CLEARANCE	80
8. DYNAMICS OF SYSTEMS WITH COULOMB FRICTION	91
9. DYNAMICS OF MACHINE TOOL - CUTTING PROCESS SYSTEM	103
10. CONCLUDING REMARKS	119
10.1. Conclusions	119
10.2. Directions of further investigations	120
REFERENCES	121

## INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	11
1.1. Einführung	11
1.2. Ziel und Umfang der Arbeit	12
2. Mechanische Systeme mit Unstetigkeiten	14
2.1. Physikalische Bedingungen des Auftretens von Unstetigkeiten	14
2.2. Mathematische Beschreibung der Systeme mit Unstetigkeiten	14
3. Lösungsmethoden der Systeme mit Unstetigkeiten	17
3.1. Einführung	17
3.2. Analytische Methoden - genaue und approximative	17
3.2.1. Genaue Lösung - freie Schwingungen des Schwingers mit beliebiger Elastizitätskennlinie	17
3.2.2. Methode der harmonischen Bilanz	19
3.2.3. Ritz - Methode	20
3.2.4. Methode der äquivalenten Linearisierung	22
3.2.5. Methode der sich langsam verändernden Amplitude und Phase	23
3.3. Numerische Methoden	24
3.3.1. Einführung	24
3.3.2. Formulierung der Aufgabe	25
3.3.3. Mehrschrittmethoden	26
3.3.4. Kollokationsmethoden	28
3.3.5. Auf Runge-Kutta - Algorithmen gestützte Methoden	33
4. Methoden der Analyse der Bewegungsqualität	41
4.1. Einführung	41
4.2. Zeitverläufe	42
4.3. Phasenfläche	42
4.4. Schwingungsspektrum	44
4.5. Selbstkorrelationsfunktion	45
4.6. Poincaré - Karten	46
4.7. Bifurkationsdiagramme	51
4.8. Ljapunov - Exponenten	52
4.9. Fraktographischer, informativer und korrelativer Maß	54
4.10. Angenäherte Bewertungskriterien der Bewegungsqualität	56

5. Dynamik des harmonischen schwingers mit sprunghaft variablen steifigkeit	58
6. Dynamik des harmonischen schwingers mit spiel	69
7. Dynamik des drehbaren motors mit spiel	80
8. Dynamik der systeme mit coulombscher reibung	91
9. Dynamik des systems werkzeugmaschine - zerspanungsprozess (zerspanungsverfahren)	103
10. Schlussfolgerungen	119
10.1. Zusammenfassung	119
10.2. Richtlinien für weitere Untersuchungen	120
Literaturverzeichnis	121

Wykaz ważniejszych oznaczeń<sup>1</sup>

$\alpha$	bezwymiarowy współczynnik sztywności,
$\beta$	bezwymiarowy moduł siły wymuszającej,
$\gamma$	orbita mapy Poincarégo,
$\delta$	asymetria podpór łożyskowych w kierunku $x$ w stosunku do osi wirnika silnika obrotowego z luzem,
$\epsilon$	mały parametr,
$\eta$	bezwymiarowa częstość (wymuszenia),
$\xi$	bezwymiarowa współczynnik tłumienia wiskotycznego,
$\lambda_i$	$i$ -ty wykładnik Lapunowa,
$\mu$	ruchowy współczynnik tarcia suchego,
$\mu_0$	spoczynkowy współczynnik tarcia suchego,
$E$	bezwymiarowy moduł siły tarcia suchego,
$\rho$	mimośród masy wirnika,
$\Sigma$	płaszczyzna Poincarégo,
$\tau$	bezwymiarowy czas,
$\Phi_k$	$k$ -ta funkcja przełączająca,
$\Phi$	zbiór funkcji nieciągłości,
$\chi$	współczynnik tarcia wióra o powierzchnię natarcia,
$\psi$	kąt przesunięcia fazowego,
$\omega_0$	częstość drgań własnych nietłumionych,
$\omega$	częstotliwość wymuszenia,
$a(t)$	wolnozmienna amplituda drgań,
$c$	współczynnik sztywności,
$C$	amplituda drgań,
$D( )$	funkcja nieciągłości z tarciem Coulomba,
$D_F$	wymiar fraktalny,
$D_C$	wymiar korelacyjny,
$e$	luz konstrukcyjny (równ.6.2),
$e(t)$	błąd rozwiązania,
$E_0$	energia kinetyczna układu drgającego,
$f$	częstotliwość,
$f_C$	bezwymiarowa siła tarcia Coulomba,
$f_{Cs}$	bezwymiarowa, statyczna siła tarcia Coulomba,
$f_{Cd}$	bezwymiarowa, dynamiczna siła tarcia Coulomba,

---

<sup>1</sup>Oznaczenia te nie dotyczą podrozdziału 3.3, w którym przyjęto odrębną nomenklaturę.

$f_0$	moduł siły wymuszającej,
$f_x$	składowa wzdłużna siły skrawania,
$f_y$	składowa poprzeczna siły skrawania,
$g$	luz konstrukcyjny w silniku obrotowym,
$h$	głębokość skrawania,
$H( )$	funkcja nieciągłości Heaviside'a,
$J( )$	funkcjonał,
$k$	współczynnik tłumienia wiskotycznego,
$m$	masa,
$M( )$	funkcja Melnikowa,
$n_{PM}$	liczba punktów na mapie Poincarégo,
$N$	siła normalna,
$O-PS$	układ obrabiarka-proces skrawania,
$p$	pełny wektor parametrów,
$p^*$	zredukowany wektor parametrów,
$P_A$	mapa Poincarégo dla układu autonomicznego,
$P_N$	mapa Poincarégo dla układu nieautonomicznego,
$P(f)$	widmo mocy,
$r$	promieniowe przemieszczenie wirnika w stosunku do podpór łożyskowych (równanie 7.1),
$R$	współczynnik plastycznej deformacji wióra,
$RPC$	równoległa para Coulomba,
$R_x(\tau)$	funkcja autokorelacji,
$SPC$	szeregowa para Coulomba,
$t$	czas,
$T$	okres drgań,
$u(t)$	wymuszenie kinematyczne,
$U(x)$	energia potencjalna układu drgającego,
$v_0$	prędkość przesuwu taśmy bądź prędkość posuwu,
$v_r$	prędkość względna trących powierzchni,
$x$	przemieszczenie w kierunku $x$ ,
'	$\partial/\partial\tau$ ,
"	$\partial^2/\partial\tau^2$ ,
*	$d/dt$ ,
**	$d^2/dt^2$

## 1. WSTĘP

### 1.1. Wprowadzenie

W prawie każdym układzie fizycznym, a w szczególności mechanicznym występują liczne nieliniowości. Nieliniowości te mają różnorodny charakter oraz wpływ na odpowiedzi dynamiczne układu, w którym się znajdują. Do typowych przykładów nieliniowości w układach mechanicznych należą nieliniowości elementów sprężystych (np. sprężyny twarde lub miękkie) oraz tłumiących (np. tarcie suche, mieszane bądź histereza).

Jakkolwiek nie sposób podważyć rolę modeli liniowych w podstawowej analizie, to jednak dla precyzyjnego opisu wielu zagadnień technicznych ich przydatność jest ograniczona. Aby dokładniej odzwierciedlić dynamikę maszyn, celowe jest, a wręcz konieczne uwzględnianie modeli nieliniowych [53]. Przykładowo analiza drgań o dużych amplitudach w przypadku traktowania układów jako nieliniowych, może prowadzić do zupełnie nowych zjawisk, nie możliwych do osiągnięcia w żadnym systemie liniowym. Nasuwa się tutaj przypadek występowania pod lub nadharmonicznych odpowiedzi, cykli granicznych czy też ruchu chaotycznego nawet dla bardzo prostych układów nawet o jednym stopniu swobody.

Analiza właściwości dynamicznych dowolnego układu (mechanicznego, elektrycznego czy też układu sterowania) jest poważnie utrudniona, jeżeli występują w nim nieliniowości, a w szczególności nieliniowości w postaci funkcji nieciągłych (zwanymi dalej nieciągłościami). Nieliniowości te w przypadku układów mechanicznych mogą przybierać postać charakterystyki sztywności, tarcia (tłumienia) czy też funkcji rozłożenia masy. Niektóre układy mechaniczne, np. silnik obrotowy z luzami w łożyskach [22,14,56,83,84], lub procesy, np. skrawanie z utratą kontaktu narzędzia z przedmiotem obrabianym [29,30,123-125] cechuje specyficzny rodzaj nieciągłości, a mianowicie nieciągłość zależna ruchowo. W literaturze spotkać można podobne systemy. I tak Minorsky [75] przeanalizował układy z nieciągłą sztywnością, jakkolwiek badał tylko drgania swobodne. Shaw i Holmes [108] przeprowadzili dogłębną analizę harmonicznie wymuszanego oscylatora z odcinkowo zmieniającą się charakterystyką sztywności otrzymując ruch harmoniczny, podharmoniczny i chaotyczny. Badania układu o dwóch stopniach swobody z nieciągłą sprężystością i tłumieniem przeprowadził Mashri [70]. Natomiast w pracach Poppa i Stelera [37] oraz Powella i Wiercigrocha [126,98,127] studiowano wpływ tarcia suchego na odpowiedzi prostych modeli układów mechanicznych. Dynamikę swobodnego skrawania konwencjonalnego próbowano opisywać i badać w pracach Grabeca [29-31] oraz Wiercigrocha [123-125,128]. Wierceniu i frezowaniu ultradźwiękowemu, w którym wykorzystywano proste modele układów z nieciągłościami poświęcone były prace autora prowadzone wspólnie z dr Neilsonem oraz prof. Playerem [129,130].

Nieciągłości w układach mechanicznych występują więc w bardzo wielu przypadkach, a skala problemu waha się od układów bardzo dużych (opartych głównie na metodzie elementów skończonych [92,27], gdzie liczba stopni swobody może wynosić nawet kilkaset tysięcy) do bardzo małych (o jednym lub dwóch stopniach swobody). Pomimo iż problematyka jest jak najbardziej aktualna, brakuje prac dotyczących ogólnego opisu i kompleksowej analizy jakości ruchu układów mechanicznych z nieciągłościami, których odpowiedzi mają cechy ruchu od periodycznego począwszy a na chaotycznym skończywszy.

*Temu właśnie problemowi poświęcona została niniejsza praca.*

## 1.2. Cel i zakres pracy

Oddziaływania dynamiczne układu deterministycznego można opisać następującym równaniem różniczkowym

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = \mathbf{f}(t; \mathbf{x}(t)) \quad (1.1)$$

gdzie :  $\mathbf{x}(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  - wektor współrzędnych stanu,

$\mathbf{f}(t; \mathbf{x}(t)) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]^T$  - funkcja zależna od rodzaju i parametrów maszyny,

które spełnia zagadnienie Cauchy'ego w całej przestrzeni stanu  $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$  tzn.

$$|\mathbf{x}(t)| \in \Omega; \quad \forall_{t \in [t_1, t_2]} |\mathbf{x}(t)| \leq M,$$

gdzie  $M$  jest skończoną liczbą dodatnią.

Równanie (1.1) jest słuszne dla układu równań różniczkowych ciągłych. W przypadku występowania nieciągłości najczęściej opisu dokonuje się za pomocą warunkowych funkcji przełączających [41,11]. Wówczas równanie (1.1) przyjmuje postać

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = \mathbf{f}^*(t; \mathbf{x}(t)), \quad (1.2)$$

przy czym

$$\mathbf{f}^*(t; \mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}_i(t; \mathbf{x}(t)); \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (1.3)$$

W danej chwili czasowej  $t$  funkcja  $f^*$  może przyjmować wartości  $l$  warunkowych funkcji przełączających<sup>2</sup>, a więc w rozwiązaniu równania (1.2) może wystąpić  $l$  różnych stanów  $S_1, S_2, \dots, S_l$ , zdefiniowanych poprzez zbiór funkcji przełączających  $\Phi(t; x_1, x_2, \dots, x_n)$  [43].

Wybór efektywnej metody rozwiązywania równań typu (1.2) jest zwykle uzależniony od postaci funkcji nieciągłości  $\Phi$ . Etap ten ma decydujący wpływ na poprawność rozwiązania i analizy wymienionych układów nieliniowych, których odpowiedzi, jak wynika z badań przeprowadzonych w rozdziale 5, mają cechy ruchu chaotycznego, a więc bardzo wrażliwego nie tylko na zmianę warunków początkowych [29,30], ale także na dokładność przyjętej metody.

Zatem podstawowym celem niniejszej pracy jest: próba formalnego zdefiniowania zagadnień dotyczących dynamiki dyskretnych układów posiadających nieciągłości, opracowanie metodyki umożliwiającej efektywne rozwiązywanie sformułowanego zadania oraz analiza przykładowych układów z nieciągłościami. Ze względu na możliwość występowania drgań chaotycznych celowe jest wprowadzenie do analizy procedur badania jakości ruchu. Wreszcie konieczne jest zaimplementowanie powyżej wspomnianych algorytmów w pakiet programów obliczeniowych.

---

<sup>2</sup>Pełne założenia i definicje formalne zostaną przedstawione w drugim rozdziale pracy.

## 2. UKŁADY MECHANICZNE Z NIECIĄGŁOŚCIAMI

### 2.1. Fizyczne podstawy występowania nieciągłości

Analizując układy mechaniczne spotykamy się z pojęciami luzu, sztywności połączeń, tarcia wewnętrznego czy konstrukcyjnego, które na ogół zawierają pewne informacje o charakterystykach elementów wchodzących w skład tych układów. Charakterystyki te wynikają z różnych powodów: zamierzonych (np. izolacja drgań [121,111,103,113]) i niezamierzonych tj. rezultat skończonej dokładności (np. luzy w prowadnicach obrabiarkowych [139,33]), wytrzymałości materiałów, oraz jako wynik działania układu (np. tarcie suche [49,40,68,109,50]). Niewątpliwie do najciekawszych oraz najmniej zbadanych charakterystyk należą charakterystyki nieliniowe o nieliniowości w postaci funkcji nieciągłych. Wszystkie cytowane powyżej publikacje dotyczą właśnie takich układów.

Generalnie nieciągłości w układzie mechanicznym mogą wystąpić jako funkcje uogólnionego wektora:

(a) przemieszczeń  ${}^d\Phi_k(t; \mathbf{x}(t))$ , gdzie  $k \in N$ ,

(b) prędkości  ${}^v\Phi_k(t; \partial\mathbf{x}(t))$ ,

(c) przyspieszeń  ${}^a\Phi_k(t; \partial^2(\mathbf{x}(t)))$ ,

co syntetycznie można ująć w postaci równania

$$\Phi = \left\{ \Phi_k(t; \mathbf{x}(t), \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{x}(t)), \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{x}(t)), \dots) \right\}. \quad (2.1)$$

W niniejszej pracy ograniczono się wyłącznie do opisu formalnego i analizy przypadków (a) i (b).

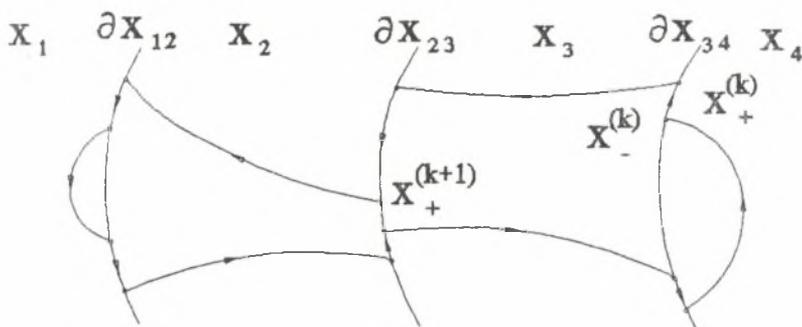
### 2.2. Matematyczny opis układów z nieciągłościami

Rozważmy dynamikę deterministycznego nieliniowego układu mechanicznego opisanego w przestrzeni stanu równaniem różniczkowym (1.1). Odpowiedzi takiego układu uzależnione będą również od pewnego wektora parametrów układu  $\mathbf{p} \in P$  (gdzie  $P \subset \mathbb{R}^m$  jest zbiorem parametrów układu). Uwzględniając ten fakt, równanie (1.1) można przedstawić w postaci

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = \mathbf{f}(t; \mathbf{x}(t), \mathbf{p}). \quad (2.2)$$

Dokonyjmy teraz podziału podzbioru  $\Omega_G$ , będącego geometryczną częścią przestrzeni stanu (czyli  $\Omega_G \subset \Omega$ ) na skończoną liczbę  $N$  jednostronnie domkniętych podzbiorów  $X_i \subset \Omega_G$ , dla których wektor przestrzeni stanu  $f: \Omega_G \rightarrow \Omega_G$  należy do klasy  $C^k$ . W każdym podzbiornie  $X_i$  wektor  $f$  jest ciągły i opisany przez odpowiednie funkcję  $f_i$  [101,102], co graficznie przedstawiono na rysunku 2.1, natomiast formalnie ujęte jest definicją

$$\forall_{t \in [a, b]} \quad \forall_{x \in X_i, i \in N} \quad f(t; x(t), p) = f_i(t; x(t), p). \quad (2.3)$$



Rys. 2.1. Podział podzbioru  $\Omega_G$  z uwzględnieniem trajektorii ruchu  
Fig. 2.1. Sections of the subset  $\Omega_G$  with the motion trajectories

Funkcje  $f_i$  posiadają ciągłość jednostronną, lewo lub prawostronną, odpowiednio do kierunku ruchu po trajektorii, co precyzują poniższe definicje.

### Definicja 2.1

Funkcja  $f_i$ ,  $i \in N$ , posiada ciągłość lewostronną, tj.  $f_i(t; a_i(t)-0, p) = L_-$  (gdzie  $L_-$  jest jednoznacznie określone), jeżeli

$$\forall_{|\varepsilon| > 0} \quad \exists_{|\delta| > 0} \quad \forall_{(x_k - a_{i,k}) \in (0, \delta_k)} \quad |f_i(t; x(t), p) - L_-| < |\varepsilon|; \quad k \in N.$$

gdzie  $N$  jest wymiarem przestrzeni stanu.

### Definicja 2.2

Funkcja  $f_i$ ,  $i \in N$ , posiada ciągłość prawostronną, tj.  $f_i(t; a_i(t)+0, p) = L_+$  (gdzie  $L_+$  jest jednoznacznie określone), jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (a_{i,k} - x_k) \in (0, \delta_k) \quad |L_+ - f_i(t; x(t), p)| < |\varepsilon|; \quad k \in N.$$

Założmy ponadto, że każda para sąsiednich podzbiorów  $\{X_i, X_{i+1}\}$  posiada powierzchnię graniczną  $\partial X_{i+1}$  zawierającą podzbiór  $\kappa(X_i)$  ogólnego zbioru punktów nieciągłości  $K(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Każdy podzbiór  $\kappa(X_i)$  jest opisany podprzestrzenią  $C_{i,p}$  funkcji przełączających  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  takich, że

$$\Phi_k(t; x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad \Phi_k : \Omega_G \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Proces przełączania w pobliżu każdego punktu nieciągłości podzbioru  $\kappa(\partial X(k))$  (punktu osobliwego trajektorii) polega na odwzorowaniu

$$\mathcal{F} : f_i^-(t; x(t), p) \rightarrow f_{i-1}^+(t; x(t), p), \quad x_-^{(k)} \rightarrow x_+^{(k)}, \quad (2.5)$$

punktu trajektorii bezpośrednio przed nieciągłością  $x^{(k)}$  na punkt bezpośrednio za nieciągłością  $x^{(k)}$ .

Rozwiązanie równania (2.2), przy zadanym warunku początkowym  $x(t_0)$ , dokonuje się przez jego całkowanie w przedziałach ciągłości, natomiast "przełączenie", tj. wybranie odpowiedniej wartości funkcji  $f(t; x(t), p)$ , odbywa się poprzez zdefiniowane funkcje przełączające  $\Phi_k(t; x_1, x_2, \dots, x_n)$ . W zależności od zadanego warunku początkowego  $x(t_0)$  oraz wektora parametrów układu  $p$ , rozwiązania można poszukiwać różnymi metodami, których przegląd zostanie przedstawiony w następnym rozdziale.

## 3. METODY ROZWIĄZYWANIA NIELINIOWYCH UKŁADÓW Z NIECIĄGŁOŚCIAMI<sup>1</sup>

### 3.1. Wprowadzenie

W przypadku równania lub układu liniowych równań różniczkowych istnieje zawsze rozwiązanie analityczne. Jednakże już dla układu trzech równań wyznaczenie wszystkich potrzebnych stałych jest zadaniem dosyć uciążliwym.

W przypadku równań nieliniowych rozwiązania analityczne istnieją tylko dla ograniczonej liczby specyficznych równań. Z tego powodu rozwinięte zostały metody przybliżone. Za ich prekursora należy niewątpliwie uznać Poincarégo, który zbudował podwaliny pod tzw. teorię perturbacji [36], a do której rozwinięcia przyczynił się poważnie Nayfeh [81]. Oprócz tych metod zostało opracowane wiele innych np. metoda bilansu harmonicznego, Ritza, równoważnej linearyzacji [82,44,35], których skuteczność jest ściśle związana z rodzajem rozwiązywanych równań. Oddzielną grupę stanowią metody numeryczne, oparte generalnie na różnorodnych sposobach całkowania różniczkowych równań ruchu. Należy tutaj wymienić popularne algorytmy jednokrokowe Newmarka [88], Wilsona [137,138], metodę kolokacji opracowaną przez Hilberta i Hughesa [46] oraz całą rodzinę procedur Rungego-Kutty zaadaptowanych dla układów z nieciągłościami [41,11,43], które to cechuje duża efektywność przy dobrej zbieżności i stabilności numerycznej. Istnieją także metody wielokrokowe (ekstrapolacyjno-interpolacyjne), których niedogodność polega na tym, że nie mogą być stosowane na początku obliczeń [66] oraz powodują poważne trudności w rozwiązywaniu układów z nieciągłościami [24].

### 3.2. Metody analityczne dokładne i przybliżone

Jakkolwiek z teoretycznego punktu widzenia istnieje zawsze możliwość otrzymania rozwiązania ścisłego dla układów liniowych, to tylko w nielicznych przypadkach można znaleźć rozwiązanie dokładne równań nieliniowych w postaci znanych i stabelaryzowanych funkcji. Zazwyczaj możliwe jest tylko uzyskanie rozwiązania przybliżonego, poprawnego tylko w pewnym zakresie parametrów występujących w rozwiązywanym układzie [37].

#### 3.2.1. Rozwiązanie ścisłe - drgania swobodne oscylatora z dowolną charakterystyką sprężystości

Jako jeden z nielicznych przykładów, gdzie rozwiązania można otrzymać w postaci ścisłej, rozpatrzmy drgania swobodne układu opisanego równaniem

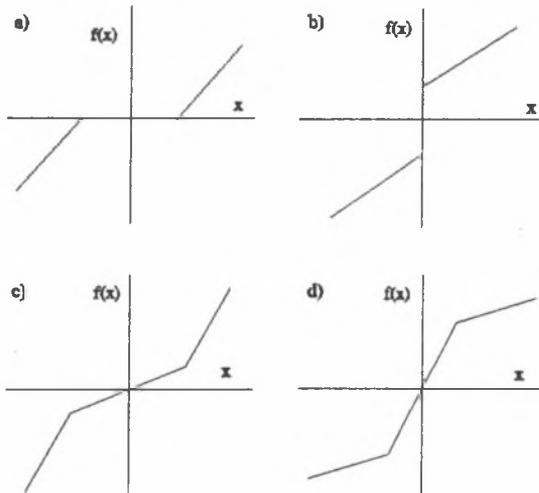
---

<sup>1</sup>Przedstawione w podrozdziale 3.2 metody zaczerpnięto z teorii drgań nieliniowych, natomiast opracowano własne przykłady ich zastosowania. W podrozdziale 3.3 do osiągnięć Autora należy rozwinięcie metody kolokacji oraz procedury wyznaczania czasów wystąpienia nieciągłości, wykorzystywanej w metodzie Rungego-Kutty.

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + f(x) = 0, \quad (3.1)$$

gdzie  $m$  jest masą układu, a  $f(x)$  jest dowolną funkcją ciągłą ze skończoną liczbą punktów nieciągłości. Nieliniowości funkcji  $f(x)$  mogą mieć charakter przedstawiony na rys. 3.1, bardzo często spotykany w technice [76]. Przemnażając równanie (3.1) przez  $\partial x / \partial t$  oraz całkując po czasie  $t$  otrzymano

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \int f(x) dx = 0. \quad (3.2)$$



**Rys. 3.1.** Postacie funkcji nieciągłości  $f(x)$ ; (a) układ z luzem, (b) układ z napięciem wstępnym, (c) twarda charakterystyka sztywności, (d) miękka charakterystyka sztywności

**Fig. 3.1.** Different forms of discontinuity function  $f(x)$  for a system with a) clearance, b) preloading, c) hard spring and d) soft spring

Oznaczając energię potencjalną  $\int f(x) dx$  przez  $U(x)$  oraz energię początkową jako  $E_0$  zależność (3.2) przekształcono do postaci

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \pm \left[ \frac{2}{m} (E_0 - U(x)) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3)$$

której całka jest rozwiązaniem ścisłym równania (3.1). Dodatkowo zależność (3.3) stanowi

podstawę do wyznaczenia wykresu na płaszczyźnie fazowej oraz obliczenia okresu drgań  $T$ , który oblicza się z całki

$$T = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{\dot{x}(x)} = t_0 \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\left[\frac{2}{m}(E_0 - U(x))\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.4)$$

### 3.2.2. Metoda bilansu harmonicznego

Przyjmijmy dla uproszczenia, iż układ (2.2) będzie reprezentowany przez pojedyncze równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = f(t, x(t), \frac{\partial x(t)}{\partial t}, p), \quad (3.5)$$

posiadające skończoną liczbę punktów nieciągłości. Rozpatrzmy przypadek, w którym rozwiązanie jest okresowe i można je aproksymować równaniem [39]

$$x(t) = C \sin(\omega t) + \sum_{n=2}^m C_n \sin(n\omega t) + \sum_{n=2}^m D_n \cos(n\omega t). \quad (3.6)$$

Po czym podstawmy równanie (3.6) do równania szczegółowego, typu (3.5). Ustalenie współczynników przy  $\sin(t)$ ,  $\sin(n\omega t)$ ,  $\cos(n\omega t)$  (gdzie  $n = 2, 3, \dots, m$ ) odbywa poprzez przyrównanie do zera prawej strony równania (3.2). Otrzymujemy wówczas  $2m-1$  równań algebraicznych z niewiadomymi  $\omega$ ,  $C_2, C_3, \dots, C_m, D_2, D_3, \dots, D_m$ , jako funkcję  $C$ , gdzie tylko współczynniki  $C_3, C_5, C_7, \dots$  są różne od zera [44].

Jako przykład zastosowania metody bilansu harmonicznego rozważmy drgania nieliniowego układu zachowawczego opisanego równaniem [39]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{\omega_0^2}{6} x^3 = 0. \quad (3.7)$$

Zakładając teraz, że rozwiązanie może być przybliżone przez funkcję

$$x(t) = C \sin(\omega t), \quad (3.8)$$

przy czym

$$\omega = \omega(C). \quad (3.9)$$

Podstawiając równanie (3.8) do (3.7) otrzymano

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left( x - \frac{x^3}{6} \right) = (\omega_0^2 - \omega^2 - \omega_0^2 \frac{C^2}{8}) C \sin(\omega t) + \omega_0^2 \frac{C^3}{24} \sin(3\omega t). \quad (3.10)$$

Jeżeli funkcja  $x(t)$  jest rozwiązaniem równania (3.7), to prawa strona zależności (3.10) powinna być równa zero. Rozwiązanie przybliżone otrzymuje się odrzucając małe wyższego rzędu. Wówczas częstość drgań jest równa

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{C^2}{8} \right). \quad (3.11)$$

Dla małych amplitud drgań częstość wyznaczana jest z równania [39]

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{C^2}{16} \right). \quad (3.12)$$

### 3.2.3. Metoda Ritza

Metoda Ritza, szczególnie często stosowana w zagadnieniach brzegowych mechaniki ciała odkształcalnego, może być również z powodzeniem użyta do rozwiązywania niektórych zagadnień drgań nieliniowych. Nieznane rozwiązanie  $x(t)$  przedstawiane jest jako kombinacja liniowa odpowiednich funkcji  $\psi_i(t)$  (gdzie  $i = 1, 2, \dots, m$ ) takich, że

$$x(t) = \sum_{i=1}^m C_i \psi_i(t), \quad (3.13)$$

gdzie  $m$  może być dowolne. Współczynniki  $C_i$  są dobierane w taki sposób, ażeby błąd  $e(t)$  wynikający z przyjęcia rozwiązania przybliżonego w miejsce rozwiązania ścisłego był najmniejszy z możliwych w pewnym skończonym przedziale czasowym  $[a, b]$ . Zatem dla równania (3.7) można napisać

$$\sum_{i=1}^m C_i \ddot{\psi}_i(t) + \omega_0^2 \left( \sum_{i=1}^m C_i \psi_i - \frac{1}{6} \left( \sum_{i=1}^m C_i \psi_i \right)^3 \right) = e(t) \quad (3.14)$$

z warunkiem na średni błąd kwadratowy dla danego przedziału, przedstawionym jako pewny funkcjonał  $J(C_1, C_2, \dots, C_m)$

$$J(C_1, C_2, \dots, C_m) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^2(t) dt. \quad (3.15)$$

Błąd ten przyjmuje wartość minimalną wtedy i tylko wtedy gdy różniczka funkcjonału

$J(\cdot)$  przyjmuje wartość zerową [8], czyli

$$\delta J(C_1, C_2, \dots, C_m) = J(C_1 + h_1, C_2 + h_2, \dots, C_m + h_m) - J(C_1, C_2, \dots, C_m). \quad (3.16)$$

Równanie wariacyjne (3.16) [28] można sprowadzić do układu równań algebraicznych (3.17), z których wyznacza się stałe  $C_i$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial C_1} \int_a^b e^2(t) dt &= 2 \int_a^b e(t) \frac{\partial e(t)}{\partial C_1} dt = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C_2} \int_a^b e^2(t) dt &= 2 \int_a^b e(t) \frac{\partial e(t)}{\partial C_2} dt = 0 \\ \vdots & \\ \frac{\partial}{\partial C_m} \int_a^b e^2(t) dt &= 2 \int_a^b e(t) \frac{\partial e(t)}{\partial C_m} dt = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Przykładowo dla funkcji  $\psi_i(t)$  określonych w przedziale domkniętym  $[a, b]$

$$\psi_1(t) = C_1 \sin \omega t, \quad \psi_2(t) = \dots \quad \psi_m(t) = 0 \quad (3.18)$$

otrzymuje się równanie na  $e(t)$

$$e(t) = (\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2}{8} C_1^2) C_1 \sin \omega t + \frac{\omega_0^2}{24} C_1^3 \sin 3 \omega t. \quad (3.19)$$

Jeżeli błąd  $e(t)$  będziemy obliczać w przedziale  $[a, b] = [0, T]$  (gdzie  $T = 2\pi/\omega$ ), to otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_0^T e(t) \frac{\partial e(t)}{\partial C_1} dt &= \int_0^T [(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2}{8} C_1^2) C_1 \sin \omega t + \frac{\omega_0^2}{24} C_1^3 \sin \omega 3t] \\ & \quad [(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{3\omega_0^2}{8} C_1^2) \sin 3 \omega t] dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pomijając rozwiązanie trywialne dla  $C_1=0$  (przy czym  $C_1$  oznacza amplitudę drgań), otrzymuje się następujące równanie kwadratowe

$$\omega^4 - 2(1 - \frac{1}{4} C_1^2) \omega_0^2 \omega^2 + (1 - \frac{1}{2} C_1^2 + \frac{5}{96} C_1^4) \omega_0^4 = 0, \quad (3.21)$$

z dwoma pierwiastkami  $\omega_{1,2}$

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[ 1 + \left( -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{10} \right) C_1^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.22)$$

z których pierwszy odpowiada minimum funkcjonału (3.15). Lepsze przybliżenie można uzyskać uwzględniając dodatkowo dalsze funkcje, np.  $\psi_3(t) = \sin 3\omega t$ .

### 3.2.4. Metoda równoważnej linearyzacji

Metoda równoważnej linearyzacji omówiona zostanie na przykładzie nieliniowych drgań swobodnych wahadła, opisanych poniższym równaniem

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0, \quad (3.23)$$

które można zastąpić równaniem liniowym o postaci

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (3.24)$$

gdzie  $\omega$  zależy od warunków początkowych, a więc jest funkcją amplitudy drgań. W literaturze spotkać można kilka różnorodnych kryteriów wyboru częstości kołowej  $\omega$ . W pracy zaprezentowano sposób Hagedorna [39] polegający na zastąpieniu nieliniowej sprężyny przez liniową, tak aby energie potencjalne dla obu przypadków przy tej samej amplitudzie drgań były jednakowe, tzn.

$$\omega_0^2 \int_0^C \sin x \, dx = \omega^2 \frac{C^2}{2}, \quad (3.25)$$

co w konsekwencji prowadzi do aproksymacji

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 \left( 1 - \frac{C}{12} \right). \quad (3.26)$$

Lepsze przybliżenie uzyskuje się "metodą optymalnej linearyzacji", w której podobnie jak w metodzie Ritz'a definiuje się błąd  $e(t)$  pomiędzy liniowym a nieliniowym członem reprezentującym zmagazynowaną energię

$$e(t) = \omega^2 x - \omega_0^2 \sin x. \quad (3.27)$$

Błąd  $e(t)$  jest funkcją  $\omega$  i  $x$  bądź  $\omega$  i  $t$  w przypadku gdy zakłada się, że rozwiązanie  $x(t)$  ma postać  $x = x(t, \omega)$ . Funkcja  $\omega^2(C)$  jest wyznaczana w ten sposób, aby funkcjonał (3.15)

osiągał minimum dla ustalonego czasu  $T$ , co prowadzi do warunku

$$\frac{\partial}{\partial \omega^2} \int_0^T e^2(\omega^2, t) dt = 2 \int_0^T e(\omega^2, t) \frac{\partial e(\omega^2, t)}{\partial \omega^2} dt = 0. \quad (3.28)$$

Podstawiając równanie (3.27) do (3.28) otrzymano zależność na szukaną częstość kołową obliczaną w przedziale  $[0, T]$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{\int_0^T x \sin x dt}{\int_0^T x^2 dt}. \quad (3.29)$$

Jeżeli przyjąć rozwiązanie  $x(t) = C \sin \omega t$  jako rozwiązanie równania liniowego, to wówczas powyższe całki będą posiadały górną granicę całkowania  $T = 2\pi/\omega$ , co w konsekwencji prowadzi do związku

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{2J_1(C)}{C}, \quad (3.30)$$

gdzie  $J_k$  jest funkcją Bessela  $k$ -tego rzędu pierwszego rodzaju. Rozwijając ją w szereg Taylora otrzymano

$$J_1(C) = \frac{1}{2}C - \frac{1}{16}C^3 + \frac{1}{384}C^5 - \dots \quad (3.31)$$

Uwzględniając dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia otrzymano wynik identyczny z (3.11).

### 3.2.5. Metoda wolno zmieniającej się amplitudy i fazy

Rozpatrzmy następujące równanie różniczkowe

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t, x, \dot{x}) \quad (3.32)$$

gdzie  $f(t; x, \dot{x})$  jest dowolną całkowaną funkcją. Dokonajmy teraz zmiany układu współrzędnych z  $(x, \dot{x})$  na  $(a, \psi)$  transformacją (3.33)

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \sin(\omega_0 t + \psi(t)) \\ \dot{x}(t) &= a(t) \omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi(t)), \end{aligned} \quad (3.33)$$

a następnie zróżniczkujemy po czasie pierwsze z równań transformacji (3.33). Porównanie wyniku z drugim z równań umożliwi otrzymanie zależności (3.32) w nowym układzie

współrzędnych  $a(t)$  i  $\psi(t)$ .

$$\dot{a}(t) \sin(\omega_0 t + \psi(t)) + a(t) \dot{\psi}(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t)) = 0. \quad (3.34)$$

Obliczmy teraz  $x$  z drugiego równań transformacji (3.33), a następnie podstawmy ten wynik oraz pierwsze z równań transformacji (3.33) do równania (3.32)

$$\dot{a}(t) \omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi) - a(t) \dot{\psi}(t) \sin(\omega_0 t + \psi) = f(x(a(t), \psi(t)), \dot{x}(a(t), \psi(t))). \quad (3.35)$$

Proste przesztacenia równań (3.34) i (3.35) prowadzą do układu

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \frac{1}{\omega_0} f(a(t) \sin(\omega_0 t + \psi), a(t) \omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi)) \cos(\omega_0 t + \psi) \\ \dot{\psi}(t) &= -\frac{1}{\omega_0 a(t)} f(a(t) \sin(\omega_0 t + \psi), a(t) \omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi)) \sin(\omega_0 t + \psi). \end{aligned} \quad (3.36)$$

W przypadku ogólnym otrzymanie rozwiązania dokładnego równania (3.36) jest praktycznie niemożliwe. Dokonuje się więc uproszczenia równania różniczkowego poprzez przyjęcie wartości średniej prawych stron w przedziale czasowym  $[t, t+T]$  (gdzie  $T=2\pi/\omega_0$ ), przy założeniu stałych wartości  $a(t)$  i  $\psi(t)$ . Układ równań (3.36) zostaje więc zastąpiony przez

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \frac{1}{2\pi\omega_0} \int f(a \sin(\theta + \psi), a \omega_0 \cos(\theta + \psi)) \cos(\theta + \psi) d\theta \\ \dot{\psi}(t) &= \frac{-1}{2\pi a \omega_0} \int f(a \sin(\theta + \psi), a \omega_0 \cos(\theta + \psi)) \sin(\theta + \psi) d\theta. \end{aligned} \quad (3.37)$$

W wyniku tych przekształceń otrzymano układ równań w postaci autonomicznej, będący pierwszym przybliżeniem amplitudy i fazy jako funkcji czasu.

### 3.3. Metody numeryczne

#### 3.3.1. Wprowadzenie

Bezpośrednie numeryczne całkowanie równań różniczkowych opisujących układy liniowe i nieliniowe jest zadaniem powszechnie spotykanym w dynamice. Istnieje więc pokaźna biblioteka programów umożliwiających rozwiązywanie standardowych problemów, których przegląd można znaleźć np. w pracach [89,4,39]. Generalnie zaleca

się stosowanie algorytmów niskiego rzędu z ustalonym krokiem czasowym takich jak metoda Houlbolta, Parka, rodzina metod Newmarka [88], metodę Wilsona [137,138], metoda stałego średniego przyspieszenia [61,62] oraz cała rodzina metod kolokacji opracowana przez Hilberta i Hughesa [46].

Zasadniczym powodem powyższego zalecenia jest fakt, iż wszystkie wymienione algorytmy spełniają twierdzenie Dahlquista [18] dotyczące metod wielokrokowych, które mówi, że maksymalny rząd metody spełniającej warunek A-stabilności nie może być większy od 2. Jednakże znane są przykłady algorytmów wyższych rzędów spełniające powyższy warunek [60]. Cechą charakterystyczną owych algorytmów, które można nazwać *implicit*, jest fakt, iż wymagają one operacji odwracania macierzy, co w poważnym stopniu wpływa niekorzystnie na dokładność obliczeń. Fakt ten ma szczególne znaczenie dla systemów z nieciągłościami, gdzie nagła zmiana wektora parametrów powoduje wprowadzenie zaburzenia przejściowego, co w konsekwencji generuje wyższe częstotliwości odpowiedzi. Dlatego też niektórzy autorzy, przykładowo Belytschko i inni [7] oraz Brakhus i Assen [10] zalecają metody określane jako *explicit*, szczególnie dla dokładnych obliczeń. Dodatkowo w przypadku analizy procesów przejściowych w układach z nieciągłościami, związek pomiędzy fazami dla odpowiednich częstotliwości drgań własnych (wartości własnych) w znacznym stopniu wiąże się z dokładnością obliczeń. Wszystkie wspomniane uwagi połączone z wymaganiami łatwości implementacji dla systemów z nieciągłościami jednoznacznie wskazują na celowość rozważenia zastosowania zmodyfikowanej *explicit* metody opartej na algorytmie Rungego-Kutty czwartego rzędu [9].

### 3.3.2. Sformułowanie zadania

Żałujemy, że równanie różniczkowe (lub układ równań) opisujące dowolny układ dynamiczny zostanie sprowadzone do postaci równania (2.2) z warunkiem początkowym  $x(t_0) = x_0$  oraz, że

- (1) funkcja  $f(\cdot)$  jest określona i ciągła w obszarze  $D$  zdefiniowanym przez  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $x_i \in [-\infty, \infty]$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), gdzie  $t_1, t_2$  przyjmują wartości skończone, a  $m$  jest wymiarem wektora  $x(t)$ ,
- (2) funkcja  $f(\cdot)$  spełnia warunek Lipschitza, tzn. istnieje taka stała  $L$ , że dla dowolnych wektorów  $x(t)$ ,  $x^*(t)$  zachodzi nierówność

$$\|f(t; x(t), p) - f(t; x^*(t), p)\| \leq L \|x(t) - x^*(t)\|, \quad (3.38)$$

gdzie  $\|\cdot\|$  oznacza normę wektora.

W przypadku gdy  $f(t; x(t), p)$  posiada ciągle pochodne cząstkowe po  $x_i$ , można napisać, że

$$L = \sup_{(t, x) \in D} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|, \quad (3.39)$$

gdzie  $\partial f / \partial x$  jest Jakobianem funkcji  $f(\cdot)$  po  $x$  takim, że

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Równanie (2.2) posiada nieskończenie wiele rozwiązań zawierających pewną dowolną stałą, którą ustala się z warunku początkowego  $x(t_0) = x_0$ , zwanego dalej zagadnieniem Cauche'go [37].

Celem metod, które zostaną omówione w tym podrozdziale, jest obliczenie numerycznego rozwiązania szczególnego dla danej pary  $(t_0, x(t_0))$ . Spośród gamy metod obliczeniowych omówiono jedynie trzy następujące grupy, tj. metody wielokrokowe, kolokacji oraz Rungego-Kutty jako potencjalnie najbardziej odpowiednie dla zagadnień z nieciągłościami.

### 3.3.3. Metody wielokrokowe [66]

Całkując równanie (2.2) w granicach od  $t_n$  do  $t_n+h$  otrzymano

$$x(t_n+h) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_n+h} f(t, x(t), p) dt. \quad (3.40)$$

Funkcja  $F(t) \equiv f(t; x(t), p)$  nie jest znana, lecz gdy dysponuje się wartościami w punktach  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ , to można wyznaczyć poniższe składowe wektorów w punktach

$$\begin{aligned} F_0 &= F(t_0) = f(t_0, x(t_0), p) \\ F_1 &= F(t_1) = f(t_1, x(t_1), p) \\ &\vdots \\ F_n &= F(t_n) = f(t_n, x(t_n), p). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Następnie interpolując funkcję  $F(t)$  wielomianem  $F^*(t)$  zdefiniowanym w oparciu o wektory  $F_0, F_1, F_2, \dots, F_n$  otrzymuje się

$$\int_{t_n}^{t_n+h} f(t; x(t), p) dt = \int_{t_n}^{t_n+h} F^*(t) dt + \mathbf{0}(h), \quad (3.42)$$

gdzie  $\mathbf{0}(h)$  jest wektorem błędu.

Rozróżnia się dwie rodziny metod:

- (1) ekstrapolacyjne; gdzie funkcję  $F(t)$  ekstrapoluje się w przedziale  $(t_n, t_n+h)$  na podstawie wektorów  $F_0, F_1, F_2, \dots, F_n$ ,
- (2) interpolacyjne; gdzie funkcję  $F(t)$  interpoluje się znając wartości  $F_0, F_1, F_2, \dots, F_n$  i  $F_{n+1} = F(t_{n+1})$ .

### Metody ekstrapolacyjne

Przyjmijmy założenie, iż znane jest już rozwiązanie  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  dla  $n+1$  chwili czasowej

$$t_i = t_0 + ih, \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (3.43)$$

Wówczas  $x_{n+1}$  dla czasu  $t = t_n+h$  oblicza się w sposób następujący. Przedstawmy wielomian  $F^*(t)$  na  $n+1$  punktach w postaci

$$F^* = \left[ \frac{1}{h}, \frac{t}{h}, \frac{t^2}{h^2}, \dots, \frac{t^n}{h^n} \right] L_n [F_0, F_1, \dots, F_n]^T, \quad (3.44)$$

gdzie  $L_n$  jest macierzą Lagrange'a. Oznaczając

$$\int_{nh}^{(n+1)h} \frac{t^i}{h^i} dt = J_i, \quad (3.45)$$

otrzymano

$$x_{n+1} = x_n + [J_0, J_1, \dots, J_n] L_n [F_0, F_1, \dots, F_n]^T. \quad (3.46)$$

W literaturze równanie (3.46) spotykane jest w postaci

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_0 F_0 + \alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_n F_n, \quad (3.47)$$

gdzie:

$$[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n] = [J_0, J_1, \dots, J_n] L_n.$$

### Metody interpolacyjne

Funkcję  $F(t)$  w przedziale  $(0, (n+1)h)$  można interpolować za pomocą znanych wektorów  $F_0$  do  $F_{n+1}$  włącznie. Związek określający  $x_{n+1}$  ma postać

$$F_{n+1} = f(t_{n+1}, x_{n+1}, p), \quad (3.48)$$

i jest w ogólnym przypadku równaniem uwikłanym. Zapiszmy teraz wielomian interpolacyjny  $F^*$  za pomocą macierzy Lagrange'a

$$F^* = \left[ \frac{1}{h}, \frac{t}{h}, \frac{t^2}{h^2}, \dots, \frac{t^n}{h^n}, \frac{t^{n+1}}{h^{n+1}} \right] L_{n+1} [F_0, F_1, \dots, F_n, F_{n+1}]^T. \quad (3.49)$$

Przyjmując oznaczenie (3.45) otrzymano formułę

$$x_{n+1} = x_n + [J_0, J_1, \dots, J_n, J_{n+1}] L_{n+1} [F_0, F_1, \dots, F_n, F_{n+1}]^T. \quad (3.50)$$

Zarówno metody ekstrapolacyjne, jak i interpolacyjne stosowane oddzielnie cechują liczne wady. Metody ekstrapolacyjne są zwykle mniej dokładne w porównaniu z interpolacyjnymi, jednakże te drugie, jak już wspomniano poprzednio, prowadzą do równania uwikłanego, wymagając zatem rozwiązywania metodą kolejnych przybliżeń. Należy więc precyzyjnie dobrać rozwiązanie początkowe. Fakt ten był podstawą połączenia obydwu metod w jedną, zwaną metodą *predyktor-korektor*, w której wyróżnić można dwa zasadnicze etapy. W pierwszym obliczamy  $x_{n+1}^{(1)}$  na podstawie wektorów  $x_0, x_1, \dots, x_n$  wykorzystując metodę ekstrapolacji. Wektor ten (tj.  $x_{n+1}^{(1)}$ ) będzie stanowić wartość początkową przy rozwiązywaniu poniższego równania metodą interpolacyjną

$$x_{n+1} = x_n + [\beta_0 F_0 + \beta_1 F_1 + \dots + \beta_n F_n + \beta_{n+1} f(t_{n+1}, x_{n+1}, p)] h. \quad (3.51)$$

Wektor  $x_{(n+1)}^{(2)}$  po pierwszej iteracji będzie opisany zależnością

$$x_{n+1} = x_n + [\beta_0 F_0 + \beta_1 + \dots + \beta_n F_n + \beta_{n+1} f(t_{n+1}, x_{n+1}^{(1)}, p)] h. \quad (3.52)$$

W identyczny sposób można obliczyć drugie, trzecie i dalsze przybliżenia pamiętając o tym, iż dla pewnych przypadków kolejne przybliżenia mogą być rozbieżne i wówczas równanie (3.50) należy rozwiązywać innymi metodami, np. równoważnej linearyzacji. Wybór  $x_{n+1}^{(1)}$  jako wartości początkowej jest wystarczająco dokładny [73, 74], a więc może stanowić formułę wstępną, tzw. predyktor

$$x_{n+1} = x_n + (\alpha_0 F_0 + \alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_n F_n) h. \quad (3.53)$$

W drugim etapie jako formułę korygującą (korektor) stosuje się metodę interpolacyjną, co w rezultacie prowadzi do równania (3.52).

### 3.3.4. Metody kolokacji

Rozważmy teraz grupę algorytmów pod nazwą "*metody kolokacji*", których rodzajów można znaleźć w pracach Newmarka [88] i Wilsona [137, 138]. Rozwijane przez Hilberta i Hughesa [61, 62], a później przez Langerę [63-65], należą do metod dosyć często stosowanych w dynamice nieliniowej.

Przedmiotem rozważań jest nieliniowe równanie wektorowe ze skończoną liczbą punktów nieciągłości, przedstawione dla wygody rozważań jako różniczkowe równanie drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}(t)}{\partial t^2} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t}, \mathbf{p}), \quad (3.54)$$

spełniające zagadnienie Cauche'go.

Załóżmy, że badany proces obserwowany będzie w dyskretnym zbiorze punktów węzłowych [65] na osi czasu  $t \in (0, \infty)$ . Rozpatrywać będziemy dwa sąsiednie punkty węzłowe  $t_i$  i  $t_{i+1}$  takie, że  $t_{i+1} - t_i = h$ . Lokalny czas pomiędzy punktami węzłowymi określać będzie zmienna  $\tau = t_i - t$ , a rozkład przyspieszeń  $\partial^2 \mathbf{x} / \partial t^2$  w otoczeniu węzła  $i$  oraz wektory przemieszczeń i prędkości dla kroku czasowego  $t_i$  są znane. Wówczas rozkłady wektorów prędkości i przemieszczeń mogą być wyznaczane z następujących zależności

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \dot{\mathbf{x}}_i + \int_0^\tau \ddot{\mathbf{x}} dt, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_i + \int_0^\tau \dot{\mathbf{x}} dt = \mathbf{x}_i + \tau \dot{\mathbf{x}}_i + \int_0^\tau \int_0^\tau \ddot{\mathbf{x}} dt dt, \quad (3.56)$$

gdzie:

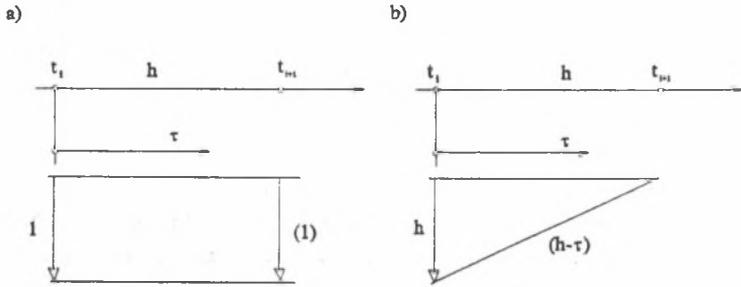
$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t)}{\partial t^2}.$$

Przekształcając równanie (3.56) oraz podstawiając  $\tau = h$ , otrzymano ostatecznie

$$\dot{\mathbf{x}}_{i+1} = \dot{\mathbf{x}}_i + \int_0^h \ddot{\mathbf{x}} dt = \dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{J}_0, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + h \dot{\mathbf{x}}_i + \int_0^h (h-t) \ddot{\mathbf{x}} dt = \mathbf{x}_i + h \dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{J}_1. \quad (3.58)$$

$\mathbf{J}_0$  i  $\mathbf{J}_1$  oznaczają momenty statyczne zerowego i pierwszego rzędu rozkładu przyspieszeń w przedziale  $\tau \in \langle 0, h \rangle$ . Podcałkowe funkcje wagi przedstawiono na rysunku 3.2 [63]. Warto w tym miejscu podkreślić, iż równania (3.57) i (3.58) uzupełnione różniczkowym



Rys. 3.2. Funkcje wagowe dla równań: a) (3.57), b) (3.58)

Fig. 3.2. Weight functions for the equations a) (3.57) and b) (3.58)

równaniem ruchu (3.54) stanowią naturalną podstawę formułowania jednokrokowych metod całkowania numerycznego równań ruchu. W przypadku równań nieliniowych proces obliczeniowy ma charakter iteracyjny, tzn. stosuje się dodatkowo procedurę rozwiązywania zagadnień nieliniowych (np. Newtona-Raphsona). Natomiast całkowanie różniczkowych równań liniowych można sprowadzić do zagadnienia rozwiązywania liniowego macierzowego równania algebraicznego, które otrzymuje się poprzez proces linearyzacji bądź poprzez przedstawienie (o ile to możliwe) zadania nieliniowego w postaci liniowej ze zmiennymi współczynnikami. W pracach autora [131-133] sformułowano postacie nieliniowości wykorzystywane do opisu dynamiki oddziaływań w układzie obrabiarka - proces skrawania, wyprowadzając zarazem równania umożliwiające dokonanie numerycznego restartu procesu obliczeń.

Układ równań (3.57) i (3.58) występuje jeszcze w innej, w niektórych przypadkach bardziej funkcjonalnej postaci. Jeśli dla kroku czasowego "wprzód" słuszny jest związek (3.58), to dla kroku "wstecz" można napisać [65]

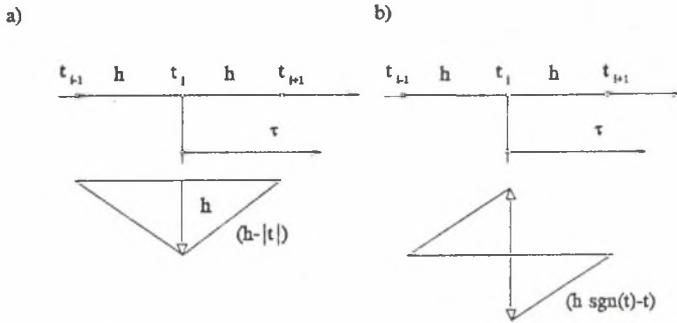
$$x_{i-1} = x_i + \int_{-h}^0 \ddot{x} dt = x_i - h \dot{x}_i + \int_{-h}^0 (h+t) \ddot{x} dt. \quad (3.59)$$

Dodając i odejmując stronami równania (3.58) i (3.59) otrzymano

$$x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = \int_{-h}^h (h-|t|) \ddot{x} dt = J_2, \quad (3.60)$$

$$x_{i+1} - x_{i-1} = 2h \dot{x}_i + \int_{-h}^h (h \operatorname{sgn}(t) - t) \ddot{x} dt = 2h \dot{x}_i + J_1. \quad (3.61)$$

Równania (3.60) i (3.61) są równoważne z (3.57) i (3.58). Funkcje wagowe rozkładu przyspieszeń niezbędne dla wyznaczenia momentów statycznych  $J_2, J_3$  przedstawiono na rys.3.3.



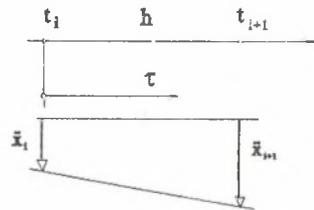
Rys. 3.3. Funkcje wagowe dla równań; a) (3.60), b) (3.61)

Fig. 3.3. Weight functions for the equations a) (3.60) and b) (3.61)

Należy podkreślić, iż wzory (3.57), (3.58), (3.60) i (3.61) są formułami ścisłymi. Rachunek przybliżony rozpoczyna się dopiero od etapu obliczania występujących tam całek [65]. Dodatkowo powyższe równania w zależności od sposobu ich wykorzystania mogą być podstawą rozmaitych odmian metody bezpośredniej całkowania numerycznego równań ruchu. W pracy omówione zostaną dwa warianty, tj. liniowa aproksymacja przyspieszeń oraz liniowa aproksymacja przemieszczeń [3]. Metody aproksymacji wyższego stopnia, takie jak sześcienna aproksymacja przyspieszeń czy przemieszczeń mają jednak uciążliwe wady [64].

#### Liniowa aproksymacja przyspieszeń

Zakładając aproksymację funkcji przyspieszeń jako liniową (patrz rys.3.4), momenty statyczne  $J_0$  i  $J_1$  mogą być obliczane w sposób dokładny i wynoszą odpowiednio



Rys. 3.4. Liniowa aproksymacja rozkładu przyspieszeń

Fig. 3.4. Linear approximation of acceleration function

$$J_0 = \frac{1}{2} h \ddot{x}_i + \frac{1}{2} h \ddot{x}_{i+1}, \quad (3.62)$$

$$J_1 = \frac{1}{3} h^2 \ddot{x}_i + \frac{1}{6} h^2 \ddot{x}_{i+1}. \quad (3.63)$$

Całki  $J_0$  i  $J_1$  można także wyznaczyć za pomocą kwadratur przybliżonych, które dla funkcji aproksymujących liniowych dają wyniki dokładne, zatem równanie (3.62) pozostaje nadal w mocy [65]. Natomiast równanie (3.63) przybiera bardziej ogólną postać

$$J_1 = \alpha h^2 \ddot{x}_i + \beta h^2 \ddot{x}_{i+1}. \quad (3.64)$$

Podstawiając zależności (3.62) i (3.63) do równań (3.57) i (3.58) otrzymano

$$\dot{x}_{i+1} = \frac{1}{2} h (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}), \quad (3.65)$$

$$x_{i+1} = x_i + h \dot{x}_i + h^2 (\alpha \ddot{x}_i + \beta \ddot{x}_{i+1}). \quad (3.66)$$

Uzupełniając powyższe formuły (3.65) i (3.66) równaniem (3.54) napisanym dla kroku  $k+1$

$$\ddot{x}_{i+1} = f(t_{i+1}; x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, p), \quad (3.67)$$

otrzymuje się ogólne sformułowanie metody Newmarka.

### Liniowa aproksymacja przemieszczeń

Założmy analogicznie do metody liniowej aproksymacji przyspieszeń, iż wstępna aproksymacja przemieszczeń będzie liniowa. Różniczkując wektor przemieszczeń otrzymamy rozkład prędkości. Natomiast rozkład przyspieszeń obliczymy z równania (3.54).

W ogólnym przypadku równania nieliniowego aproksymacje rozkładu przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń można opisać równaniami

$$x(\tau) = (1 - \nu)x_i + \nu x_{i+1}, \quad (3.68)$$

$$\dot{x}(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} x(\tau) = \frac{1}{h} (x_{i+1} - x_i), \quad (3.69)$$

$$\ddot{x}(\tau) = f(t_i + \tau; x(\tau), \frac{\partial}{\partial \tau} x(\tau), p), \quad (3.70)$$

gdzie  $\nu = \tau/h \in (0, 1)$ .

Całkując równania (3.70) i (3.69) otrzymamy całki  $J_0$  i  $J_1$ , które mogą być obliczone formalnie bądź za pomocą kwadratur przybliżonych (najbardziej efektywną jest kwadratura Gaussa). Wówczas formuły (3.57) i (3.58) przyjmują następującą postać [65]

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + h \sum_G w_G \ddot{x}_G, \quad (3.71)$$

$$x_{i+1} = x_i + h \dot{x}_i + h^2 \sum_G w_G (1 - v_G) \ddot{x}_G, \quad (3.72)$$

gdzie  $v_G \in (0,1)$  są punktami węzłowymi kwadratury Gaussa,  $w_G$  są lokalnymi współczynnikami wagowymi, zaś  $x_G$  jest wektorem przyspieszeń w chwili  $\tau = v_G h$ .

### 3.3.5. Metody oparte na algorytmach Rungego-Kutty

Jedną z najczęściej stosowanych metod całkowania różniczkowych równań ruchu jest metoda czy też grupa metod opartych na algorytmach Rungego-Kutty, których zestawienie zamieszczono w tabeli 3.1. Algorytmy te w nieco zmodyfikowanej postaci znalazły również szerokie zastosowanie do analizy zagadnień z nieciągłościami.

Całkowanie numeryczne układu równań zawierających nieciągłości metodami Rungego-Kutty przebiega standardowo przy użyciu stałego kroku całkowania  $h$  aż do momentu, w którym procedura wykrywająca nieciągłości wskaże jej wystąpienie. Ponieważ całkowanie odbywa się sukcesywnie ze stałym krokiem czasowym  $h$ , a nieciągłość wystąpiła w czasie  $t^* \in (t-h, t)$ , a więc w celu otrzymania dokładnych wyników [9] należy [91]:

- (I) wyznaczyć dokładnie czas  $t^*$  wystąpienia nieciągłości poprzez obliczenie takiej liczby  $\alpha$ , że  $t^* = t - (1-\alpha)h$ ,
- (II) uaktualnić wartości zmiennych zależnych (wektory parametrów kinematycznych) dla rzeczywistego czasu wystąpienia nieciągłości.

Podobnie jak zdecydowana większość algorytmów całkowania numerycznego, grupa metod Rungego-Kutty zasadniczo wymaga układu równań pierwszego rzędu o postaci zależności (2.2)

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}).$$

Zakładając, że dynamikę modelowanego układu opisuje  $n$  równań różniczkowych, powyższą zależność można przedstawić następująco

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.73)$$

W układzie z nieciągłościami funkcje  $f_i(\cdot)$  posiadają skończoną liczbę  $m$  różnych stanów  $S_1, S_2, \dots, S_m$ , czyli

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_{ij}(t; \mathbf{x}(t), \mathbf{p}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.74)$$

Stan funkcji  $S_j$  jest określony przez zbiór funkcji nieciągłości  $\Phi(t; \mathbf{x}(t))$  spełniających warunek (2.4).

Często procedury wykrywające punkty nieciągłości są wkomponowane w algorytmy Rungego-Kutty z automatyczną kontrolą kroku całkowania. Przykładowo implementacja wykorzystująca metodę Mersona została zaprezentowana w pracach O'Regana [91] oraz Haya i innych [43,16]. To podejście dokonujące interpolacji funkcji nieciągłości na długości kroku całkowania może powodować obniżenie dokładności, ponieważ formuła interpolacji nie jest powiązana z algorytmem całkowania [11]. Niedogodność tę próbowano wyeliminować w wielu pracach, z których poniżej omówiono kilka najciekawszych.

Halin [41] wykorzystując metody oparte na szeregach Lie, rozwinął funkcje  $f_i(t; \mathbf{x}(t), \mathbf{p})$  w wygodne do całkowania szeregi potęgowe. Następnie zauważył, iż poszczególne funkcje nieciągłości  $\Phi_k(t; \mathbf{x}(t))$  ( $\Phi_k \in \Phi$ ) mogą być także rozwinięte w szeregi, przez co punkty nieciągłości mogą być precyzyjnie określone. Wynika to z faktu, iż zarówno  $f_i$  jak i  $\Phi_k$  wykorzystują tę samą metodę. Dodatkowo dowiódł on, iż klasyczne metody wielokrokowe, takie jak Adamsa, czy Hamminga, nie mogą być zastosowane ze względu na trudności związane ze zmianą kroku całkowania oraz konieczność restartu.

Carver [11] dołączając do funkcji nieciągłości  $\Phi_k(t; \mathbf{x}(t))$  jej pochodną  $\partial \Phi$  w otoczeniu punktu nieciągłości lokalizowanego z nierówności

$$\Phi_{k(t)} \Phi_{k(t+h)} < 0, \quad (3.75)$$

wykorzystał algorytm Hindmarsh-Geara (równania progresji czasu) [47] do obliczenia wartości długości kroku czasowego  $h^*$ , dla którego

$$\Phi_{k(t+h^*)} = 0. \quad (3.76)$$

Zadanie to wymaga obliczenia wielomianu (ze względu na  $h^*$ ), którego rząd jest równy rzędowi algorytmu całkującego. Negatywną cechą tego algorytmu jest możliwość błędzenia rozwiązania wokół punktu nieciągłości.

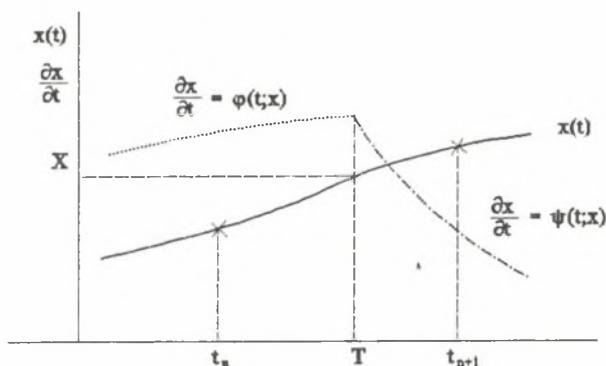
W pracach [100,12] zastosowano tzw. kombinowaną symulację, polegającą na wprowadzeniu *dyskretnych wydarzeń* (a właściwie dyskretnych układów) opisanych ciągłym równaniem. Oryginalna metoda Pritskera i Hunta rozróżnia dwa rodzaje nieciągłości, tj. nieciągłości w dziedzinie czasu i w przestrzeni stanu. Nieciągłości w dziedzinie czasu są prosto wyznaczane, a więc całkowanie odbywa się dokładnie do momentu ich wystąpienia.

Natomiast nieciągłości w przestrzeni stanu są wykrywane wstępnie za pomocą warunku (3.75), po czym metodą bisekcji ustala się dokładniejsze wartości miejsca wystąpienia nieciągłości. Powtarzając sprawdzanie warunku (3.75) (oczywiście aktualizując za każdym krokiem wartości funkcji  $\Phi_k(\cdot)$ ) z dzieleniem długości kroku czasowego na połowę, po skończonej liczbie iteracji uzyskuje się rozwiązanie z wymaganą dokładnością [100]. Znaczną poprawę zbieżności uzyskał Cellier [12] zastępując metodę bisekcji metodą Newtona.

Rozwinięciem metody omawianej w poprzednim paragrafie jest algorytm zaproponowany przez Ellisona [25], umożliwiający efektywną lokalizację punktów nieciągłości poprzez wykorzystanie odwrotnej interpolacji wielomianami Hermite'a. Algorytm ten oparty jest na metodzie Rungego-Kutty-Shampire [107], gdzie wykorzystano dwie formuły Rungego-Kutty. Pierwsza z nich (trzeciego rzędu) służy do zwykłego całkowania "w przód", natomiast druga (czwartego rzędu) umożliwia poprawę dokładności rozwiązania. Wspomniana odwrotna interpolacja wielomianami Hermite'a wymaga znajomości wartości  $x$  i  $\partial x/\partial t$  dla czasu  $t_n$  i  $t_{n+1}$  (rys.3.5), z założeniem, aby wartość

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t=t_{n+1}} = \varphi(t_{n+1}, x_{n+1})$$

była obliczana na końcu kroku czasowego. Tak obliczone dane pozwalają na wyznaczenie



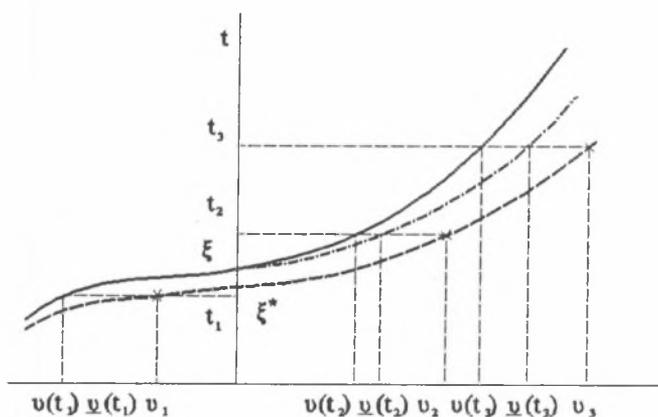
Rys. 3.5. Zmiana funkcji całkowania po wystąpieniu nieciągłości

Fig. 3.5. Switching of integration function after a discontinuity occurrence

wielomianu Hermite'a trzeciego stopnia określonego na długości kroku całkowania z dokładnością  $O(h^4)$ , tj. taką samą jak dokładność metody Rungego-Kutty. Do wyznaczenia czasu  $t^*$  wystąpienia nieciągłości odpowiadającej ustalonemu progowi, tj.  $x = X$ , wykorzystano odwrotną interpolację Hermite'a, gdzie zamieniono rolami argument  $t$  oraz funkcją  $x$  tak, że  $\partial x/\partial t$  zostało zastąpione  $\partial t/\partial x$ .

Do wyznaczenia pierwszego przybliżenia czasu  $t^*$ , określonego przez  $\xi^*$ , wykorzystano odwrotną interpolację liniową. Następnie z bezpośredniej interpolacji opartej na wartościach  $x_n$ ,  $x_{n+1}$  obliczono  $x(\xi^*)$ . Po czym użyto ponownie odwrotnej liniowej interpolacji bazując na wartościach  $x(\xi^*)$  i  $x_n$  lub  $x_{n+1}$ . Obliczenia powtarza się aż do momentu uzyskania założonej dokładności.

Jako ostatni z grupy algorytmów Rungego-Kutty omówiony zostanie algorytm opracowywany przez Borthwicka [9], Neilsona [85,86] i autora, gdzie podobnie jak w pracy Celiera [12], do lokalizacji punktu nieciągłości wykorzystano równanie (3.76). Procedura ta oparta jest na odwrotnej kwadratowej interpolacji funkcji nieciągłości, co przedstawiono na rys. 3.6.



Rys. 3.6. Odwrotna kwadratowa interpolacja funkcji nieciągłości  
Fig. 3.6. Inverse squared interpolation of discontinuity function

Oznaczmy za [9], funkcję nieciągłości  $\Phi(t; x(t))$  przez

$$v(t) = \Phi(t; x(t)), \quad (3.77)$$

oraz funkcję odwrotną

$$t = G(v). \quad (3.78)$$

Niechaj  $\xi = G(0)$  będzie dokładną wartością funkcji w punkcie przełączania (nieciągłości). Funkcja odwrotna  $G(v)$  reprezentuje rozwiązanie ściśle przy nieprzełączeniu parametrów w punkcie  $\xi$ , co w rozwiązaniu numerycznym aproksymowane jest przez dyskretny ciąg  $\{G_n\}$ . Ten z kolei umożliwia skonstruowanie wielomianu  $Q(v)$  stopnia  $s$ -tego, czyli poprzez wykorzystanie  $(s+1)$  wartości elementów ciągu  $\{G_n\}$ . Omawiana procedura nie podejmuje niepotrzebnego obliczania rozwiązania poza końcowym krokiem

czasowym dla  $(s-1)$  dodatkowych punktów (bądź zapamiętywania tych wartości), wykorzystując jedynie punkty aż do końcowego kroku czasowego. Całkowanie w przedziałach ciągłych odbywa się standardową procedurą Rungego-Kutty czwartego rzędu (patrz tabl.3.1) ze sprawdzeniem warunku (3.73) w każdym kroku całkowania.

Tablica 3.1

Metoda	Formuła	Współczynniki
Runge-Kutta 3 rzędu	$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$	$k_1 = f(t_n, x_n)$ $k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_1)$ $k_3 = f(t_n + h, x_n + 2k_2 - k_1)$
Runge-Kutta 4 rzędu	$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$	$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_1)$ $k_3 = f(t_n + h, x_n + 2k_2 - k_1)$ $k_4 = f(t_n + h, x_n + k_3)$
Runge-Kutta-Shampine 4 rzędu	$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)h$	$k_2 = f(t_n + \frac{1}{3}h, x_n + \frac{1}{3}k_1)$ $k_3 = f(t_n + \frac{2}{3}h, x_n + \frac{1}{3}(-k_1 + 3k_2))$ $k_4 = f(t_n + h, x_n + k_1 - k_2 + k_3)$

W przypadku wykrycia nieciągłości, dwa punkty tj. przed i po wystąpieniu zjawiska są używane do interpolacji. Punkt trzeci jest obliczany z zależności

$$x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{h}{4}(k_1 + k_2). \quad (3.79)$$

Globalny błąd na końcowych punktach  $x_n$  i  $x_{n+1}$  jest równy  $O(h^4)$ , tj. tak, jak przy wykorzystaniu samej metody Rungego-Kutty. Natomiast lokalny błąd w punkcie pośrednim jest otrzymywany z równania  $\partial x/\partial t = f(t; x(t))$  przy założeniu, iż  $x_n = x_n(t)$ . Rozwijając  $x(t_n + 1/2h)$  w szereg Taylora w otoczeniu punktu  $x(t_n)$  oraz  $k_2$  w otoczeniu  $f(t_n, x_n)$  otrzymano

$$x(t_n + \frac{1}{2}h) - (x_n + \frac{h}{4}(k_1 + k_2)) = \frac{h^3}{96}(2F \frac{\partial f}{\partial x} - G) + O((\frac{h}{2})^4) \quad (3.80)$$

gdzie:

$$F = \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x}; \quad G = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Błąd w aproksymacji równania (3.79) jest tego samego rzędu, co błąd interpolacji kwadratowej, a więc  $O(h^3)$ . Oznaczmy dla wygody indeksy  $n, n+1/2, n+1$  liczbami 1, 2, 3. Wówczas punkty interpolacji wielomianu interpolacyjnego  $Q$  opisanego na ciągu  $\{G_n\}$  będą przedstawiać się następująco

$$Q(\underline{v}_1) = t_1, \quad Q(\underline{v}_2) = t_2, \quad Q(\underline{v}_3) = t_3, \quad (3.81)$$

gdzie:

$$\underline{v}_1 = \Phi(t_n, x_n), \quad \underline{v}_2 = \Phi(t_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+\frac{1}{2}}), \quad \underline{v}_3 = \Phi(t_{n+1}, x_{n+1}).$$

Wielomian interpolacyjny  $Q$  jest zbudowany na podstawie wielomianu Aitkena [1], który dla  $\underline{v} = 0$  jest określony przez zależności

$$t_{j,1} = t_j, \quad (3.82)$$

$$t_{j,k+1} = \frac{\hat{\sigma}_j t_{k,k} - \hat{\sigma}_k t_{j,k}}{\hat{\sigma}_j - \hat{\sigma}_k}, \quad (3.83)$$

gdzie:  $j = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, j-1$ .

Generalnie metoda Aitkena umożliwia konstruowanie wielomianów wyższych stopni z wielomianów stopni niższych w sposób rekurencyjny. Końcowe przybliżenie pierwiastków równania (3.77) wynosi

$$\xi = t_{3,3}. \quad (3.84)$$

Po wyznaczeniu czasu  $\xi$ , stosuje się dalej metodę Rungego-Kutty dla czasu  $t = t_n$  ze zmienioną długością kroku całkowania

$$h^{(i)} = \xi^{(i)} - t_n^{(i)}. \quad (3.85)$$

Górny indeks ( $i$ ) w równaniu (3.85) oznacza numer iteracji. Proces ten jest powtarzany aż do momentu osiągnięcia założonej dokładności  $\epsilon$

$$|\hat{\sigma}(\xi^*)| < \epsilon. \quad (3.86)$$

### Dokładność algorytmu odwrotnej interpolacji

Zależność umożliwiającą obliczenie błędu odwrotnej interpolacji została podana po raz pierwszy przez Ostrowskiego [93]. Wykorzystując tę zależność do obliczenia błędu odwrotnej interpolacji, bazując na trzech punktach (równanie (3.83)), otrzymano oszacowanie błędu aproksymacji punktu przełączenia

$$\xi - \xi^* = \frac{\partial^3 \sigma(\xi)}{3!} (-1)^3 \underline{v}_1 \underline{v}_2 \underline{v}_3, \quad (3.87)$$

gdzie  $\zeta \in (\underline{v}_1, \underline{v}_3)$ . Jeżeli wszystkie punkty interpolacyjne leżą blisko pierwiastka  $\xi$ , to wówczas iloczyn  $\underline{v}_1 \underline{v}_2 \underline{v}_3$  stanowiący błąd określony zależnością (3.87) jest mały.

Założmy, że:

- (1)  $\underline{v}(t)$  jest różniczkowalne w badanym kroku czasowym,
- (2) pierwiastek  $\xi$  funkcji  $v(t)$  leży w tym kroku czasowym, oraz jest opisany zależnością

$$\xi = t_n + \eta h; \quad \eta \in (0, 1). \quad (3.88)$$

Uwzględniając dodatkowo błąd globalny w punktach interpolacji oraz rozwijając w szereg Taylora funkcje  $v$  w okolicy punktu przełączenia otrzymano

$$\begin{aligned} v_1 &= v(\xi - \eta h) + O(h^4) \\ &= v(\xi) - \eta h \frac{\partial v(\xi)}{\partial t} + \frac{(\eta h)^2}{2} \frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial t^2} + O(h^3), \\ v_2 &= v\left(\xi + \left(\frac{1}{2} - \eta\right)h\right) + O(h^3) \\ &= v(\xi) + \left(\frac{1}{2} - \eta\right)h \frac{\partial v(\xi)}{\partial t} + \frac{(0.5 - \eta)^2 h^2}{2} \frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial t^2} + O(h^3), \\ v_3 &= v(\xi + (1 - \eta)h) + O(h^4) \\ &= v(\xi) + (1 - \eta)h \frac{\partial v(\xi)}{\partial t} + \frac{(1 - \eta)^2 h^2}{2} \frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial t^2} + O(h^3). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Wykorzystując założenie  $\underline{v}(\xi) = 0$ , oraz podstawiając z przekształconego równania (3.89) iloczyn  $\underline{v}_1 \underline{v}_2 \underline{v}_3$  do równania (3.87) i zapisując pochodną  $\partial^3 G / \partial v^3$  jako wielomian funkcji  $v(t)$  i jej pochodnych otrzymujemy równanie (3.87) o postaci [93]

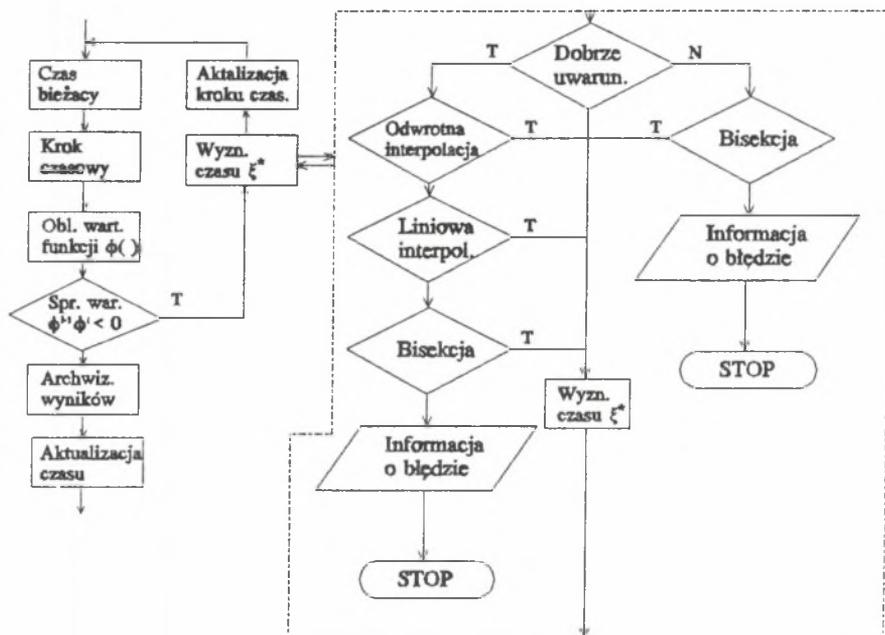
$$\begin{aligned} \xi - \xi^* &= (2\eta^3 - 3\eta^2 + \eta) \left( -\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} \Big|_{t_c} \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t_c} + \right. \\ &\quad \left. 3 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{t_c} \right)^2 \frac{h^3}{12} \frac{\left( \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t_c} \right)^3}{\left( \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t_c} \right)^5} + O(h^4), \end{aligned} \quad (3.90)$$

gdzie:

$$t_c = G(\zeta). \quad (3.91)$$

Równanie (3.90) uwiadamia, że błąd odwrotnej interpolacji (3.82, 83) zazwyczaj wynosi  $O(h^3)$ , jednakże może przyjmować wartości większe, jeżeli  $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \Big|_{\xi} \gg \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \Big|_{t_c}$ , co jest mało prawdopodobne w rozpatrywanym przedziale  $t \in [t_n, t_n + h]$ . W przypadku krytycznym, tj.  $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \Big|_{\zeta} \approx \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \Big|_{t_c} \ll 1$  gdzie trajektoria jest styczna do płaszczyzny

przełączającej, należy zastosować bezwarunkowo metodę bisekcji. Natomiast w przypadku gdy  $\partial y/\partial t|_C, \partial y/\partial t|_{i,\zeta} < 1$ , oraz różnią się nieznacznie, można zastosować jako etap pośredni interpolację liniową. I tak na rysunku 3.7 przedstawiono schemat logiczny wykorzystywany przy całkowaniu równań różniczkowych z nieciągłościami, gdzie nadrzędnym celem jest precyzyjne wyznaczenie czasu wystąpienia nieciągłości  $\xi^*$ .



Rys. 3.7. Schemat blokowy całkowania jednego kroku układu z nieciągłościami  
 Fig. 3.7. Flow chart for integration of systems with discontinuities

## 4. METODY ANALIZY JAKOŚCI RUCHU<sup>1</sup>

### 4.1. Wprowadzenie

Bardzo wiele zjawisk naturalnych czy też procesów spotykanych powszechnie wykazuje cechy złożoności, z trudnymi do przewidzenia odpowiedziami. Jako typowe przykłady można podać drgania samowzbudne, turbulencję cieczy, zmianę pogody, fluktuację cen giełdowych i inne. Wszystkie te zjawiska mają jedną cechę wspólną - są nieliniowe. Jakkolwiek problem drgań nieliniowych był znany od dawna, to dopiero Henri Poincaré w 1903 r. zauważył, że dla pewnych układów nieliniowych "*małe zmiany teraz prowadzą do bardzo dużych zmian w przyszłości*" [96]. Upłynęło kilka dekad bez wyraźnego postępu w zadaniu postawionym przez Poincarégo, aż do 1963 r., kiedy to Edward Lorenz opublikował pracę zatytułowaną "*Deterministic nonperiodic flow*" [67], w której numerycznie na "*modelu pogody*" potwierdził dużą wrażliwość rozwiązania na zmienność warunku początkowego, tzw. "*butterfly effect*". Chociaż prace w tym zakresie były od tego czasu nieprzerwanie kontynuowane, to dopiero połowę lat osiemdziesiątych można uznać za przełom w dynamice nieliniowej, a w szczególności w tworzącej się teorii chaosu [17,52,112]. Data ta ma ścisły związek z wprowadzeniem na rynek komputerów osobistych o wysokich możliwościach graficznych, umożliwiających łatwą implementację i interakcyjną pracę w trakcie fazy formułowania i analizowania postawionego zadania. Należy w tym miejscu wymienić pionierskie prace należące ogólnie do gałęzi nauki zwanej dynamiką nieliniową, a mianowicie Maya [71], Faigenbauma [26] czy Herona [45]. Oraz prace specjalistyczne dotyczące drgań chaotycznych Uedy [120], Moona [79,80] i Holmsa [48]. Z krajowych badaczy na uwagę zasługują Kapitaniak [53-55], Awrejcewicz [5,6] i Szemplińska-Stupnicka [115,116].

Równoległe z burzliwym rozwojem dynamiki nieliniowej w zakresie teorii i metod analitycznych rozpoczął się proces tworzenia numerycznych i eksperymentalnych metod badania dynamiki układów nieliniowych. I tak Moon w pracach [78,79] specyfikuje następujące narzędzia oceny jakości ruchu:

- (1) Obserwacja przebiegów czasowych.
- (2) Płaszczyzna fazowa.
- (3) Pseudopłaszczyzna fazowa.
- (4) Diagram bifurkacyjny.
- (5) Widmo drgań.
- (6) Funkcja autokorelacji.
- (7) Mapa Poincarégo.
- (8) Podwójna mapa Poincarégo.
- (9) Redukcja do mapy jednowymiarowej.
- (10) Wykładniki Lapunowa.

---

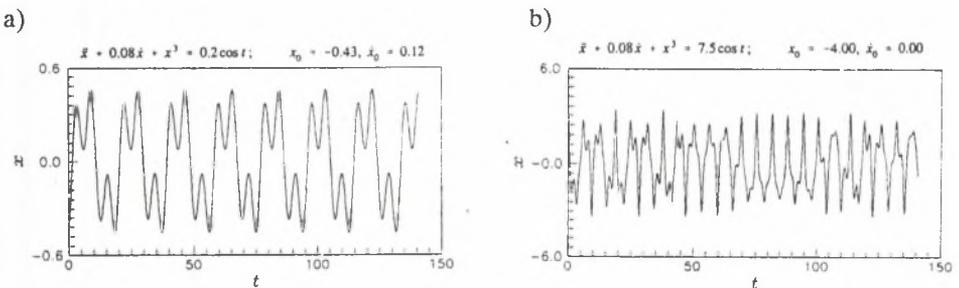
<sup>1</sup>Zamieszczone w tym rozdziale metody badania jakości ruchu zaczerpnięto z literatury dynamiki chaotycznej, dla których opracowano własne przykłady ich zastosowania.

- (11) Wymiar fraktalny.
- (12) Wymiar fraktalny, informacyjny i korelacyjny.
- (13) Wykresy chaosu.
- (14) Obszary zbieżności.

Wymienione powyżej techniki rozszerzają możliwości analizy złożonych układów, w tym także mechanicznych. Wybór zbioru używanych technik zależy od indywidualnego układu będącego przedmiotem badań i będzie się różnić dla różnych układów. Poniżej omówiono kilka technik będących, zdaniem Autora, najefektywniejszymi przy badaniu dynamiki układów nieliniowych z nieciągłościami.

#### 4.2. Przebiegi czasowe

Jedną z najprostszych technik dających wstępną informację o jakości ruchu jest obserwacja przebiegów czasowych układu, tj. jego przemieszczeń i prędkości. W przypadku gdy charakterystyki te nie wykazują cech periodyczności, wówczas podejrzewać należy, że rozwiązanie może być quasi-periodyczne, chaotyczne bądź posiada bardzo długi okres (rys.4.1).



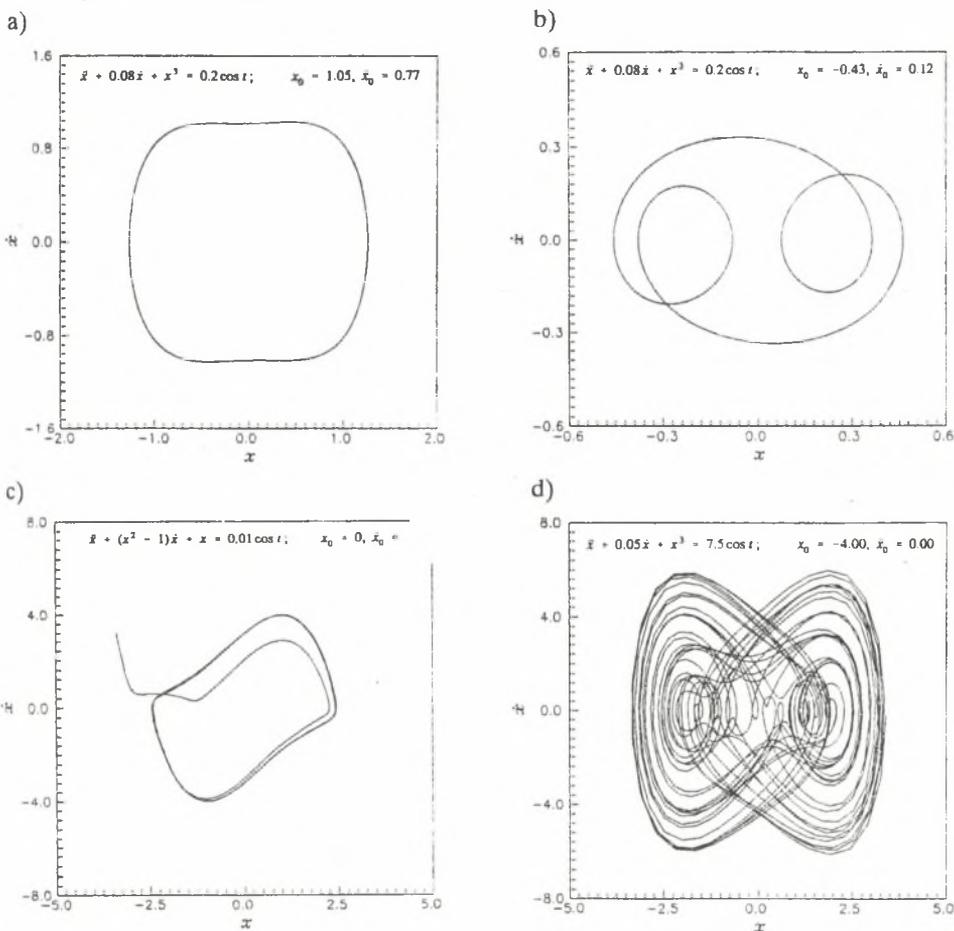
**Rys. 4.1.** Przebiegi czasowe oscylatora Duffinga dla ruchu; a) periodycznego, b) chaotycznego

**Fig. 4.1.** Time histories of Duffing oscillator for a) periodic and b) chaotic motion

#### 4.3. Płaszczyzna fazowa

Portret fazowy lub też inaczej płaszczyzna fazowa może być również wykorzystana do badania jakości ruchu. Moon [79] dla przypadku układu o jednym stopniu swobody definiuje ją jako zbiór punktów  $(x, \dot{x})$ . Dla układu o wielu stopniach swobody płaszczyzna fazowa rozumiana jest jako rzut rozwiązania na płaszczyzny  $(x_i, \dot{x}_i)$  ( $i$  jest numerem stopnia swobody). Przykładowo dla wytraconego z równowagi liniowego oscylatora drgającego swobodnie bez tłumienia, trajektorią fazową po unormowaniu zmiennych

byłyby okrąg, w przypadku układu nieliniowego krzywa zamknięta (rys.4.2a). Dla układu z nieliniową charakterystyką siły sprężystości, trajektoria fazowa może się zamykać dopiero po kilku pętłach (rys.4.2b), czego interpretacją są drgania układu z częstotliwościami podharmonicznymi. Jeszcze innym przypadkiem jest zdążanie rozwiązania do pewnej orbity granicznej (rys.4.2c) lub niezamykanie się trajektorii fazowej (4.2d). Wówczas mówimy o tzw. cyklu granicznym lub ruchu chaotycznym<sup>2</sup>.



Rys. 4.2. Portrety fazowe dla układu; a) periodycznego, b) periodycznego drgającego z częstotliwością podharmoniczną, c) z cyklem granicznym, d) układu chaotycznego

Fig. 4.2. Phase plane for a) harmonic, b) subharmonic, c) limit cycle and d) chaotic motion

<sup>2</sup>Obserwacja portretu fazowego musi być uzupełniona jeszcze innymi technikami, ażeby można było stwierdzić chaos w układzie.

#### 4.4. Widmo drgań

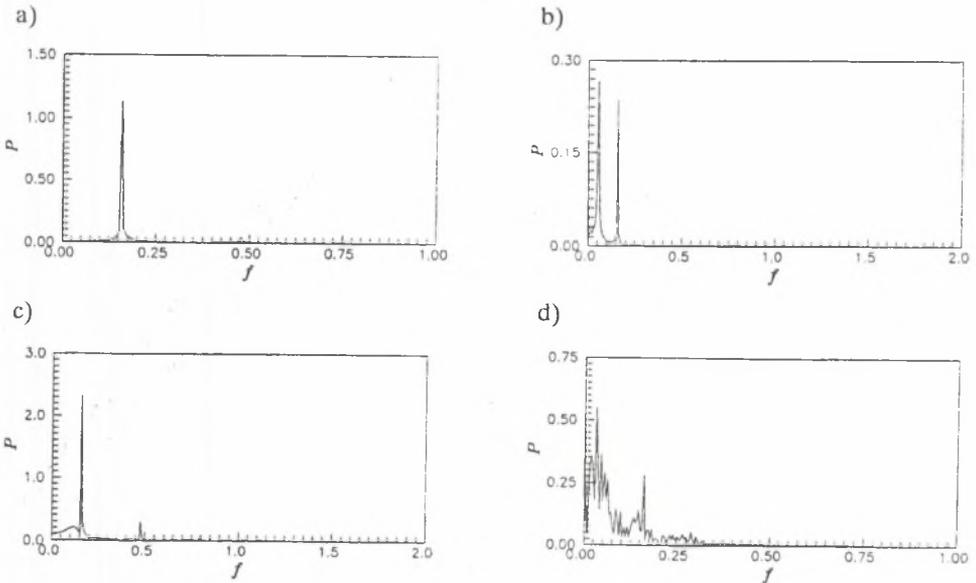
Ażeby odróżnić przebiegi z bardzo długim okresem drgań od przebiegów chaotycznych można dokonać przekształcenia Fouriera, które można zdefiniować w sposób następujący [94]

$$X(f) = \mathcal{F} [X(t)] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} X(t) e^{-i2\pi ft} dt, \quad (4.1)$$

gdzie  $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  jest wektorem współrzędnych stanu, a  $X(f)$  jest jego transformatą Fouriera. Dla układów drgających okresowo widmo mocy [104]

$$P_i(f) = |X_i(f)|^2; \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.2)$$

składa się ze skończonej liczby dyskretnych prążków o określonej częstotliwości, w przeciwieństwie do ruchu chaotycznego, którego aperiodyczność objawia się szerokim, spłaszczonym widmem mocy  $P(f)$ , szczególnie w zakresie niskich częstotliwości. Na rysunkach 4.3 przedstawiono widma mocy różnych form ruchu, sporządzone dla identycznych równań i warunków początkowych jak na rysunku 4.2.



Rys. 4.3. Widma mocy dla ruchu; a) periodycznego, b) periodycznego z częstotliwościami podharmonicznymi, c) z cyklem granicznym, d) chaotycznego

Fig. 4.3. Power spectrum for a) harmonic, b) subharmonic, c) limit cycle and d) chaotic motion

Jak już wspomiano poprzednio, analityczna postać odpowiedzi układu  $x(t)$  jest znana tylko dla ograniczonej liczby przypadków, a więc zdecydowaną większość odpowiedzi traktuje się jako szereg wektorów  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  określony w dyskretnych chwilach czasowych  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Wówczas rozważa się dyskretne przekształcenie określone równaniem [94]

$$X(f) = h \sum_{j=1}^{n-1} x(t_j) e^{-i2\pi f j h}, \quad (4.3)$$

gdzie:  $h$  - długość odstepu czasowego pomiędzy sąsiednimi próbkami,  
 $n$  - liczba próbek czasowych.

#### 4.5. Funkcja autokorelacji

Jeszcze innym kryterium jakości ruchu jest funkcja korelacji wzajemnej przebiegu, zwana także funkcją autokorelacji [107,108]

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{X}(t) \hat{X}(t + \tau) dt, \quad (4.4)$$

gdzie:

$$\hat{X}(t) = X(t) - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt. \quad (4.5)$$

Funkcja korelacji wzajemnej przyjmuje wartość ustaloną bądź zmienia się harmonicznie dla przebiegów okresowych. W przypadku drgań chaotycznych wartość funkcji autokorelacji maleje do zera (bardzo często eksponentjalnie).

Przy założeniu, że rozpatrywać będziemy szereg wektorów  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  w dyskretnych chwilach czasowych, wówczas całka z równania (4.4) zamienia się na sumę

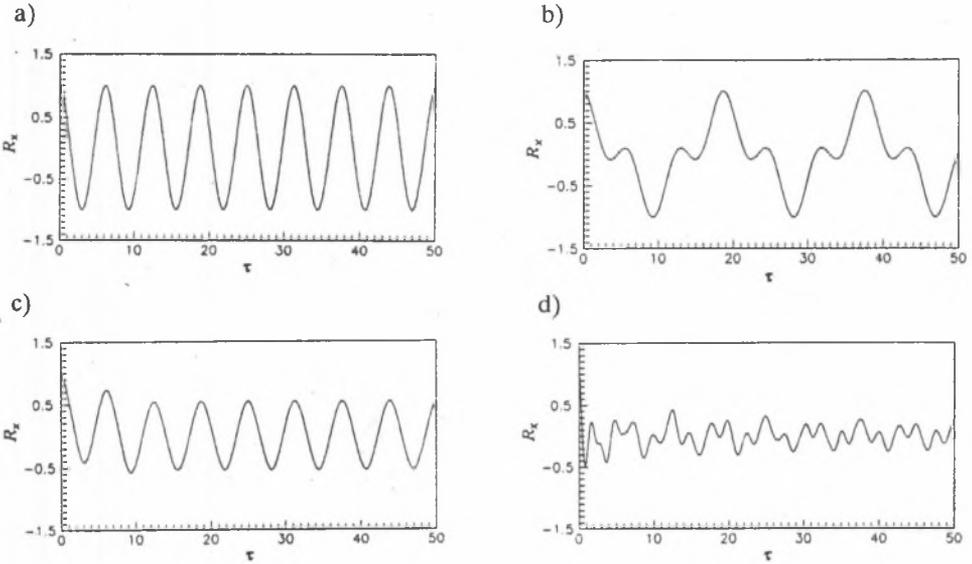
$$R_x(m) = \frac{1}{N} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{x}_j \hat{x}_{j+m}, \quad (4.6)$$

gdzie:

$$\hat{x}_j = x_j - \bar{x}; \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} x_j. \quad (4.7)$$

Przez  $m$  rozumiemy będziemy liczbę kroków czasowych oddzielających dwa korelowane wektory przebiegów.

Na rysunku 4.4 przedstawiono postaci funkcji autokorelacji dla takich samych oscylatorów i warunków początkowych, jak na rysunku 4.2, ukazując w ten sposób ich przebiegi dla różnych form ruchu.



Rys. 4.4. Funkcja autokorelacji dla przebiegu; a) periodycznego, b) periodycznego z częstościami podharmonicznymi, c) z cyklem granicznym, d) chaotycznego  
 Fig. 4.4. Autocorrelation function for a) harmonic, b) subharmonic, c) limit cycle and chaotic motion

#### 4.6. Mapy Poincarégo

Budowanie map Poincarégo jest jedną z najpopularniejszych, a jednocześnie najbardziej obrazową techniką badania jakości ruchu układów dynamicznych [53]. Z punktu widzenia dynamiki dyskretnej mapą określamy uporządkowany szereg próbek czasowych  $\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)\}$ , który w najprostszej formie może być opisany równaniem

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (4.8)$$

gdzie:

$$x_n = x(t_n). \quad (4.9)$$

Mapy Poincarégo są klasyczną metodą badania układów dynamicznych, w której  $n$ -wymiarowy potok fazowy układu ciągłego w czasie zostaje zredukowany do  $n-1$ -wymiarowego układu z dyskretnym czasem. Pozwala to na badanie właściwości punktów należących do trajektorii fazowych dla odpowiednio dobranych okresów próbkowania. Tak wybrany zbiór punktów trajektorii fazowej stanowi mapę Poincarégo. Użyteczność map Poincarégo polega nie tylko na redukcji wymiaru, lecz także na wypełnieniu luki będącej pomiędzy układami ciągłymi a dyskretnymi.

Definicje map Poincaré są różne dla układów autonomicznych i nieautonomicznych, w związku z czym przedstawiono je oddzielnie [95] opierając rozważania na zamkniętej orbicie potoku fazowego  $\gamma$  pola wektorowego  $X(t)$ , której definicję zacytowano z pracy [53].

#### Definicja 4.1

Zamkniętą orbitę  $\gamma$  potoku fazowego  $F_i(t)$  pola wektorowego  $X(t)$  nazywamy niestałą całkowalną krzywą  $\gamma(t)$  taką, że

$$\begin{matrix} \exists \\ T > 0 \\ T \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad \forall \quad t \in \mathbb{R} \quad \gamma(t+T) = \gamma(t) \quad (4.10)$$

dla której  $m \in \gamma$  (np.  $m = \gamma(t)$ ),  $\Sigma$  jest podrozmaitością transversalną do  $\gamma$  w punkcie  $m$  (tzn.  $\gamma'(t)$  nie jest styczna do  $\Sigma$ ) oraz  $D \subset M \times R$  jest obszarem otwartym, na którym potok fazowy jest określony.

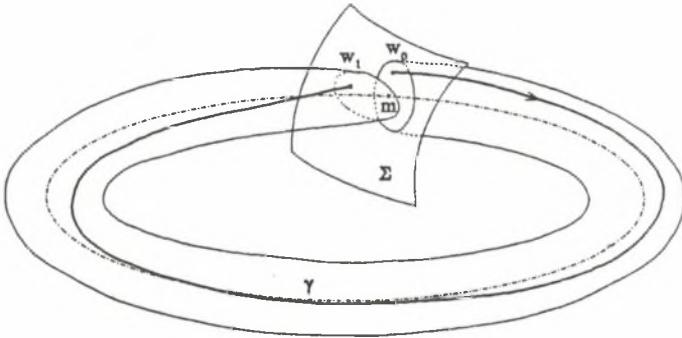
#### Definicja 4.2

Mapą Poincarégo orbity  $\gamma$  (rys.4.5) nazywamy takie odwzorowanie  $P: w_0 \rightarrow w_1$ , gdzie

- (1)  $w_0, w_1 \subset \Sigma$  są sąsiedztwami punktu  $m \in \Sigma$ , a  $P$  jest dyfeomorfizmem,
- (2) istnieje funkcja  $\delta: w_0 \rightarrow R$ , taka że

$$\forall_{x \in w_0} (x; T - \delta(x)) \in D \quad \wedge \quad P(x) = F(x; T - \delta(x)) \quad (4.11)$$

- (3) jeżeli  $t \in (0; \delta(x)) \rightarrow F(x; t) \notin w_0$



Rys. 4.5. Mapa Poincarégo orbity  $\gamma$

Fig. 4.5. Poincaré map of the orbit  $\gamma$

#### Mapy Poincarégo dla układów nieautonomicznych

Rozważmy układ nieautonomiczny rzędu  $n$  - tego z rozwiązaniem periodycznym, gdzie przez  $T$  rozumiemy będziemy najkrótszy z okresów drgań układu. Układ ten może

być sprowadzony do układu autonomicznego rzędu  $n+1$ , który można przedstawić w cylindrycznej przestrzeni stanu  $\mathbb{R}^n \times S^1$  [109].

**Definicja 4.3**

Niech  $n$  wymiarową hiperpłaszczyznę  $\Sigma \in \mathbb{R}^n \times S^1$  zdefiniowaną następująco

$$\Sigma = \{ (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1 : \theta = \theta_0 \}, \tag{4.12}$$

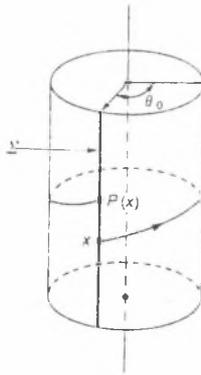
(patrz rys.4.6) przecina co okres  $T$  w czasie  $t_0+T$  trajektoria fazowa będącą rozwiązaniem  $n+1$  rzędu równania autonomicznego  $\phi_T(t;x)$ . Wówczas powstające odwzorowanie  $P_N: \Sigma \rightarrow \Sigma (\mathbb{R}^n \rightarrow S^1)$  określone jako

$$P_N(x) = \phi_{t_0+T}(x; t_0) \tag{4.13}$$

jest nazywane **mapą Poincarégo układu nieautonomicznego**.

Dla ustalonego  $t$ ,  $\phi_t$  jest dyfeomorfizmem, z czego wynika, że  $P_N$  jest różniczkowalne i posiada funkcję odwrotną.

Na rysunku 4.6. przedstawiono mapę Poincarégo układu nieautonomicznego rzędu pierwszego.



**Rys. 4.6.** Mapa Poincarégo dla układu nieautonomicznego rzędu pierwszego  
**Fig. 4.6.** Poincaré map for non-autonomous system of the first order

**Mapa Poincarégo dla układu autonomicznego**

Rozważmy układ autonomiczny rzędu  $n$  - tego z rozwiązaniem w postaci cyklu granicznego  $\Gamma$  o okresie  $T$  oraz obierzmy punkt  $x^*$  na cyklu granicznym, przez który przeprowadzono hiperpłaszczyznę  $\Sigma$  transwersalną do  $\Gamma$ .

#### Definicja 4.4

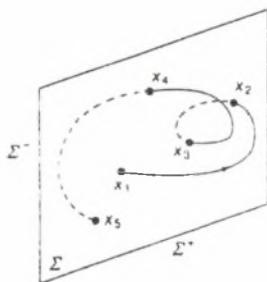
Mapą Poincarégo układu autonomicznego nazywamy zbiór punktów utworzony przez odwzorowanie  $P_A: \Sigma \rightarrow \Sigma$  takie, że dowolna trajektoria fazowa startująca z bliskiego otoczenia  $U$  punktu  $x^*$  należącego do  $\Sigma$ , przetnie po czasie zbliżonym do  $T$  hiperpłaszczyznę  $\Sigma$  w bliskim otoczeniu  $V$  punktu  $x^*$  ( $U, V \subset \Sigma$ ).

Definicja 4.4 zapożyczona została z teorii układów dynamicznych i jest raczej rzadko stosowana do wyznaczania map Poincarégo ze względu na konieczność znajomości cyklu granicznego na samym początku obliczeń. W praktyce wybierając  $n-1$  wymiarową hiperpłaszczyznę, dokonuje się podziału przestrzeni  $R^n$  na dwa obszary

$$\Sigma_+ = \{ x : \langle h, x - x_\Sigma \rangle > 0 \} \quad (4.14)$$

$$\Sigma_- = \{ x : \langle h, x - x_\Sigma \rangle < 0 \} \quad (4.15)$$

gdzie:  $h \in R^n$  jest wektorem normalnym do  $\Sigma$ ,  $x_\Sigma$  jest punktem na  $\Sigma$ , a  $\langle \rangle$  oznacza iloczyn skalarny. Jeżeli  $\Sigma$  jest poprawnie wybrana to trajektoria fazowa tworzyć będzie następujący ciąg przecięć  $\Sigma_-, \Sigma_+, \Sigma_-, \dots$  co schematycznie przedstawiono na rysunku 4.7.



Rys. 4.7. Typowa trajektoria fazowa przecinająca hiperpłaszczyznę  $\Sigma$

Fig. 4.7. A typical phase trajectory hitting the hyperplane  $\Sigma$

Dla danej hiperpłaszczyzny  $\Sigma$  definiuje się trzy różne mapy Poincarégo.

#### Definicja 4.5

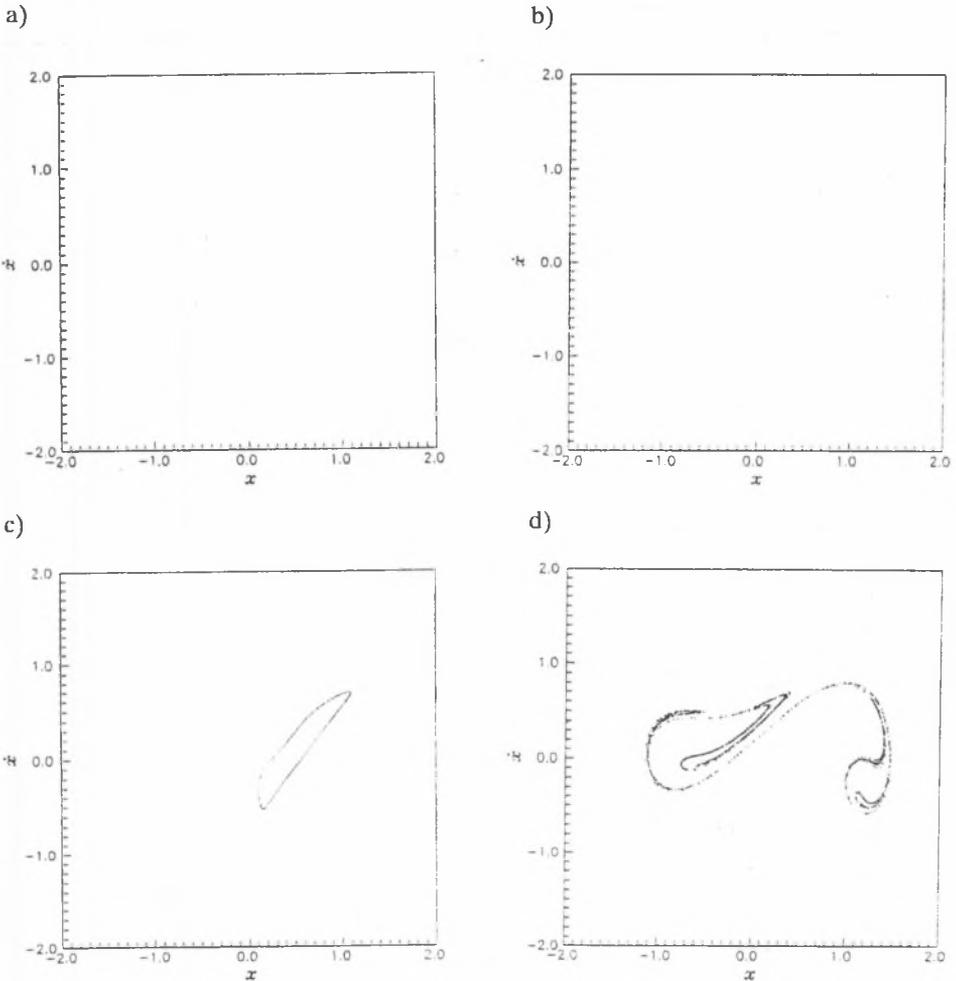
Jednostronną mapą Poincarégo  $P_+$  nazywamy odwzorowanie  $P_+: \Sigma \rightarrow \Sigma$  takie, że trajektoria  $\phi_t$  przebija hiperpłaszczyznę  $\Sigma$  zgodnie ze wzrostem normalnej, tj.

$$\langle h, f(\phi_t(x)) \rangle \geq 0 \text{ dla } t \geq 0.$$

Jednostronną mapą Poincarégo  $P_-$  nazywamy odwzorowanie  $P_-: \Sigma \rightarrow \Sigma$  takie, że trajektoria  $\phi_t$  przebija hiperpłaszczyznę  $\Sigma$  przeciwnie do normalnej tj.  $\langle h, f(\phi_t(x)) \rangle \leq 0$  dla  $t \geq 0$ .

Dwustronną mapą Poincarégo  $P_{\pm}$  nazywamy odwzorowanie  $P_{\pm}:\Sigma \rightarrow \Sigma$  takie, że trajektoria  $\phi_t$  przebija hiperpłaszczyznę  $\Sigma$  zgodnie bądź przeciwnie do normalnej.

Na rysunku 4.8 przedstawiono mapy Poincarégo układów objawiających różne rodzaje ruchu tj. periodycznego, periodycznego z podharmonicznymi, quasi-okresowego i chaotycznego z "dziwnym atraktorem", który rozumiany jest jako atraktor, w którym nie występują punkty stałe lub cykle graniczne, a jego wymiar jest liczbą fraktalną.



Rys. 4.8. Mapy Poincarégo dla układu nieautonomicznego z odpowiedziami ruchu; a) periodycznego, b) periodycznego z częstościami podharmonicznymi, c) quasi-okresowego, d) chaotycznego z dziwnym atraktorem

Fig. 4.8. Poincaré map for non-autonomous system with a) harmonic, b) subharmonic, c) quasiperiodic and d) chaotic motion

#### 4.7. Wykresy bifurkacyjne

Szeroko używaną techniką analizy jakości ruchu opisanego funkcją zmienności pewnego kontrolnego parametru są tzw. *wykresy bifurkacyjne*. Służą one do graficznego przedstawienia jakościowego i ilościowego procesu "dochodzenia" i "wychodzenia" z chaosu.

Sprawdźmy układ dynamiczny opisany równaniem (2.2) z określonym zagadnieniem Cauche'go do postaci autonomicznej

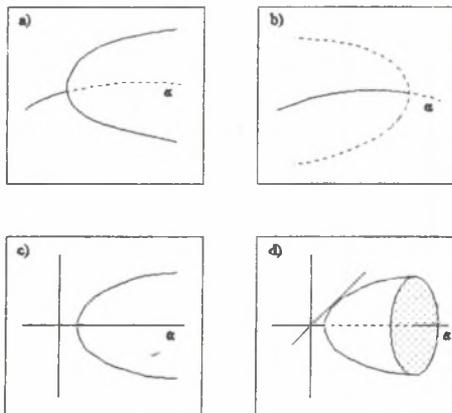
$$\dot{x} = f(x, p), \quad (4.16)$$

której trajektoria fazowa dla  $t \rightarrow \infty$  przecinając pewną hiperpłaszczyznę utworzy *zbiór graniczny* (patrz rys.4.5). W układzie tym obserwować będziemy rozwiązanie  $x(t)$  jako funkcję wektora parametrów  $p$ , gdzie normalnie (w przypadku układów niechaotycznych) małym zmianom wektora parametrów  $p$  odpowiadają małe zmiany wektora  $x(t)$ .

#### Definicja 4.6

Niech wektor  $x(t)$  z zadaniem warunkiem początkowym  $x_0 = x(t_0)$  będzie rozwiązaniem równania (4.16) w dziedzinie zmian wektora  $p$ . Jeżeli nieskończenie małym zmianom wektora  $p$  odpowiadać będą jakościowe zmiany w zbiorze granicznym to określać je będziemy mianem *bifurkacji rozwiązania*, a wektor parametrów, dla którego nastąpiła ta zmiana, wektorem krytycznym lub bifurkacyjnym.

W teorii bifurkacji rozróżnia się kilka ich rodzajów, z których najbardziej charakterystyczne pokazano na rysunku 4.9 [105,106]. Wyjaśnienia przedstawionych schematów dokonujemy na przykładzie bifurkacji nadkrytycznej (rys.4.9a). Bifurkacja nadkrytyczna to taka, dla której układ posiadając tylko jedno rozwiązanie stabilne (linia ciągła) dla  $\alpha < \alpha_{kr}$ , w punkcie krytycznym przyjmuje dwa rozwiązania stabilne i jedno niestabilne (linia przerywana). W praktyce inżynierskiej najczęściej spotyka się z bifurkacją *pitchfork*, np. dla zagadnienia wybaczanego pręta, gdzie po przekroczeniu wartości krytycznej, układ przyjmuje rozwiązanie w



Rys. 4.9. Typowe przypadki bifurkacji; a) nadkrytycznej, b) podkrytycznej, c) pitchfork, d) Hopfa

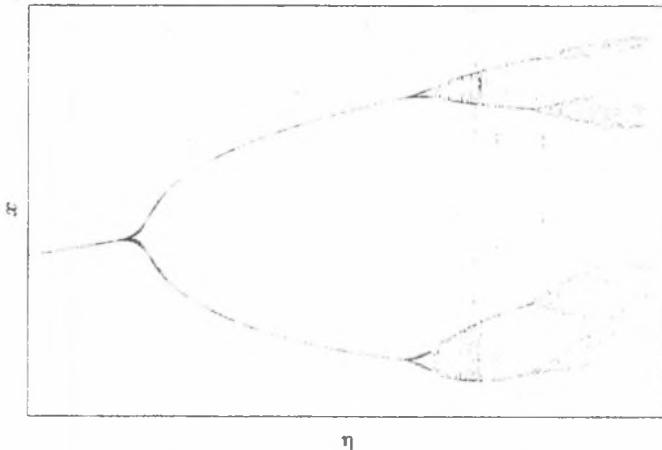
Fig. 4.9. Typical bifurcations; a) supercritical, b) subcritical, c) pitchfork, d) Hopf

postaci cyklu granicznego (rys.4.9d).

Jako przykład wykresu bifurkacyjnego zbudowanego dla układu z nieciągłościami na rysunku 4.10 przedstawiono kaskadę bifurkacji dla oscylatora z przedziałami liniową charakterystyką siły sprężystości, otrzymaną poprzez systematyczną zmianę parametru  $\alpha$  określaną metodą brute-force [95]. Przypadek ten jest szczegółowo analizowany w podrozdziale 5.2,

Analizując wykresy bifurkacyjne można wskazać na różne sposoby dochodzenia i wychodzenia z punktu krytycznego. I tak Moon [79] i Szemplińska-Stupnicka [114] wyróżniają następujące drogi osiągania ruchu chaotycznego:

- (1) przez iteracyjny podział częstości drgań (z ang. period-doubling route to chaos),
- (2) przez przejście z ruchu quasi-periodycznego (z ang. quasiperiodic route to chaos),
- (3) przez przejściowość występowania ruchu aperiodycznego (z ang. intermittency),
- (4) przez "katastroficzne" przejście od ruchu periodycznego do chaotycznego i odwrotnie (z ang. crisis type transition).



Rys. 4.10. Wykres bifurkacyjny oscylatora ze skokowo zmienną sztywnością  
Fig. 4.10. Bifurcation diagram for a linear piecewise oscillator

#### 4.8. Wykładniki Lapunowa

Wykładniki Lapunowa określają miarę wykładniczej zbieżności lub rozbieżności dwóch bliskich trajektorii fazowych, przyjmowanych najczęściej w pobliżu cykli granicznych. W przypadku ruchu okresowego może wystąpić liniowa rozbieżność dwóch trajektorii fazowych, jednakże wówczas współczynnik Lapunowa jest liczbą niedodatnią. Natomiast w przypadku ruchu chaotycznego dwie bliskie trajektorie zaczynające się w sąsiednich punktach są wykładniczo rozbieżne, co przejawia się dodatnią wartością co

najmniej jednego wykładnika Lapunowa. Dla układów ciągłych pojęcie wykładników Lapunowa wiąże się blisko z pojęciami wartości własnych oraz mnożników charakterystycznych w punkcie równowagi [105,140] w sposób następujący:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)|; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.17)$$

gdzie  $m_i(t)$  jest  $i$ -tym mnożnikiem charakterystycznym równania (2.2), a  $\lambda_i$  jest  $i$ -tym wykładnikiem Lapunowa.

Rozpatrzmy układ dynamiczny opisany równaniem (2.1) z określonym zagadnieniem Cauche'go, sprowadzony do postaci autonomicznej

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.18)$$

gdzie  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in U$ , ( $U$  jest zbiorem otwartym w przestrzeni fazowej  $R^n$ ),  $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ . Taki układ dynamiczny posiada  $n$  wykładników Lapunowa. Najistotniejszym i szczególnie użytecznym w celu odróżniania ruchu chaotycznego od regularnego jest maksymalny wykładnik Lapunowa [95], którego definicję podano za Kapitaniakiem [53].

#### Definicja 4.7

Niech  $U_x^*$  będzie przestrzenią styczną do przestrzeni  $U$  w każdym punkcie trajektorii  $x \in U$ , wówczas wektor styczny  $\delta x \in U_x^*$  spełnia równanie wariacyjne

$$\delta \dot{x} = D(x(t)) \delta x, \quad (4.19)$$

gdzie  $D(\cdot)$  jest jacobianem rozwiązania w punkcie  $x(t)$ .

Niech  $x(t)$  będzie punktem początkowym oraz  $\delta x(0)$  początkową wariacją w przestrzeni stycznej  $U_{x(0)}^*$  w punkcie  $x(0)$ .

Maksymalnym wykładnikiem Lapunowa nazywamy granicę wyrażenia

$$\lambda(x(0), \delta x(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\delta x(t)\|, \quad (4.20)$$

gdzie  $\|\cdot\|$  oznacza normę w  $R^n$ .

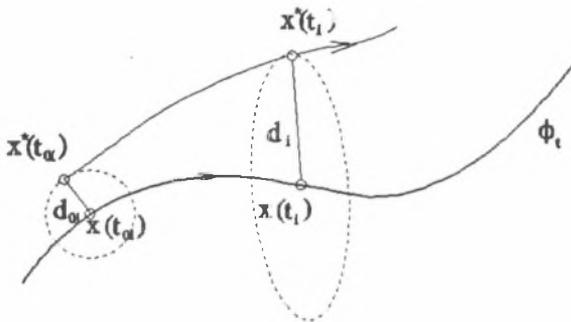
Zależności (4.17) i (4.20) są szczególnie użyteczne przy badaniu układów dynamicznych w przypadku znajomości *explicite* równań ruchu, co w pewnym stopniu ogranicza ich stosowalność, ponieważ często spotykamy się z odpowiedziami układów traktowanych jako "czarne skrzynki".

Ogólniejszym sposobem wyznaczania maksymalnego wykładnika Lapunowa jest metoda oparta na analizie szeregu próbek czasowych [140,21,119,2,117], które otrzymywane są często na drodze doświadczalnej. W pracy Wolfa i innych [140] podano przejrzysty algorytm obliczania wartości maksymalnego wykładnika Lapunowa z danych eksperymentalnych bazujący zasadniczo na porównywaniu odległości i pola powierzchni pomiędzy bliskimi trajektoriami.

**Definicja 4.8**

Niech  $x(t_{0i}) = x_{0i}$  będzie punktem trajektorii fazowej  $\phi$ , równania (4.18) oraz  $d_{0i}$  promieniem  $n$  wymiarowej sfery warunków początkowych nieznacznie różniących się od  $x_{0i}$ . Niech  $d_i$  będzie największym wymiarem elipsoidy, przez którą przechodzi trajektoria fazowa  $\phi_{ii}^*$  startująca z równaniem początkowym  $x^*(t_{0i}) = x_{0i} + d_{0i}$  (patrz rys. 4.11). Maksymalnym uśrednionym wykładnikiem Lapunowa nazywamy granicę

$$\lambda(x(t_0), d_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i - t_{0i}} \ln \frac{d_i}{d_{0i}}. \quad (4.21)$$



Rys. 4.11. Schemat do wyznaczenia maksymalnego uśrednionego wykładnika Lapunowa

Fig. 4.11. A scheme for calculating maximum Liapunov exponent

#### 4.9. Wymiar fraktalny, informacyjny i korelacyjny

Najczęściej spotykana definicja wymiaru opiera się na przestrzeni Euklidesa, w której oznacza ona najmniejszą liczbę współrzędnych niezbędnych do opisu położenia dowolnego punktu z jej wnętrza. Wymiar w tej przestrzeni jest liczbą całkowitą.

W celu pełniejszego opisu geometrycznego odpowiedzi układów nieliniowych, a w szczególności tzw. dziwnego atraktora wprowadzono za Mandelbrotem [69] wymiar fraktalny. Definicja wymiaru fraktalnego opiera się na pojęciu objętości  $n$  wymiarowej, i jest zbliżona do wymiaru w sensie Hausdorfa [143,72]

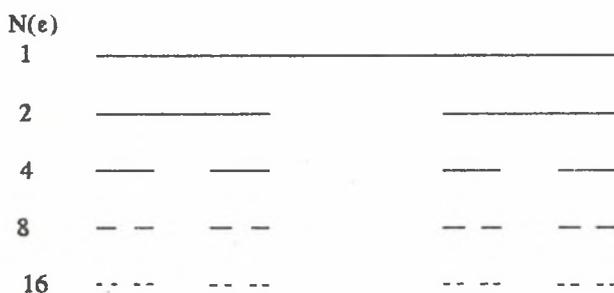
$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad (4.22)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest wymiarem charakterystycznym elementu podstawowego (sześcián, kula itp.), natomiast  $N(\varepsilon)$  oznacza najmniejszą liczbę elementów podstawowych potrzebnych do

całkowitego pokrycia analizowanej geometrii (w szczególności atraktora). W przypadku występowania różnic w wartościach  $D_F$  dla różnych rodzajów elementów podstawowych, wymiar fraktalny przyjmuje minimalną wartość  $D_F$ .

#### Przykład (Wymiar fraktalny zbioru Cantora)

Zbiór Cantora utworzony jest poprzez iteracyjne usuwanie środkowego elementu z jednostkowego odcinka podzielonego na trzy równe części. W celu obliczenia  $D_F$  w  $k$ -tym kroku iteracji pokryjmy pozostałości dzielonego odcinka elementem podstawowym, którego długość wynosi  $\varepsilon = 1/3^k$ , co schematycznie przedstawiono na rysunku 4.12.



Rys. 4.12. Schemat do obliczania wymiaru fraktalnego zbioru Cantora  
Fig. 4.12. Calculating scheme of fractal dimension of Cantor set

Sumaryczna liczba elementów wynosi  $N = 2^k$ , zatem wymiar fraktalny zbioru Cantora przyjmuje wartość

$$D_F = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = 0.6309 \dots$$

Z obliczonej liczby można wnioskować, że zbiór Cantora należy traktować jako twór geometryczny pomiędzy punktem ( $D_F = 0$ ) a linią ( $D_F = 1$ ).

Wymiar fraktalny łączy pojęcie  $n$ -wymiarowej objętości i ma czysto metryczne znaczenie. Nie dostarcza bowiem żadnych informacji o dynamice układu objawiającej się jej czasową zmiennością.

Niedogodność tę usuwa *wymiar informacyjny*, definiowany najczęściej jako częstotliwość, z jaką system dynamiczny przyjmuje określoną trajektorię. Pozostawiając bez zmian znaczenia oznaczeń  $\varepsilon$  i  $N(\varepsilon)$ , wymiar informacyjny definiowany jest następująco

$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad (4.23)$$

gdzie:

$$H(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln P_i. \quad (4.24)$$

Poprzez  $P_i$  oznaczono wspomnianą powyżej częstotliwość "wizytacji"  $i$ -tego elementu podstawowego przez określoną trajektorię.

Jeszcze inną miarą wymiaru w sensie probalisticznym jest *wymiar korelacyjny* określany poprzez funkcję korelacji  $C(\varepsilon)$ , która informuje o relatywnej częstości wizytacji poprzez trajektorię  $i$ -tego elementu z przestrzeni stanu. Zależność definiująca wymiar korelacyjny wygląda następująco [32]

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad (4.25)$$

gdzie:

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1; i \neq j}^{N(\varepsilon)} H(\varepsilon - |X_i - X_j|). \quad (4.26)$$

Poprzez  $H(\cdot)$  oznaczono funkcję Heaviside'a.

#### 4.10. Przybliżone kryteria oceny jakości ruchu

Z przedstawionych dotychczas rozważań wynika, że aby dokonać oceny jakości ruchu należy wyznaczyć numerycznie kilka omówionych wcześniej dyskretnych estymat. Operacja ta jest bardzo pracochłonna. Ponadto dokonywana ocena jest ważna wyłącznie dla analizowanego obszaru parametrów. Pojawia się więc pytanie o istnienie pewnych choćby przybliżonych, jednakże analitycznych kryteriów dokonywania tej oceny, tj. wyznaczania obszarów występowania ruchu periodycznego, periodycznego z podharmonicznymi i z harmonicznymi, quasi-okresowego i chaotycznego. Opisana przez Guggenheimera i Holmesa [36] metoda Melnikova pozwala na sprecyzowanie takich kryteriów, bazując na układach Hamiltona. Rozważmy więc równanie ruchu układu, w którym zarówno wymuszenie, jak i tłumienie jest małe

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x), \quad (4.27)$$

gdzie:  $x$  jest wektorem stanu,  $g(x) = (g_1, g_2)$  jest funkcją okresową,  $\varepsilon$  jest małym

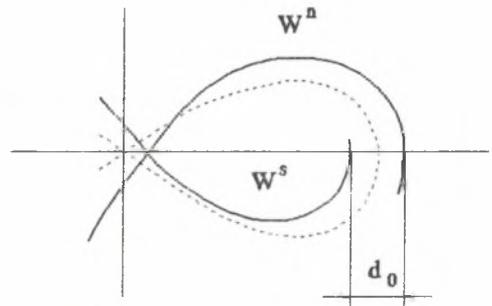
parametrem, natomiast funkcja  $f(x) = [f_1, f_2]^T$  jest hamiltonianem

$$f_1(x) = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}, \quad f_2(x) = \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (4.28)$$

Funkcja Melnikova  $M(p_0)$  definiowana jako całka postaci [13,38]

$$M(p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(p_0), t) \times g(x(p_0), t) dt \quad (4.29)$$

umożliwia określenie "odległości" pomiędzy stabilną  $W^s$  i niestabilną  $W^u$  rozmaitością różniczkową co poglądowo przedstawiono na rysunku 4.13 [114]. Odległość  $d_0$  wyznaczana jest dla niezaburzonej homoklinicznej trajektorii w przestrzeni stanu. Jeżeli rozmaitości te przetną się chociaż jeden raz, to oznacza to, iż będą się przecinać nieskończenie wiele razy, tworząc tzw. orbitę homokliniczną [78]. Jeżeli wartość funkcji Melnikowa  $M(p_0)$  oscyluje wokół zera i posiada pojedynczy pierwiastek dla  $p_0$ , to wówczas następuje przecinanie się stabilnej  $W^s$  i niestabilnej  $W^u$  rozmaitości różniczkowej [114].



Rys. 4.13. Stabilna i niestabilna rozmaitość różniczkowa

Fig. 4.13. Stable and unstable manifold

## 5. DYNAMIKA OSCYLATORA HARMONICZNEGO ZE SKOKOWO ZMIENNĄ SZTYWNOŚCIĄ

W bieżącym rozdziale i czterech kolejnych omówione zostaną badania dynamiki różnych układów mechanicznych posiadających nieciągłości w postaci funkcji przemieszczenia, prędkości oraz przemieszczenia i prędkości. Do przeprowadzenia tych badań wykorzystano zarówno metody analityczne, jak i numeryczne. Zastosowano szereg technik badania jakości ruchu omówionych szczegółowo w poprzednim rozdziale. Wszystkie obliczenia numeryczne przeprowadzono za pomocą pakietu programów opracowanych przez autora, będącego rozwinięciem programu DAMT&CP [134]. Pakiet umożliwia rozwiązywanie numeryczne i analizę układów chaotycznych. Badania dynamiki analizowanych układów przeprowadzane były w następującym porządku:

- (1) implementacja bądź jej próba jednej z metod aproksymujących w celu wyznaczenia rozwiązania analitycznego,
- (2) analiza numeryczna obejmująca w pierwszej kolejności zbudowanie wykresów bifurkacyjnych jako funkcji istotnych parametrów układu, a następnie szczegółowe badania polegające na wyznaczeniu map Poincarégo, widm drgań, funkcji autokorelacji, wykładników Lapunowa i wymiaru korelacyjnego.

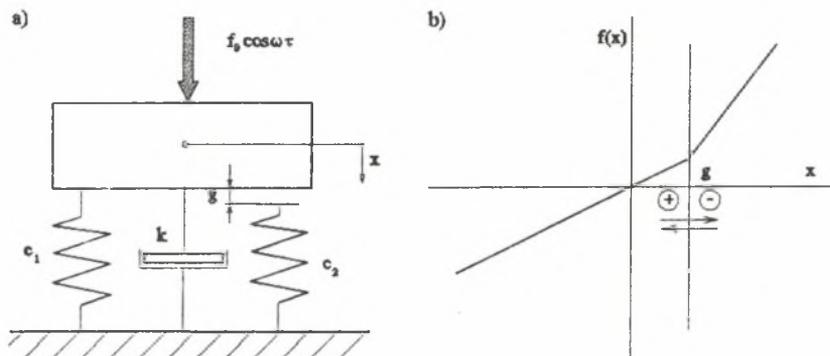
Rozważmy oscylator ze skokową charakterystyką siły przedstawiony na rysunku 5.1, gdzie masa  $m$  połączona ze sprężyną o stałej  $c_1$  i tłumikiem wiskotycznym o współczynniku tłumienia  $k$  wymuszana jest siłą harmoniczną o module  $f_0$ . Jeżeli przemieszczenie  $x$  jest mniejsze niż wartość luzu  $g$ , to układ drga harmonicznym z częstością kołową tłumioną  $\omega$ . Przekroczenie założonego luzu powoduje kontakt z drugą sprężyną o sztywności  $c_2$ . Równanie ruchu układu obejmujące dwa wymienione przypadki w formie bezwymiarowej ma postać

$$x'' + 2\xi x' + x + H(x)(x - g) = \beta \cos(\eta \tau), \quad (5.1)$$

gdzie funkcja nieciągłości  $H(x)$  jest dwuwartościowa

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < g \\ \alpha, & x \geq g \end{cases}. \quad (5.2)$$

Ponieważ równanie (5.1) jest przedziałami liniowe, więc możliwe jest podanie jego analitycznego rozwiązania [108].



Rys. 5.1. Oscylator ze zmienną skokowo charakterystyką sprężystości; a) model fizyczny, b) siła sprężystości jako funkcja przemieszczenia

Fig. 5.1. Piecewise linear oscillator; a) physical model, b) stiffness force

Zanim podamy zależności na całkę ogólną i szczególną równania (5.1), przedstawmy go w postaci alternatywnych równań

$$x'' + 2\xi x' + x = \beta \cos(\eta \tau); \quad x < g, \quad (5.3)$$

$$x'' + 2\xi x' + (1 + \alpha)x = \beta \cos(\eta \tau) + \alpha g; \quad x \geq g. \quad (5.4)$$

Rozważmy przypadek, dla którego następuje przełączenie, tj.  $x = g$ . Dla przemieszczeń mieszczących się w pierwszym z ograniczeń (5.2) rozwiązanie dla warunku początkowego

$$x(\tau_{0+}) = g; \quad x'(\tau_{0+}) = x'_{0+}. \quad (5.5)$$

opisane jest równaniem

$$x_+(\tau; \tau_{0+}, \dot{x}_{0+}) = e^{-\alpha(\tau - \tau_{0+})} [A_+ \cos(\tau - \tau_{0+}) + B_+ \sin(\tau - \tau_{0+})] + C_+ \cos \eta \tau + D_+ \sin \eta \tau, \quad (5.6)$$

gdzie:

$$A_+ = g, \quad B_+ = \frac{1}{\omega_{0n+}} (\dot{x}_{0+} + \xi g), \quad \omega_{0n+}^2 = 1 - \xi^2,$$

$$C_+ = \beta \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + 4\xi^2 \eta^2}, \quad D_+ = \beta \frac{2\xi \eta}{(1 - \eta^2)^2 + 4\xi^2 \eta^2}.$$

Analogicznie dla przemieszczenia  $x$  spełniającego drugie z równań (5.2) rozwiązanie dla zadanego warunku początkowego

$$x(\tau_{0-}) = g; \quad x'(\tau_{0-}) = x'_{0-}, \quad (5.7)$$

opisane jest równaniem

$$x_-(\tau; \tau_{0-}, \dot{x}_{0-}) = e^{-\alpha(\tau-\tau_{0-})} [A_- \cos \omega_{0-}(\tau-\tau_{0-}) + B_- \sin \omega_{0-}(\tau-\tau_{0-}) + E_-] + C_- \cos \eta \tau + D_- \sin \eta \tau, \quad (5.8)$$

gdzie:

$$A_- = g; \quad B_- = \frac{1}{\omega_{0n-}} (\dot{x}_{0-} + \xi g), \quad \omega_{0-} = 1 + \alpha \quad \omega_{0n-}^2 = 1 + \alpha - \xi^2,$$

$$C_- = \frac{\beta}{\omega_{0-}^2} \frac{1 - \frac{\eta^2}{\omega_{0-}^2}}{\left(1 - \frac{\eta^2}{\omega_{0-}^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\eta^2}{\omega_{0-}^2}}, \quad D_- = \frac{\beta}{\omega_{0-}^2} \frac{2\xi \frac{\eta}{\omega_{0-}}}{\left(1 - \frac{\eta^2}{\omega_{0-}^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\eta^2}{\omega_{0-}^2}}, \quad E_- = \frac{\alpha g}{\alpha + 1}$$

Trudność uzyskania rozwiązania analitycznego z równań (5.6) i (5.8) polega na niemożności określenia *explicitie* czasów osiągnięcia przez oscylator położenia  $x(\tau_i) = g$ , które są pierwiastkami równań

$$x_+(\tau; \tau_{0+}, x'_{0+}) = g, \quad (5.9)$$

$$x_-(\tau; \tau_{0-}, x'_{0-}) = g. \quad (5.10)$$

W przypadku drgań swobodnych nietyumionych równania (5.6) i (5.8) dają się przedstawić w postaci

$$x^2 + x'^2 = g^2 + x'^2_{0+}; \quad x < g, \quad (5.11)$$

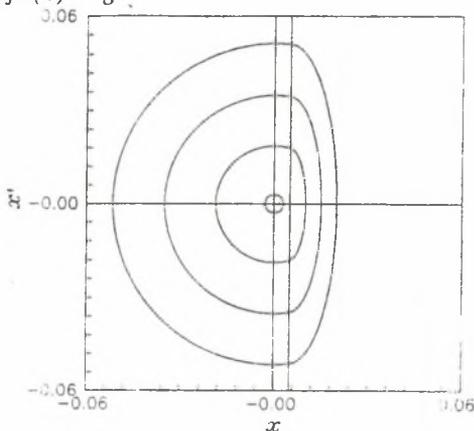
$$\left(x - \frac{\alpha g}{\alpha + 1}\right)^2 + x'^2 = g^2 + \frac{x'^2_{0-}}{1 + \alpha}; \quad x \geq g. \quad (5.12)$$

Z porównania prawych stron równań (5.11) i (5.12) otrzymano zależność ukazującą stosunek prędkości początkowych

$$\left(\frac{x'_{0+}}{x'_{0-}}\right)^2 = \frac{1}{1 + \alpha}. \quad (5.13)$$

Portrety fazowe dla różnych warunków początkowych przyjmują postać koncentrycznych krzywych zamkniętych (patrz rys.5.2). Każda z krzywych utworzona została przez dwie elipsy łączące się w punktach o współrzędnej  $x(\tau) = g$ .

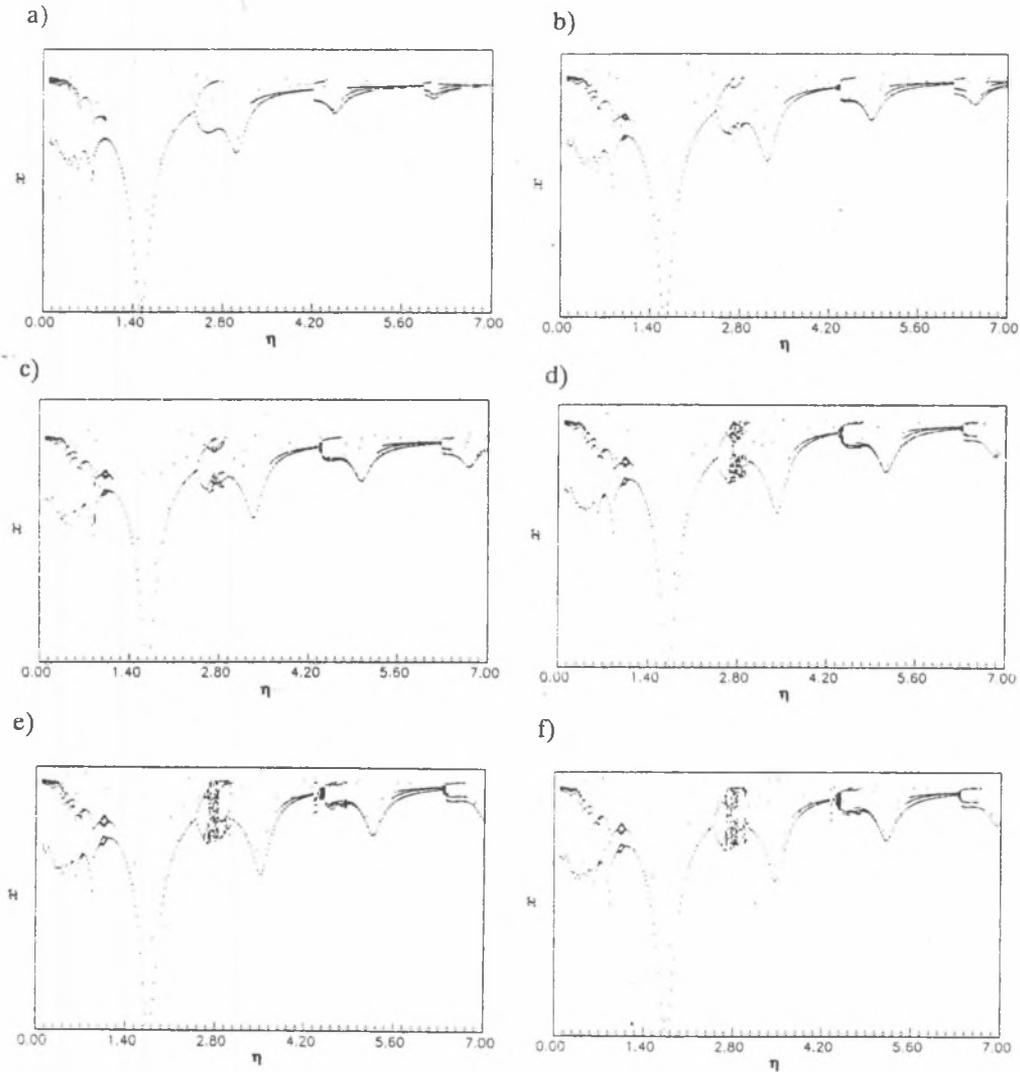
Rozpatrzmy drgania wymuszone tłumione rozpatrywanego oscylatora, których przebiegi będziemy wyznaczać numerycznie. Sprowadźmy więc równanie (5.1) do układu równań autonomicznych (5.14), a następnie wykorzystajmy metodę stałego średniego przyspieszenia z precyzyjnym wyznaczaniem czasów wystąpienia nieciągłości bazującą na budowaniu wielomianów aproksymujących Aitkena. Omawiany oscylator opisany jest wektorem parametrów  $p = [\xi, \alpha, \beta, \eta, g]^T$  nie będącym funkcją czasu. Pierwszą fazę badań symulacyjnych przeprowadzono przyjmując trójelementowy wektor parametrów  $p^* = [\alpha, \eta, \xi]^T$ .



Rys. 5.2. Portret fazowy drgań swobodnych  
Fig. 5.2. Phase plane of the free vibration

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 - H(x_1)(x_1 - g) - 2\xi x_2 + \beta \cos x_1 \\ x_3' &= \eta \end{aligned} \quad (5.14)$$

Pozostałe dwie wartości parametrów ustalono na niezmiennym poziomie następująco:  $g = 0$ ,  $\beta = 0.01$ . Pierwszą grupę wykresów bifurkacyjnych stanowią charakterystyki amplitudy drgań jako funkcji częstości wymuszenia dla różnych poziomów sztywności drugiej ze sprężyn, reprezentowanej przez współczynnik  $\alpha$  zmieniający się w granicach  $\alpha \in \langle 10, 60 \rangle$ . Wzrost sztywności drugiej ze sprężyn powoduje rozwój ruchu chaotycznego szczególnie wyraźnego dla zakresu częstości  $\eta \in \langle 2.5, 3.0 \rangle$ , gdzie widoczna jest kaskada bifurkacji wg schematu "period of doubling". Przebieg charakterystyki amplitudy w funkcji częstości jest funkcją wielowartościową o wielu ekstremach lokalnych, jednakże wzrost współczynnika sztywności nie wywołuje jakościowych zmian ruchu. Interesującym aspektem wykresu bifurkacyjnego  $x = x(\eta)$  jest występowanie naprzemiennie bifurkacji pod- i nadkrytycznej, co prowadzi do możliwości wychodzenia z obszaru chaotycznego poprzez wzrost i zmniejszenie częstości wymuszenia. Inną ciekawą prawidłowością jest cykliczne występowanie i rozwijanie się kolejnych podharmonicznych po przedziałach ruchu nieregularnego. Przykładowo dla  $\alpha = 10$  w przedziale częstości  $\eta \in \langle 1.5, 2.6 \rangle$  układ drga z jedną częstością. Następnie w zakresie  $\eta \in \langle 3.1, 4.2 \rangle$  z dwiema, w  $\eta \in \langle 4.5, 5.2 \rangle$  z trzema, aż wreszcie w zakresie  $\eta \in \langle 6.0, 6.5 \rangle$  z czterema częstościami.

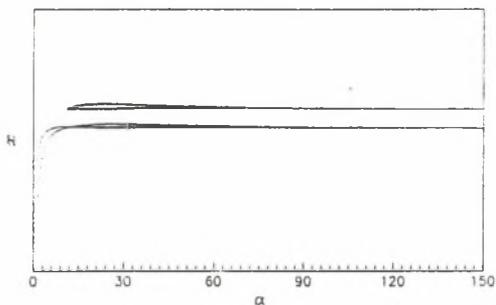


Rys. 5.3. Wykresy bifurkacyjne częstości wymuszenia  $\eta$  dla; a)  $\alpha = 10$ , b)  $\alpha = 20$ , c)  $\alpha = 30$ , d)  $\alpha = 40$ , e)  $\alpha = 50$ , f)  $\alpha = 60$

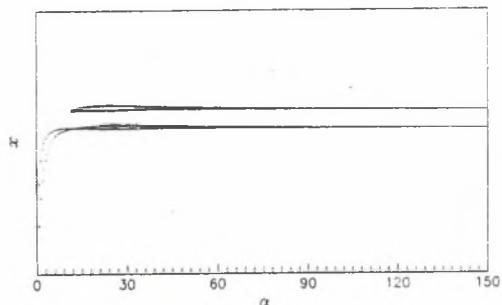
Fig. 5.3. Bifurcation diagrams of frequency ratio  $\eta$  for a)  $\alpha = 10$ , b)  $\alpha = 20$ , c)  $\alpha = 30$ , d)  $\alpha = 40$ , e)  $\alpha = 50$  and f)  $\alpha = 60$

Zupełnie inaczej przedstawia się szereg wykresów bifurkacyjnych zmienności współczynnika sztywności  $\alpha$  przebadany dla kilku różnych wartości częstości wymuszenia  $\eta$  co pokazano na rysunku 5.4.

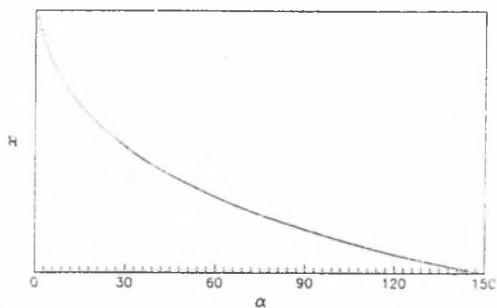
a)



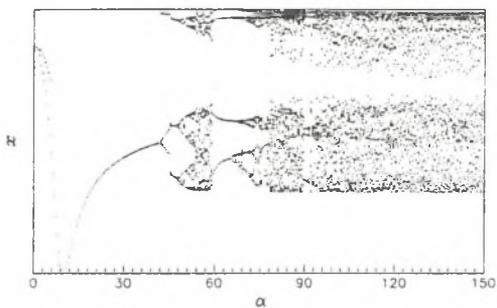
b)



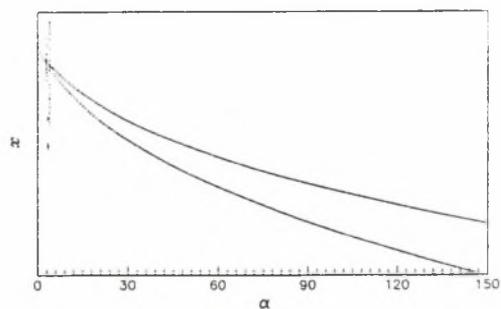
c)



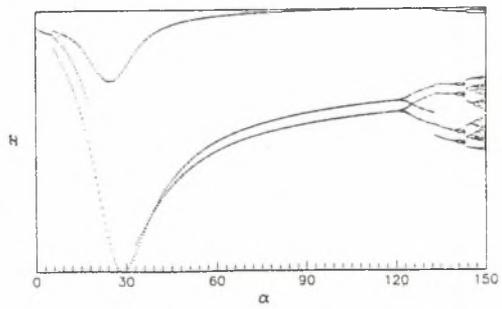
d)



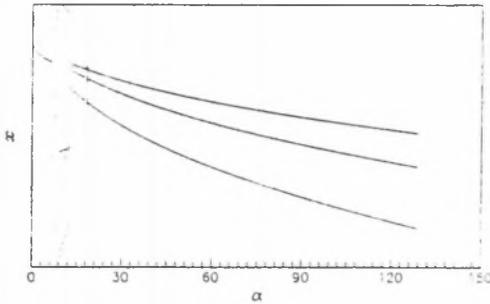
e)



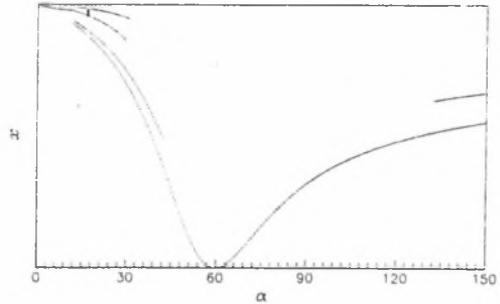
f)



g)



h)

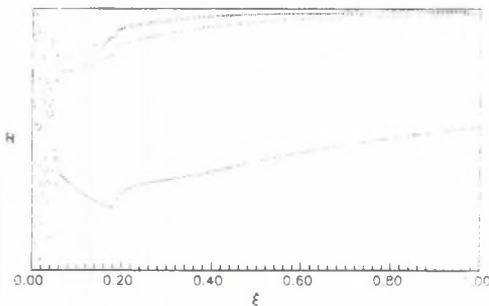


**Rys. 5.4.** Wykresy bifurkacyjne wpływu parametru  $\alpha$  dla a)  $\eta = 0.5$ , b)  $\eta = 1.0$ , c)  $\eta = 2.0$ , d)  $\eta = 3.0$ , e)  $\eta = 4.0$ , f)  $\eta = 5.0$ , g)  $\eta = 6.0$  and h)  $\eta = 7.0$   
**Fig. 5.4.** Bifurcation diagrams of stiffness ratio  $\alpha$  for a)  $\eta = 0.5$ , b)  $\eta = 1.0$ , c)  $\eta = 2.0$ , d)  $\eta = 3.0$ , e)  $\eta = 4.0$ , f)  $\eta = 5.0$ , g)  $\eta = 6.0$  and h)  $\eta = 7.0$

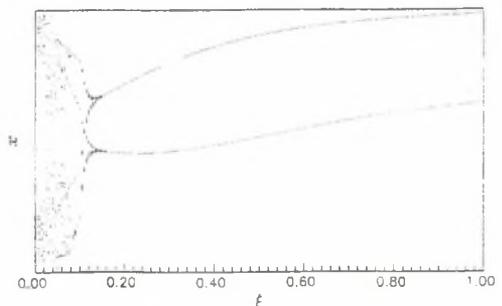
Występuje tutaj pełna gama różnorodnych form ruchu, od czysto harmonicznego począwszy (rys. 5.4c), poprzez czysto podharmoniczny (rys. 5.4a i 5.4b) i podharmoniczny z oknami ruchu nieregularnego (rys. 5.4e, 5.4g, 5.4h), a na nieregularnym skończywszy (rys. 5.4d i 5.4f). Przejścia z jednej formy ruchu do następnej zachodzą przy wzroście wartości częstości wymuszenia  $\eta$ . Porównując tę grupę wykresów bifurkacyjnych z poprzednią można sformułować stwierdzenie, iż zmiana współczynnika sztywności powoduje bifurkację nadkrytyczną z obszarami zaniku niektórych podharmonicznych. Dobierając odpowiednią wartość częstości wymuszenia  $\eta$ , (np. 0.5, 1 lub 2) można bardzo efektywnie wpływać na amplitudę drgań.

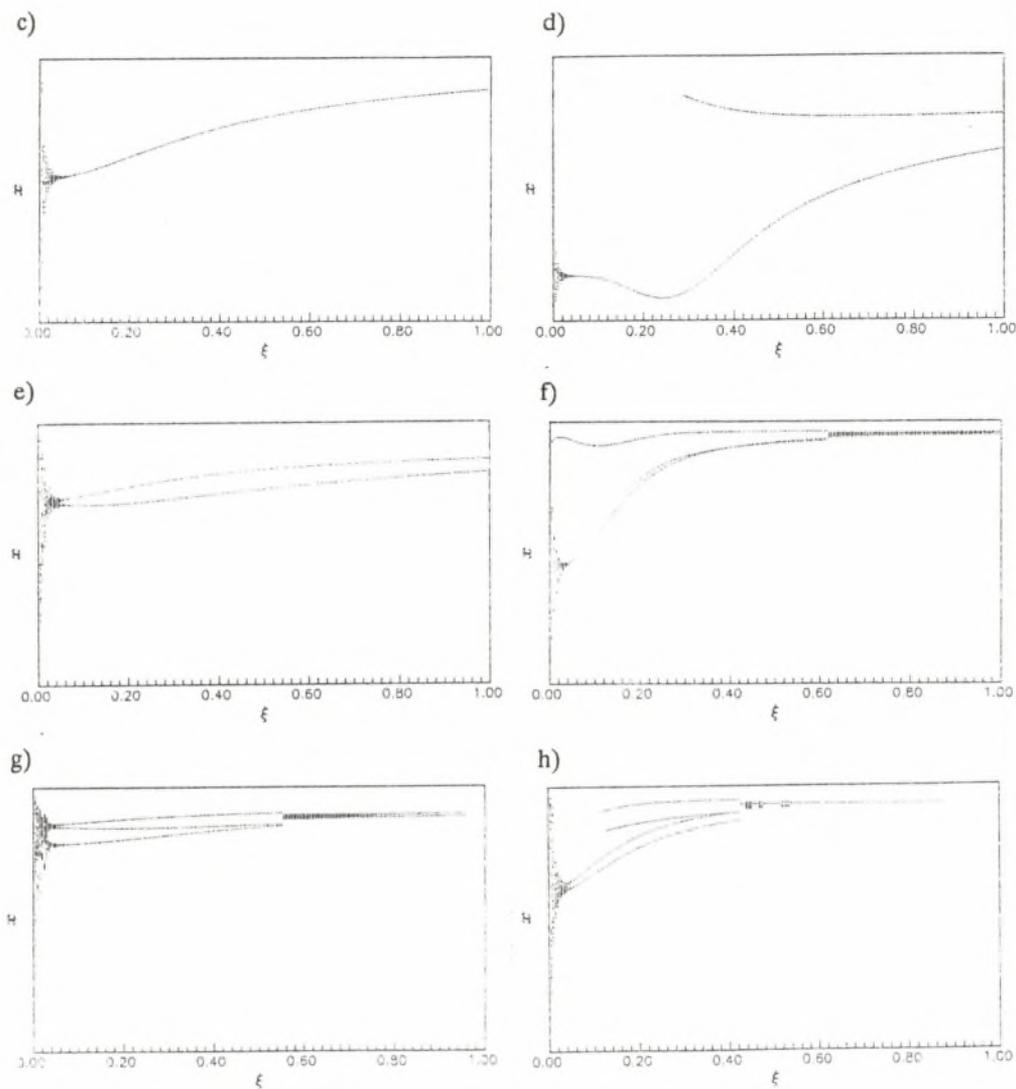
Jeszcze inny charakter zmienności wykresów bifurkacyjnych uzyskuje się poprzez systematyczną zmianę współczynnika tłumienia  $\xi$  dla kilku różnych wartości częstości wymuszenia  $\eta$ . W przypadku zmian współczynnika tłumienia można jednoznacznie stwierdzić, iż powyżej pewnej jego wartości w układzie może wystąpić jedynie ruch regularny. Stwierdzenie to byłoby oczywiste, gdyby ruch tego układu od pewnej wartości

a)



b)



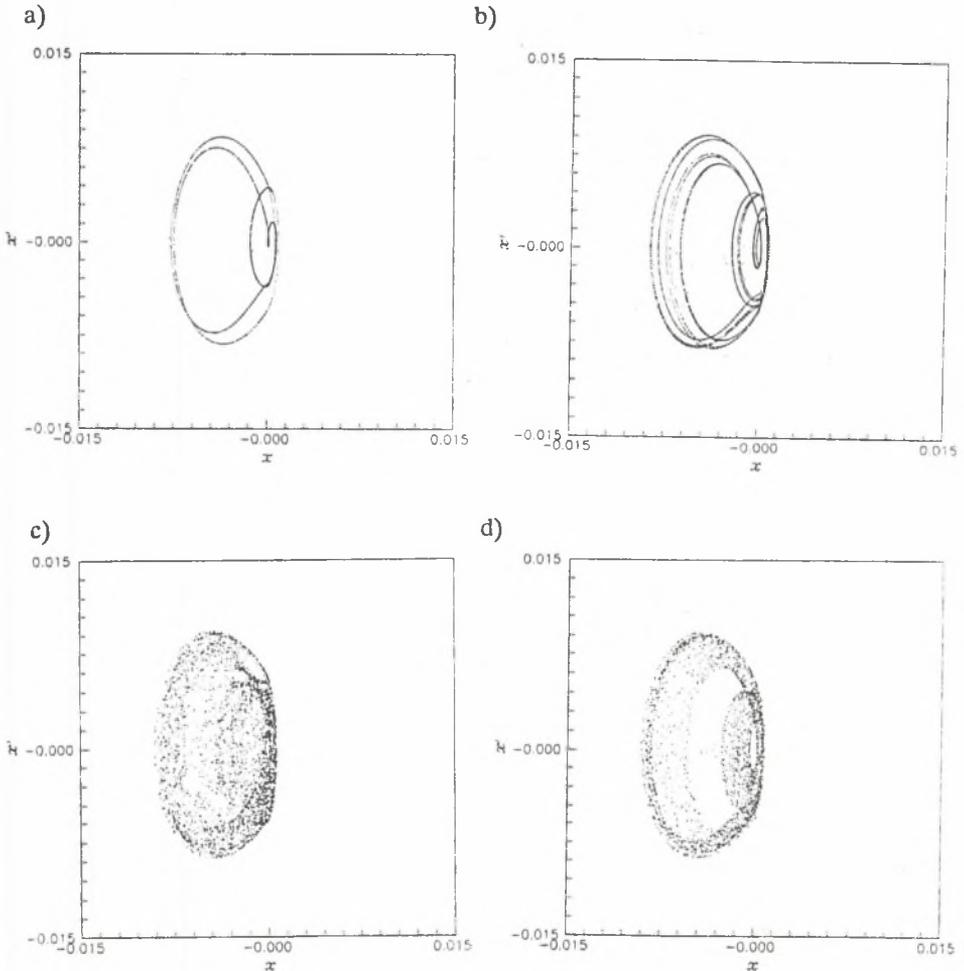


Rys. 5.5. Wykresy bifurkacyjne wpływu parametru  $\xi$  dla a)  $\eta = 0.5$ , b)  $\eta = 1.0$ , c)  $\eta = 2.0$ , d)  $\eta = 3.0$ , e)  $\eta = 4.0$ , f)  $\eta = 5.0$ , g)  $\eta = 6.0$  and h)  $\eta = 7.0$

Fig. 5.5. Bifurcation diagrams of damping ratio  $\xi$  for a)  $\eta = 0.5$ , b)  $\eta = 1.0$ , c)  $\eta = 2.0$ , d)  $\eta = 3.0$ , e)  $\eta = 4.0$ , f)  $\eta = 5.0$ , g)  $\eta = 6.0$  and h)  $\eta = 7.0$

współczynnika  $\xi$  osiągał częstotliwość wymuszenia. W rzeczywistości ze wzrostem parametru  $\eta$  układ przechodzi od jednej formy ruchu podharmonicznego do drugiej przyjmując tylko w jednym z badanych przypadków formę ruchu periodycznego (rys. 5.5c).

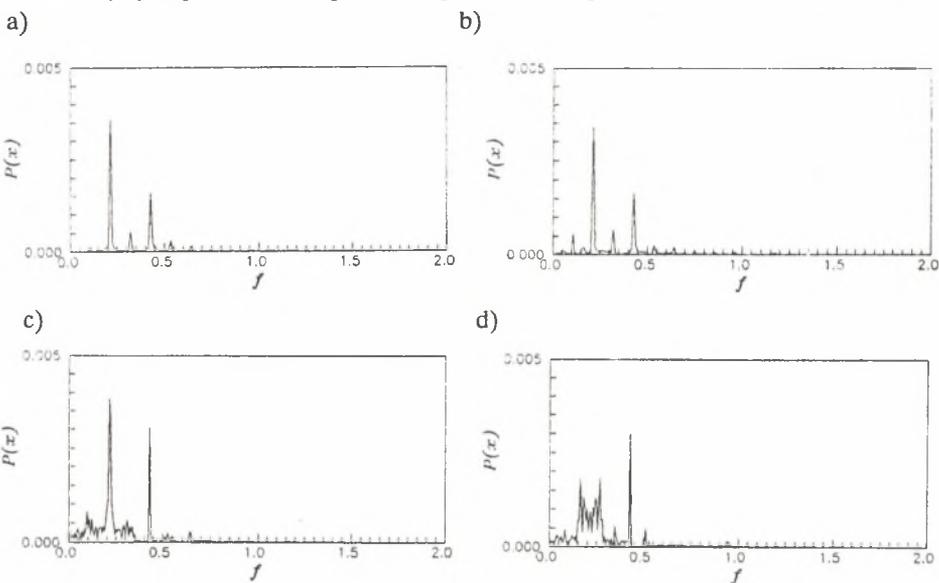
Na podstawie przeprowadzonej analizy wykresów bifurkacyjnych można stwierdzić, iż parametrem mającym najsilniejszy wpływ na zmianę jakości ruchu jest współczynnik sztywności drugiej ze sprężyn  $\alpha$ . Aby potwierdzić tę tezę, wyznaczmy mapy Poincarégo dla ustalonej częstotliwości wymuszenia  $\eta = 2.7$  zmieniając współczynnik  $\alpha$  i traktując powyższy układ jako nieautonomiczny. Uwaga ta narzuca sposób wyznaczania mapy Poincarégo, którą uzyskuje się zbierając próbki czasowe z ustalonym okresem. Na rysunku 5.6 przedstawiono mapy Poincarégo, na których widoczne jest powstawanie i zanikanie ruchu chaotycznego.



Rys. 5.6. Mapy Poincarégo dla a)  $\alpha = 20$ , b)  $\alpha = 30$ , c)  $\alpha = 40$ , d)  $\alpha = 50$

Fig. 5.6. Poincaré map for a)  $\alpha = 20$ , b)  $\alpha = 30$ , c)  $\alpha = 40$ , d)  $\alpha = 50$

Dokonajmy teraz analizy widmowej odpowiedzi układu dla omawianych wcześniej przypadków w celu potwierdzenia bądź osłabienia przypuszczenia dotyczącego występowania ruchu chaotycznego. Wyznaczając widmo mocy wykorzystano szybkie przekształcenie Fouriera o liczbie próbek  $N_{FFT} = 1024$ , wybierając próbki czasowe z pominięciem początkowej fazy ruchu (tj. czasu, po którym w przypadku układu liniowego całka ogólna przyjęłaby wartość stałą). I tak na rysunku 5.7 przedstawiono widma mocy dla takich samych danych jak na rysunku 5.6. W przypadku pierwszych dwóch wykresów (5.7a i 5.7.b) widoczne są ostre piki świadczące o występowaniu ruchu regularnego. Natomiast na pozostałych dwóch charakterystyka posiada ostre piki wkomponowane w spłaszczone widmo mocy (5.7c i 5.7d).



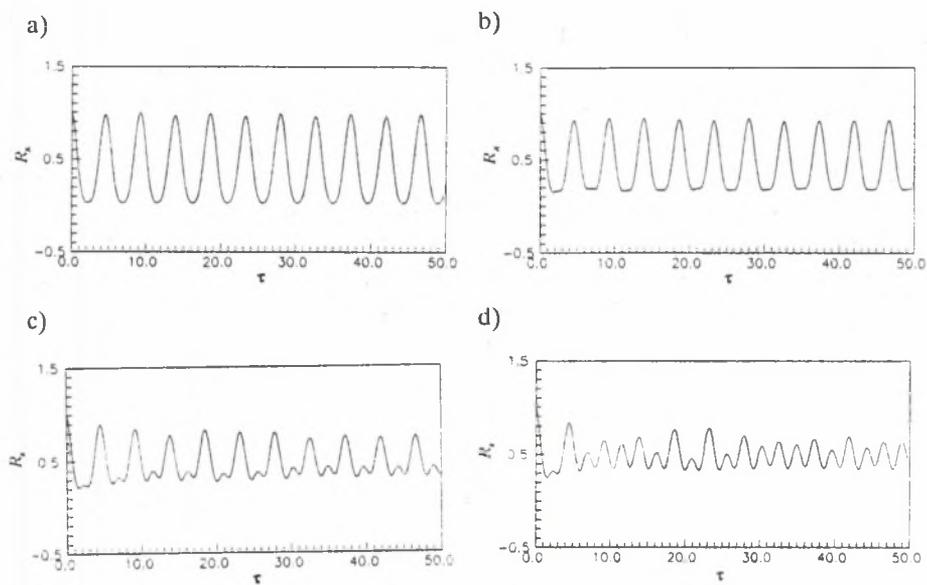
Rys. 5.7. Widmo mocy dla; a)  $\alpha = 20$ , b)  $\alpha = 30$ , c)  $\alpha = 40$ , d)  $\alpha = 50$

Fig. 5.7. Power spectrum for a)  $\alpha = 20$ , b)  $\alpha = 30$ , c)  $\alpha = 40$ , d)  $\alpha = 50$

Zamieszczone poniżej przebiegi funkcji autokorelacji (rys. 5.8) potwierdzają wcześniej wyznaczone oceny wskazujące, iż dla  $\alpha = 20$  i  $\alpha = 30$  układ wykonuje drgania regularne z różną liczbą subharmonicznych, natomiast zwiększenie współczynnika sztywności, tj. gdy  $\alpha = 40$  i  $\alpha = 50$  wywołuje powstawanie ruchu chaotycznego.

Reasumując należy stwierdzić, że uzyskane informacje z wykresów bifurkacyjnych zamieszczonych na rysunku 5.3 potwierdziły zmianę jakości ruchu przy zmianie współczynnika sztywności  $\alpha$  dla ustalonej jednocześnie częstotliwości wymuszenia  $\eta$ .

Koherentność przeprowadzonych ocen skłania do jednoznacznej decyzji odnośnie do jakości badanych przebiegów. Oczywiście, można się w tym miejscu pokusić o potwierdzenie tego osądu jeszcze innym kryterium, np. wykładnikami Lapunowa. Ocena taka zostanie przeprowadzona podczas analizy innych przykładowych układów z nieciągłościami.



Rys. 5.8. Funkcja autokorelacji dla a)  $\alpha = 20$ , b)  $\alpha = 30$ , c)  $\alpha = 40$ , d)  $\alpha = 50$

Fig. 5.8. Autocorrelation function for a)  $\alpha = 20$ , b)  $\alpha = 30$ , c)  $\alpha = 40$ , d)  $\alpha = 50$

## 6. DYNAMIKA OSCYLATORA HARMONICZNEGO Z LUZEM

W rzeczywistych układach mechanicznych występuje często tzw. luz konstrukcyjny. Jeżeli układ wykonuje ruch wyłącznie w jednym kierunku, to wówczas następuje skasowanie luzu. Jednakże bardzo często obciążenie zmienia swój kierunek, co powoduje cykliczny kontakt elementów konstrukcji. Weźmy dla prostoty analizy liniowy oscylator o masie  $m$  i współczynniku tłumienia wiskotycznego  $k$ , wzbudzany harmonicznymi siłą o module  $f_0$ . Jeżeli bezwzględne przemieszczenie przekracza wartość  $e$ , to następuje kontakt ze sprężyną o współczynniku sztywności  $c$  (rys. 6.1a). Równanie ruchu środka masy w formie bezwymiarowej można zapisać w następującej postaci

$$x'' + 2\xi x' + C(x) = \beta \cos(\eta \tau), \quad (6.1)$$

gdzie funkcja nieciągłości  $C(x)$  jest opisana równaniem (6.2), co schematycznie przedstawiono na rysunku 6.1b.

$$C(x) = \begin{cases} x + e, & x < -e \\ 0, & |x| \leq e \\ x - e, & x > e \end{cases}. \quad (6.2)$$

Ponieważ podobnie jak w przypadku równania (5.1), równanie (6.1) jest przedziałami liniowe, a więc można dla niego postulować rozwiązanie pamiętając jednak, iż rozwiązanie analityczne tego równania w przypadku ogólnym nie istnieje. Zakładając, że układ ten będzie wykonywał jedynie drgania swobodne nietłumione, rozwiązaniem ogólnym będzie całka równania (6.3)

$$x'' + C(x) = 0, \quad (6.3)$$

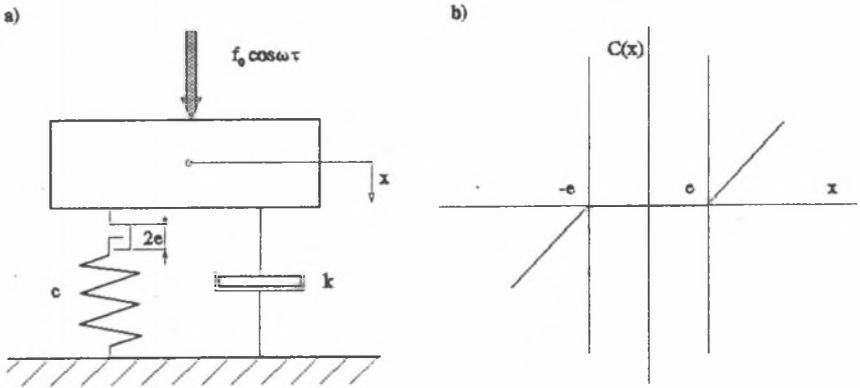
którą można wyznaczyć obliczając energię ruchu drgającego

$$\frac{1}{2} x'^2 + \int_{(x)} C(x) dx = E_0. \quad (6.4)$$

Badany układ będzie wykonywał drgania symetryczne wokół położenia równowagi, a więc rozwiązaniem będzie podwojona całka równania (6.4) w granicach  $[0, x]$ . Należy jednak pamiętać, że nieciągłość badanego układu zobowiązuje do całkowania przedziałami. I tak po scałkowaniu równania (6.4) w przedziale  $[0, e]$  otrzymano zależność

$$x' = \pm \sqrt{2E_0e}. \quad (6.5)$$

Natomiast całkowanie w drugim przedziale dało następujący wynik



**Rys. 6.1.** Oscylator z luzem; a) model fizyczny, b) funkcja przemieszczenia  $C(x)$   
**Fig. 6.1.** Oscillator with clearance; a) physical model, displacement function  $C(x)$

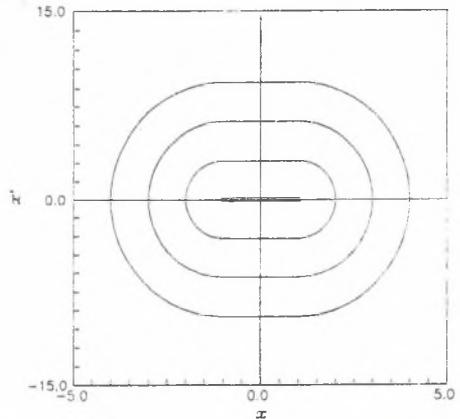
$$x' = \pm \sqrt{2E_{0x} - (x - e)^2}, \quad (6.6)$$

gdzie:

$$E_{0e} = E_{0x} = E_0.$$

Przyjmując wartość początkowej energii całkowitej układu na poziomie  $E_0$  ustalamy warunki początkowe, mające decydujący wpływ na przebieg trajektorii fazowej. Analizując równania (6.5) i (6.6) dochodzi się do wniosku, iż trajektorie fazowe powinny być krzywymi zamkniętymi, symetrycznymi w stosunku do układu współrzędnych zaczepionego w punkcie  $(0, 0)$ . Na rysunku 6.2 przedstawiono trajektorie fazowe dla czterech różniących się warunków początkowych.

W celu przeprowadzenia analizy drgań wymuszonych równanie (6.1) sprowadzono do postaci autonomicznej (równ. 6.7), a następnie scałkowano numerycznie wykorzystując metodę predyktor-korektor połączoną z metodą Rungego-Kutty z precyzyjnym



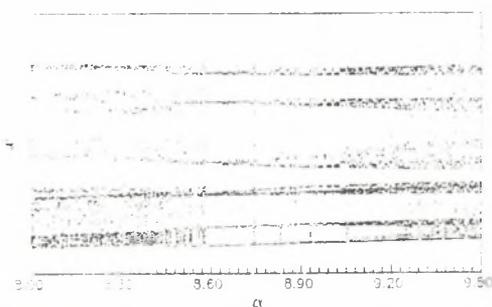
**Rys. 6.2.** Portret fazowy drgań swobodnych  
**Fig. 6.2.** Phase portrait of free vibration

wyznaczaniem punktu nieciągłości. Wyznaczanie punktu nieciągłości, podobnie jak poprzednio, przebiegało najefektywniej algorytmem Aitkena.

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -C(x_1) - 2\xi x_2 + \beta \cos x_3 \\ x_3' &= \eta \end{aligned} \quad (6.7)$$

Badany oscylator można opisać czteroelementowym wektorem parametrów  $p = [\beta, \eta, \xi, e]^T$ . Do badań symulacyjnych podobnie jak w poprzednim podrozdziale wykorzystano trójelementowy wektor parametrów  $p^* = [\beta, \eta, \xi]^T$ . Wartość parametru  $e$  ustalono na poziomie  $e = 1.0$ .

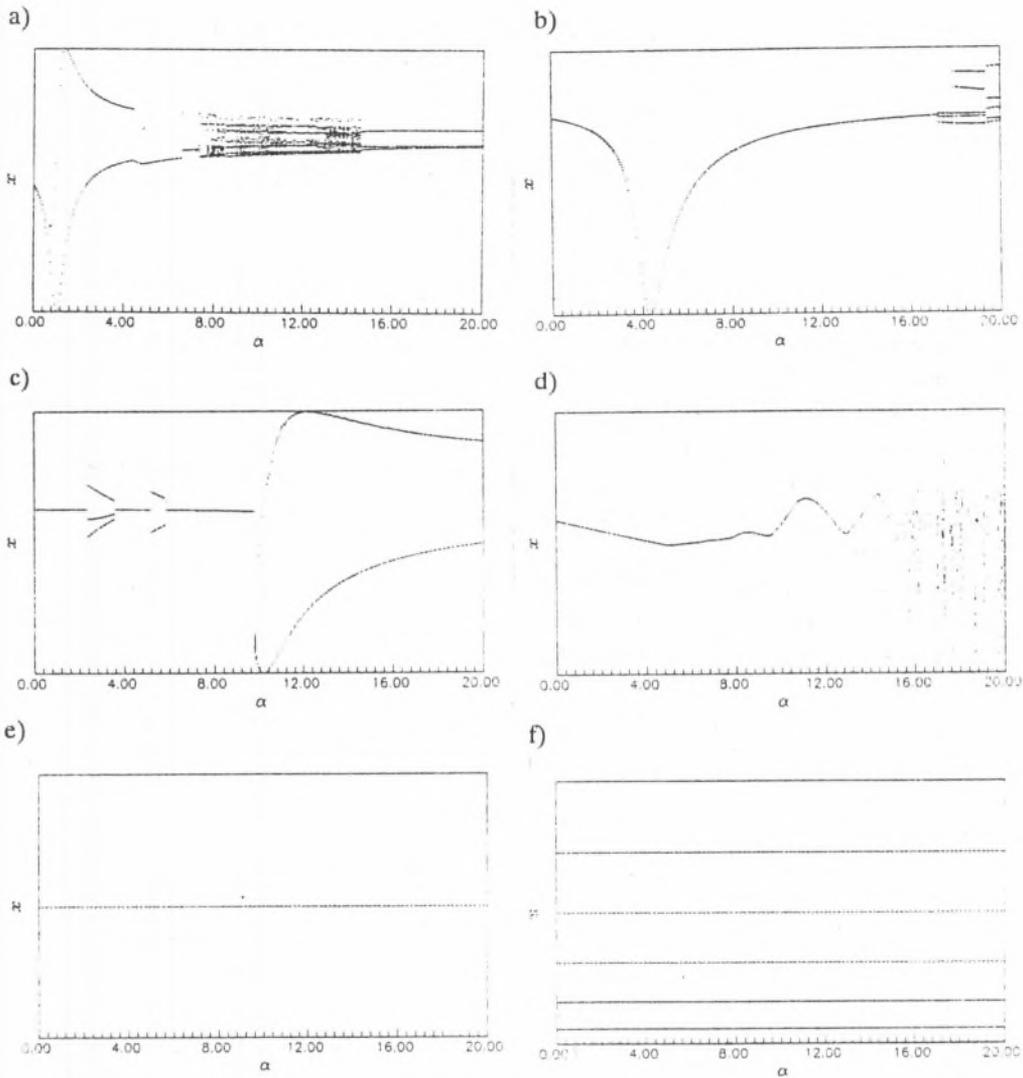
Pewne wyniki badań numerycznych można znaleźć w pracy [58], gdzie autorzy postulują osiągnięcie ruchu chaotycznego wg scenariusza typu "crisis". W celu porównania tych rezultatów z wynikami otrzymanymi przez autora, wyniki obliczeń sprowadzono do układu wymiarowego, tzn. wektor  $p^*$  zastąpiono wektorem  $p^* = [\omega_0^2, \eta, \xi]^T$ . I tak porównując wykresy bifurkacyjne można dostrzec niewielkie rozbieżności. Przykładowo "...katastroficzny zanik ruchu chaotycznego..." wg [58] przypada dla współczynnika  $\alpha = \omega_0^2 = 8.4$ , natomiast z badań autora wynika iż jeszcze dla wartości 8.57 występują pewne oznaki ruchu nieregularnego (rysunek 6.3).



Rys. 6.3. Wykres bifurkacyjny  $x = f(\alpha)$

Fig. 6.3. Bifurcation diagrams  $x = f(\alpha)$

Analizę powyższego układu z luzem rozpoczniemy od omówienia wykresów bifurkacyjnych ukazujących wpływ sztywności sprężyny reprezentowanej przez współczynnik  $\alpha$  na jakość ruchu. Współczynnik  $\alpha$  zmieniano w przedziale  $\alpha \in \langle 0, 20 \rangle$ , rejestrując przebijanie przez trajektorię fazową hiperpłaszczyzny  $x' = 0$ . Na rysunku 6.4 przedstawiono wykresy bifurkacyjne  $x = f(\alpha)$  dla kilku różnych wartości częstości wymuszenia  $\eta$  objawiające niezwykłą różnorodność uzyskiwanych form ruchu oraz sposobów ich osiągania. Jak już wspomniano dla  $\eta = 1$ , osiągnięcie i zanikanie ruchu nieregularnego następuje wg scenariusza "crisis". Zupełnie inaczej wygląda zachowanie układu dla  $\eta = 2$ , gdzie układ w całym zakresie zmian parametru  $\alpha$  drga regularnie, wprawdzie z jedną częstością, a następnie po dokonaniu bifurkacji podkrytycznej - z jej podharmonicznymi. Dla częstości wymuszenia  $\eta = 3$  oscylator drga regularnie zmieniając naprzemiennie swe drgania z harmonicznymi na podharmoniczne. Pierwszej zmianie towarzyszy bifurkacja nadkrytyczna typu "flip", po czym układ drga z trzema częstościami. Następnie po



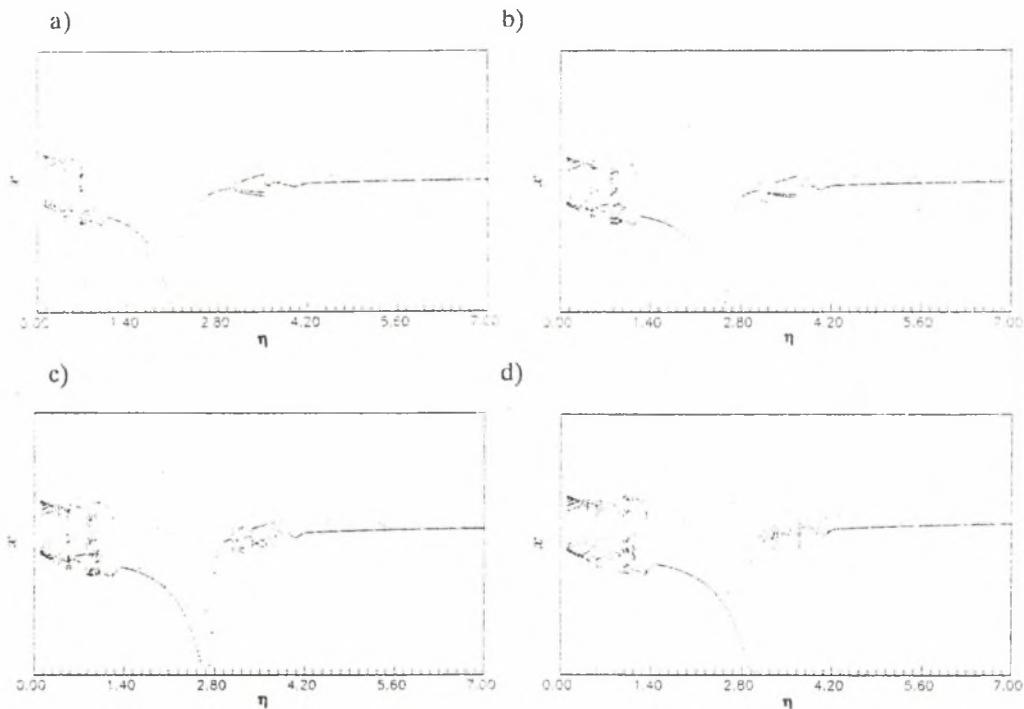
**Rys. 6.4.** Wykresy bifurkacyjne wpływu parametru  $\alpha$  dla a)  $\eta = 1.0$ , b)  $\eta = 2.0$ , c)  $\eta = 3.0$ , d)  $\eta = 4.0$ , e)  $\eta = 5.0$ , f)  $\eta = 7.0$

**Fig. 6.4.** Bifurcation diagrams of stiffness ratio  $\alpha$  for a)  $\eta = 1.0$ , b)  $\eta = 2.0$ , c)  $\eta = 3.0$ , d)  $\eta = 4.0$ , e)  $\eta = 5.0$ , f)  $\eta = 7.0$

dokonaniu bifurkacji subkrytycznej układ wraca do jednej częstotliwości. Kolejne trzy zmiany jakości ruchu to bifurkacja "Hopfa", która naprzemiennie występuje w superkrytycznej i subkrytycznej odmianie. Dalszy wzrost częstotliwości wymuszenia prowadzi znowu do innego scenariusza zmian jakości ruchu, w którym występują dwie strefy; ruchu periodycznego

i ruchu nieregularnego. Znamienny charakter mają wykresy 6.4e i 6.4f obrazujące okresowe drgania układu, dla którego amplituda drgań jest niezależna od współczynnika sztywności  $\alpha$ .

Następna grupa wykresów bifurkacyjnych ukazuje wpływ stosunku częstości wymuszenia do częstości drgań własnych  $\eta$  dla kilku różnych wartości współczynnika sztywności  $\alpha$ . Analizując wpływ współczynnika  $\alpha$  można stwierdzić, iż nie wywołuje on istotnych zmian jakości ruchu dla wykresu bifurkacyjnego  $x = f(\eta)$  (patrz rys. 6.5). Wynikiem tej zmiany jest uzyskiwanie w zasadzie bardzo zbliżonych wykresów, różniących się jedynie poziomem intensywności występowania drgań nieregularnych, a mianowicie obserwuje się wyraźne zwiększenie poziomu chaotyczności w przedziałach  $\langle 0.97, 1.26 \rangle$  oraz  $\langle 3.30, 4.20 \rangle$ . W drugim z wymienionych przedziałów obserwuje się ciekawą zmianę jakości ruchu. I tak dla  $\eta = 3.0$  występuje bifurkacja typu "pitchfork" (rys. 6.5), która dla wartości  $\alpha$  powiększonej do 7.0 przechodzi w "Hopfa", a następnie w "pitchfork" (rys. 6.5b). Dalsze zwiększenie parametru  $\alpha$  prowadzi do osiągnięcia przez układ ruchu nieregularnego (rys. 6.5c i d).



Rys. 6.5. Wykresy bifurkacyjne  $x = f(\eta)$ ; a)  $\alpha = 5$ , b)  $\alpha = 7$ , c)  $\alpha = 8$ , d)  $\alpha = 10$

Fig. 6.5. Bifurcation diagrams  $x = f(\eta)$  for a)  $\alpha = 5$ , b)  $\alpha = 7$ , c)  $\alpha = 8$ , d)  $\alpha = 10$

Bardziej szczegółowej analizie poddano przedział zmienności współczynnika  $\eta \in \langle 2.8, 4.3 \rangle$  dla  $\alpha = 12$ . Charakter wykresu bifurkacyjnego przedstawionego na rysunku 6.6 upoważnia do stwierdzenia, iż nie występują tutaj standardowe mechanizmy osiągnięcia i wychodzenia z ruchu chaotycznego.

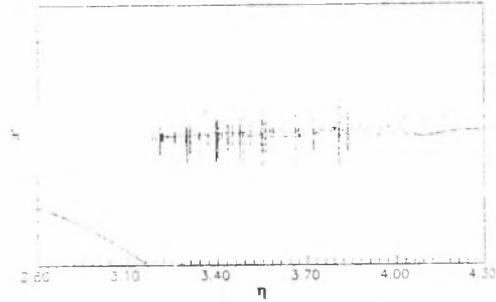
Ostatnią grupę analizowanych wykresów bifurkacyjnych stanowią zależności opisane w sposób ogólny funkcją  $x = f(\xi)$ . Podobnie jak w przypadku

oscylatora ze skokowo zmienną sztywnością, wzrost współczynnika tłumienia działa stabilizująco tzn. dla każdej wartości współczynnika częstości wymuszenia  $\eta$  istnieje graniczna wartość  $\xi_{GR}$ , od której począwszy układ drga periodicznie. Wartość  $\xi_{GR}$  jest inna dla różnych wartości  $\eta$ , i waha się od 0.03 (rys. 6.7e i 6.7f) do 0.52 (rys. 6.7a).

Z przeprowadzonych badań wynika, iż podobnie jak w przypadku oscylatora ze skokowo zmienną stałą sprężyny, najsilniejszy wpływ na zmianę jakości ruchu ma współczynnik sztywności  $\alpha$ . Potwierdzeniem tej tezy mogą być mapy Poincarégo ukazujące wychodzenie układu z chaosu<sup>1</sup> (rys. 6.8a) poprzez nieznaczną zmianę parametru  $\alpha$  (rys. 6.8b, c i d). Wychodzenie z obszaru drgań chaotycznych odbywa się poprzez osiąganie tzw. chaosu przejściowego, co jest szczególnie widoczne na rysunku 5.16b jako nieregularna "chmura" punktów nakładająca się na punkty tworzące regularną trajektorię, zamykającą się po siedmiu pętłach. Prezentowane mapy Poincarégo zbudowane są z dużej liczby punktów, a mianowicie  $n_{PM} = 4000$ .

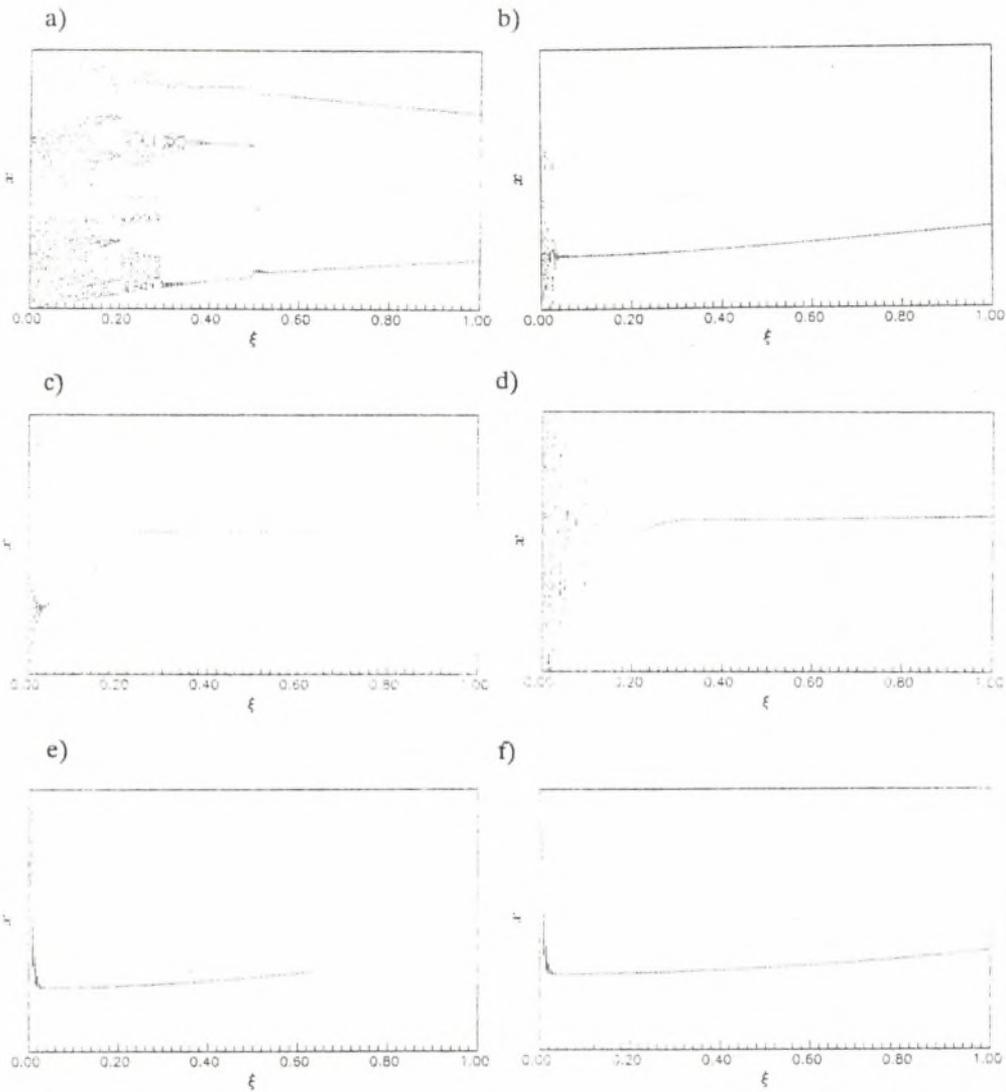
Symetryczność analizowanego układu znalazła odbicie w quasi-symetrii przedstawionych map wg osi  $x = 0$  (tj. lustrzane odbicie obrócone o  $180^\circ$ ). Wykazują one symetryczność w przypadku występowania wyłącznie drgań chaotycznych (rys. 6.8a) bądź periodicznych (rys. 6.8d). Symetryczność ta jest zakłócana "przejściowym" chaosem, co jest szczególnie widoczne na rysunkach 6.8b i c. Gdyby poprowadzono obliczenia dla większej liczby ( $n_{PM} \gg 4000$ ), mapa Poincarégo przedstawiona na rysunku 5.16d utworzyłaby krzywą zamkniętą.

Weryfikacji naszych przypuszczeń odnośnie do występowania ruchu chaotycznego możemy dokonać poprzez wyznaczenie widm mocy oraz funkcji autokorelacji dla grupy parametrów wykorzystywanych przy konstrukcji map Poincarégo (rys. 6.8). Na rysunku 6.9 przedstawiono cztery widma mocy dla nieznacznie wzrastającego parametru  $\alpha$ . Pierwszy z wykresów (odpowiadający mapie z rys. 6.8a) posiada spłaszczone, szerokie



Rys. 6.6. Wykres bifurkacyjny  $x = f(\eta)$   
Fig. 6.6. Bifurcation diagram  $x = f(\eta)$

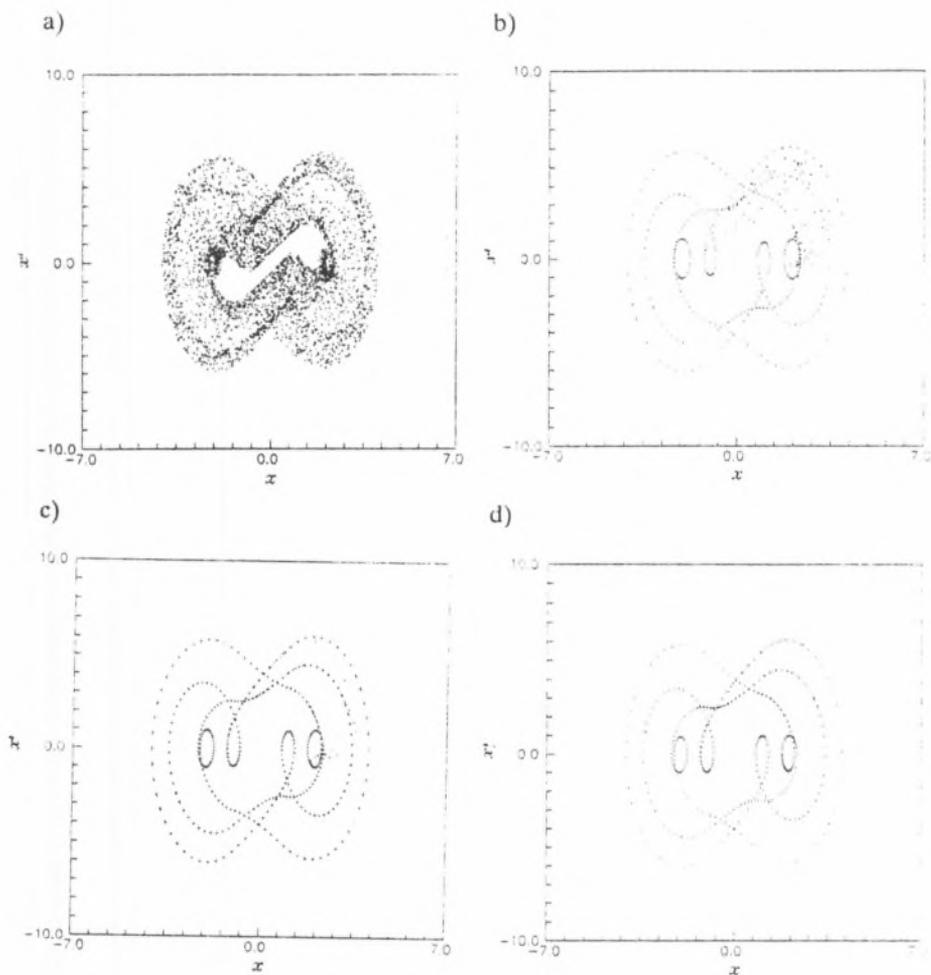
<sup>1</sup>Stwierdzenie to zostanie potwierdzone jeszcze innymi kryteriami jakości ruchu.



**Rys. 6.7.** Wykresy bifurkacyjne  $x = f(\xi)$ ; a)  $\eta = 1.0$ , b)  $\eta = 2.0$ , c)  $\eta = 3.0$ , d)  $\eta = 4.0$ , e)  $\eta = 5.0$ , f)  $\eta = 6.0$

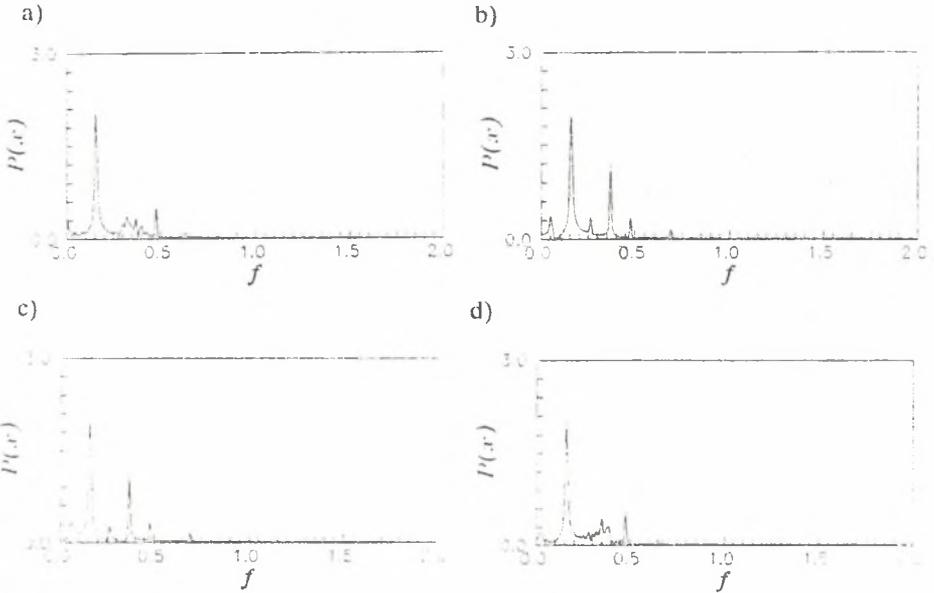
**Fig. 6.7.** Bifurcation diagrams  $x = f(\xi)$  for a)  $\eta = 1.0$ , b)  $\eta = 2.0$ , c)  $\eta = 3.0$ , d)  $\eta = 4.0$ , e)  $\eta = 5.0$ , f)  $\eta = 6.0$

widmo mocy z kilkoma wyraźnymi pikami. W miarę wzrostu parametru  $\alpha$  piki te powinny zacząć dominować w widmie, co znalazło odzwierciedlenie w wykresach 6.9b i c. Natomiast widmo przedstawione na rysunku 6.9d nie koreluje z mapą Poncarégo 6.8d. Przy-



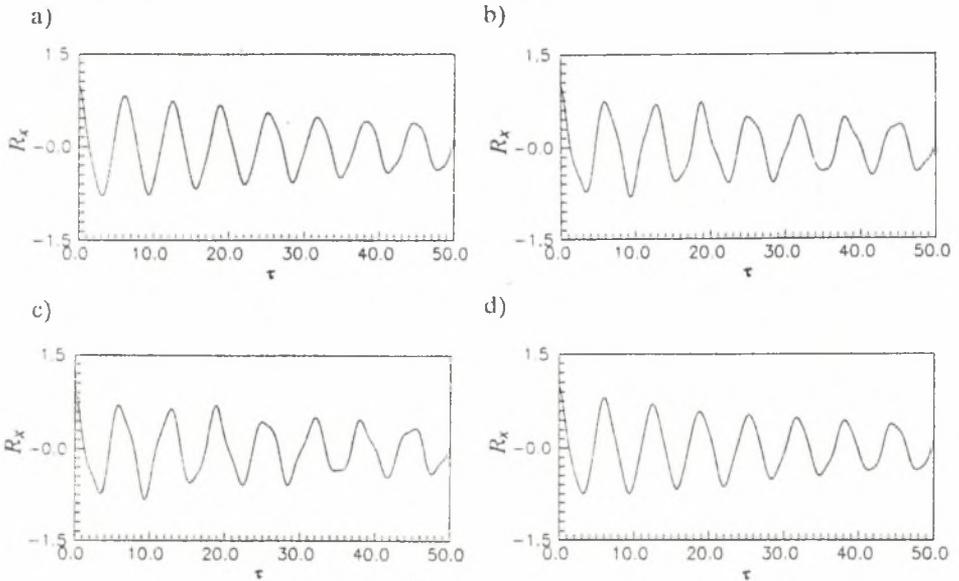
**Rys. 6.8.** Mapy Poincarégo dla a)  $\alpha = 8.36$ , b)  $\alpha = 8.50$ , c)  $\alpha = 8.64$ , d)  $\alpha = 8.71$   
**Fig. 6.8.** Poincaré maps for a)  $\alpha = 8.36$ , b)  $\alpha = 8.50$ , c)  $\alpha = 8.64$ , d)  $\alpha = 8.71$

czynny tej rozbieżności zdaniem autora należy się dopatrywać w występowaniu tzw. *przejściowego* chaosu, który dla wybranego czasu analizy objawiał się bardzo mocno. Nasuwa się tutaj wniosek, iż przy dokonywanej ocenie jakości ruchu oprócz podania wektora parametrów  $p$  i warunków początkowych, należy także określić czas obserwacji. Może się bowiem zdarzyć, że układ drgający globalnie w sposób regularny, przy ocenie lokalnej wykazuje pewne cechy chaotyczności. Jeszcze mocniejszym potwierdzeniem powyższego stwierdzenia mogą być przebiegi funkcji autokorelacji, które pokazano na rysunku 6.10. Wszystkie z zamieszczonych przypadków klasyfikują się jako funkcje autokorelacji



Rys. 6.9. Widmo mocy dla; a)  $\alpha = 8.36$ , b)  $\alpha = 8.50$ , c)  $\alpha = 8.64$ , d)  $\alpha = 8.71$

Fig. 6.9. Power spectrum for a)  $\alpha = 8.36$ , b)  $\alpha = 8.50$ , c)  $\alpha = 8.64$ , d)  $\alpha = 8.71$

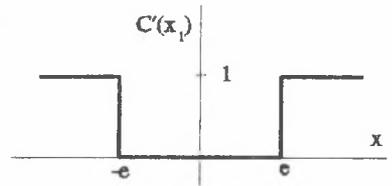


Rys. 6.10. Funkcija autokorelacji; a)  $\alpha = 8.36$ , b)  $\alpha = 8.50$ , c)  $\alpha = 8.64$ , d)  $\alpha = 8.71$

Fig. 6.10. Autocorrelation function for a)  $\alpha = 8.36$ , b)  $\alpha = 8.50$ , c)  $\alpha = 8.64$ , d)  $\alpha = 8.71$

przebiegów chaotycznych, tzn. są nieregularne i ze wzrostem  $m$  (por. podrozdz. 4.5) reprezentowanego na wykresach 6.10 poprzez czas korelacji  $t$ , wartość  $R_x(m)$  spada.

Przebadajmy "sporne" przebiegi jeszcze innym kryterium, a mianowicie wykładnikami Lapunowa. Ponieważ różnice w przedstawionych ocenach wynikały z różnych długości czasów obserwacji, na podstawie których zostały one opracowane, wyznaczmy współczynniki Lapunowa jako funkcje czasu, czyli  $\lambda_i = f(t)$  ( $i = 1, \dots, k$ , gdzie  $k$  jest liczbą równań w postaci autonomicznej opisujących układ). Przygotujmy w tym celu elementy jacobianu równania wariacyjnego (4.19) [140], opracowane dla równania (6.7)

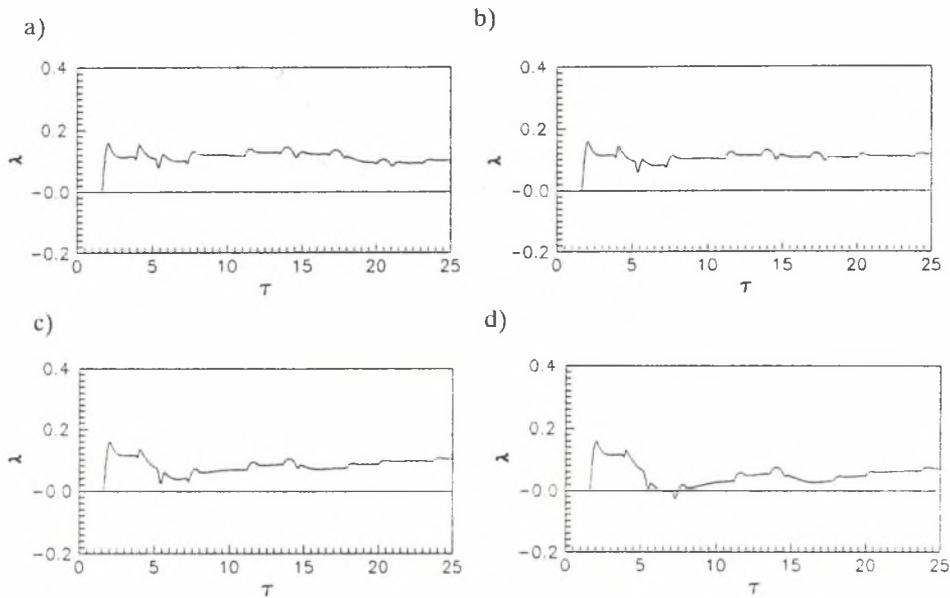


Rys. 6.11. Funkcja  $C'(x_1)$   
Fig. 6.11. Function  $C'(x_1)$

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0 & D_{12} &= \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 1 & D_{13} &= \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = 0 \\
 D_{21} &= \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = C'(x_1) & D_{22} &= \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = -2\xi & D_{23} &= \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = -\beta \sin x_3 \\
 D_{31} &= \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = 0 & D_{32} &= \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = 0 & D_{33} &= \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 0,
 \end{aligned} \quad (6.8)$$

gdzie postać funkcji  $C'(x_1)$  przedstawiono na rysunku 6.11. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że pierwszy z wykładników przyjmuje wartości dodatnie, drugi ujemne, natomiast trzeci jest zerowy.

Na rysunku 6.12 przedstawiono przebiegi czasowe maksymalnego wykładnika Lapunowa dla bezwymiarowego czasu obserwacji  $\tau = 25.0$ . Charakter otrzymanych przebiegów potwierdza słuszność wcześniejszych przypuszczeń o występowaniu obszaru/obszarów chaosu przejściowego.



**Rys. 6.12.** Maksymalny wykładnik Lapunowa; a)  $\alpha = 8.36$ , b)  $\alpha = 8.50$ ,  
c)  $\alpha = 8.64$ , d)  $\alpha = 8.71$

**Fig. 6.12.** Maximum Liapunov exponent for a)  $\alpha = 8.36$ , b)  $\alpha = 8.50$ ,  
c)  $\alpha = 8.64$ , d)  $\alpha = 8.71$

## 7. DYNAMIKA SILNIKA OBROTOWEGO Z LUZEM

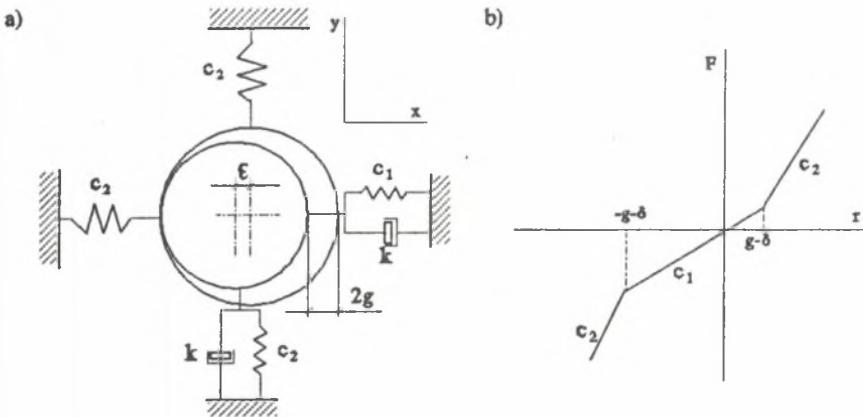
Poważnym problemem w dynamice silników obrotowych jest ich nieliniowe zachowanie się, powodowane okresowym kontaktem jego elementów [15,23,57]. Najprostszy model silnika obrotowego, w którym powyższe zjawisko może wystąpić, przedstawiono na rysunku 7.1a. Wirnik podparty jest w dwóch elastycznych podporach o współczynnikach sztywności  $c_1$  i tłumienia  $k$ . W przypadku gdy przemieszczenie wirnika w kierunku promieniowym jest większe od rzeczywistego luzu, następuje kontakt z pierścieniem zewnętrznym (patrz rys.7.1b). Obciążenie dynamiczne pochodzi od nierównoważenia mas wirnika  $\rho$  i jest harmoniczną funkcją kąta obrotu. Ruch układu opisują następujące nieliniowe równania

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_1\dot{x} + \omega_1^2x + \omega_2^2H(x,y)(x - \delta)(1 - \frac{g}{r}) = \omega^2\rho\cos(\omega t), \quad (7.1)$$

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_1\dot{y} + \omega_1^2y + \omega_2^2H(x,y)y(1 - \frac{g}{r}) = \omega^2\rho\sin(\omega t), \quad (7.2)$$

gdzie:

$$\omega_1 = \sqrt{c_1/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{c_2/m}, \quad r = \sqrt{(x - \delta)^2 + y^2}.$$



Rys. 7.1. Silnik obrotowy z luzem; a) model fizyczny, b) siła sprężystości jako funkcja przemieszczenia promieniowego

Fig. 7.1. Rotor system with clearance; a) physical model, b) stiffness force as a function of radial displacement

Funkcja nieciągłości  $H(x,y)$  jest funkcją Heaviside'a o następującej postaci

$$H(x, y) = \begin{cases} 0, & r < g \\ 1, & r \geq g \end{cases}. \quad (7.3)$$

Równania (7.1) i (7.2) sprowadzono do postaci bezwymiarowej (wprowadzając także bezwymiarowy czas  $\tau$ )

$$x'' + 2\xi x' + x + \alpha H(x,y) N(x) = \eta^2 \rho \cos(\eta \tau), \quad (7.4)$$

$$y'' + 2\xi y' + y + \alpha H(x,y) N(y) = \eta^2 \rho \sin(\eta \tau). \quad (7.5)$$

Zakładając, że powyższy układ wykonuje drgania wymuszone w stanie ustalonym, rozwiązanie można otrzymać np. metodą bilansu harmonicznego. Wówczas przewiduje się je w postaci

$$x(\tau) = a_{x0} + \sum_{i=1}^N (a_{xi} \cos(i \eta \tau) + b_{xi} \sin(i \eta \tau)), \quad (7.6)$$

$$y(\tau) = a_{y0} + \sum_{i=1}^N (a_{yi} \cos(i \eta \tau) + b_{yi} \sin(i \eta \tau)). \quad (7.7)$$

Przedstawmy także nieliniowe człony równań (7.6) i (7.7) jako funkcje harmoniczne

$$\alpha H(x,y) N(x) = a_{Nx0} + \sum_{i=1}^N (a_{Nxi} \cos(i \eta \tau) + b_{Nxi} \sin(i \eta \tau)) \quad (7.8)$$

$$\alpha H(x,y) N(y) = a_{Ny0} + \sum_{i=1}^N (a_{Nyi} \cos(i \eta \tau) + b_{Nyi} \sin(i \eta \tau)), \quad (7.9)$$

a następnie podstawmy równania (7.6) + (7.9) do zależności (7.4) i (7.5). Porównując wyrazy zawierające takie same funkcje trygonometryczne po prawej i lewej stronie powstałych tożsamości otrzymano układ równań algebraicznych (7.10) i (7.11),

$$\begin{aligned} g_x(0) &= a_{x0} + a_{Nx0} = 0 \\ g_x^c(1) &= -\eta^2 a_{x1} + 2\xi \eta b_{x1} + a_{x1} + a_{Nx1} = \eta^2 \rho \\ g_x^s(1) &= -\eta^2 b_{x1} - 2\xi \eta a_{x1} + b_{x1} + b_{Nx1} = 0 \\ &\dots \\ &\dots \\ g_x^c(i) &= -\eta^2 i^2 a_{xi} + 2\xi \eta i b_{xi} + a_{xi} + a_{Nxi} = 0 \\ g_x^s(i) &= -\eta^2 i b_{xi} - 2\xi \eta i a_{xi} + b_{xi} + b_{Nxi} = 0 \\ &\dots, \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned}
g_y(0) &= a_{y0} + a_{Ny0} = 0 \\
g_y^c(1) &= -\eta^2 a_{y1} + 2\xi\eta b_{y1} + a_{y1} + a_{Ny1} = 0 \\
g_y^s(1) &= -\eta^2 b_{y1} - 2\xi\eta a_{y1} + b_{y1} + b_{Ny1} = \eta^2 \rho \\
&\dots \\
&\dots \\
g_y^c(i) &= -\eta^2 i^2 a_{yi} + 2\xi\eta i b_{yi} + a_{yi} + a_{Nyi} = 0 \\
g_y^s(i) &= -\eta^2 i b_{yi} - 2\xi\eta i a_{yi} + b_{yi} + b_{Nyi} = 0 \\
&\dots,
\end{aligned} \tag{7.11}$$

których rozwiązania podjęto się w pracy [57]. Po przygotowaniu wektora początkowego rozwiązania, jego dokładną wartość uzyskano metodą Newtona-Raphsona. Zdaniem autora dokładność (por. rys.4 [57]) i użyteczność (dotyczy wyłącznie drgań periodycznych) stosowanej metody jest dosyć ograniczona.

W celu przeprowadzenia pełniejszej analizy możliwych odpowiedzi, równania (7.4) i (7.5) sprowadzono do postaci autonomicznej, tj. do układu pięciu równań pierwszego rzędu

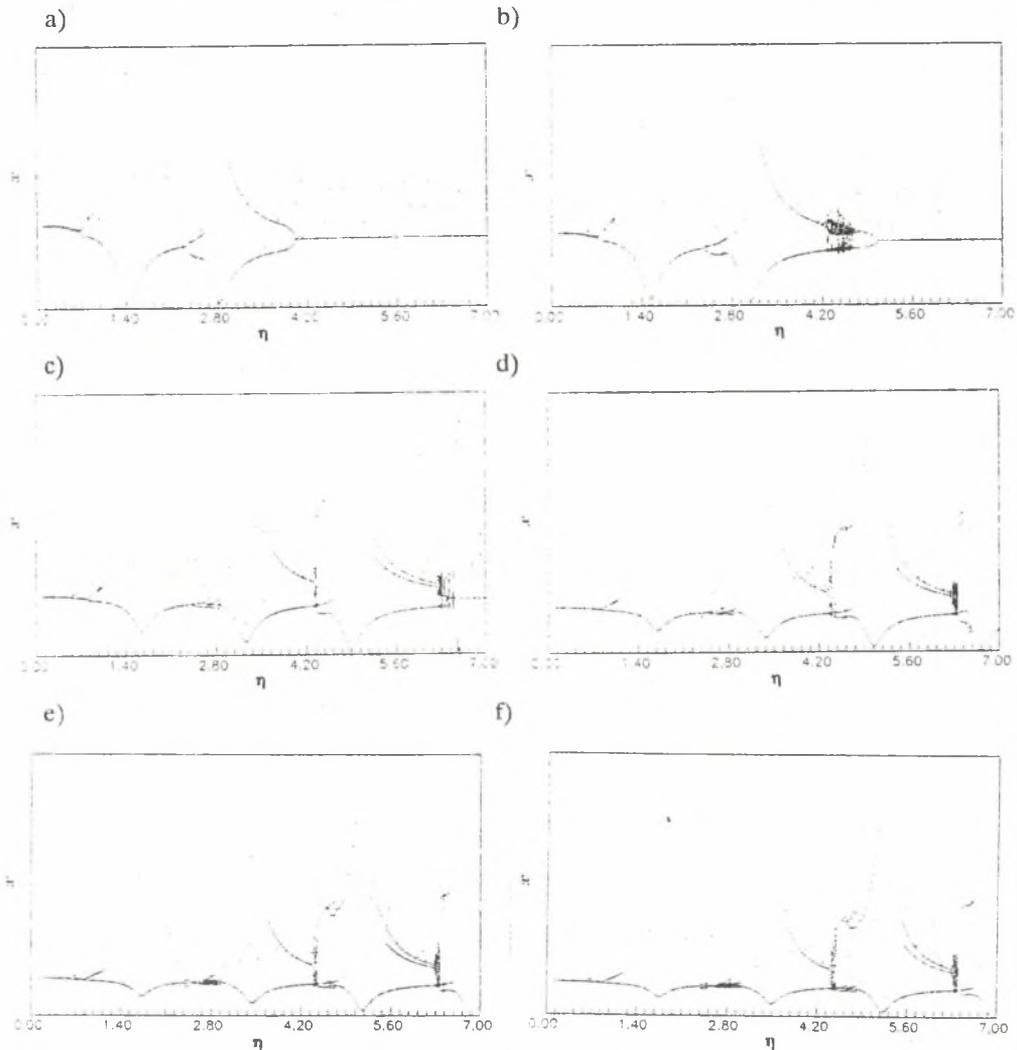
$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2 \\
x_2' &= -x_1 - \alpha H(x_1, x_4)(x_1 - g)(1 - \frac{g}{r}) - 2\xi x_2 + \beta \cos x_3 \\
x_3' &= \eta \\
x_4' &= x_5 \\
x_5' &= -x_4 - \alpha H(x_1, x_4)x_4(1 - \frac{g}{r}) - 2\xi x_5 + \beta \sin x_3,
\end{aligned} \tag{7.12}$$

gdzie:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_4^2}, \quad \beta = \eta^2 \rho.$$

Analizę numeryczną powyższego układu równań podejmowano w wielu pracach, jednakże na szczególną uwagę zasługują prace [83,84,87], gdzie badano zachowanie się powyższego układu w szerokim obszarze zmienności wektora parametrów układu  $p$ . W pracy zamieszczono pewne wyniki uzupełniające, uzyskane innym algorytmem lokalizacji wystąpienia punktu nieciągłości. W cytowanych pracach w pierwszym kroku po wykryciu nieciągłości wykorzystywano interpolację kwadratową (rys.3.7) zamiast odwrotnej interpolacji, co zgodnie z przeprowadzonymi obliczeniami autora prowadzi do wydłużenia czasu symulacji. Ma to szczególnie znaczenie, gdy  $g$  jest małe i dochodzi do częstego kontaktu silnika z dodatkową podporą.

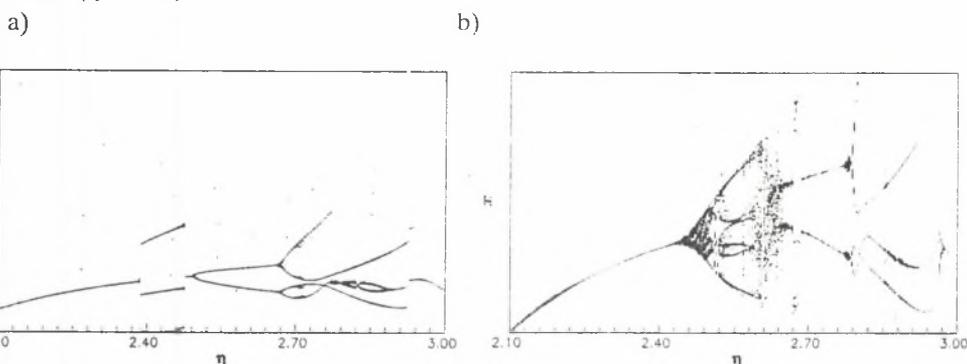
Badania symulacyjne przeprowadzono dla trójelementowego wektora parametrów  $p^* = [\alpha, \eta, \zeta]^T$ , dla rozpiętości elementów wektora parametrów wynikającej z technicznych możliwości pracy układu. Wartości pozostałych parametrów ustalono na stałym poziomie, tj.  $g, \delta = 10$ ,  $\varrho = 6 \cdot 10^{-5}$ . Przyjęcie tak dużej wartości luzu  $g$  powoduje praktycznie rozprzężenie równań (7.1) i (7.2), czyli w zasadzie można obserwować tylko współrzędną  $x$ . Na rysunku 7.2 przedstawiono wykresy bifurkacyjne  $x = f(\eta)$  dla kilku



Rys. 7.2. Wykresy bifurkacyjne  $x = f(\eta)$  dla; a)  $\alpha = 5$ , b)  $\alpha = 10$ , c)  $\alpha = 20$ , d)  $\alpha = 3$ , e)  $\alpha = 40$ , f)  $\alpha = 50$

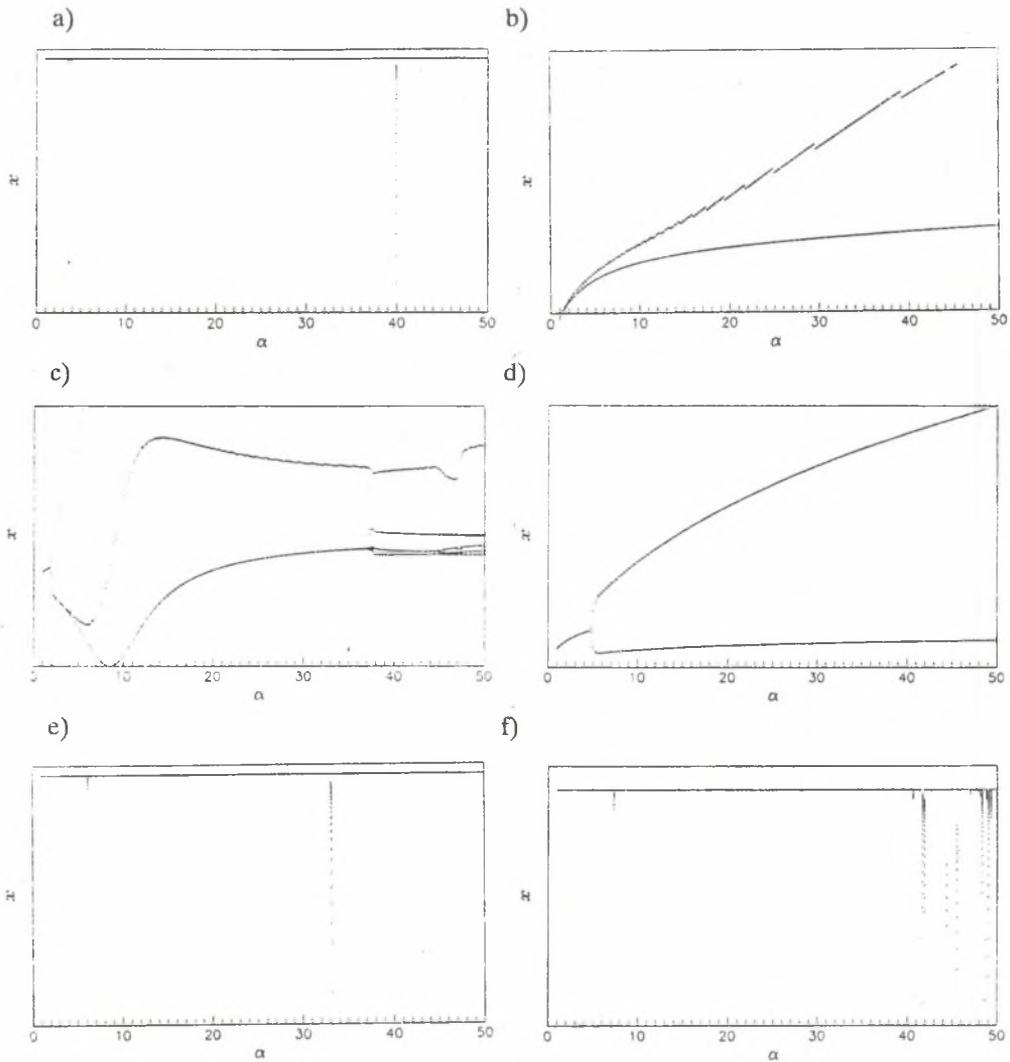
Fig. 7.2. Bifurcation diagrams  $x = f(\eta)$  for a)  $\alpha = 5$ , b)  $\alpha = 10$ , c)  $\alpha = 20$ , d)  $\alpha = 3$ , e)  $\alpha = 40$ , f)  $\alpha = 50$

wartości współczynnika sztywności  $\alpha$ . Do wartości współczynnika częstości wymuszenia  $\eta < 4$ , niezależnie od wartości współczynnika  $\alpha$  wykresy mają podobny charakter tj. dla dwóch wartości  $\eta$  występuje pojedyncza bifurkacja superkrytyczna (rys. 7.2a i b) bądź ich kaskada (rys. 7.2c-f). Wzrost  $\eta$  powyżej 4 powoduje dla niskich wartości  $\alpha$  ustalenie się amplitudy drgań (rys. 7.2a i b), natomiast dla wysokich układ dokonuje dwóch bifurkacji subkrytycznych przechodząc przez dwa obszary ruchu nieregularnego. Aby zaobserwować wspomnianą kaskadę bifurkacji "rozciągnięto" przedział  $<2.1, 3.0>$  na całą oś poziomą wykresu, co zaprezentowano na rysunku 7.3a. Widoczna jest tam kaskada składająca się z dwóch bifurkacji "Hopfa", które poprzedza bifurkacja typu "pitchfork". Zmniejszając wartość luzu  $g$  do  $5 \cdot 10^{-4}$ , na wskutek sprzężenia w kierunku prostopadłym odpowiedź układu jest bardziej złożona, co w konsekwencji prowadzi do szybkiej utraty regularności ruchu (rys. 7.3b).



**Rys. 7.3.** Wykresy bifurkacyjne częstości wymuszenia  $\eta$  dla: a)  $g, \delta = 10$ , b)  $g, \delta = 0.0005$   
**Fig. 7.3.** Bifurcation diagrams of frequency ratio  $\eta$  for a)  $g, \delta = 10$ , b)  $g, \delta = 0.0005$

Następną grupą wykresów bifurkacyjnych, które sporządzono dla identycznych wartości luzu  $g$  i asymetrii wirnika w stosunku do podpór wynoszącej  $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ , obrazuje zależność zmienności zastępczej amplitudy drgań od współczynnika sztywności  $x = f(\alpha)$ . Przedstawione na rysunku 7.4 wykresy można podzielić na dwie grupy. Pierwszą stanowią charakterystyki, gdzie układ drga z jedną ustaloną amplitudą drgań (z wyjątkiem pewnych obszarów asymptotycznego "rozbiegania się", co jest dobrze widoczne na rys. 7.4f), tj. rys. 7.4a, e i f. Do drugiej natomiast zaliczyć można charakterystyki objawiające zmianę jakości ruchu (rys. 7.4b, c, d), która może przyjmować formę bifurkacji "Hopfa" (rys. 7.4b i d), bądź typu "pitchfork" (rys. 7.4c). Generalnie rzecz ujmując można stwierdzić, iż parametr  $\alpha$  nie powoduje "drastycznych" zmian w jakości ruchu układu. Jednakże warto poświęcić nieco więcej uwagi wykresom wykazującym bardzo dużą rozbieżność pomiędzy wartościami uzyskiwanych amplitud, gdzie ich stosunek przekracza kilka tysięcy (rys. 7.4a, e, f). Występowanie tak dużych rozpiętości w uzyskiwanych amplitudach drgań jest niedopuszczalne z punktu widzenia stabilności układu. Ponadto sytuacja taka ukazuje



**Rys. 7.4.** Wykresy bifurkacyjne  $x = f(\alpha)$ ; a)  $\eta = 1.0$ , b)  $\eta = 2.0$ , c)  $\eta = 3.0$ , d)  $\eta = 4.0$ , e)  $\eta = 5.0$ , f)  $\eta = 7.0$

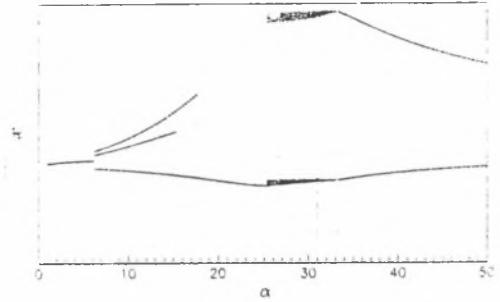
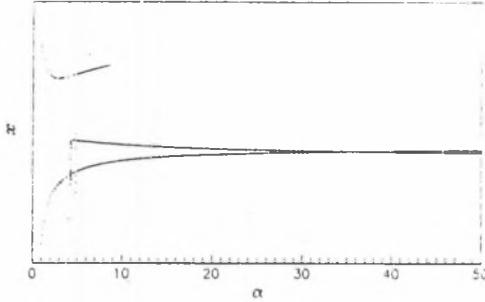
**Fig. 7.4.** Bifurcation diagrams  $x = f(\alpha)$  for a)  $\eta = 1.0$ , b)  $\eta = 2.0$ , c)  $\eta = 3.0$ , d)  $\eta = 4.0$ , e)  $\eta = 5.0$ , f)  $\eta = 7.0$

dynamikę układu przez pryzmat dużych przemieszczeń, czyli w skali *macro*. Wyniki zmiany osi pionowej rysunku 7.4 przedstawiono na kolejnym rysunku. Wykresy bifurkacyjne w skali *micro* różnią się zdecydowanie od swych odpowiedników w skali *macro*. Pozorne formy ruchu regularnego ujawniły swoją nieregularną naturę w

nie spotykany wcześniej sposób. Odpowiedź układu traci swoje podharmoniczne (rys. 7.5b i c) bądź przyjmuje formę ruchu nieregularnego "skokowo" (rys. 7.5b), w przeciwieństwie do płynnych zmian cechujących układy ciągłe.

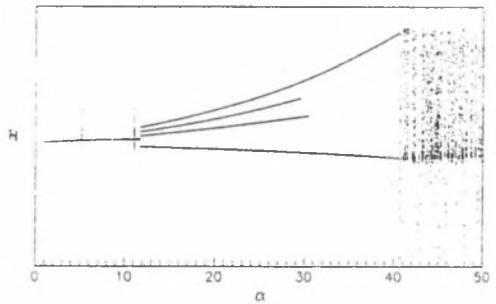
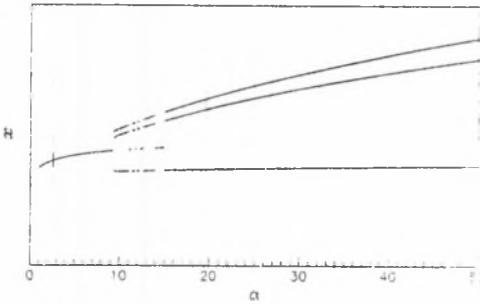
a)

b)



c)

d)

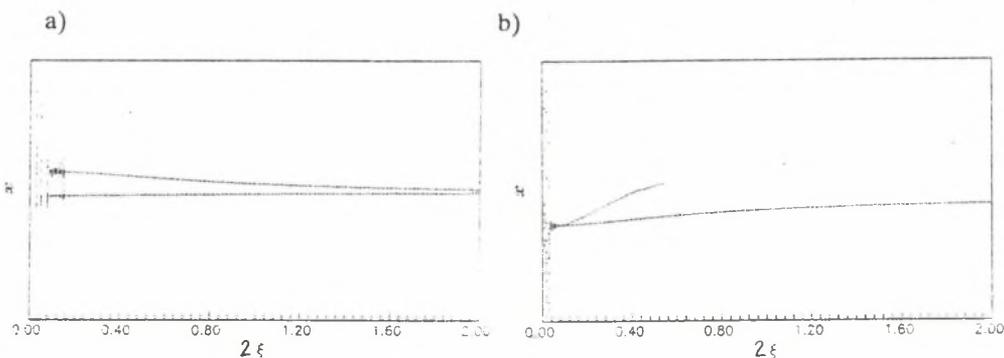


**Rys. 7.5.** Wykresy bifurkacyjne  $x = f(\alpha)$  w skali *micro* dla: a)  $\eta = 1.0$ , b)  $\eta = 2.0$ , c)  $\eta = 3.0$ , d)  $\eta = 4.0$ , e)  $\eta = 5.0$ , f)  $\eta = 7.0$

**Fig. 7.5.** Bifurcation diagrams  $x = f(\alpha)$  in *macro* scale for a)  $\eta = 1.0$ , b)  $\eta = 2.0$ , c)  $\eta = 3.0$ , d)  $\eta = 4.0$ , e)  $\eta = 5.0$ , f)  $\eta = 7.0$

Podobnie jak w przypadku dwóch poprzednich układów, wzrost współczynnika tłumienia  $\xi$  działa stabilizująco na układ. Na rysunku 7.6 pokazano jego wpływ na drgania podharmoniczne występujące dla współczynnika częstości wymuszenia  $\eta$  równego 2 i 4 przy współczynniku sztywności  $\alpha = 30$ . Stabilizacja ta może odbywać się systematycznie (rys. 7.5b) bądź katastroficznie, tzn. następuje nagły zanik jednej/kilku podharmonicznych dla pewnej krytycznej wartości zmieniającego się parametru, który w tym przypadku jest współczynnikiem tłumienia (rys. 7.5a).

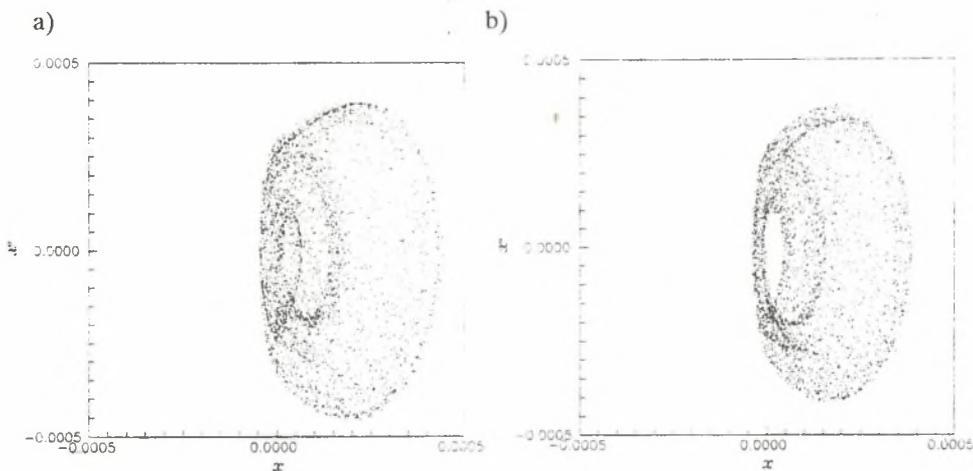
Stabilizujące działanie tłumienia można także sprawdzić sporządzając mapy Poincarégo. Zgodnie z teorią chaosu wzrostowi współczynnika  $\xi$  w układzie drgającym chaotycznie może towarzyszyć pojawienie się wpraw struktur fraktalnej, a następnie od



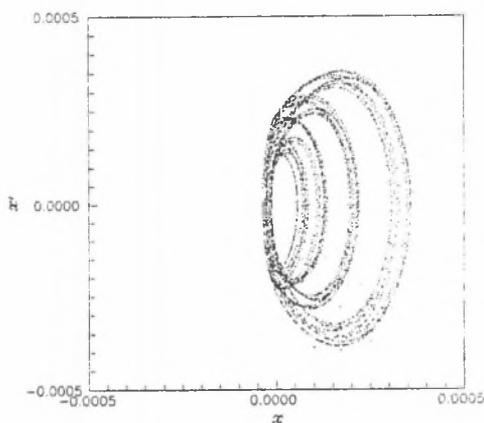
**Rys. 7.6.** Wykresy bifurkacyjne współczynnika tłumienia  $\xi$  dla; a)  $\eta = 2$ , b)  $\eta = 4$   
**Fig. 7.6.** Bifurcation diagrams of damping ratio  $\xi$  for a)  $\eta = 2$ , b)  $\eta = 4$

pewnej krytycznej wartości współczynnika tłumienia  $\xi$  układ drga regularnie. Na rysunku 7.7 przedstawiono sekwencję map Poincarégo obrazującą właśnie taką sytuację z tą różnicą, iż nie występuje tutaj wyraźnie struktura fraktalna.

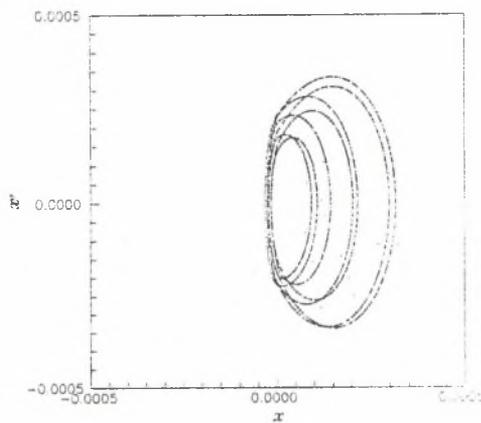
Analiza drgań w kierunku  $x$  nie wyczerpuje informacji na temat zachowania się badanego układu, ponieważ posiada on dwa stopnie swobody i przez występowanie wielkości  $\delta$  nie jest symetryczny. Jakkolwiek ze względu na występowanie identycznych wartości współczynników w równaniach (7.4) i (7.5), powtarzanie pełnej analizy dla kierunku  $y$  jest niecelowe. Zatem dokonajmy sprawdzenia wybranych odpowiedzi układu dla kierunku  $y$ . Na rysunku 7.8 przedstawiono mapy Poincarégo dla drgań regularnych i nieregularnych. Zauważyć można zmniejszone amplitudy przemieszczeń i prędkości w porównaniu z drganiami w kierunku  $x$  (rys. 7.7). Mapę 7.8b otrzymano dla takich samych danych, jak mapę 7.7b.



c)



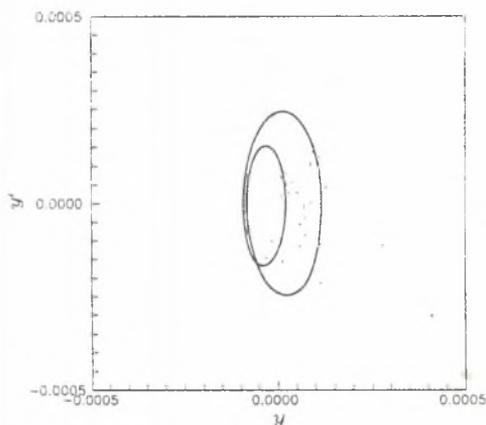
d)



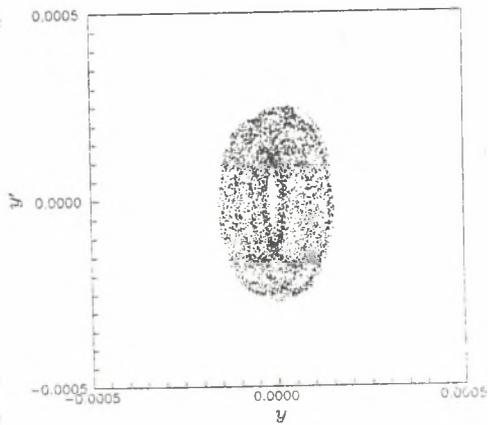
**Rys. 7.7.** Mapy Poincarégo; a)  $\xi = 0.075$ , b)  $\xi = 0.100$ , c)  $\xi = 0.125$ , d)  $\xi = 0.150$

**Fig. 7.7.** Poincaré maps for a)  $\xi = 0.075$ , b)  $\xi = 0.100$ , c)  $\xi = 0.125$ , d)  $\xi = 0.150$

a)



b)

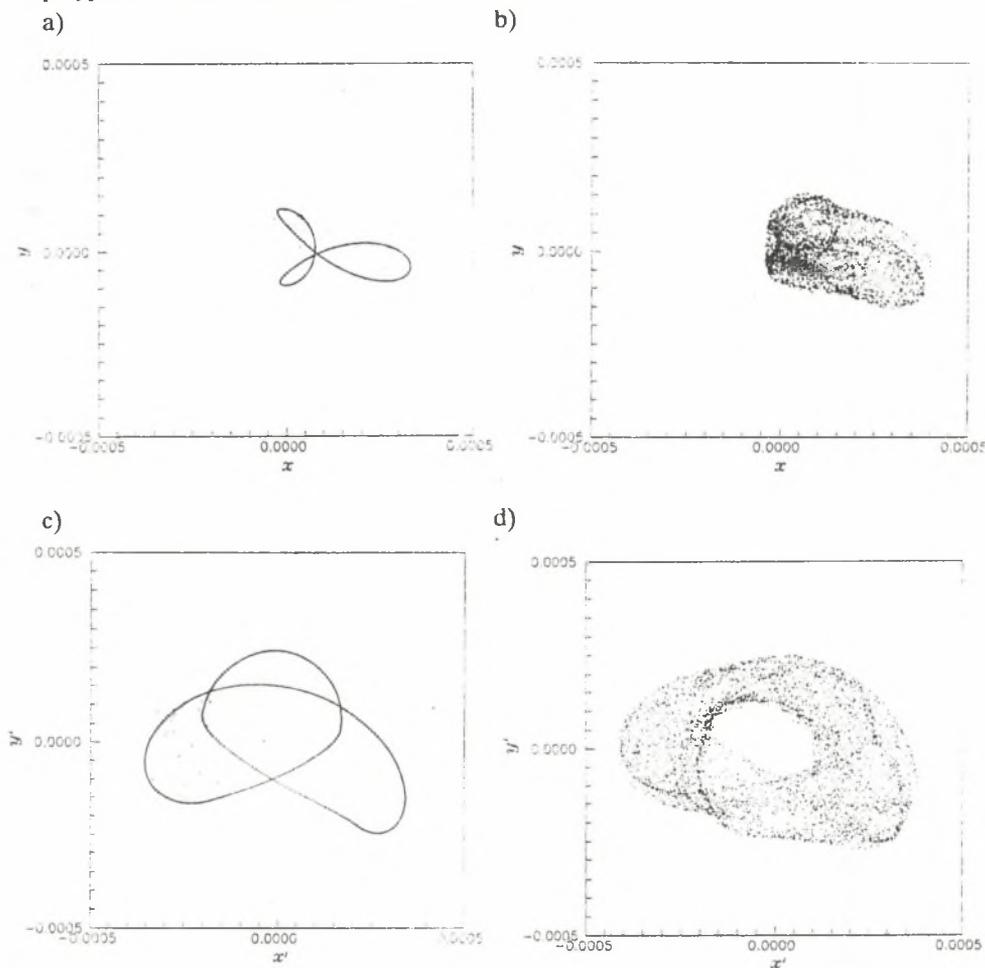


**Rys. 7.8.** Mapy Poincarégo w kierunku  $y$  dla ruchu a) periodycznego, b) nieregularnego

**Fig. 7.8.** Poincaré maps in  $y$  direction for a) periodic and b) chaotic motion

Inną ciekawą charakterystyką ruchu badanego układu jest trajektoria środka masy, którą ze względu na możliwość osiągania ruchu chaotycznego wygodnie byłoby obserwować poprzez mapę Poincarégo nie trajektorii fazowej jednej ze współrzędnych, lecz przez **mapę Poincarégo trajektorii ruchu**. Konstrukcja tego zbioru odbywa się wg schematu budowy mapy dla układu nieautonomicznego (por. podrozdz.4.6).

Występowanie zamkniętej pętli tłumaczyć można dwojako, tj. mogą występować drgania quasi-periodyczne bądź stosunek częstości próbkowania do jednej z występujących subharmonicznych jest liczbą niewymierną. Większą jednoznacznością definicji cechuje się ruch nieregularny, którego mapę Poincarégo tworzy nieuporządkowana "chmura" punktów. I tak na rysunku 7.9 pokazano mapy Poincarégo trajektorii ruchu (rys. 7.9a i b) oraz trajektorii prędkości ruchu (rys. 7.9c i d), ukazując porównanie ich geometrii dla przypadku ruchu regularnego i nieregularnego.



**Rys. 7.9.** Mapy Poincarégo trajektorii dla ruchu a) periodycznego, b) nieregularnego, trajektorii prędkości dla ruchu c) periodycznego, c) nieregularnego

**Fig. 7.9.** Poincaré maps for a) regular and b) irregular displacement, and c) regular and d) irregular velocity

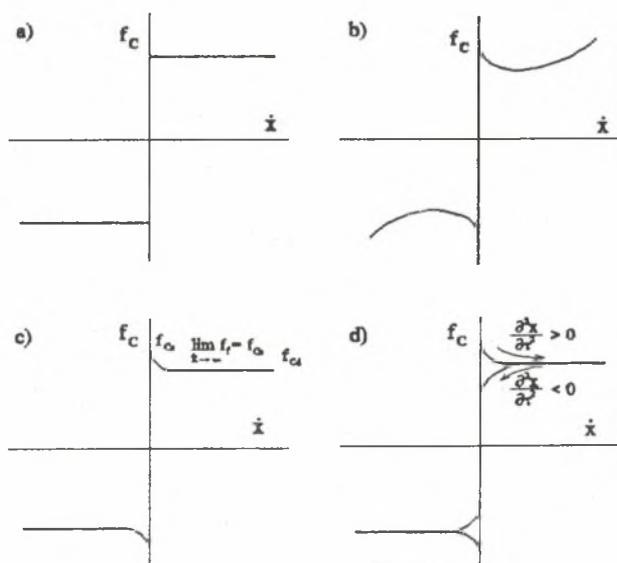
Dla bardzo wielu atraktorów (pól przyciągania) przebieg funkcji korelacji poszczególnych punktów mapy Poincarégo ma charakter funkcji wykładniczej, a więc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(\varepsilon) = a \varepsilon^{D_c}, \quad (7.13)$$

gdzie  $a$  jest stałą charakterystyczną dla badanego układu. Logarytmując równanie (7.13) otrzymuje się zależność pozwalającą w sposób praktyczny obliczać wymiar korelacyjny (oczywiście w świetle przyjętego założenia). Odcinając na osi poziomej wartości  $\ln \varepsilon$ , a na osi pionowej  $\ln C(\varepsilon)$  otrzymuje się krzywą, której styczna jest wymiarem korelacyjnym. Decyzję o jakości ruchu układu można także kształtować opierając się na *wymiarze korelacyjnym*, będący w ścisłym związku z maksymalnym wykładnikiem Lapunowa. Obliczony wymiar korelacyjny dla przypadku ruchu periodycznego przedstawionego na rysunku 7.8a wyniósł 1.06, natomiast dla nieregularnego przedstawionego na rysunku 7.8b 1.96. Powstałe różnice można wytłumaczyć w ten sposób, iż w przypadku ruchu nieregularnego atraktor jest prawie figurą płaską, natomiast pozornie gładka pętla ruchu periodycznego ma pewne cechy struktury fraktalnej.

## 8. DYNAMIKA UKŁADÓW Z TARCIEM COULOMBA

Jednym z częściściej stosowanych modeli rozproszenia energii w układach mechanicznych jest tarcie Coulomba, będące przedmiotem intensywnych badań od wielu lat. Warto w tym miejscu wspomnieć pionierską pracę Den Hartoga [20], w której autor wykazał, iż efektem działania tej siły tarcia jest histereza charakterystyki *siła-przemieszczenie*. I chociaż prace na ten temat są kontynuowane [49,90,98,103,122], trudno stwierdzić, iż problem ścisłego, jednoznacznego opisu tego zjawiska został zamknięty. Przyjmowane modele zależą od specyfiki prowadzonych badań, czego wynikiem jest duża ich różnorodność, od prostych, opisywanych stałymi wartościami sił tarcia począwszy (rys. 8.1a), na złożonych będących nie tylko funkcją prędkości, lecz także przyspieszenia skończywszy (rys. 8.1d).



Rys. 8.1. Modele charakterystyk tarcia Coulomba

Fig. 8.1. Different models of Coulomb friction characteristics

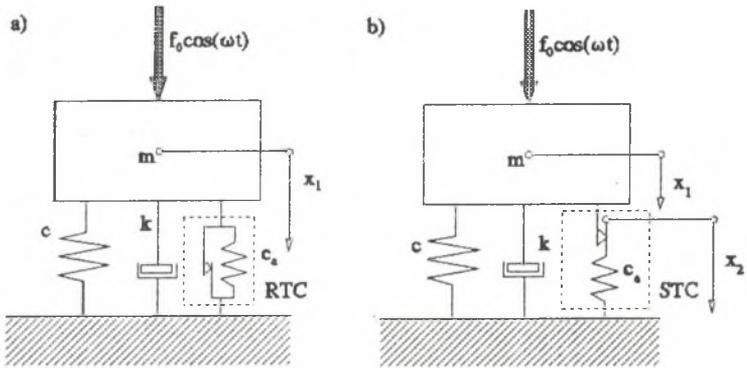
Rozpocznijmy analizę od zbadania dynamiki oscylatora harmonicznego z szeregowym (rys. 8.2a) i równoległym (rys. 8.2b) połączeniem z tłumikiem Coulomba. Modele takie są bardzo często spotykane w dynamice maszyn, prowadząc do niepożądanych drgań "stick-slip". Oscylator z szeregową parą Coulomba (STC) posiada półtora stopnia swobody i jest opisany następującymi równaniami

$$x_1'' + 2\xi x_1' + x_1 + D(x_1, x_2, x_2') = \beta \cos(\eta \tau), \quad (8.1)$$

$$x_2' = \begin{cases} 0, & |x_1 - x_2| \leq f_C \\ x_1', & |x_1 - x_2| \geq f_C \end{cases}, \quad (8.2)$$

gdzie:

$$D(x_1, x_2, x_2') = \begin{cases} \alpha(x_1 - x_2), & x_2' = 0 \\ f_C(x_2') \operatorname{sgn}(x_2'), & x_2' \neq 0 \end{cases}. \quad (8.3)$$



**Rys. 8.2.** Oscylator harmoniczny z: a) szeregowym, b) równoległym tłumikiem Coulomba  
**Fig. 8.2.** Harmonic oscillator with a) series and b) parallel connection with Coulomb damper

Przez  $f_C$  oznaczono siłę tarcia Coulomba, której postać zależy od przyjętego modelu. Zastosujmy metodę wolno zmieniającej się amplitudy i fazy do wyznaczenia rozwiązania oscylatora z szeregową parą Coulomba drgającego swobodnie zakładając, że  $\xi = 0$ ,  $c_a \rightarrow \infty$  oraz przyjmując model Coulomba przedstawiony na rysunku 8.2a. Wówczas ruch układu może być opisany tylko jednym równaniem ( $x = x_1$ )

$$x'' + x = -\Xi \operatorname{sgn} x', \quad (8.4)$$

gdzie  $\Xi$  jest bezwymiarowym modułem siły tarcia Coulomba. Po podstawieniu prawej strony równania (8.4) do równania (3.36) otrzymano

$$a' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\Xi \operatorname{sgn}(a(\tau) \cos(\tau + \psi(\tau))) \cos(\tau + \psi(\tau)) d\tau, \quad (8.5)$$

$$\psi' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\Xi \operatorname{sgn}(a(\tau) \cos(\tau + \psi(\tau))) \sin(\tau + \psi(\tau)) d\tau. \quad (8.6)$$

Po scałkowaniu powyższych zależności otrzymano formuły na  $a'$  i  $\psi'$

$$a' = -\frac{2\Xi}{\pi}, \quad (8.7)$$

$$\psi' = 0. \quad (8.8)$$

Zakładając warunek początkowy  $(x_0, \psi_0)$  otrzymuje się rozwiązanie analityczne w postaci

$$x(\tau) = (x_0 - \frac{2\Xi}{\pi} \tau) \sin(\tau + \psi_0). \quad (8.9)$$

Oscylator z równoległą parą Coulomba posiada jeden stopień swobody, a jego ruch opisany jest równaniem [98]

$$x'' + 2\xi x' + x + f_C(x, x') = \beta \cos(\eta \tau), \quad (8.10)$$

gdzie  $f_C(x, x')$  jest siłą w równoległym tłumiku Coulomba (RTC). Prześledźmy odpowiedzi takiego oscylatora dla modelu tarcia z nieodwracalną charakterystyką Coulomba (rys.8.1d). Wówczas wartość siły tarcia zależy również od znaku przyspieszenia i jest wyznaczana z następującej funkcji przełączającej

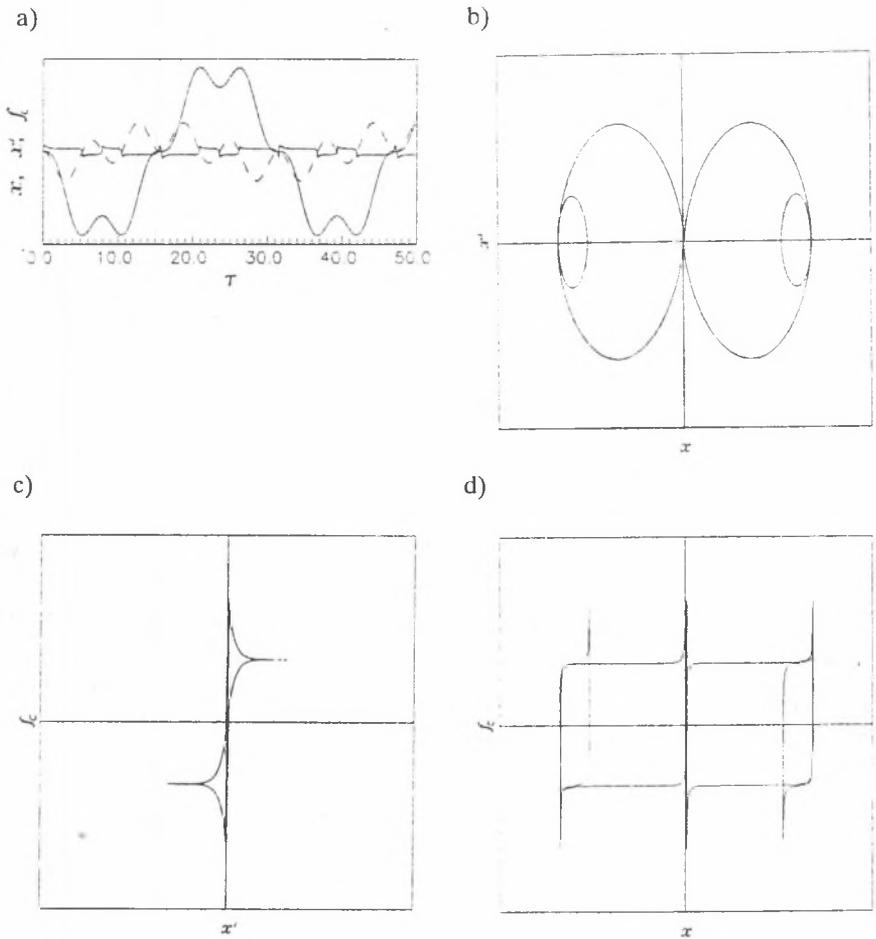
$$f_C = \begin{cases} f_{Cu}, & \operatorname{sgn}(x'') = \operatorname{sgn}(x') \\ f_{Cl}, & \operatorname{sgn}(x'') = -\operatorname{sgn}(x') \end{cases}, \quad (8.11)$$

przy czym  $f_{Cu}, f_{Cl}$  są obliczane na podstawie następujących zależności [126]

$$f_{Cu}(x') = f_{Cd} \left( 1 + \frac{f_{Cs} - f_{Cd}}{f_{Cd}} \exp(-a |x'|) \right), \quad (8.12)$$

$$f_{Cl}(x') = f_{Cd} (1 - \exp(-b |x'|)), \quad (8.13)$$

gdzie  $a, b$  są stałymi określającymi szybkość zanikania i narastania statycznej siły tarcia Coulomba. Na rysunkach 8.3 i 8.4 przedstawiono wyniki badań numerycznych przeprowadzonych dla oscylatora z równoległym tłumikiem Coulomba, otrzymane przez całkowanie sprowadzonego do postaci autonomicznej równania (8.10) algorytmem Rungego-Kutty. Wykorzystano metodę bisekcji w celu precyzyjnego wyznaczania punktów nieciągłości. Obserwowano przebiegi czasowe siły, przemieszczenia i prędkości w tłumiku, portret fazowy oraz charakterystyki siły w tłumiku jako funkcje prędkości i przemieszczenia.

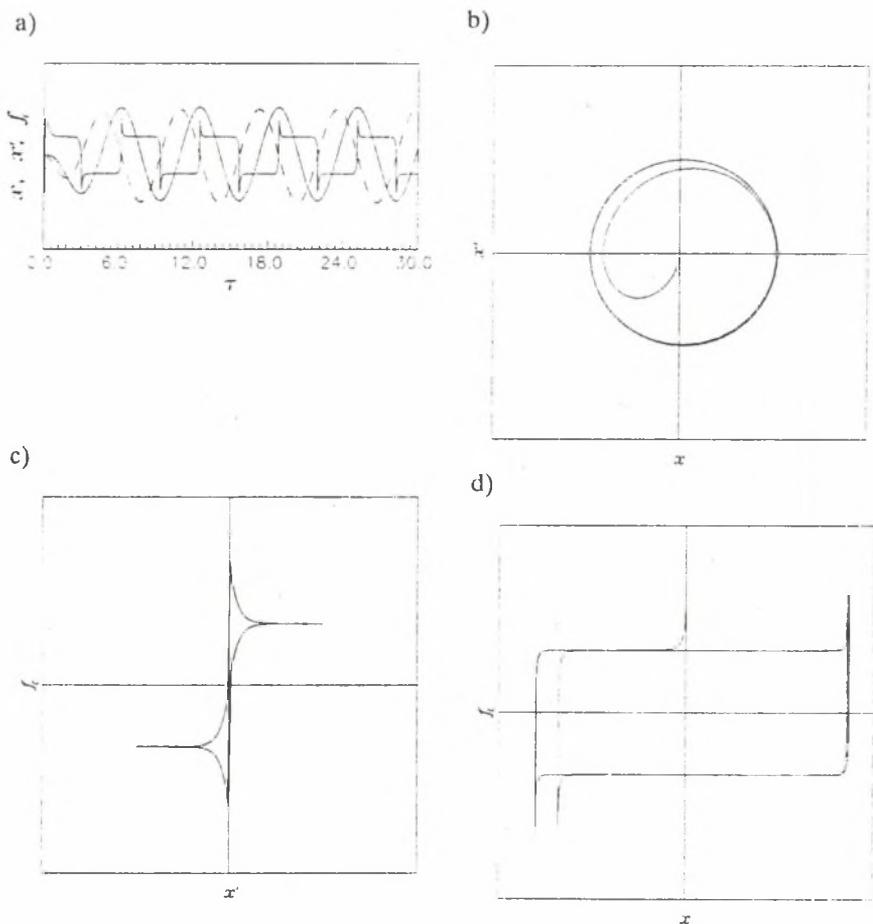


**Rys. 8.3.** Odpowiedzi oscylatora z rys. 8.1b dla  $\eta = 0.2$ ; a) przebiegi czasowe, b) portret fazowy, c) charakterystyka  $f_C = f(x')$ , d) charakterystyka  $f_C = f(x)$

**Fig. 8.3.** Response of the oscillator depicted in Fig. 8.1b for  $\eta = 0.2$ ; a) time histories, b) phase portrait, c)  $f_C = f(x')$  characteristics and d)  $f_C = f(x)$  characteristics

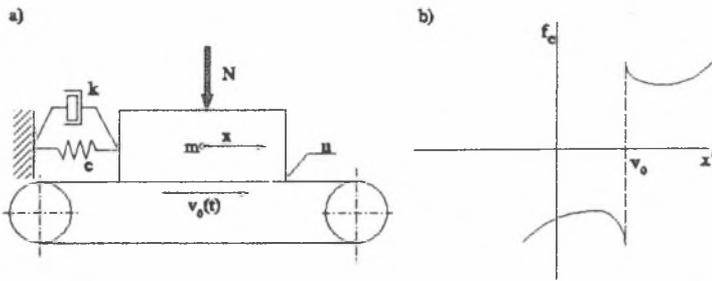
Nieliniowe zachowanie układu rozpoznać można od razu porównując portrety fazowe dla różnych częstości wymuszenia. Zmiana tego parametru spowodowała zmianę jakości ruchu, tj. układ drgając z czterema subharmonicznymi dla  $\eta = 0.2$  po wzroście częstości do  $\eta = 1.0$  posiadał już tylko jedną harmoniczną.

Rozważmy teraz nieco bardziej złożony układ z tarcieniem Coulomba, w którym wystąpić mogą drgania samowzbudne. I tak na rysunku 8.5 przedstawiono schemat taśmociągu, na którym ograniczono możliwość przemieszczania się masy  $m$  poprzez



**Rys. 8.4.** Odpowiedzi oscylatora z rys. 8.1b dla  $\eta = 1.0$ ; a) przebiegi czasowe, b) portret fazowy, c) charakterystyka  $f_C = f(\dot{x})$ , d) charakterystyka  $f_C = f(x)$   
**Fig. 8.4.** Response of the oscillator depicted in Fig. 8.1b for  $\eta = 1.0$ ; a) time histories, b) phase portrait, c)  $f_C = f(\dot{x})$  characteristics and d)  $f_C = f(x)$  characteristics

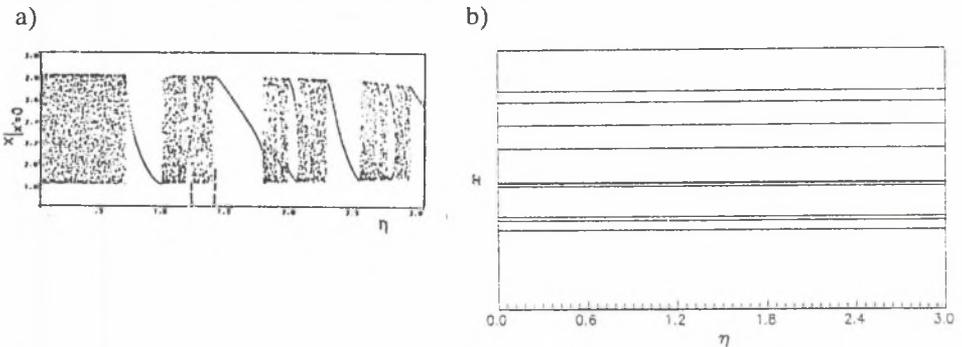
połączenie jej z ostoją za pośrednictwem elastycznej pary Kelvina-Voigta. Jeżeliby nadać masie prędkość  $v_0$ , a taśmę unieruchomić, to taki model jest stosowany w badaniu dynamiki napędów posuwowych obrabiarek [34]. I chociaż badania nad tym modelem prowadzone są od lat [19,34,59,90,97], to zdaniem autora, nie można traktować przytaczanych modeli i otrzymanych wyników z pełnym zaufaniem. Powodem takiego stanu rzeczy jest wprowadzenie tzw. *skokowej siły tarcia*, która nie umożliwia zamodelowania stanu, w którym występuje *stick*, tzn. szczypanie się trących powierzchni.



**Rys. 8.5.** Układ wykonujący drgania *stick-slip*; a) model fizyczny, b) charakterystyka tarcia

**Fig. 8.5.** System exhibiting *stick-slip* phenomenon; a) physical model, b) friction characteristics

Rezultatem niewłaściwego stosowania tego modelu mogą być liczne nieporozumienia, przykładem czego może być praca Poppa i Steltera [97], gdzie przyjmując powyższy model, przeprowadzono pełną analizę bifurkacyjną w niedopuszczalnych obszarach zmienności prędkości. Na rysunku 8.6 przedstawiono porównanie wykresów bifurkacyjnych zacytowanych z pracy [97] i otrzymanych przez autora dla identycznych danych.



**Rys. 8.6.** Porównanie wykresów bifurkacyjnych  $x = f(\eta)$  otrzymanych; a) w pracy [97], b) z badań autora

**Fig. 8.6.** Comparison of the bifurcation diagrams obtained by a) Popp and Stelter [97], b) author

W rzeczywistości w badanym układzie mogą wystąpić dwa stany, tj. stan szczypania się powierzchni i stan ich względnego poślizgu (*slip*). A więc działanie siły tarcia powoduje zmianę ilości ruchu tylko dla stanu poślizgu. W fazie szczypania ruch jest jednostajny z prędkością  $v_0$ . Jeżeli dla ogólności rozważań założymy, iż ostoja może przemieszczać się

o  $u(t)$ , to wówczas ruch masy  $m$  opisują następujące równania

$$\dot{x} = v_0; \quad f_C \geq f_{sys}, \quad (8.14)$$

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = c u(t) + k\dot{u}(t) - f_C; \quad f_C < f_{sys}, \quad (8.15)$$

gdzie:

$$f_{sys} = (x(t) - u(t))c + (v_0 - \dot{u}(t))k. \quad (8.16)$$

Jakkolwiek trudno podważyć prawidłowość postawionych warunków w równaniach (8.14) i (8.15), to jednak one same nie umożliwiają uzyskania prawidłowego rozwiązania badanego układu. Rozpatrzmy bowiem sytuację, w której układ przechodzi ze stanu *slip* w stan *stick*. Wówczas warunek  $f_C \geq f_{sys}$  jest warunkiem koniecznym, lecz nie wystarczającym. Aby nastąpiło szepienie powierzchni, prędkość względna musi zdążyć do zera, a więc dla dowolnie małego  $\varepsilon$  układ będzie w stanie *stick*, jeżeli [126]

$$|\dot{x} - v_0| < \varepsilon.$$

Przebieg siły tarcia Coulomba  $f_C$  zamieszczonej w równaniach (8.14) i (8.15) zależy od znaku i modułu prędkości względnej  $v_r$  wg zależności

$$f_C = \operatorname{sgn}(v_r) N \left( \frac{\mu_0 - \mu_1}{1 + \lambda_1 |v_r|} + \mu_1 + \lambda_2 v_r^2 \right), \quad (8.17)$$

gdzie  $\mu_0, \mu_1, \lambda_1, \lambda_2$  są stałymi przyjętego modelu tarcia Coulomba [97]. Prędkość względna  $v_r$  wynosi

$$v_r = v_0 - \dot{x}.$$

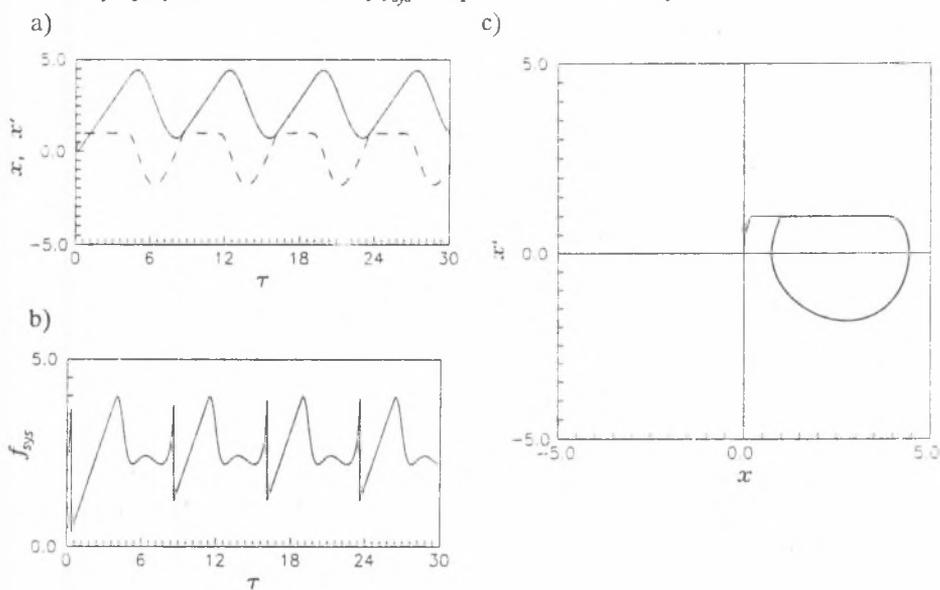
Analizę numeryczną przeprowadzono zakładając wpraw  $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$ , po czym sprowadzono równanie (8.15) do postaci bezwymiarowej, otrzymując następujący układ równań autonomicznych

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 - 2\xi x_2 - f_C^* + \beta \cos x_3 \\ x_3' &= \eta, \end{aligned} \quad (8.18)$$

gdzie  $f_C^* = f_C/c$ . Oczywiście, w równaniu (8.12) występują także wielkości bezwymiarowe. Z przeprowadzonych badań numerycznych autora wynika, iż proces całkowania przebiega najsukuteczniej algorytmem Rungego-Kutty połączonym z metodą bisekcji w celu precyzyjnego wyznaczania punktów nieciągłości. W zasadzie lokalizację punktów nieciągłości można przeprowadzać wg schematu przedstawionego na rysunku 3.7. Jednakże ze względu na występowanie funkcji znaku  $\operatorname{sgn}$ , zadanie jest słabo

uwarunkowane i w konsekwencji prowadzi do konieczności użycia metody bisekcji. W związku z tym wydłuża się także czas obliczeń, co w porównaniu z wykorzystaniem metody odwrotnej interpolacji dla podobnego układu może przekraczać nawet 30% całkowitego czasu obliczeń. Analizowany układ opisany jest dziesięcioelementowym wektorem parametrów  $p = [\xi, \beta, \eta, \mu_0, \mu_1, \lambda_1, \lambda_2, N, v_0]^T$ , z którego wybrano następujący trójelementowy wektor  $p^* = [\eta, N, v_0]^T$ .

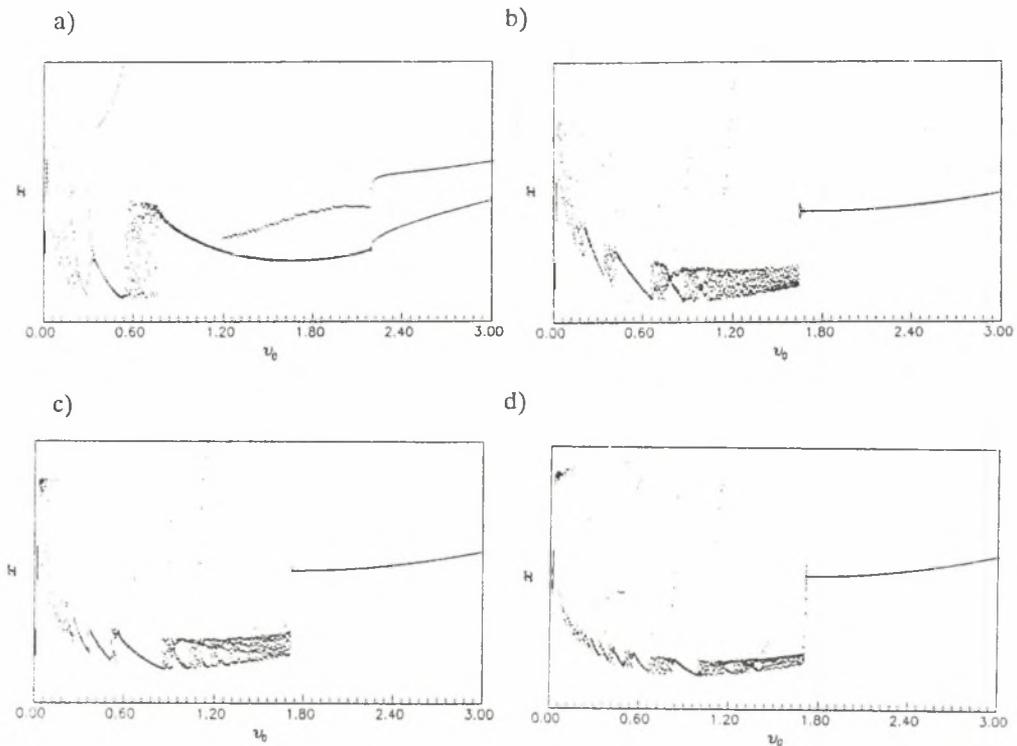
Rozpocznijmy nasze rozważania od przeanalizowania zestawu charakterystyk czasowych i potretu fazowego dla przypadku drgań relaksacyjnych (samowzbudnych). Ustalone drgania relaksacyjne takiego układu powinny cechować się "pilowym" przebiegiem przemieszczeń chwilowych (rys. 8.7a - linia ciągła) oraz istnieniem cyklu granicznego (rys. 8.7b) podobnie jak w oscylatorze Van der Pola. Zjawisku takiemu towarzyszy cykliczna zmiana siły  $f_{sys}$ , co przedstawiono na rysunku 8.7c.



**Rys. 8.7.** Drgania relaksacyjne; a),b) charakterystyki czasowe przemieszczenia  $x$  i prędkości  $x'$  oraz siły  $f_{sys}$ , c) portret fazowy

**Fig. 8.7.** Relaxation vibration; a) and b) time histories displacement/velocity and  $f_{sys}$  force respectively, c) phase portrait

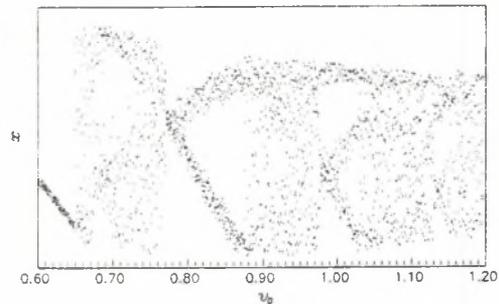
Pełniejszy obraz możliwych form ruchu badanego układu uzyskamy analizując wykresy bifurkacyjne. I tak na rysunku 8.8 przedstawiono zależność  $x = f(v_0)$  dla różnych częstości wymuszenia  $\eta$ . Jeżeli  $\eta > 1$ , to wówczas układ charakteryzuje się występowaniem pewnej krytycznej (granicznej) prędkości przesuwu taśmy  $v_{0GR}$ , która dla badanego zestawu parametrów wynosi 1.68. Przekroczenie tej wartości wprowadza układ w



Rys. 8.8. Wykresy bifurkacyjne  $x = f(v_0)$ ; a)  $\eta = 1$ , b)  $\eta = 2$ , c)  $\eta = 3$ , d)  $\eta = 5$

Fig. 8.8. Bifurcation diagrams  $x = f(v_0)$  for a)  $\eta = 1$ , b)  $\eta = 2$ , c)  $\eta = 3$ , d)  $\eta = 5$

drgania periodyczne. Obszary ruchu nieregularnego poprzedzielane są tyłoma obszarami ruchu periodycznego, ile wynosi częstotliwość wymuszenia  $\eta$  (patrz rys. 8.8b, c, d). Prawidłowość ta nie dotyczy rysunku 8.8a, gdzie układ po początkowym obszarze ruchu nieregularnego drga wprawdzie w jedną częstość, a następnie po dokonaniu *nieciągłej bifurkacji* z dwiema. Przyjrzyjmy się nieco dokładniej obszarowi zmienności  $v_0 \in <0.6, 1.2>$  dla  $\eta = 2$  (patrz rys. 8.9). Rozproszenie punktów na wykresie bifurkacyjnym świadczy o dużej nieregularności odpowiedzi układu w dziedzinie zmienności prędkości  $v_0$ .

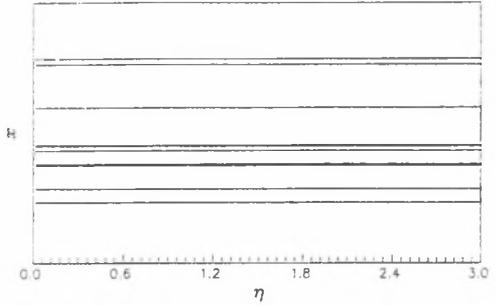


Rys. 8.9. Wykres bifurkacyjny  $x = f(v_0)$

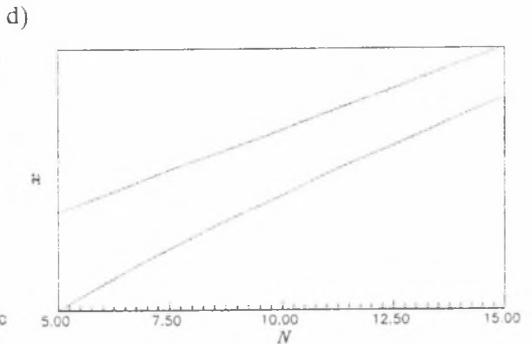
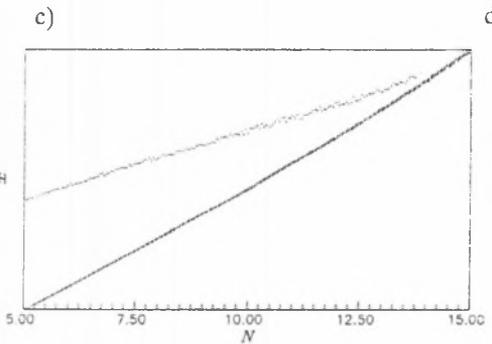
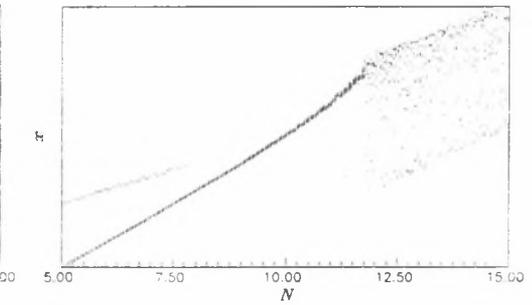
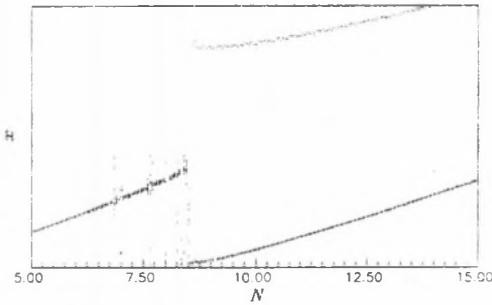
Fig. 8.9. Bifurcation diagram  $x = f(v_0)$

Parametrem kontrolnym, który przy ustalonym współczynniku tłumienia  $\xi$  nie wywołuje w zasadzie zmian ani w ilości, ani w jakości ruchu, jest częstość wymuszenia  $\eta$ . Na rysunkach 8.6 i 8.10 przedstawiono wykresy bifurkacyjne sporządzone dla wartości współczynników tłumienia równych odpowiednio  $0$  i  $0.1$ . W obu przypadkach układ drga regularnie z kilkoma częstościami podharmonicznymi.

Wpływ wartości siły normalnej  $N$  na formy uzyskiwanych odpowiedzi badanego układu dla czterech różnych prędkości przesuwu taśmy  $v_0$  pokazano na rysunku 8.11. Ze wzrostem wartości siły następuje prawie



Rys. 8.10. Wykres bifurkacyjny  $x = f(\eta)$   
 Fig. 8.10. Bifurcation diagram  $x = f(\eta)$

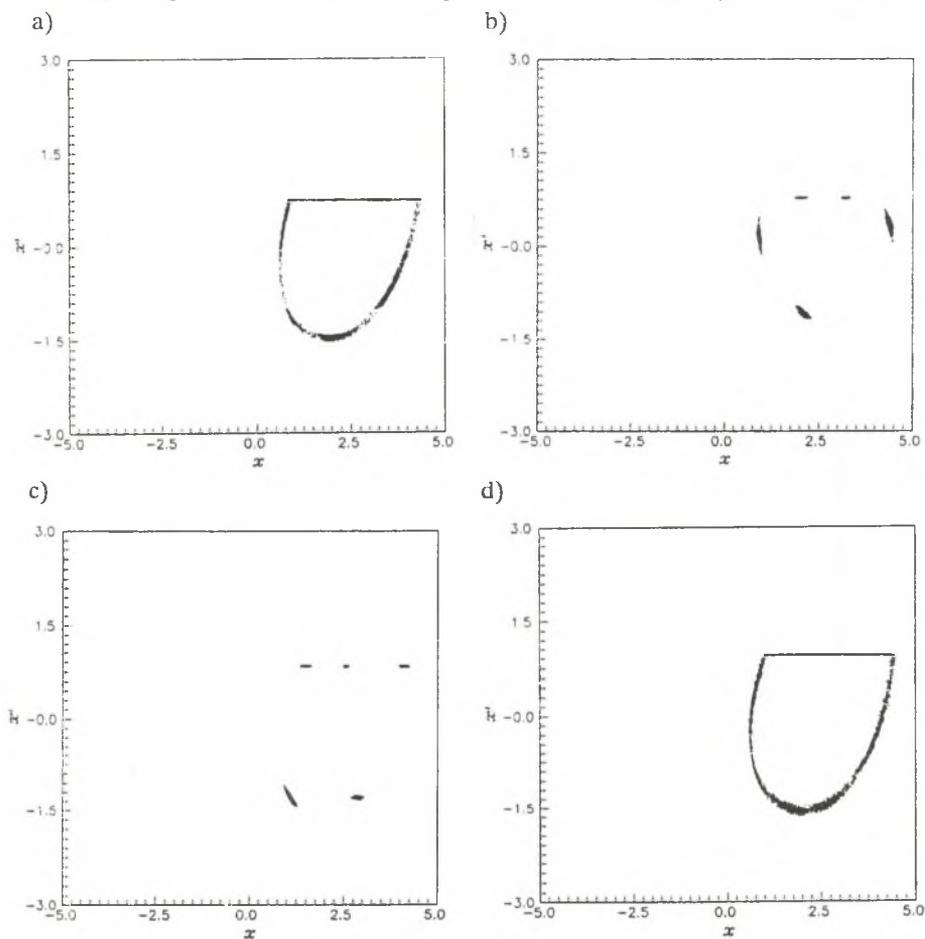


Rys. 8.11. Wykresy bifurkacyjne  $x = f(N)$ ; a)  $v_0 = 0.5$ , b)  $v_0 = 1.0$ , c)  $v_0 = 1.5$ , d)  $v_0 = 2.5$

Fig. 8.11. Bifurcation diagrams  $x = f(N)$  for a)  $v_0 = 0.5$ , b)  $v_0 = 1.0$ , c)  $v_0 = 1.5$ , d)  $v_0 = 2.5$

liniowy wzrost zastępczej amplitudy bądź amplitud drgań, co się potwierdza nawet dla obszarów występowania ruchu nieregularnego. Parametr kontrolny  $N$  bardzo nieznacznie wpływa na zmianę jakości ruchu, doprowadzając tylko dla wartości prędkości  $v_0 = 1$  do powstania ruchu nieregularnego.

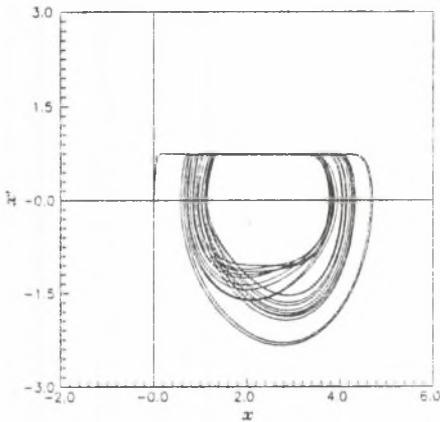
Z przeprowadzonej analizy bifurkacyjnej badanego układu wynika, że parametrem kontrolnym mającym najsilniejszy wpływ na zmianę jakości ruchu jest prędkość  $v_0$ . Zbudujmy więc mapy Poincarégo dla kilku różnych ich wartości wziętych z wykresu 8.9. Przedstawione na rysunku mapy ukazują wpływ prędkości  $v_0$  na ich topologię. Zwiększenie prędkości z  $0.75$  do  $0.78$  spowodowało redukcję mapy w kształcie "podkowy"



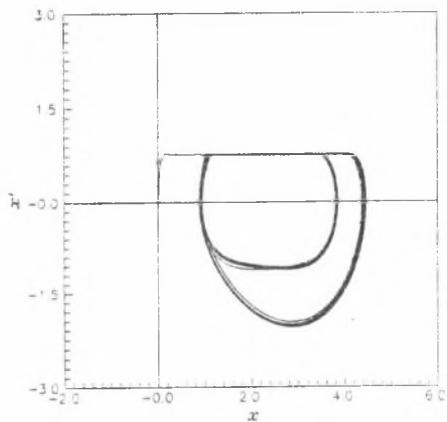
Rys. 8.12. Mapy Poincarégo dla a)  $v_0 = 0.75$ , b)  $v_0 = 0.78$ , c)  $v_0 = 0.84$ , d)  $v_0 = 0.95$   
 Fig. 8.12. Poincaré maps for a)  $v_0 = 0.75$ , b)  $v_0 = 0.78$ , c)  $v_0 = 0.84$ , d)  $v_0 = 0.95$

do pięciu odseperowanych pól. Kolejne zwiększenie parametru do 0.84 zmieniło usytuowanie i wielkość wspomnianych pól. Dla  $v_0 = 0.95$  uzyskujemy znowu kształt "podkowy". Pewne potwierdzenie uzyskanych wyników można znaleźć w postaciach trajektorii fazowych przedstawionych na rysunku 8.13. Dla przypadków występowania ruchu bardziej nieregularnego (rys. 8.13a, c) trajektorie wypełniają dużą część płaszczyzny fazowej. Przeprowadzono także badania wyznaczając widma mocy i funkcje autokorelacji jednakże te narzędzia dla tego typu odpowiedzi nie są wystarczająco "czułe".

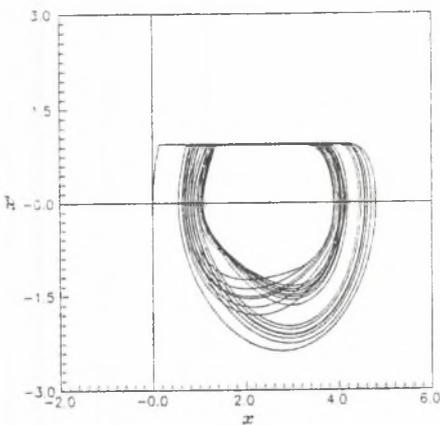
a)



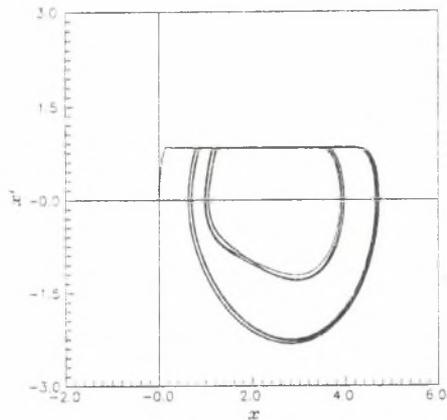
b)



c)



d)



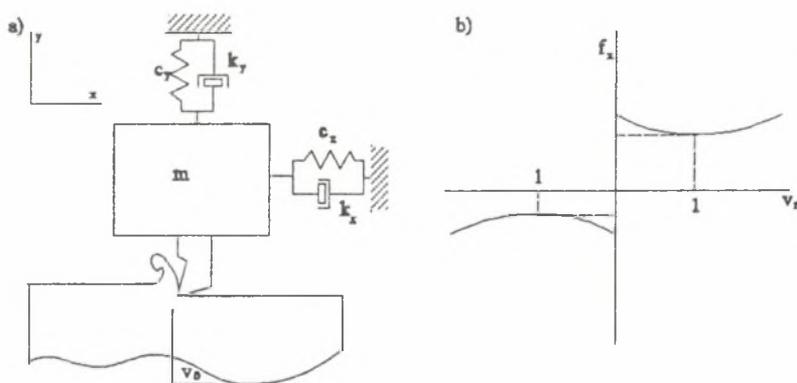
**Rys. 8.13.** Portrety fazowe dla a)  $v_0 = 0.75$ , b)  $v_0 = 0.78$ , c)  $v_0 = 0.84$ , d)  $v_0 = 0.95$   
**Fig. 8.13.** Phase portraits for a)  $v_0 = 0.75$ , b)  $v_0 = 0.78$ , c)  $v_0 = 0.84$ , d)  $v_0 = 0.95$

## 9. DYNAMIKA UKŁADU OBRABIARKA - PROCES SKRAWANIA

Procesowi wytwarzania metodą obróbki skrawaniem towarzyszą niepożądane zjawiska dynamiczne powodujące głównie obniżenie wskaźników dokładności i wydajności. Ich najpoważniejszym skutkiem jest nadmierny, a niejednokrotnie niekontrolowany wzrost amplitudy drgań. Mówimy wówczas o tzw. drganiach samowzbudnych w procesie skrawania, co do których istnieje szereg niespójnych hipotez [51]. Powodem tak rozbieżnych opinii może być tradycyjne pojmowanie zagadnień dynamiki, a w szczególności dynamiki obrabiarek i obróbki skrawaniem. Polega ono bądź na stosowaniu modeli liniowych i zlinearyzowanych [51,141,142], bądź na analizowaniu właściwości dynamicznych obrabiarki i procesu skrawania oddzielnie. Jest to wygodne dla analizy, jednakże ważność takich wyników jest ograniczona ze względu na nieliniowości zarówno w procesie jak i w układzie konstrukcyjnym. Dodatkowo sam proces jest często nieciągły tzn. następuje odrywanie narzędzia od przedmiotu obrabianego.

Badania ostatnich lat dotyczące układów dynamicznych doprowadziły do budowy i rozwoju teorii drgań chaotycznych, w których nieliniowości odgrywają rolę podstawową. Wstępne prace teoretyczne przeprowadzone przez Grabeca [29,30] oraz autora [123-125] jednoznacznie wskazują na występowanie drgań chaotycznych w niezdekomponowanym układzie obrabiarka - proces skrawania (*O-PS*).

Rozpatrzmy więc prosty model układu obrabiarka - proces skrawania o dwóch stopniach swobody (patrz rysunek 9.1). Załóżmy dla przejrzystości analizy, iż nieliniowości i nieciągłości pochodzą wyłącznie z procesu skrawania. Do badań wykorzystano zmodyfikowany model procesu skrawania swobodnego [42], który jest adekwatny dla



Rys. 9.1. Układ obrabiarka - proces skrawania; a) model fizyczny, b) charakterystyka siły  $f_x$  jako funkcji prędkości względnej  $v_r$ ,

Fig. 9.1. Machine tool - cutting process system; a) physical model, b) characteristics  $f_x$  force as a relative velocity  $v_r$  function

szerokiej gamy materiałów skrawanych. Owa modyfikacja dotyczyła uwzględnienia dodatkowo siły tarcia Coulomba w kierunku  $x$ . Proces skrawania polega na zdejmowaniu warstwy materiału obrabianego z ustaloną prędkością  $v_0$  i głębokością skrawania  $h_0$ . Początkowa głębokość i prędkość skrawania ulegają zmianie na skutek płaskiego ruchu masy  $m$ , a więc i wierzchołka ostrza noża. Ruch układu opisany jest dwoma równaniami, które w postaci bezwymiarowej przyjmują następującą formę

$$x'' + 2\xi_x x' + x = f_x(y, x', y'), \quad (9.1)$$

$$y'' + 2\xi_y \sqrt{\alpha} y' + \alpha y = f_y(y, x', y'), \quad (9.2)$$

gdzie:

$$\omega_{0x}^2 = \frac{c_x}{m}, \quad \omega_{0y}^2 = \frac{c_y}{m}, \quad \alpha = \frac{c_x}{c_y}, \quad \xi_x = \frac{k_x}{2m\omega_{0x}}, \quad \xi_y = \frac{k_y}{2m\omega_{0y}}.$$

Składowe siły skrawania  $f_x$ ,  $f_y$  wyznaczane są na podstawie następujących zależności empirycznych [42]

$$f_x = f_0 h \left( H(v_r) \frac{1}{1 + \mu_0} (c_1(v_r - 1)^2 + 1) + \operatorname{sgn}(v_r) \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} (c_1(v_r - 1)^2 + 1) \right) H(h), \quad (9.3)$$

$$f_y = \chi(v_r, v_f, h) f_x, \quad (9.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \chi(\ ) &= \chi_0 (c_2(v_f - 1)^2 + 1) (c_3(h - 1)^2 + 1) H(f_x) \operatorname{sgn}(v_f), \\ v_r &= v_0 - x', \quad v_f = v_0 - R y', \quad h = h_0 - y', \\ R &= R_0 (c_4(v_r - 1)^2 + 1). \end{aligned}$$

W powyższych równaniach występujące stałe materiałowe  $c_1 + c_4$  i współczynnik tarcia suchego  $\mu_0$  uwzględniają specyfikę modelowanego procesu. Poprzez  $\chi$  należy rozumieć współczynnik tarcia wióra o powierzchnię natarcia,  $R$  jest współczynnikiem plastycznej deformacji wióra, a  $H(\ )$  oznacza funkcję Heaviside'a.

Z wcześniejszych badań autora [123-125] wynika, iż powyższy układ może wykonywać drgania regularne. Spróbujmy więc wyznaczyć częstość powstających drgań samo-wzbudnych wykorzystując metodę aproksymującą Ritz'a. Załóżmy dla uproszczenia, iż drgania odbywać się będą tylko w kierunku  $y$ , a więc sztywność w kierunku  $x$  będzie

nieskończenie duża. Ruch układu opisany jest zatem jednym równaniem różniczkowym

$$y'' + 2\xi_y y' + y = f_0 h (c_3 (h-1)^2 + 1) H(h), \quad (9.5)$$

gdzie:

$$\omega_{0y}^2 = \frac{c_y}{m}, \quad \xi_y = \frac{k_y}{2m\omega_{0y}}, \quad h = h_0 - y.$$

Po dokonaniu podstawienia  $y = h_0 - h$ , równanie (9.5) przekształcono do postaci

$$h'' + 2\xi_y h' + f_0 (c_3 h^3 - 2c_3 h^2 + h) H(h) - h = h_0. \quad (9.6)$$

Zakładając dodatkowo, że wierzchołek ostrza noża nie będzie "opuszczał" materiału obrabianego oraz ustalając wartości parametrów ( $f_0 = 1$ ,  $\xi_y = 0$ ,  $c_3 = 1$ ), całą ogólną równania (9.6) można przedstawić jako sumę szeregu

$$h_0(\tau) = \sum_{i=1}^m \psi_i(\tau), \quad (9.7)$$

gdzie:

$$\psi_1(\tau) = C_1 \sin(\eta \tau), \quad \psi_j(\tau) = 0; \quad (j \neq 1).$$

Zatem błąd rozwiązania  $e(t)$  opisany jest następującym równaniem

$$e(\tau) = -C_1^2 + C^* \sin(\eta \tau) + C_1^2 \cos(2\eta \tau) - \frac{3}{4} C_1^3 \sin(3\eta \tau), \quad (9.8)$$

gdzie:

$$C^* = -C_1^2 \eta^2 + C_1 - C_1^2 + \frac{3}{4} C_1^3.$$

Wyznaczenie szukanej częstości polega na wyzerowaniu różniczki funkcjonału  $J(C_1)$  (równanie 3.15). Otrzymuje się to poprzez podstawienie zależności (9.6) do równania (3.17), ustalając jednocześnie górną granicę całkowania równą  $2\pi/\eta$ . Po scałkowaniu i odrzuceniu rozwiązania trywialnego otrzymano równanie kwadratowe

$$C_1 \eta^4 + (2C_1 - 3C_1^2) \eta^2 - C_1 + 6C_1^3 + 3C_1^4 = 0. \quad (9.9)$$

Równanie to posiada dwa pierwiastki, z których tylko jeden przyjmuje wartość rzeczywistą. Otrzymana wartość częstości jest słuszna jedynie dla wcześniej poczynionych warunków upraszczających, a więc obrazuje tylko jedną z bardzo licznych możliwych form

ruchu.

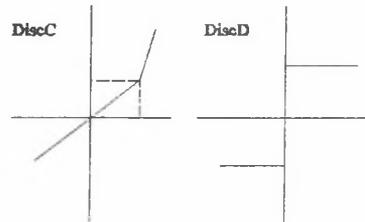
$$\eta_{1,2} = \sqrt{\frac{-(2C_1 - 3C_1^2) \pm \sqrt{8C_1^2 - 36C_1^3 - 3C_1}}{2C_1}} \quad (9.10)$$

Pełniejsza analiza rozpatrywanego układu jest jedynie możliwa na drodze symulacji numerycznej. Przekształćmy więc równania (9.1) i (9.2) do przestrzeni stanu

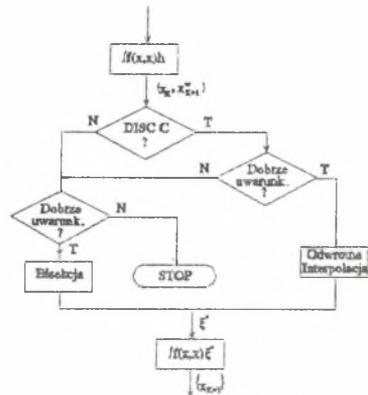
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 - 2\xi_x x_2 + f_{x1}(x_2, x_3, x_4) \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= -\alpha x_3 - 2\xi_y \sqrt{\alpha} x_4 + f_{x3}(x_2, x_3, x_4), \end{aligned} \quad (9.11)$$

a następnie scałkujemy metodą Rungego-Kutty. W całkowanym układzie równań występuje pięć funkcji nieciągłości, które podzielono na dwie grupy *DiscC* i *DiscN* (patrz rys. 9.2). Do grupy *DiscC* należą nieciągłości, w których występuje funkcja Heaviside'a  $H(\cdot)$ , natomiast grupę *DiscN* tworzą nieciągłości funkcji znaku  $sgn(\cdot)$ . Wyznaczanie dokładnej wartości czasu wystąpienia nieciągłości w układzie odbywa się wg schematu przedstawionego na rysunku 9.3. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, iż najczęściej wykorzystywaną procedurą przy lokalizacji punktów nieciągłości jest bisekcja.

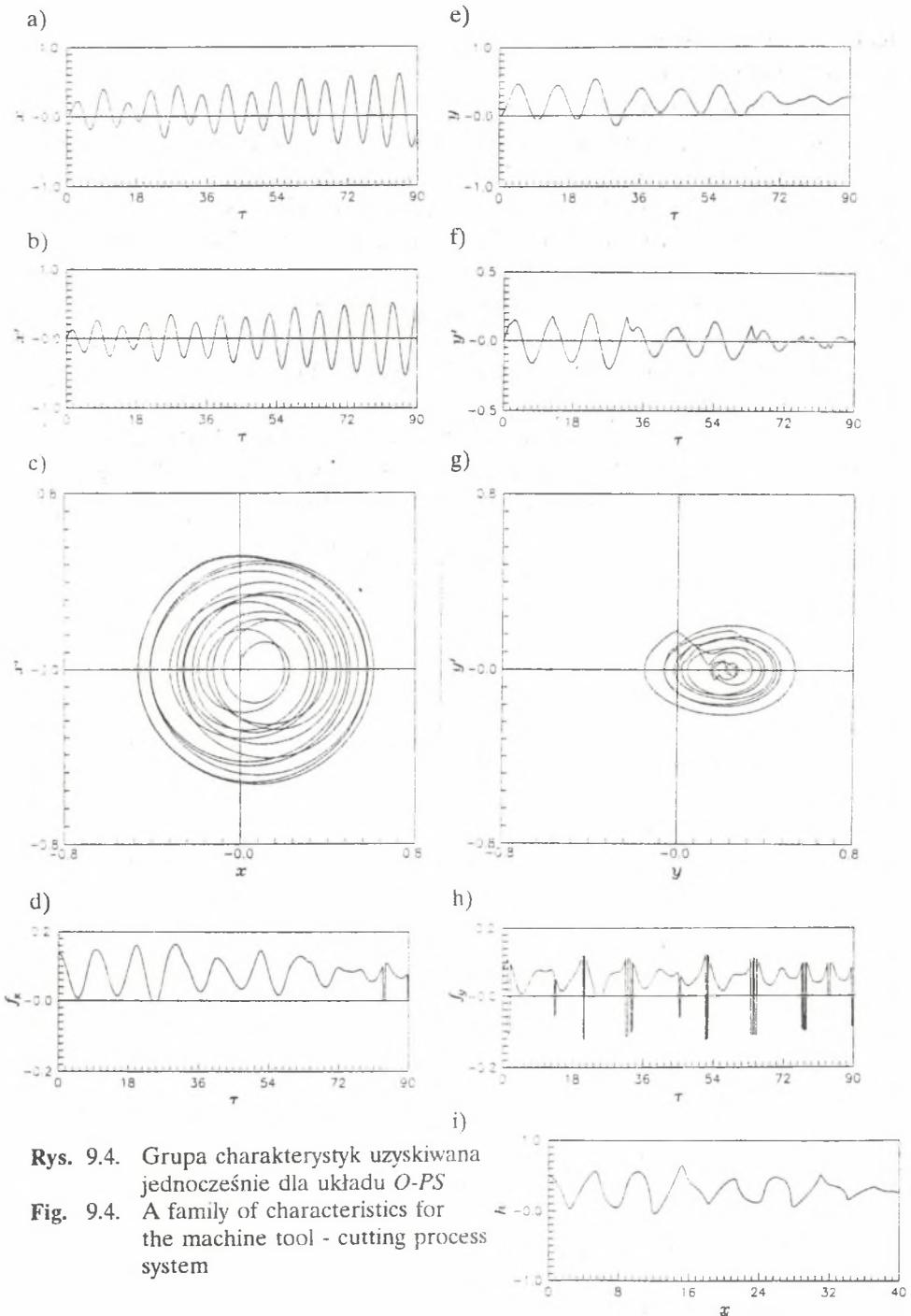
Dla przedstawionego modelu układu obrabiarka - proces skrawania przeprowadzono szeroki program symulacji, uzyskując za każdym razem pewną grupę charakterystyk. Na rysunku 9.4 pokazano taką przykładową grupę, którą stanowią przebiegi czasowe przemieszczeń,



Rys. 9.2. Nieciągłość typu: a) *DiscC*, b) *DiscD*  
Fig. 9.2. Discontinuity of a) *DiscC* and b) *DiscD* type



Rys. 9.3. Schemat wyznaczania czasu  $\xi^*$   
Fig. 9.3. Flow chart for calculating the  $\xi^*$  time

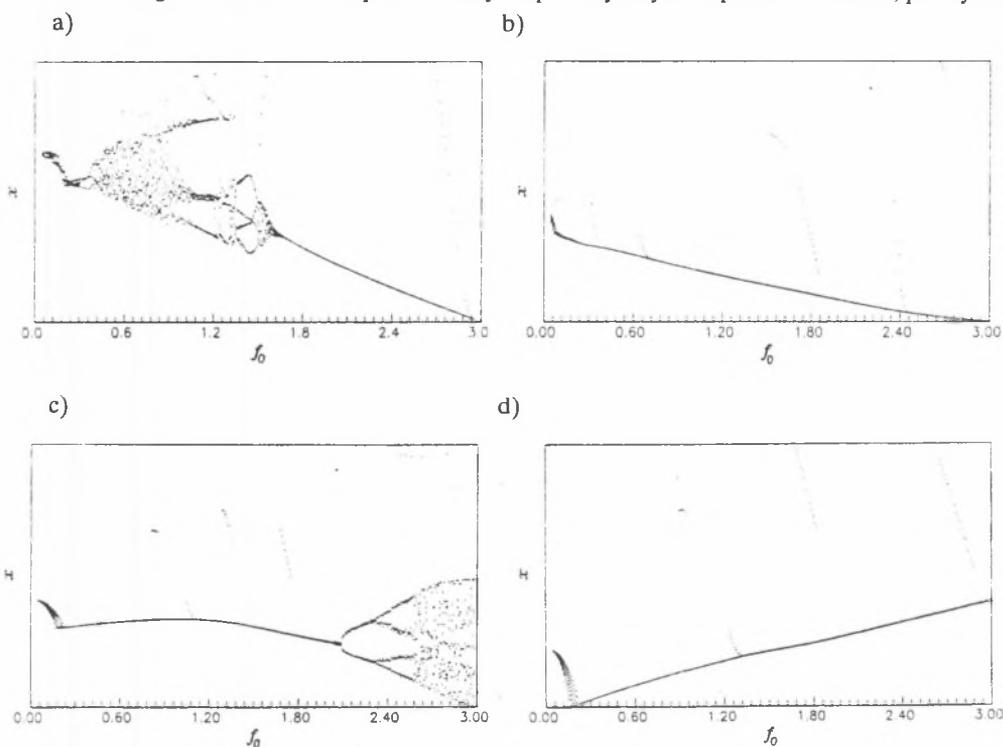


Rys. 9.4. Grupa charakterystyk uzyskiwana jednocześnie dla układu *O-PS*

Fig. 9.4. A family of characteristics for the machine tool - cutting process system

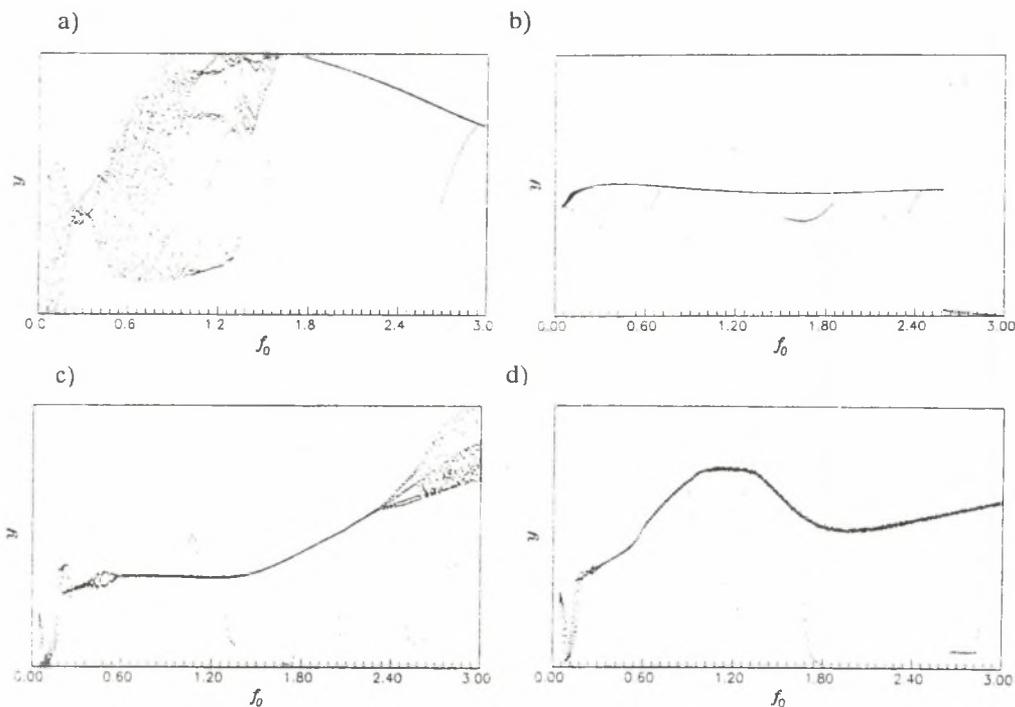
prędkości i składowych siły skrawania, portrety fazowe oraz hipotetyczny zarys nierówności powierzchni.

Badany układ opisany jest dwunastoelementowym wektorem parametrów  $p = [\alpha, \xi_x, \xi_y, \mu_0, c_1, c_2, c_3, c_p, f_0, h_0, R_0, v_0]^T$ , z którego wybrano do analizy trójelementowy wektor  $p^* = [\alpha, \xi, f_0]^T$  (przy czym  $\xi_x, \xi_y = \xi$ ) celem przeprowadzenia analizy bifurkacyjnej. I tak na rysunkach 9.5 i 9.6 przedstawiono wpływ współczynnika sztywności  $\alpha$  na postać wykresów bifurkacyjnych amplitudy drgań od modułu siły wymuszającej w kierunkach  $x$  i  $y$ . Dla wartości współczynnika sztywności  $\alpha = 0.25$  dla obu współrzędnych występują obszary ruchu nieregularnego w przedziale  $f_0 \in (0, 1.6)$ , po czym w układzie ustala się ruch periodyczny (zarówno dla kierunku  $x$ , jak i  $y$ ). Analizując dokładniej uzyskiwane formy ruchu w wymienionym przedziale zmienności modułu siły skrawania, dostrzec można interesujący scenariusz zmian jakości ruchu, w miarę wzrostu wartości parametru kontrolnego. Już od najmniejszych wartości  $f_0$  układ drga nieregularnie, jednakże większa intensywność tej nieregularności występuje dla kierunku  $y$ . Zwiększając wartość parametru kontrolnego do około 0.36 doprowadzamy do periodycznych odpowiedzi układu, po czym



**Rys. 9.5.** Wykresy bifurkacyjne  $x = f(f_0)$ ; a)  $\alpha = 0.25$ , b)  $\alpha = 1$ , c)  $\alpha = 4$ , d)  $\alpha = 16$

**Fig. 9.5.** Bifurcation diagrams  $x = f(f_0)$  for a)  $\alpha = 0.25$ , b)  $\alpha = 1$ , c)  $\alpha = 4$ , d)  $\alpha = 16$



**Rys. 9.6.** Wykresy bifurkacyjne  $y = f(f_0)$ ; a)  $\alpha = 0.25$ , b)  $\alpha = 1$ , c)  $\alpha = 4$ , d)  $\alpha = 16$

**Fig. 9.6.** Bifurcation diagrams  $y = f(f_0)$  for a)  $\alpha = 0.25$ , b)  $\alpha = 1$ , c)  $\alpha = 4$ , d)  $\alpha = 16$

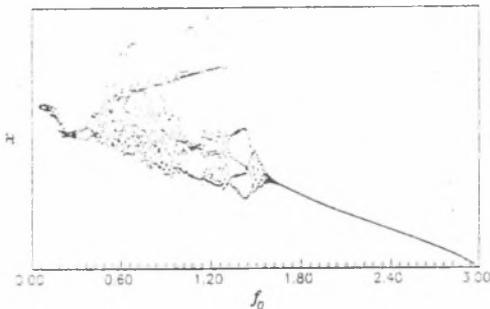
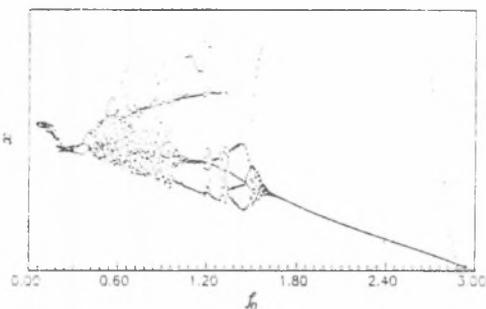
następuje katastroficzne przejście do ruchu nieregularnego, który występuje aż do wartości  $f_0$  równej około 1.0. Następnie układ stopniowo "zmierza" do stabilnych drgań okresowych przechodząc poprzez wąskie pasma ruchu nieregularnego. Reasumując można stwierdzić, że dla wartości współczynnika sztywności  $\alpha = 0.25$  wykresy bifurkacyjne cechuje duża różnorodność uzyskiwanych form ruchu. Zupełnie inaczej wygląda zachowanie układu dla  $\alpha = 1$  i  $\alpha = 16$ , gdzie można przyjąć, że układ prawie w całym zakresie zmienności parametru kontrolnego (z wyłączeniem tylko jego niskich wartości) wykonuje drgania periodyczne (rys. 9.5b, d oraz 9.6b) bądź prawie periodyczne (rys. 5.48d). Wykresy bifurkacyjne dla  $\alpha = 4$  zwracają uwagę na inną ciekawą cechę badanego układu, a mianowicie "na ukierunkowane występowanie zmian jakości ruchu" tj. bifurkacja w kierunku jednej ze współrzędnych (patrz rys. 9.6c, dla  $f_0 \in (0.24, 0.54)$ ) nie wywołuje zmian jakości ruchu dla drugiej współrzędnej (patrz rys. 9.5c), pomimo że równania opisujące zachowanie się układu są równaniami sprzężonymi. Oprócz tej osobliwości występuje także tzw. przesunięcie punktu krytycznego, którego położenie dla współrzędnej  $x$  wynosi około 2.04, natomiast dla współrzędnej  $y$  około 2.38. W pierwszym

przypadku występują dwie bifurkacje typu "period of doubling", po czym układ do końca analizowanego zakresu wykonuje drgania chaotyczne<sup>1</sup>. W drugim natomiast, układ po przejściu przez punkt krytyczny drga wpraw z okresem 4, a następnie chaotycznie.

Powyzsze wykresy zostały sporządzone dla współczynnika tarcia  $\mu_0 = 0$ , dlatego na rysunkach 9.7 i 9.8 pokazano wykresy bifurkacyjne dla  $\mu_0 = 0.05$  i  $\mu_0 = 0.25$ . Z porównania wykresów wynika wniosek, iż współczynnik tarcia nie ma istotnego wpływu na przebieg funkcji  $x, y = f(f_0)$ .

a)

b)

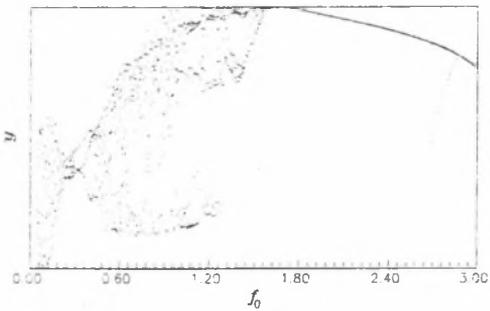
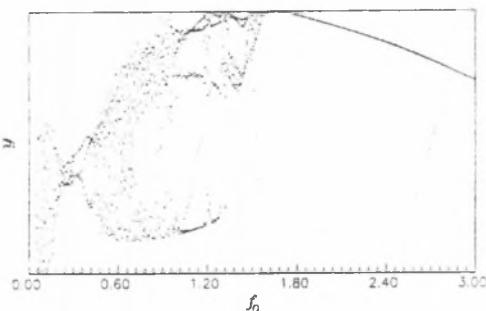


**Rys. 9.7.** Wykresy bifurkacyjne  $x = f(f_0)$ ; a)  $\mu_0 = 0.05$ , b)  $\mu_0 = 0.25$

**Fig. 9.7.** Bifurcation diagrams  $x = f(f_0)$  for a)  $\mu_0 = 0.05$ , b)  $\mu_0 = 0.25$

a)

b)

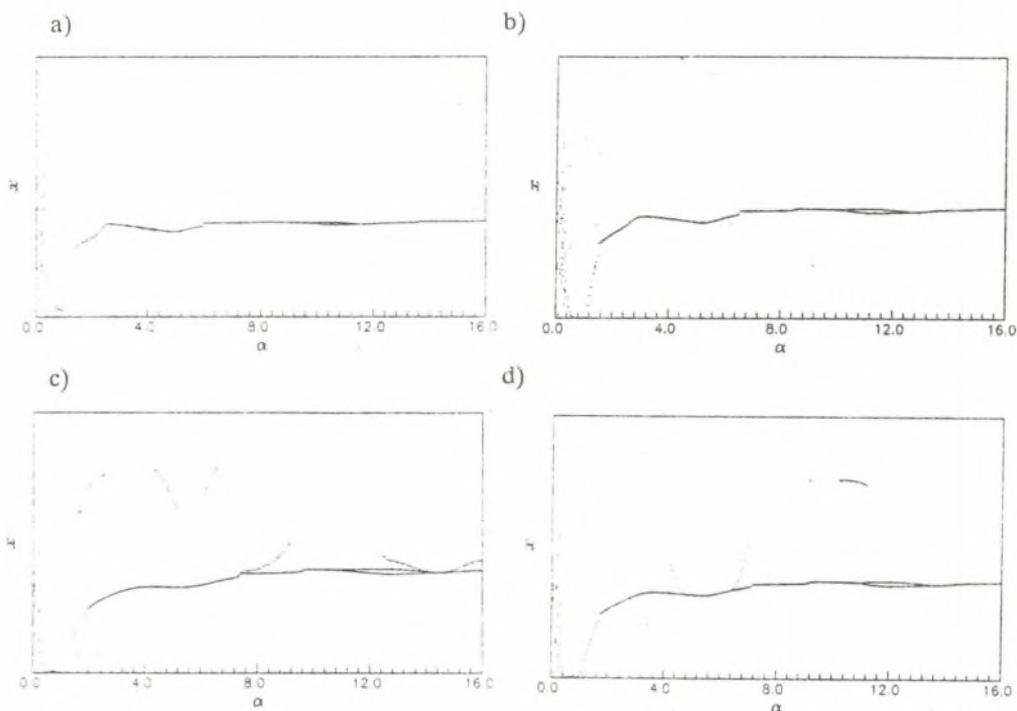


**Rys. 9.8.** Wykresy bifurkacyjne  $y = f(f_0)$ ; a)  $\mu_0 = 0.05$ , b)  $\mu_0 = 0.25$

**Fig. 9.8.** Bifurcation diagrams  $y = f(f_0)$  for a)  $\mu_0 = 0.05$ , b)  $\mu_0 = 0.25$

Następna grupa wykresów bifurkacyjnych przedstawia zależność zmian amplitudy drgań w kierunkach  $x$  i  $y$  od współczynnika sztywności  $\alpha$ , czyli funkcji  $x, y = f(\alpha)$ . Analiza zamieszczonych charakterystyk skłania do wniosku, iż drgania chaotyczne mogą występować dla małych wartości współczynnika sztywności. Dla większych wartości  $\alpha$  układ wykonuje drgania harmoniczne bądź podharmoniczne zarówno dla współrzędnej

<sup>1</sup>Stwierdzenie to zostanie potwierdzone w dalszej części pracy.



Rys. 9.9. Wykresy bifurkacyjne  $x = f(\alpha)$ ; a)  $f_0 = 0.25$ , b)  $f_0 = 0.75$ , c)  $f_0 = 1$ , d)  $f_0 = 1.25$

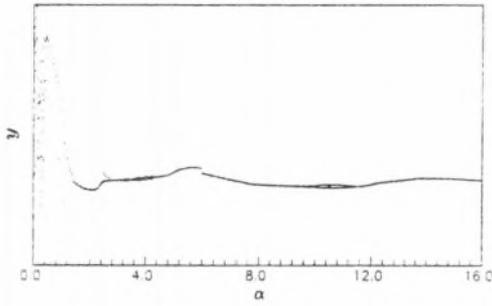
Fig. 9.9. Bifurcation diagrams  $x = f(\alpha)$  for a)  $f_0 = 0.25$ , b)  $f_0 = 0.75$ , c)  $f_0 = 1$ , d)  $f_0 = 1.25$

kilku różnych wartości modułu siły skrawania  $f_0$ , nie obserwując zasadniczo dużych różnic  $x$  jak i  $y$ . Na rysunkach 9.9 i 9.10 przedstawiono przebiegi funkcji  $x = f(\alpha)$  i  $y = f(\alpha)$  dla w jakości ruchu. Fakt ten można wykorzystać przy konstrukcji obrabiarek (np. suportów wzdłużno-poprzecznych tokarek czy stołów krzyżowych wiertarko-frezarek [135]), w celu biernego unikania drgań samowzbudnych.

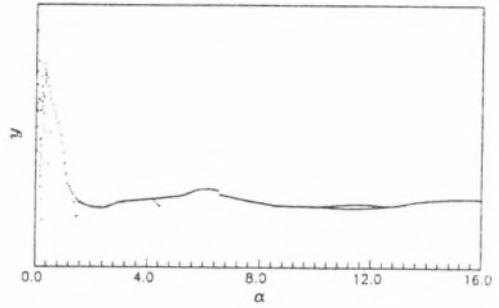
Na rysunkach 9.11 i 9.12 pokazano wpływ bezwymiarowego współczynnika tłumienia  $\xi$  na uzyskiwane formy ruchu. Podobnie jak w poprzednio analizowanych układach, tłumienie działa stabilizująco doprowadzając nawet przed osiągnięciem jego wartości krytycznej do całkowitego zaniku składowych dynamicznych.

Kategoryczne przesądzenie o występowaniu ruchu chaotycznego wymaga otrzymania koherentnych ocen z wielu różnych kryteriów badania jakości ruchu. Spróbujmy więc ocenić ruch układu dla kilku wartości modułu siły skrawania, wybranych z wykresów bifurkacyjnych zamieszczonych na rysunkach 9.5a i 9.6a. Sporządzone dla tych wartości parametrów mapy Poincarégo dla kierunków  $x$  i  $y$  (patrz rys. 9.13 i 9.14) rozstrzygają

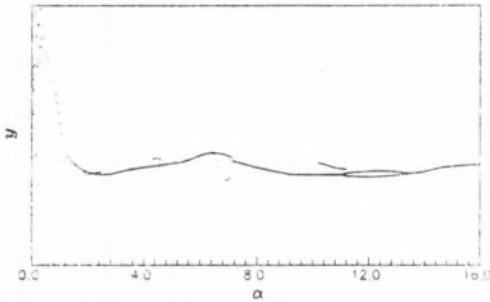
a)



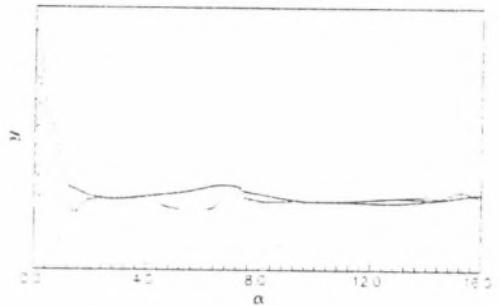
b)



c)



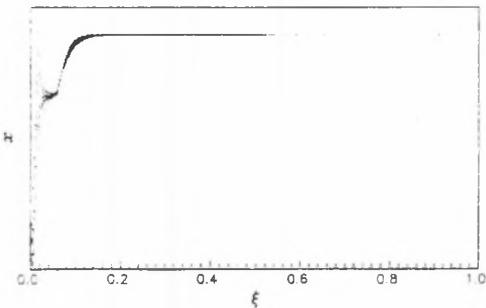
d)



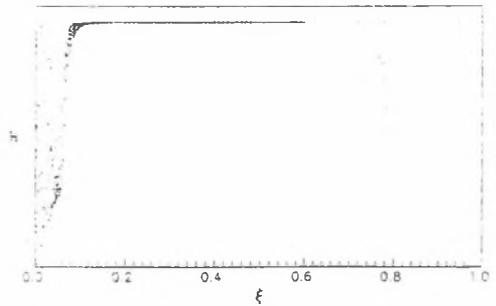
**Rys. 9.10.** Wykresy bifurkacyjne  $y = f(\alpha)$ ; a)  $f_0 = 0.25$ , b)  $f_0 = 0.75$ , c)  $f_0 = 1$ ,  
d)  $f_0 = 1.25$

**Fig. 9.10.** Bifurcation diagrams  $y = f(\alpha)$  for a)  $f_0 = 0.25$ , b)  $f_0 = 0.75$ , c)  $f_0 = 1$ ,  
d)  $f_0 = 1.25$

a)

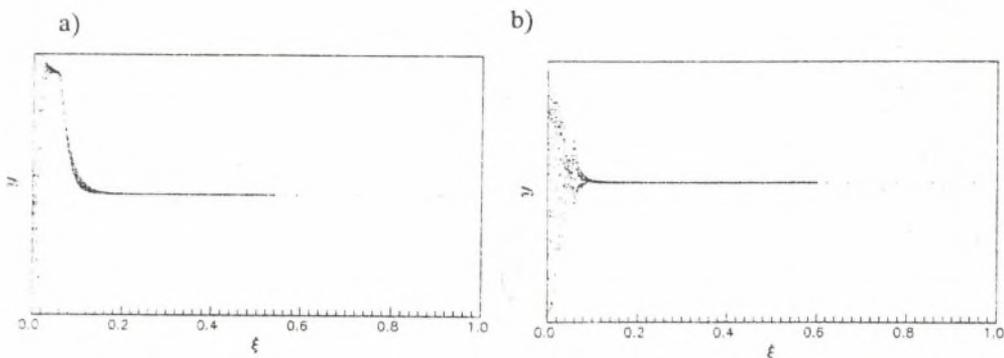


b)



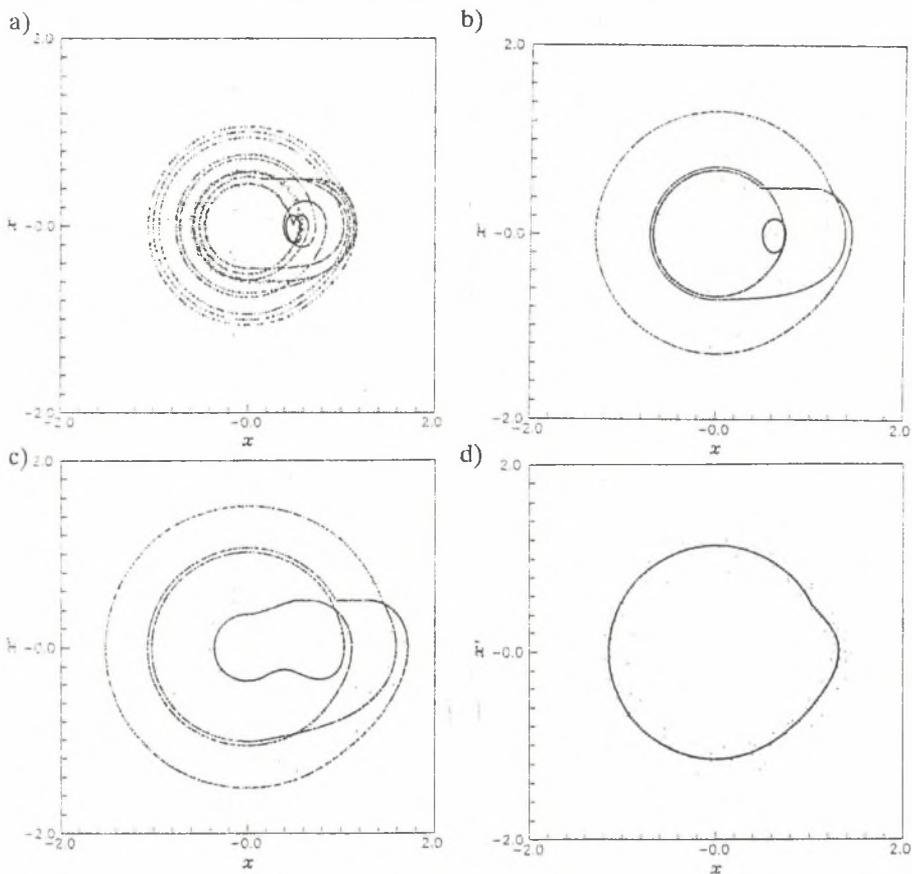
**Rys. 9.11.** Wykresy bifurkacyjne  $x = f(\xi)$ ; a)  $f_0 = 0.25$ , b)  $f_0 = 0.50$

**Fig. 9.11.** Bifurcation diagrams  $x = f(\xi)$  for a)  $f_0 = 0.25$ , b)  $f_0 = 0.50$



Rys. 9.12. Wykresy bifurkacyjne  $y = f(\xi)$ ; a)  $f_0 = 0.25$ , b)  $f_0 = 0.50$

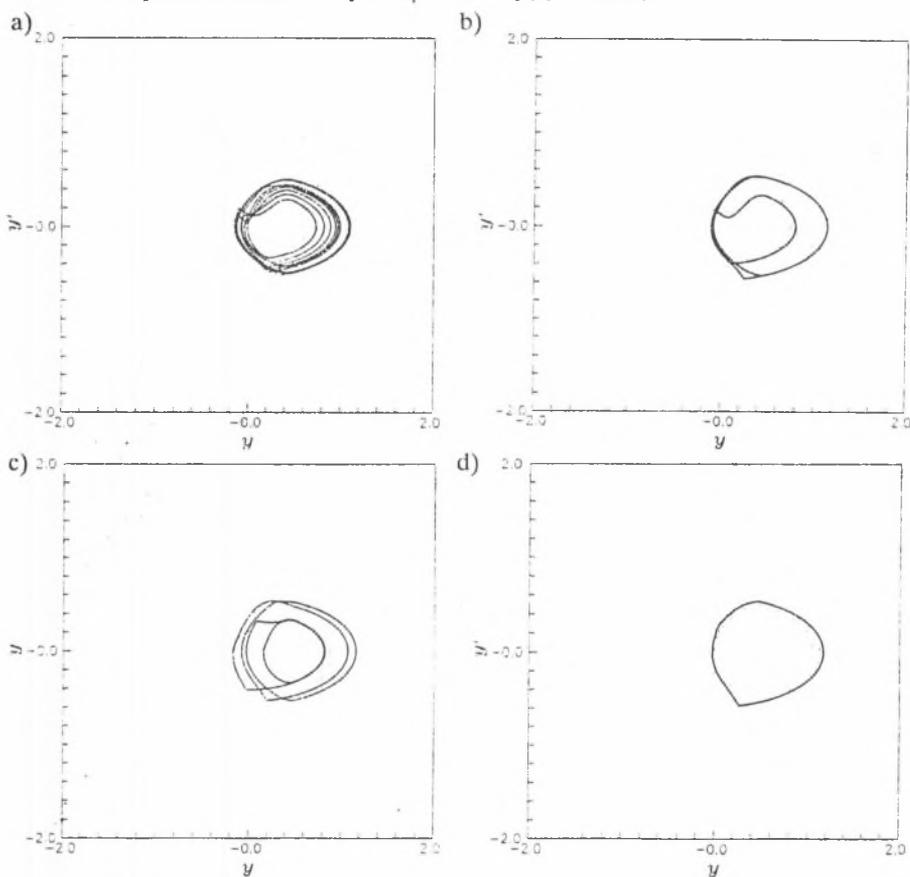
Fig. 9.12. Bifurcation diagrams  $y = f(\xi)$  for a)  $f_0 = 0.25$ , b)  $f_0 = 0.50$



Rys. 9.13. Mapy Poincarègo  $x_{n+1} = f(x_n)$  dla a)  $f_0 = 1$ , b)  $f_0 = 1.25$ , c)  $f_0 = 1.46$ , d)  $f_0 = 1.56$

Fig. 9.13. Poincaré maps  $x_{n+1} = f(x_n)$  for a)  $f_0 = 1$ , b)  $f_0 = 1.25$ , c)  $f_0 = 1.46$ , d)  $f_0 = 1.56$

wątpliwości. Podejrzewany ruch nieregularny dla wartości parametru kontrolnego  $1.0$ , w rzeczywistości okazał się ruchem z wieloma (jedenastoma) podharmonicznymi (rys. 9.13a i 9.14a). Podobnie w przypadku  $f_0 = 1.25$  i  $f_0 = 1.46$ , gdzie występują tylko cztery podharmoniczne. Dla  $f_0 = 1.56$  z wykresów bifurkacyjnych wynika, iż układ może drgać nieregularnie. Z rysunków 9.13d i 9.14d widać, że po dostatecznie długim czasie przebiegi zarówno w kierunku  $x$  jak i  $y$  stają się periodyczne. Ślady "domniemanej" chaotyczności są widoczne w postaci "obłoczku" punktów otaczających orbity.



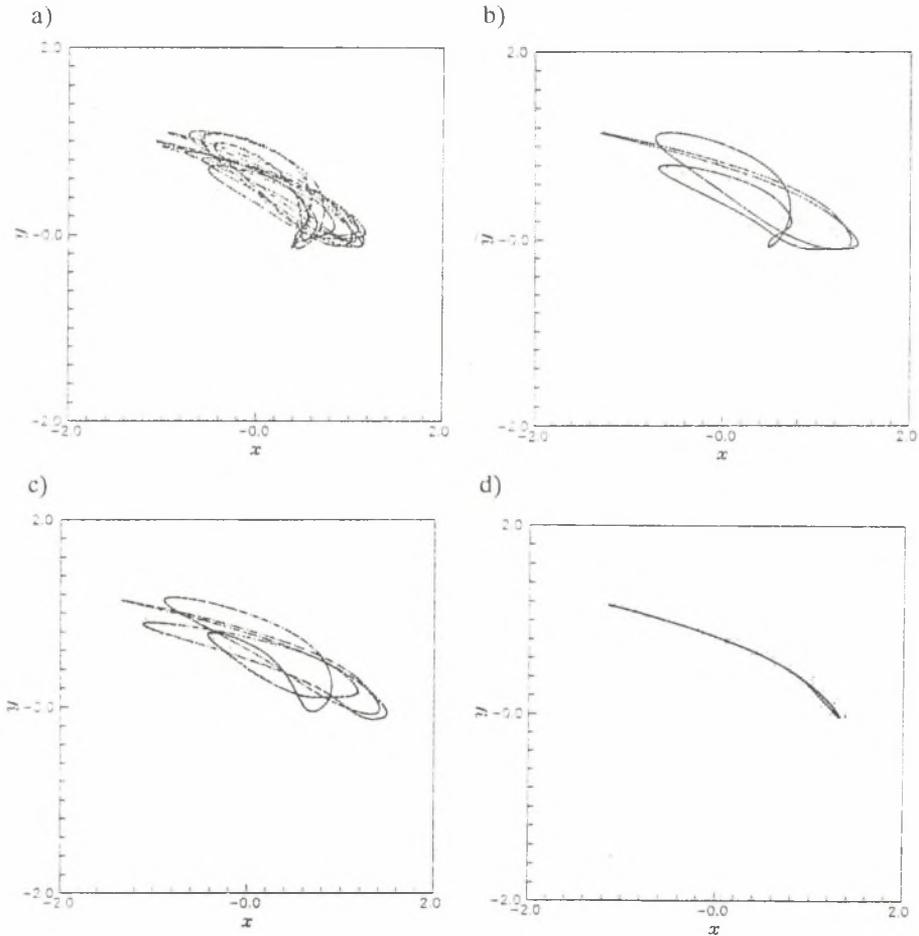
Rys. 9.14. Mapy Poincarégo  $y_{n+1} = f(y_n)$  dla a)  $f_0 = 1$ , b)  $f_0 = 1.25$ , c)  $f_0 = 1.46$ , d)  $f_0 = 1.56$

Fig. 9.14. Poincaré maps  $y_{n+1} = f(y_n)$  for a)  $f_0 = 1$ , b)  $f_0 = 1.25$ , c)  $f_0 = 1.46$ , d)  $f_0 = 1.56$

Z punktu widzenia dynamiki procesu skrawania interesujące byłoby prześledzenie trajektorii wierzchołka ostrza noża dla analizowanych powyżej różnych form ruchu. Można byłoby wówczas porównać te wyniki z różnymi hipotezami powstawania drgań

samowzbudnych. Hipotezy te, jak wykazano w pracy [51], nie wykazują cech spójnych, a więc porównanie takie umożliwiłoby pewnego rodzaju ich weryfikację.

Na rysunku 9.15 nie przedstawiono bezpośrednio trajektorii wierzchołka ostrza noża, lecz ich mapy Poincarégo. Dla okresu próbkowania dobranego w ten sposób, że jego stosunek do jednego z okresów drgań układu nie jest liczbą wymierną, prowadzi przy dostatecznie dużej liczbie próbek do tego samego skutku, co obserwacja samej trajektorii. Przekształcenie takie upraszcza jednak w zdecydowanej większości przypadków topologię uzyskiwanych wykresów, a więc ułatwia ich analizę. Analiza otrzymanych map trajektorii

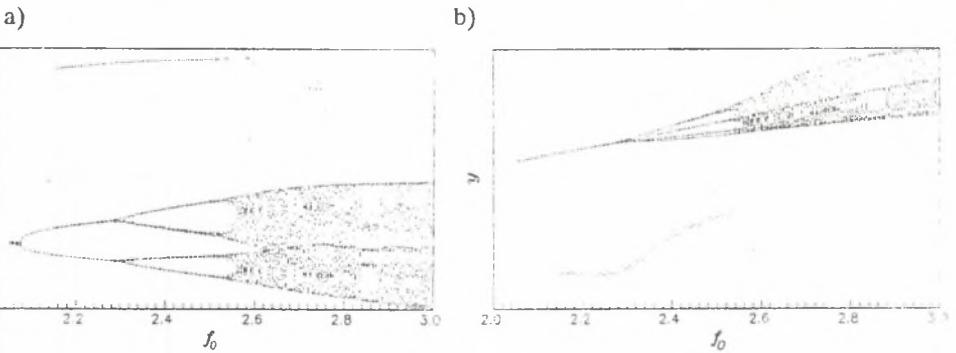


Rys. 9.15. Mapa Poincarégo dla trajektorii wierzchołka ostrza noża dla a)  $f_0 = 1$ , b)  $f_0 = 1.25$ , c)  $f_0 = 1.46$ , d)  $f_0 = 1.56$

Fig. 9.15. Poincaré maps of the cutting edge trajectory for a)  $f_0 = 1$ , b)  $f_0 = 1.25$ , c)  $f_0 = 1.46$ , d)  $f_0 = 1.56$

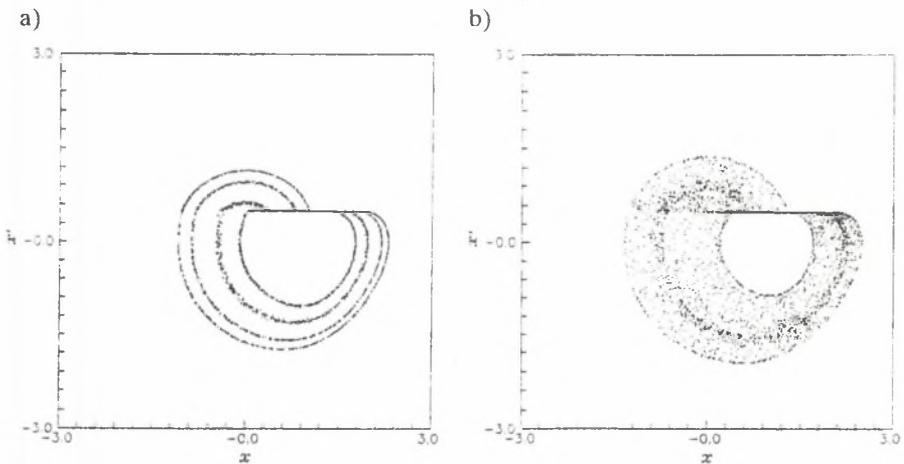
nie umożliwia w pełni zaakceptowania żadnej z hipotez, jednakże należy przyznać, iż występuje zgodność w orientacji pola możliwych położenia wierzchołka ostrza noża z hipotezą "opadającej charakterystyki tarcia".

W dotychczasowej analizie dynamiki układu obrabiarka proces - skrawania nie pokazano jednoznacznie obszarów występowania ruchu chaotycznego. Dokonajmy więc szczegółowszych badań wykresów bifurkacyjnych przedstawionych na rysunkach 9.5c i 9.6c. "Rozciągnijmy" przedział zmienności parametru kontrolnego  $\langle 2.0, 3.0 \rangle$  na całą szerokość sporządzanych wykresów bifurkacyjnych, w celu dokładnego zbadania wartości krytycznych oraz scenariuszy zmian jakości ruchu. Dopiero z rysunku 9.16 można dokładnie ocenić wartości krytyczne parametru  $f_0$  dla współrzędnych  $x$  i  $y$ . Do sygnalizowanego wcześniej zjawiska "ukierunkowanej bifurkacji" można dołączyć spostrzeżenie, iż zmiana jakości ruchu dla kierunku  $y$  następuje dokładnie w miejscu



Rys. 9.16. Wykresy bifurkacyjne; a)  $x = f(f_0)$ , b)  $y = f(f_0)$

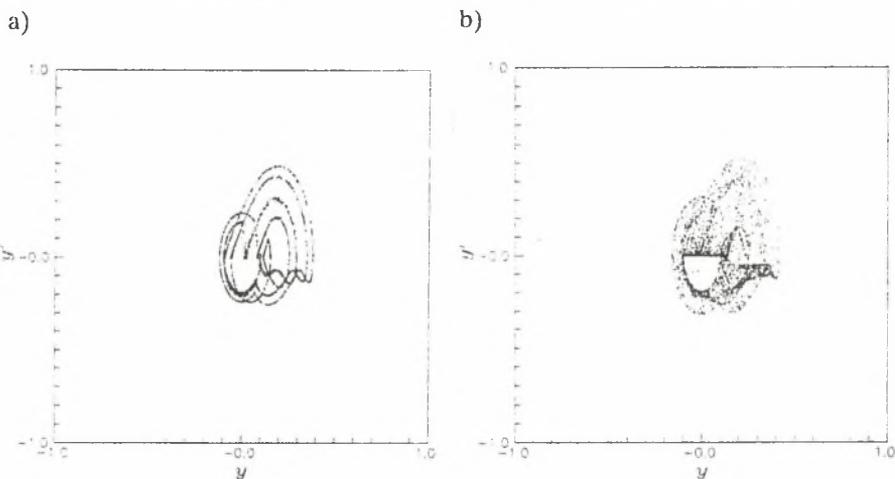
Fig. 9.16. Bifurcation diagrams a)  $x = f(f_0)$  and b)  $y = f(f_0)$



Rys. 9.17. Mapy Poincarégo  $x_{n+1} = f(x_n)$  dla; a)  $f_0 = 2.46$ , b)  $f_0 = 2.7$

Fig. 9.17. Poincaré maps  $x_{n+1} = f(x_n)$  for a)  $f_0 = 2.46$  and b)  $f_0 = 2.7$

wystąpienia drugiej bifurkacji "Hopfa" dla kierunku  $x$ . Powyżej wartości 2.48 parametru kontrolnego wykresy bifurkacyjne dla obu kierunków wskazują na występowanie ruchu nieregularnego. Ażeby sprawdzić zasadność tego stwierdzenia, tj. np. wyeliminować możliwość występowania tzw. "przejściowego chaosu", sporządzimy mapy Poincarégo dla dwóch przypadków, tj. dla wartości  $f_0$  mniejszych i większych od wartości krytycznej. Przedstawione na rysunkach 9.17 i 9.18 mapy Poincarégo dla współrzędnych  $x$  i  $y$  zbudowano dla wartości parametru kontrolnego równych 2.46 i 2.7. Zgodnie z poczynionymi wcześniej przypuszczeniami, na rysunkach 9.17a i 9.18a rozpoznać można odpowiednio drgania z czterema i pięcioma podharmonicznymi. Natomiast mapy 9.17b i 9.18b ukazują rozproszone "chmury" punktów charakterystyczne dla ruchu chaotycznego. Owe "rozproszenie" występuje tylko w pewnych obszarach o bardzo wyraźnych granicach, co tworzy pewnego rodzaju atraktor. Ów atraktor występuje zarówno dla kierunku  $x$ , jak i  $y$ . Można stwierdzić, iż powstałe atraktory nie posiadają cech fraktalnych.

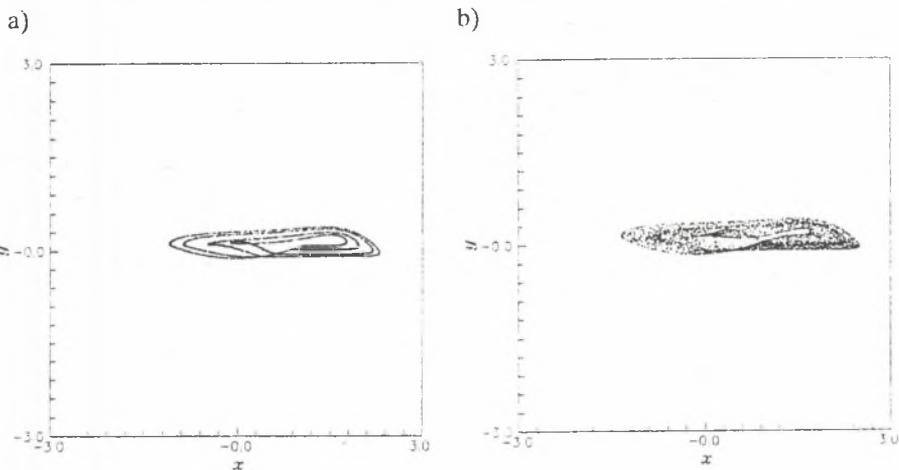


**Fig. 9.18.** Mapy Poincarégo  $y_{n+1} = f(y_n)$  dla; a)  $f_0 = 2.46$ , b)  $f_0 = 2.7$

**Fig. 9.18.** Poincaré maps  $y_{n+1} = f(y_n)$  for a)  $f_0 = 2.46$  and b)  $f_0 = 2.7$

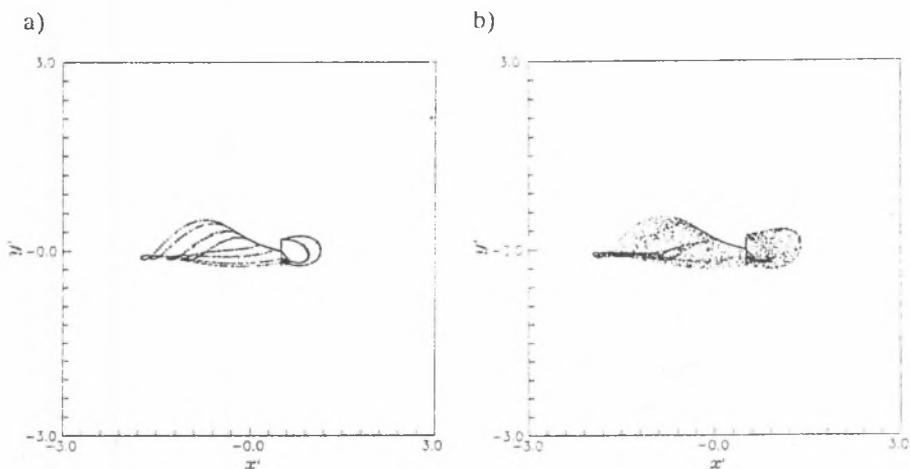
Na zakończenie analizy prześledźmy jeszcze topologię map Poincarégo trajektorii i prędkości wierzchołka ostrza noża, które ukazują atraktory chwilowych położenia i prędkości. W przypadku przebiegów okresowych obrazem jest skończona liczba punktów bądź krzywe zamknięte, co przedstawiono na rysunkach 9.19a i 9.20a. Dla ruchów nieregularnych tworzą się pewne zbiory punktów o wymiarze korelacyjnym większym od jedności. Atraktor chwilowych położenia wierzchołka ostrza noża (patrz rys. 9.19b) przypomina swoim kształtem wstęgę Rösslera [118]. Natomiast atraktor chwilowych tworzy pewną powierzchnię, w której występują ostre brzegi (patrz rys. 9.20b).

Z przeprowadzonej analizy dynamiki układu obrabiarka - proces skrawania wynika, iż parametrem najmocniej wpływającym na zmianę jakości ruchu jest moduł siły skrawania  $f_0$ . A więc należy wnioskować, iż tym parametrem można będzie efektywnie sterować procesem w celu realizacji kryteriów wydajności i dokładności obróbki [141].



**Rys. 9.19.** Mapy Poincarégo trajektorii wierzchołka ostrza dla; a) ruchu okresowego, b) ruchu chaotycznego

**Fig. 9.19.** Poincaré maps of the cutting edge trajectory for a) regular and b) chaotic motion



**Rys. 9.20.** Mapy Poincarégo prędkości chwilowych wierzchołka ostrza dla; a) ruchu okresowego, b) ruchu chaotycznego

**Fig. 9.20.** Poincaré maps of the cutting edge velocity for a) regular and b) chaotic motion

## 10. UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE

### 10.1. Podsumowanie

W pracy sformułowano i analizowano zagadnienia dotyczące dynamiki dyskretnych układów mechanicznych z nieciągłościami. Jest bowiem oczywiste, że w prawie każdym układzie mechanicznym może wystąpić luz, skokowo zmienna charakterystyka sztywności czy też tarcie suche. Wówczas w opisujących równaniach ruchu występują człony, dla których funkcje opisujące stan układu są wielowartościowe. Wtedy zachodzi konieczność wybrania odpowiedniej wartości funkcji, czyli występuje tzw. "*proces przełączenia*". Istotne jest zatem zlokalizowanie czasu, w którym owa nieciągłość pojawiła się, ponieważ w następnym kroku całkowania musi nastąpić "*przełączenie*", co niejednokrotnie powoduje zmianę charakteru równań opisywanego modelu. Niedokładne określenie miejsca wystąpienia nieciągłości prowadzi do poważnych błędów, ponieważ analizowane układy mogą być chaotyczne, a więc bardzo wrażliwe na warunki początkowe. Fakt ten wymusza konieczność precyzyjnego wyznaczenia czasu wystąpienia nieciągłości. Odbywa się to za pomocą odpowiednich formuł aproksymujących, których wybór zależy od postaci nieciągłości.

Praca stanowi pierwszą w swoim rodzaju próbę kompleksowego opisu dynamiki układów dyskretnych z nieciągłościami, analizę opracowanych metod mogących służyć do efektywnego ich rozwiązywania (z rekomendacjami metod szczególnie użytecznych) oraz analizę dynamiczną szeregu różnorodnych układów mechanicznych z nieciągłościami. Opracowano przy tym oryginalną metodykę bardzo dokładnego, numerycznego rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych z różnego typu nieciągłościami. Ponieważ odpowiedzi analizowanych układów mogą przyjmować bardzo różne formy ruchu (od periodycznego począwszy, na chaotycznym skończywszy), omówiono i zaadaptowano procedury badania dynamiki układów nieliniowych takie, jak: wyznaczanie widm mocy i funkcji autokorelacji przebiegów czasowych, wykresów bifurkacyjnych, map Poincarégo, wykładników Lapunowa oraz wymiaru korelacyjnego. Na bazie tych algorytmów napisano oryginalny pakiet programów obliczeniowych. Stworzono więc kompletny aparat numeryczny do rozwiązywania i badania dynamiki dowolnych dyskretnych układów nieliniowych z nieciągłościami.

Badając przykładowe układy przez pryzmat dynamiki chaotycznej zwrócono uwagę na pewne charakterystyczne zjawiska powstające wyłącznie w układach z nieciągłościami, a mianowicie:

- powszechne występowanie bifurkacji typu "*crisis*",
- występowanie ruchu regularnego w skali *macro* i chaotycznego w skali *micro*,
- brak typowych scenariuszy bifurkacyjnych,
- występowanie tzw. "*bifurkacji ukierunkowanej*" w układach o wielu stopniach swobody,

- powstawanie bardzo bogatych topologii, np. wstęgi Rösslera dla modelu układu obrabiarka - proces skrawania.

Uzyskano także szereg doświadczeń dotyczących wyboru odpowiedniej formuły całkowania numerycznego i lokalizacji punktów nieciągłości dla różnych układów. W przypadku skokowo zmieniającej się sztywności i luzu najefektywniej rozwiązanie uzyskuje się całkując metodami kolokacji oraz wykorzystując odwrotną interpolację do dokładnego wyznaczenia czasów, w których występują nieciągłości. W przypadku układów tylko z tarcie Coulomba najlepsze rezultaty daje procedura Rungego-Kutty czwartego rzędu z bisekcją. W przypadku ogólnym najbezpieczniej wykorzystać metodę Rungego-Kutty współpracującą z algorytmem przedstawionym na rysunku 3.7.

## 10.2. Wytyczne dalszych do badań

Wyniki zawarte w niniejszym opracowaniu zostały w przeważającym stopniu uzyskane metodą systematycznej symulacji cyfrowej. Podejście takie ma główną zaletę, tj. umożliwia detekcję dowolnego rodzaju ruchu, w tym chaotycznego. Wadą tej metody jest bardzo duża pracochłonność, a także tylko pośredni sposób oceny stabilności analizowanych układów, tj. poprzez mapy Poincarègo, wykładniki Lapunowa czy różnego rodzaju wymiary. Uzupełnianie tej metody kryteriami stabilności uzyskiwanymi na drodze czysto analitycznej jest, zdaniem autora, bardzo nieefektywne dla układów z nieciągłościami, wymaga bowiem niejednokrotnie uciążliwych aproksymacji pochodnych cząstkowych funkcji nieciągłych, ważnych wyłącznie dla ustalonego wektora parametrów układu w badanej chwili czasowej.

Pewną alternatywą do stosowanej metody systematycznej symulacji jest metoda rozwiązywania układu w przestrzeni wektora parametrów układu, a nie w przestrzeni czasu. Określana jest mianem "*continuation method*" [105,106] i pozwala na wyznaczanie położenia punktów krytycznych, bez możliwości badania chaosu. Trudność implementacji tej metody na zagadnienia z nieciągłościami polega na tym, iż zakłada ona *a priori* ciągłość badanego układu. Z kontaktów autora z profesorem Seydelem wynika, iż stosowalność jego metody mogłaby być rozszerzona na układy przedziałami ciągłe, jednakże wymaga to dalszych badań.

Zaimplementowanie metody kontynuacji pozwoliłoby wraz z metodą systematycznej symulacji na całkowitą ocenę dynamiki układów z nieciągłościami.

Opisywanym badaniom teoretycznym przyświeca także cel użyteczny, a mianowicie ich wykorzystanie do optymalnego sterowania procesami obróbczymi czy też opracowywania na ich bazie optymalnych konstrukcji ze względu na właściwości dynamiczne. Pewne prace wstępne na ten temat zostały już poczynione [136].

## LITERATURA

1. Aitken A.C. *On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations*. Proc.Roy.Soc. Edinburgh **46**, 1926, 298-305.
2. Ariaratnam S.T., Xie W.C. *Lyapunov exponents and stochastic bifurcations*. Proc. IUTAM Symposium Stuttgart, 1989. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1990, 1-8.
3. Argyris J. *Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej*. Nieliniowe Zagadnienia Dynamiczne. Ossolineum, Wrocław 1977, 235-288.
4. Atkinson L.V., Harley P.J. *Numerical Methods with Pascal*. Wesley Publishing Company, Edison, New York 1989.
5. Awrejcewicz J. *Chaos in simple mechanical systems with friction*. J. Sound and Vibration **109**, 1986, 178-181.
6. Awrejcewicz J. *Bifurcation and Chaos in Simple Mechanical Systems*. World Scientific, Singapore 1989.
7. Belytschenko T., Chiapetta R.L., Bartel H.D. *Efficient large scale non-linear transient analysis by finite elements*. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering **10**, 3, 1976, 579-596.
8. Bogoliubov N.N., Mitropolky Y.A. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. Gordon and Branch Publishers, Inc, New York 1961.
9. Borthwick W.K.D. *The numerical solution of discontinuous structural systems*. Proc. of Second Int. Conf. on Recent Advancement in Structural Dynamics. University of Southampton, 1984, 307-316.
10. Braekhus J., Aasen J.O. *Experiments with direct integration algorithms for ordinary differential equations in structural dynamics*. Computers and Structures **13**, 1981, 91-96.
11. Carver M.B. *Efficient integration over discontinuities in ordinary differential equations simulations*. Mathematics and Computer Simulation **XX**, 1978, 190-195.
12. Cellier F.E., Rufer D.F. *Algorithm suited for the solution initial value problems in engineering applications*. Math. Comput. Simulation **XX**, 1978, 160-165.
13. Cheng A.H-D., Yang C.Y., Hackl K., Chajes M.J. *Stability and chaos of nonlinear structures with control. Part II: Non-Autonomous case*. Paper submitted to Journal of Engineering Mechanics, ASCE.
14. Childs D.W. *Fractional frequency rotor motion due to nonsymmetric clearance effect*. A.S.M.E. J. Eng. Power **104**, 1982, 533-541.
15. Choi Y.S., Noah S.T. *Non-linear steady state response of a rotor support system*. ASME, J. Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design **109**, 1987, 255-261.
16. Crosbie R.E., Hay J.L. *Digital techniques for the simulations of discontinuities*. Proc. Summer Computer Simulation Conference, SCI Press, La Jolla, California, 1974, 87-91.
17. Crutchfield J.P., Farmer J.D., Packard N.H., Shaw R.S. *Chaos*. Science of America, 1986, 46-57.
18. Dahlquist G. *A special stability problem for linear multistep methods*. BIT **3**, 1963, 27-42.
19. Danek O., Polacek M., Spacek L., Tlustý J. *Selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen*. VEB Verlag Technik, Berlin 1962.

20. Den Hartog J.P. *Forced vibrations with combined Coulomb and viscous friction*. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers **53**, 1931, 107-115.
21. Eckmann J.P., Kamphorst S., Oliffson, Ruelle D., Ciliberto S. *Liapunov exponents from time series*. Physical Review A **34**, 6, 1986, 4971-4979.
22. Ehrich F.F. *High order subharmonic response of high rotors in bearing clearance*. ASME, J. Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design **110**, 1988, 9-16.
23. Ehrich F.F. *Handbook of Rotodynamics*. McGraw-Hill, New York, 1992.
24. Ellison D. *Efficient automatic integration of ordinary differential equations with discontinuities*. Mathematics and Computers in Simulation **XXIII**, 1981, 12-20.
25. Ellison D. *Automatic integration of ODEs with discontinuities*. Math. Comput. Simulation **XXIX**, 1982, 35-42.
26. Feigenbaum M.J. *Qualitative universality for a class of nonlinear transformations*. J. Stat. Phys. **19**, 1978, 25-52.
27. Gawroński W., Kruszewski J., Ostachowicz W., Tarnowski J., Wittbrodt E. *Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji*. Arkady, Warszawa 1984.
28. Gelfand I.M., Fomin S.W. *Rachunek wariacyjny*. PWN, Warszawa 1972.
29. Grabec I. *Chaotic vibrations and acoustic emission caused by the cutting process*. Progress in Acoustic Emission III, The Japanese Society of NDI, 1986, 87-93.
30. Grabec I. *Chaotic dynamics in the cutting process*. Int. J. Mach. Tools Manufact. **1988**, 19-32.
31. Grabec I.: *Sources of chaos in mechanical machines*. Proc. 12th IMACS World Congress, Sevilla 1989.
32. Grassberg P., Procaccia I. *Measuring the strangeness of strange attractors*. Physica **9D**, 1983, 189-208.
33. Grudziński K., Konowalski K. *Modelowanie i obliczanie ślizgowych połączeń przewodnicowych obrabiarek*. Materiały XXV Sympozjonu "Modelowanie w Mechanice", Gliwice-Kudowa 1986, 143-150.
34. Grudziński K., Zapłata M. *Badania ruchu ślizgowego w zespole napędowo-posuwowym obrabiarki metodą symulacji komputerowej*. Postępy Technologii Maszyn i Urządzeń **1**, 1992, 3-26.
35. Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1983.
36. Guckenheimer J. *Symbolic dynamics and relaxation oscillations*. Physica **1D**, 1980, 227-235.
37. Gutowski R. *Równania różniczkowe zwyczajne*. WNT, Warszawa 1971.
38. Hackl K., Yang C.Y., Cheng A.H-D. *Stability and chaos of nonlinear structures with control. Part I: Autonomous case*. Paper submitted to Journal of Engineering Mechanics, ASCE.
39. Hagedorn P. *Non-Linear Oscillations*. Clarendon Press, Oxford 1988.
40. Hajek M. *Numerische Behandlung mechanischer Systeme mit Trockenreibung*. ZAAM. Z. angew. Math. Mech **69**, 5, 1989, 297-299.
41. Halin H.J. *Integration of ordinary differential equations containing discontinuities*. Summer Computer Simulation Conference, SCI Press, La Jolla 1986, 47-53.
42. Hastings W.F., Mathew P., Oxley P.L.B. Proc. R. Soc. Lond. A **371**, 1980, 569-587.
43. Hay J.L., Crosbie R.E., Chaplin I. *Integration routines for systems with discontinuities*. The Computer Journal **17**, No 3, 1974, 275-278.
44. Hayashi C. *Nonlinear Oscillations*. McGraw Hill, New York 1973.

45. Henon M. *A two-dimensional map with a strange attractor*. Comm. Math. Phys. **50**, 1976, 69-77.
46. Hilber H.M., Hughes T.J.R. *Collocation, dissipation and overshoot for time integration schemes in structural dynamics*. Earthq. Engng. Struct. Dyn. **6**, 1978, 99-117.
47. Hindmarsh A.C., *GEAR Ordinary Differential Equations Solver*. Lawrence Livermore Laboratory, December 1974.
48. Holmes P.J. *A nonlinear oscillator with strange attractor*. Philos. Trans. R. Soc. London A **292**, 1979, 419-448.
49. Hundal M.S. *Response of a base excited system with Coulomb and viscous friction*. J. Sound and Vibration **64**, 1979, 371-378.
50. Jean M., Pratt E. *System of the rigid bodies with dry friction*. Int. J. Engng. Sci. **23**, 1985, 497-513.
51. Jemielniak K. *Analityczno-doświadczalny model dynamicznej charakterystyki procesu skrawania przyskrawaniu nieswobodnym*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, nr 128, Mechanika, Warszawa 1990.
52. Jensen R.V. *Classical chaos*. American Scientist **75**, 1987, 168-181.
53. Kapitaniak T. *Chaotyczne procesy stochastyczne w nieliniowej dynamice*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, z.539, Łódź 1988.
54. Kapitaniak T. *Chaos in Systems with Noise*. World Scientific, Singapore 1988.
55. Kapitaniak T. *Chaotic behaviour of anharmonic oscillator with time delay*. J. Physical Society of Japan **56**, 1987, 1951-1954.
56. Kim S.T., Noah Y.B. *Steady state of a non-linear rotor housing system*. ASME, 1989, paper No 90-GT, 328-331.
57. Kim Y.B., Noah S.T. *Bifurcation analysis for a modified jeffcott Rotor with Bearing Clearances*. Nonlinear Dynamics **1**, 1990, 221-241.
58. Kleczka M., Kreuzer E., Wimers C. *Crises in mechanical systems*. Proc. of the IUTAM Symp. on Nonlinear Dynamics in Engineering Systems. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1989, 141-148.
59. Kragelskij I.V., Gittis N.V. *Frikcionnye Avtokolebanija*. Nauka, Moskva 1987.
60. Lambert J.D. *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*. Wiley, New York 1989.
61. Langer J. *Mechanika Budowli*. Wydawnictwo Naukowe Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.
62. Langer J. *Thumienie pasożytnicze w komputerowych rozwiązaniach równań ruchu*. Archiwum Inż. Łądowej **25**, 3, 1979, 359-369.
63. Langer J. *Metoda CMD numerycznego całkowania równań ruchu*. Mat. VI Konf. "Metody komputerowe w mechanice konstrukcji", Białystok 1979, 15-20.
64. Langer J., Klasztorny M. *Analiza jednokrokowych metod numerycznego całkowania równań ruchu*. Mechanika i Komputer **6**, 1986, 51-71.
65. Langer J. *Synteza wybranych metod numerycznego całkowania równań ruchu z pozycji kwadratur*. Mechanika i Komputer **7**, 1988, 27-37.
66. Legras J. *Methodes et Techniques L'Analyse Numerique*. Dunod, Paris 1971.
67. Lorenz E.N. *Deterministic nonperiodic flow*. J. Atmosf. Sci. **20**, 1963, 130-141.
68. Lostedt P. *Coulomb friction in two-dimensional rigid body systems*. J. Sound and Vibration **61**, 1981, 605-615.

69. Mandenbrot B. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman, San Francisco 1983.
70. Mashri S.F. *Forced vibration of a class of non-linear two-degree-of-freedom oscillators*. J. Nonlinear Mechanics 7, 1972, 663-674.
71. May R.M. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature 261, June 10, 1976, 457-467.
72. Mayer-Kress G. (ed.) *Dimension and Entropies in Chaotic Systems*. Springer-Verlag, New York 1986.
73. Milne W.E., Reynolds R.R. *Stability of a numerical solutions of differential equations I*. J. Assoc. Comput. Math. 6, 1959, 196-203.
74. Milne W.E., Reynolds R.R. *Stability of a numerical solutions of differential equations II*. J. Assoc. Comput. Math. 7, 1960, 46-56.
75. Minorsky N. *Nonlinear Oscillations*. Krieger Publishing, New York 1962.
76. Mitropolsky N.N. *Asymptotic Methodes in Theory of Nonlinear Oscillations*. Dunod, Paris 1971.
77. Moon F.C. *Experiments on chaotic motions of a forced non-linear oscillators: strange attractors*. Journal of Applied Mechanics 47, 1980, 638-644.
78. Moon F.C. *Chaotic Vibrations*. Wiley, New York, Chichester, Busbane, Toronto, Singapore 1987.
79. Moon F.C. *Experiments in chaotic dynamics*. Motion in Nonlinear Dynamical Systems. Springer-Verlag, Udine 1988, 1-50.
80. Moon F.C. *Experimental models for strange attractor*. New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics. P.J. Holmes (ed.), 1980, 487-495.
81. Nayfeh A.H. *Perturbation Methods*. Wiley, New York 1973.
82. Nayfeh A.H., Mook D.T. *Nonlinear Oscillations*. Wiley, New York 1979.
83. Neilson R.D., Barr A.D.S. *Dynamics of a rigid rotor mouted on discontinuously nonlinear supports*. Proc. of the I. Mech. Eng. 202, C5, 1988, 369-376.
84. Neilson R.D. *Dynamics of Simple Rotor Systems with Motion Dependent Discontinuities*. PhD thesis, University of Dundee, Dundee 1986.
85. Neilson R.D., Barr A.D.S. *Spectral features of the response of a rigid rotor mouted on discontinuously nonlinear supports*. Proc. 7th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Seville 1987, 1799-1803.
86. Neilson R.D., Barr A.D.S. *Transition to chaos in the structure of the sideband spectral response*. Proc. Euromech 252 Colloquium on "Chaos Concept in Mechanical Systems", Wuppertal 1988.
87. Neilson R.D., Gonsalvez D.H. *Chaotic motion of a rotor system with bearing clearance*. Proc. Int. Conf. "Rotordynamics", Venice 1992.
88. Newmark N.M. *A method of computation for structural dynamics*. Proc. ASCE 85, No. EM3, 1959, 63-94.
89. Noor A.K. *Survey of computer programs for solution of nonlinear structural and solid mechanics problems*. Computers and Structures 13, 1981, 425-465.
90. Odens J.T., Martins J.A.C. *Models and computational methods for dynamic friction phenomena*. Computers Methods in Applied Mechncs and Engineering 52, 1985, 527-634.
91. O'Regan P.G. *Step size adjustment at discontinuities for fourth order Runge-Kutta methods*. The Computer Journal 13, 4, 1970, 401-404.

92. Ostachowicz W., Szwedowicz J. *Algorytm modelowania tarcia konstrukcyjnego elementami ślizgowymi*. Materiały z XXVI Sympozjonu "Modelowanie w Mechanice". Kudowa - Gliwice 1987.
93. Ostrowski A.M. *Solution of Equations and Systems of Equations*. Academic Press, London 1960.
94. Otnes R.K., Enochson L. *Analiza numeryczna szeregów czasowych*. WNT, Warszawa 1978.
95. Parker T.S., Chua L.O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, New York, Berlin, London 1989.
96. Poincaré H. *Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celleste*. Vol. 1-3. Gauthier-Villars, Paris 1899.
97. Popp K., Stelzer P. *Nonlinear oscillations of structures induced by dry friction*. Proc. of the IUTAM Symp. on Nonlinear Dynamics in Engineering Systems. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1989, 233-240.
98. Powell J.A., Wiercigroch M. *Influence of non-reversible Coulomb characteristic on the response of a harmonically excited linear oscillator*. J. Machine Vibration 1, 2, 1992, 94-104.
99. Press W.H., Flannery B.P., Vetterling W.T. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, New York, Sydney 1986.
100. Pritsker A.A.B., Hunt N.R. *GASP IV - A combined continuous discrete FORTRAN based simulation language*. Simulation, 1973, 65-70.
101. Reithmeier E. *Periodische Losungen nichlinear Schwingungssysteme - Numerische Berechtung, Stabilita, Bifurkation*. Dissertation am Lehrstung B fur Mechanik, TU Munchen 1989.
102. Reithmeier E. *Periodic solutions of nonlinear dynamical systems with discontinuities*. Nonlinear Dynamics in Engineering Systems, IUTAM Symposium, Stuttgart 1989. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1990.
103. Ruzicka J.E., Derby T.F. *Vibration isolation with nonlinear damping*. ASME, Journal of Engineering for Industry 93, 1971, 627-635.
104. Schuster H.G. *Deterministic Chaos*. Physik-Verlag, Weinheim 1984.
105. Seydel R. *From Equilibrium to Chaos. Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Elsevier, New York 1989.
106. Seydel R. *Tutorial on continuation*. Int. J. Bifurcation and Chaos 1, 1, 1991, 3-11.
107. Shampire L.F. *Solving ordinary differential equations for simulation*. Math. Comput. Simulation XX, 1978, 204-207.
108. Shaw S.W., Holmes P.J. *A periodically forced linear oscillator*. J. Sound and Vibration 90, 1983, 129-155.
109. Shaw S.W. *On the dynamic response of a system with dry friction*. J. Sound and Vibration 108, 2, 1986, 305-325.
110. Skalmierski B., Tylikowski A. *Stochastic Processes in Dynamics*. PWN, Warszawa 1982.
111. Stanway R., Sproston J.L., Stevens N.G. *Nonlinear modelling of an electroreological vibration damper*. Journal of Electrostatic 20, 1987, 167-184.
112. Stewart I. *Does God Play Dice*. Penguin Books, London 1990.
113. Susolik O. *Influence of an absorber on machine tool vibration*. The Shock and Vibration Bulletin 43, Part 4, 1973, 189-198.

114. Szemplińska-Stupnicka W. *Problems of chaos in nonlinear oscillators. A survey.* Proc. XVth Symposium "Vibrations in Physical Systems", Błażejewko k. Poznań 1992, 31-40.
115. Szemplińska-Stupnicka W. *Chaotic and regular motion in nonlinear vibrating systems.* Chaotic Motion in Nonlinear Dynamical Systems. Springer-Verlag, Udine, 1988, 51-135.
116. Szemplińska-Stupnicka W. *On Routes to Chaotic Motion in Oscillators with Unsymmetric and Symmetric Elastic Nonlinearity.* Prace IPPT 27, 1986.
117. Szopa J. *Metody badania chaosu w technicznych układach zdeterminowanych.* Wykład na Konferencji "Chaos i Procesy Stochastyczne w Układach Mechanicznych. Spała k. Łodzi 1992.
118. Thompson J.M.T., Stewart H.B. *Nonlinear Dynamics and Chaos. Geometrical Methods for Engineers and Scientists.* Wiley, Chichester, New York, Toronto, Singapore 1989.
119. Tongue B.H., Smith D. *Determining Lyapunov exponents by means of interpolated mapping.* J. Appl. Mech. 56, 1989, 691-696.
120. Ueda Y. *Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equations.* J. Stat. Phys. 20, 1979, 181-196.
121. Walaschek J. *Dynamics of non-linear automobile shock-absorbers.* International Journal of Non-Linear Mechanics 25, 1990, 299-308.
122. Wang J.H., Shift *The influence of a variable friction coefficient on the dynamic behaviour of a blade with friction damper.* J. Sound and Vibration 149, 137-145.
123. Wiercigroch M. *Chaotic vibrations in the machine tool - cutting process system.* Part I-Modelling. Summ. Int. Conf. "Signals & Systems", Centije, Yugoslavia, 1990.
124. Wiercigroch M., Tytkowski K.: *Chaotic vibrations in the machine tool-cutting process system.* Part II-Simulation. Summ. Int. Conf. "Signals & Systems", Centije, Yugoslavia, 1990.
125. Wiercigroch M., Gonsalvez D., Neilson R.D. *Chaos occurring in systems with discontinuities.* ASME Press 5, 1991, 129-138.
126. Wiercigroch M. *Comments on the study of harmonically excited linear oscillator with Coulomb damper.* J. Sound and Vibration 167, 1993, 594-598.
127. Wiercigroch M., Powell J.A. *Modelling of non-reversible Coulomb friction characteristic.* Summ. Int. Conf. "Vibrations in Physical Systems'92", Błażejewko k. Poznań 1992.
128. Wiercigroch M., Gonsalvez D., Neilson R.D. *Nonlinear vibrations in the systems with discontinuities.* Summ. Int. Conf. "Vibrations in Physical Systems'92". Błażejewko k. Poznań 1992.
129. Wiercigroch M., Neilson R.D., Player M.A. *Dynamic model of ultrasonic drilling.* J. Machine Vibration 4, 2, 1993 (in press).
130. Wiercigroch M., Neilson R.D., Player M.A., Barber H. *An experiment study of ultrasonic machining.* Int. J. Mach. Tools & Manufact (in print).
131. Wiercigroch M. *Restart for collocation methods in numerical integration of equations of motion describing the cutting process.* Summ. Int. Conf. "Vibrations in Physical Systems", Błażejewko k. Poznań 1988.
132. Wiercigroch M. *Collocation methods in solving nonlinear equations of motion of the machine tool-cutting process system.* ASME Press 6, 1989, 43-52.

133. Wiercigroch M. *A numerical method for calculating dynamic responses in the machine tool - cutting process system*. Archiwum Budowy Maszyn (w druku).
134. Wiercigroch M. *DAMT&CP-pakiet oceny właściwości dynamicznych układu obrabiarka-proces skrawania*. Materiały z I Międzynarodowej Konferencji MASAD'88, Wrocław 1988, 247-252.
135. Wiercigroch M. *Modelowanie dynamicznych oddziaływań w układzie obrabiarka - proces skrawania na przykładzie procesu wyłaczania na wiertarko-frezarkach*. Rozprawa doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1989.
136. Wiercigroch M., Kosmol J. *Active control of nonlinear vibrations in the machine tool - cutting process system*. GEP XLV, 1993, 39-42.
137. Wilson E.L., Penzien J. *Evaluation of orthogonal damping matrices*. Int. J. Num. Meth. Engng. 4, 1972, 5-10.
138. Wilson E.L., Farmhoomand I., Bathe K.J. *Nonlinear dynamic analysis of complex structures*. Earthq. Engng. Struct. Dyn 1, 1973, 225-241.
139. Wojciechowski W. *Modelowanie płaskich połączeń przewodnicowych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika z.92, Gliwice 1989, 281-286.
140. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. *Determining Lyapunov exponents from a time series*. Physica D 16, 1985, 285-315.
141. Yellowey I. *Observations on the mean values of torque specific power in the peripheral milling process*. Int. J. Mach. Tools Des. Res. 25, 4, 1985, 337-346.
142. Yellowey I. *A simple predictive model of orthogonal metal cutting*. Int. J. Mach. Tools Manufact. 27, 3, 1987, 357-365.
143. Young L.S. *Dimention, entropy, and Lyapunov exponents*. Physica 124A, 1984, 639-646.

## Dynamika dyskretnych układów mechanicznych z nieciągłościami

### Streszczenie

W pracy zdefiniowano oraz badano dyskretne układy mechaniczne z nieciągłościami w postaci uogólnionego wektora przemieszczenia, prędkości bądź funkcji określonej na obu tych wektorach, np. układy ze skokowo zmienną sztywnością, układy z tarcie Coulomba lub układy, w których powyższe nieciągłości występują łącznie.

Ze względu na ograniczoną stosowalność metod analitycznych i analitycznych przybliżonych dla układów z nieciągłościami, opracowano odpowiednie algorytmy numerycznego ich rozwiązywania. Rozwiązanie to przebiega w dwóch fazach: w pierwszej następuje "wykrycie" punktu nieciągłości, w drugiej dokładna lokalizacja czasu jego wystąpienia. Wyznaczanie czasów wystąpienia nieciągłości odbywa się za pośrednictwem odpowiednio skonstruowanych funkcji logicznych zwanych "*funkcjami przełączającymi*". Funkcje te umieszcza się w wykorzystywanym algorytmie całkowania numerycznego równań ruchu.

Uwzględniając możliwość występowania drgań chaotycznych w układach z nieciągłościami, zaadaptowano szereg technik badania jakości ruchu, takich jak wykres bifurkacyjny, mapa Poincarégo, widmo mocy, funkcja autokorelacji, wykładniki Lapunowa oraz wymiar korelacyjny.

W celu sprawdzenia poprawności opracowanego opisu formalnego i metod rozwiązywania i badania dynamiki układów mechanicznych z nieciągłościami, zbudowano pakiet programów obliczeniowych, którym przebadano kilka typowych układów. Wyznaczono dla nich obszary występowania drgań regularnych i chaotycznych, posługując się wymienionymi powyżej metodami oceny jakości ruchu.

W trakcie analizy uzyskano szereg wniosków ogólnych dotyczących metod rozwiązywania i badania układów z nieciągłościami, jak i szczegółowych, ważnych z punktu widzenia dynamiki rozpatrywanych układów.

# Dynamics of Discrete Mechanical Systems with Discontinuities

## Summary

In this thesis discrete mechanical systems with discontinuities in the form of generalized displacement and velocity vectors were defined and studied. Due to the fact, that applicability of analytical and approximate analytical methods for systems with discontinuities is limited, the appropriate algorithms for numerical solving such systems were constructed. The numerical solution is carried out in two major stages. In the first stage the discontinuity point is detected whilst in the second one the time of its occurrence is precisely located. The time of discontinuity occurrence is determined using logical functions, called switch functions, which are constructed. These functions are placed in the applied algorithm of numerical integration of equations of motion.

In respect to the possibility of the existence of chaotic vibrations in the abovementioned systems, many techniques analysing the quality of motion such as bifurcation diagrams, Poincaré maps, power spectrum, autocorrelation functions and Liapunov exponents were adapted and used for systems with discontinuities.

In order to verify the correctness of the formal description and solving methods which were worked out, the software package which enables solving and analysis of dynamic of discrete systems with discontinuities (including analysis of chaotic motion) was written. Using this package many typical systems with discontinuities were analysed, and the chaos regions were determined.

During the examination of the abovementioned systems with discontinuities, many conclusions concerning methods of solving and analysing these systems as well as their dynamics were obtained.

# Dynamik diskreter mechanischer Systeme mit Unstetigkeiten

(Zusammenfassung)

Definiert und untersucht wurden in der vorliegenden Arbeit diskrete mechanische Systeme mit Unstetigkeiten in Form von verallgemeinertem Verschiebungs- und Geschwindigkeitsvektor oder auch in Form von auf den beiden Vektoren bestimmter Funktion. Beispiele solcher Systeme sind Systeme mit sprunghaften variablen Stetigkeit, Systeme mit Coulombscher Reibung oder Systeme, bei denen alle genannten Unstetigkeiten zusammen auftreten.

In Hinsicht auf die beschränkte Anwendbarkeit von analytischen Methoden und analytischen Approximativen auf Systeme mit Unstetigkeiten wurden entsprechende Algorithmen ihrer numerischen Lösung, die in zwei Etappen erfolgt, bearbeitet. In der ersten Etappe wird der Unstetigkeitspunkt "nachgewiesen", in der zweiten die genaue Zeit seines Auftretens lokalisiert. Die Bestimmung der Auftretenszeiten von Unstetigkeiten erfolgt durch entsprechend konstruierte logische Funktionen, die als "Umschaltfunktionen" bezeichnet wurden. Diese Funktionen werden in den benutzten Algorithmus numerischer Intergration der Bewegungsgleichungen gesetzt.

Die dynamischen Antworten der untersuchten Systeme auf die determinierte Erzwingung können stochastisch sein, so daß in diesen Systemen die Erscheinung chaotischer Schwingungen auftreten kann. Diese Tatsache verursacht, daß bei der Analysedurchführung Methoden für Untersuchung von Chaos benutzt werden müssen.

Zur Prüfung der Richtigkeit der formalen Beschreibung und der Lösungsmethoden wurde ein Paket von Programmen bearbeitet, das die Lösung und Analyse der Dynamik diskreter Systeme mit Unstetigkeiten ermöglicht, wie auch die Analyse chaotischer Schwingungen. Unter Anwendung von diesem Paket wurde eine Reihe von typischen Systemen mit Unstetigkeiten untersucht, wobei die Auftretensbereiche vom Chaos bestimmt wurden mit Hilfe von Bifurkationsdiagrammen, Poincaré-Karten, Leistungsspektren, Selbstkorrelationsfunktionen und Ljapunov-Exponenten.

Während der Analyse wurde eine Reihe von schlüssen gewonnen bezüglich der Lösungsmethoden und Untersuchung der genannten Systeme sowie deren Dynamik.

