

Józef WOJNAROWSKI,
Andrzej MEDER

MODELOWANIE BELEK CIĄGLYCH GRAFAMI PRZEPLYWU SYGNAŁÓW

Streszczenie. Przedstawiono zastosowanie grafów przepływu sygnałów w analizie wieloprzęsłowych belek ciągłych. Bazując na metodzie sił i metodzie trzech momentów pokazano sposób modelowania belek ciągłych grafem przepływu sygnałów. Obliczenia tą metodą można prowadzić przy wykorzystaniu elektronicznej techniki obliczeniowej.

1. WSTĘP

Szybki rozwój elektronicznej techniki obliczeniowej doprowadził do poszukiwania metod, za pomocą których w łatwy sposób dokonuje się algorytmizacji i automatyzacji obliczeń inżynierskich. Jedną z nich jest metoda grafów przepływu sygnałów [1,2,3]. Zastosowanie jej w analizie układów liniowo-sprężystych ułatwia dokonanie ciągu przekształceń przy rozwiązywaniu tego zagadnienia.

Można zauważyć, że metody klasyczne stosowane przy rozwiązywaniu układów liniowo-sprężystych, takie jak: metoda sił, przemieszczeń, trzech momentów, czy metoda Crossa [4,5], mogą być przedstawione w postaci grafu przepływu sygnałów [6,7,8,9].

Oczywiste jest, że dla różnych postaci zapisu układu algebraicznych równań liniowych wyróżnia się kilka rodzajów grafów przepływu sygnałów.

W pracy tej rozpatrywane są dwa rodzaje grafów przepływu sygnałów: grafy Masona - M [2,3] i grafy Coatesa - C [1].

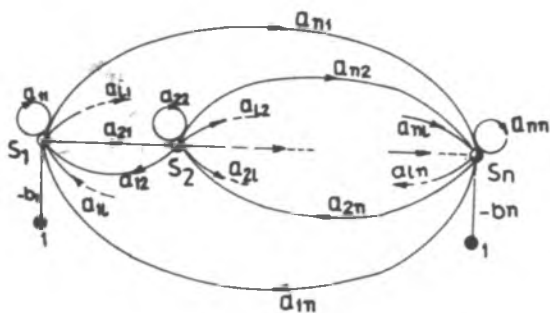
Graf M odpowiada zapisowi układu algebraicznych równań liniowych w postaci:

$$S_k = \sum_{\substack{l=1 \\ l=k}}^n t_{kl} S_l + d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

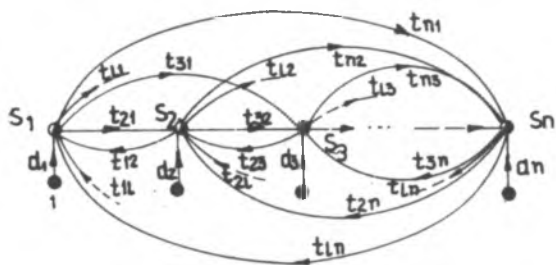
i pokazany jest na rysunku 1.

Graf C, przedstawiony na rysunku 2, określa jednoznacznie układ algebraicznych równań liniowych zapisanych w postaci:

$$\sum_{l=1}^n a_{kl} S_l - b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$



Rys. 1



Rys. 2

2. GRAFY METODY SIŁ

Bez naruszenia ogólności rozważań ograniczymy się do rozważenia belki dwukrotnie statycznie niewyznaczalnej (rys. 3a). Jako wielkości hiperstatyczne przyjęto reakcje R_3 i R_5 .

W celu wyznaczenia wielkości hiperstatycznych przyjęto statycznie wyznaczalny układ, w którym oddziaływanie podpór zastąpiono reakcjami hiperstatycznymi.

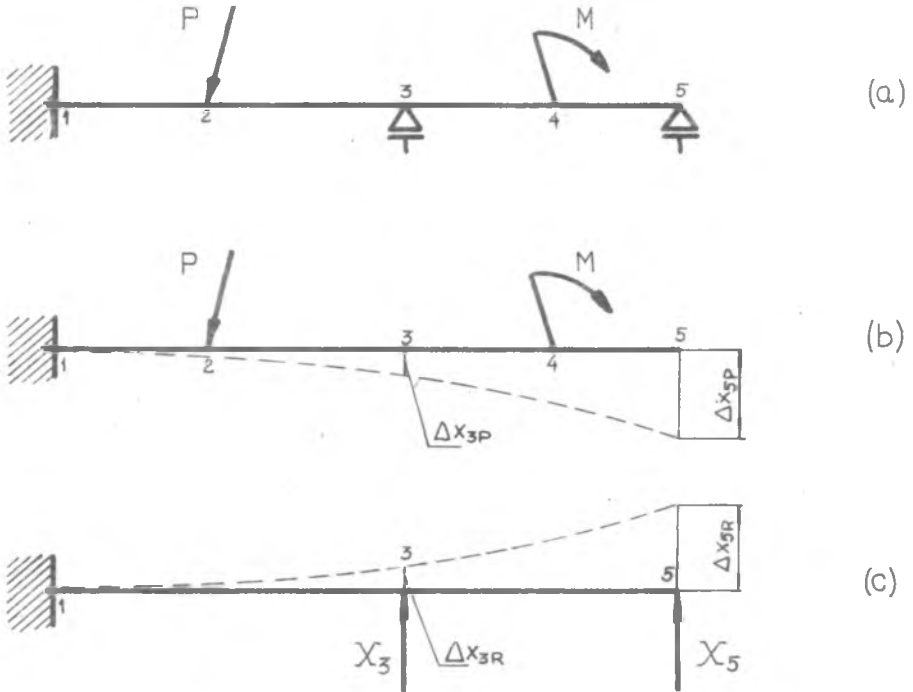
Ponieważ w miejscach podpór przemieszczenia liniowe w układzie rzeczywistym są równe zero, otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} \Delta x_{3R} + \Delta x_{3P} &= 0, \\ \Delta x_{5R} + \Delta x_{5P} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie:

Δx_{3P} , Δx_{5P} - przemieszczenia w układzie statycznie wyznaczalnym wywołane siłami czynnymi,

Δx_{3R} , Δx_{5R} - przemieszczenia w układzie statycznie wyznaczalnym wywołane nieznanymi reakcjami hiperstatycznymi.



Rys. 3

Przemieszczenia Δx_{3R} i Δx_{5R} oraz Δx_{3P} i Δx_{5P} można wyrazić równaniami:

$$\Delta x_{3R} = X_3 \delta_{33} + X_5 \delta_{35};$$

$$\Delta x_{5R} = X_3 \delta_{53} + X_5 \delta_{55};$$

$$\Delta x_{3P} = P \delta_{32} + M \delta_{34};$$

$$\Delta x_{5P} = P \delta_{52} + M \delta_{54}.$$

Ostatecznie więc otrzymujemy:

$$X_3 \delta_{33} + X_5 \delta_{35} + P \delta_{32} + M \delta_{34} = 0, \quad (4)$$

$$X_3 \delta_{53} + X_5 \delta_{55} + P \delta_{52} + M \delta_{54} = 0. \quad (5)$$

Zauważmy, że zależności (3) i (4) można przekształcić do postaci:

$$X_3 = - \frac{\delta_{32}}{33} P - \frac{\delta_{34}}{33} M - \frac{\delta_{35}}{33} X_5, \quad (6)$$

$$X_5 = - \frac{\delta_{52}}{55} P - \frac{\delta_{54}}{55} M - \frac{\delta_{53}}{55} X_3, \quad (7)$$

gdzie:

δ_{ij} - liczby wpływe [5].

Równania (4) i (5) przedstawione są w postaci grafu C (rys. 4a,b,o), natomiast zależności (6) i (7) w postaci grafu M (rys. 5a,b,o).

Zauważmy, że w grafach C i M, przedstawionych na rys. 4c i 5c, wielkości zewnętrzne czynne reprezentowane są przez wierzchołki źródłowe, natomiast wierzchołki reprezentujące hiperstatyczne wielkości podporowe są wierzchołkami pośrednimi.

Każdy wierzchołek źródłowy reprezentujący uogólnioną siłę czynną połączony jest łukiem z każdym wierzchołkiem pośrednim reprezentującym hiperstatyczną wielkość podporową. Pomiedzy wierzchołkami pośrednimi istnieją pętle utworzone przez łuki wzajemne.

W przypadku grafów C każdy węzeł pośredni posiada dodatkowo pętlę własną.

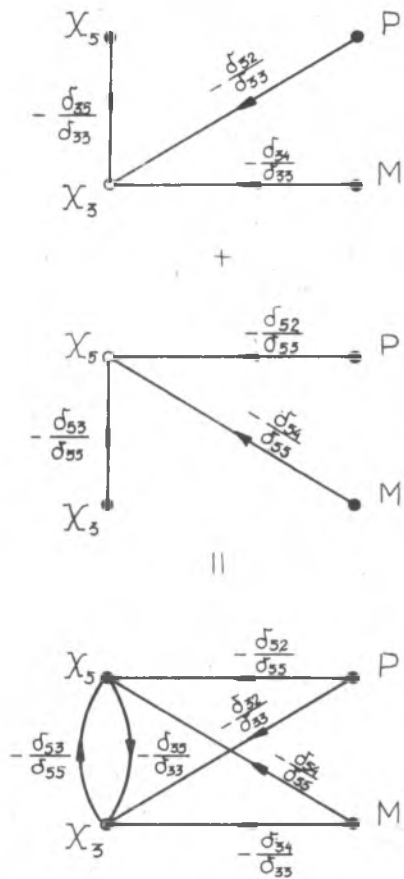
Na podstawie powyższej analizy można narysować graf M lub C dla dowolnej belki ciąglej statycznie niewyznaczalnej bez wypisywania równań kanonicznych metody sił.

Przykładowo na rysunkach 6 i 7 przedstawiono grafy M i C dla układu trzykrotnie statycznie niewyznaczalnego obciążonego k-silami uogólnionymi czynnymi Q_1 .

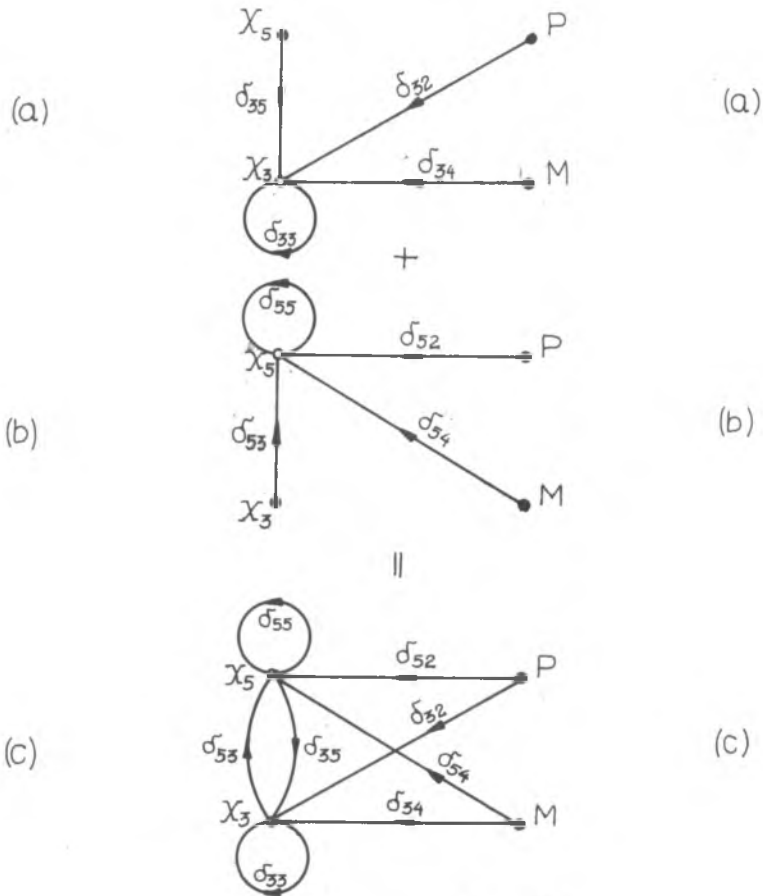
2.1. Rozwiązanie grafów metody sił

Dla ilustracji metody rozważmy belkę dwukrotnie statycznie niewyznaczalną przedstawioną na rysunku 8a. Przyjmijmy za wielkości hiperstatyczne reakcje R_3 i R_6 (rys. 8b).

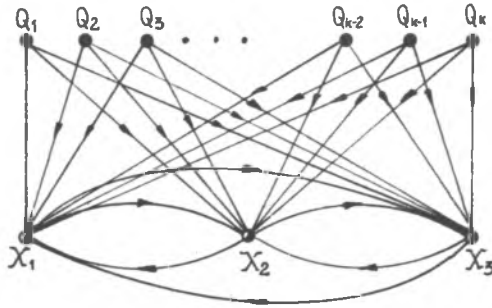
Na rysunkach 9a i 10a przedstawiono graf M i graf C, odpowiadające rozważanemu układowi (rys. 8a),



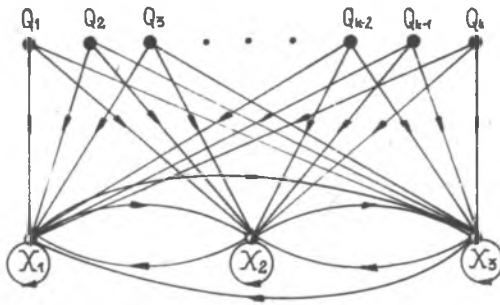
Rys. 4



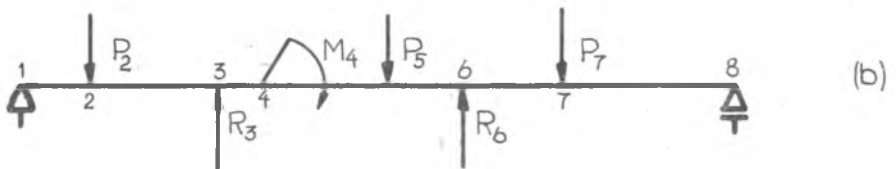
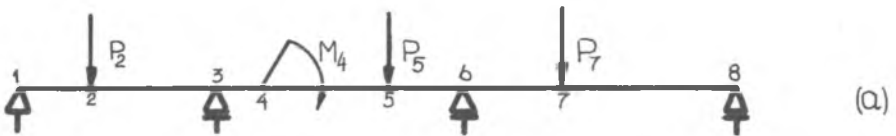
Rys. 5



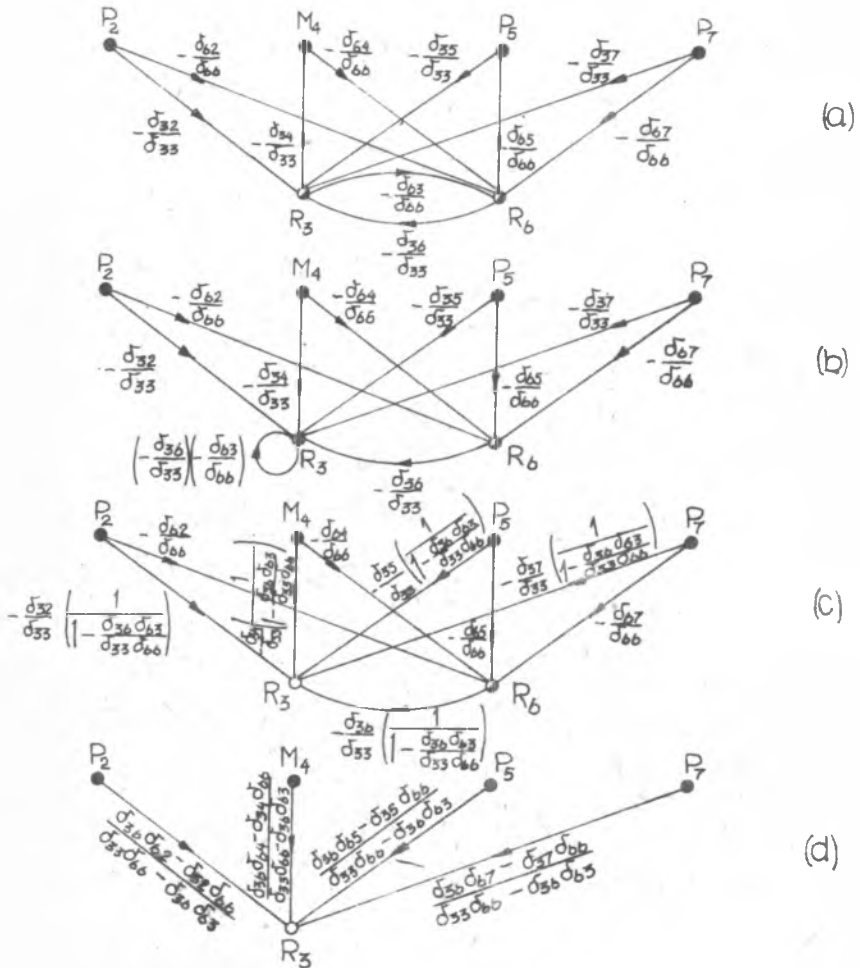
Rys. 6



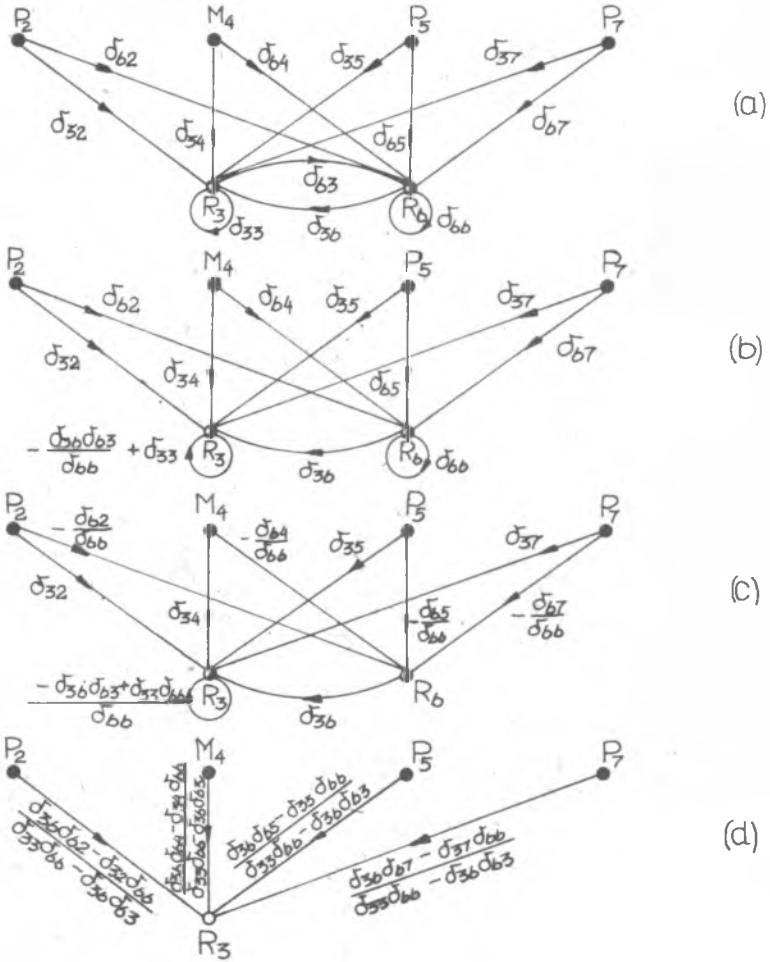
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

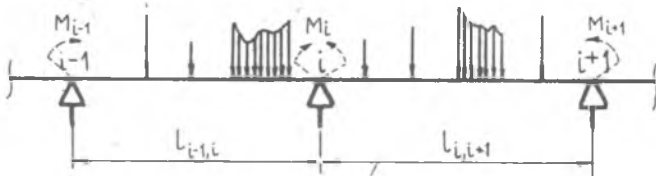
Rozwiązując powyższe grafy metodą przekształceń^{x)} dochodzimy do grafów pokazanych na rysunkach 9d i 10d. Kolejne etapy przekształceń grafów przedstawiono na rysunkach 9a - 9d i 10a - 10d. Zauważmy, że uzyskane grafy (rys. 9d i 10d) umożliwiają wyznaczenie hiperstatycznej wielkości podporowej, jeżeli tylko znane są liczby wpływe.

Przedstawiony powyżej sposób analizy układów liniowo-sprężystych polega więc na ujęciu metody sił w postaci grafu przepływu sygnałów i rozwiązaniu grafu metodą przekształceń. W takim postępowaniu pomijamy etap wypisywania równań kanonicznych metody sił.

W wielu przypadkach, a szczególnie wtedy, gdy grafy zawierają większą liczbę wierzchołków, metoda przekształceń grafu jest pracochłonna i w celu rozwiązania grafu stosuje się formułę Masona [2,3] dla grafu M lub formułę Desoera dla grafu C [1].

3. GRAFY METODY TRZECH MOMENTÓW

W celu przedstawienia metody trzech momentów w postaci grafu przepływu sygnałów rozważmy dwa sąsiednie przęsła belki ciągłej wieloprzęsłowej (rysunek 11).



Rys. 11

Równanie trzech momentów 5 dla tych przęseł można zapisać w postaci:

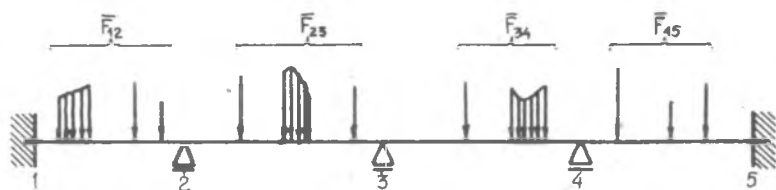
$$a_{i,i-1} M_{i-1} + a_{i,i} M_i + a_{i,i+1} M_{i+1} - b_i = 0, \quad (8)$$

lub po przekształceniu:

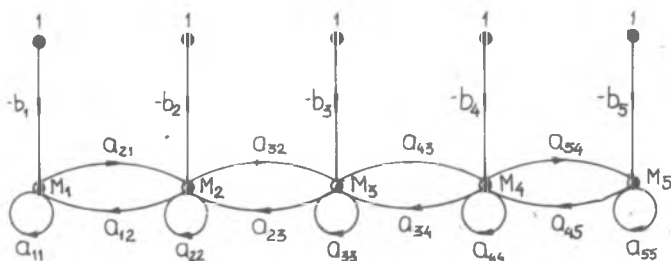
$$M_i = t_{i,i-1} M_{i-1} + t_{i,i+1} M_{i+1} + d_i. \quad (9)$$

Dla belki ciągłej o n podporach otrzymujemy układ n równań, którego rozwiązaniem są niewiadome momenty podporowe.

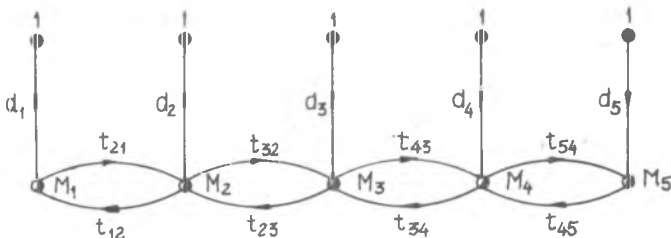
^{x)} Podstawowe aksjomaty algebry grafów przepływu sygnałów podano w 1,2,3.



Rys. 12



Rys. 13



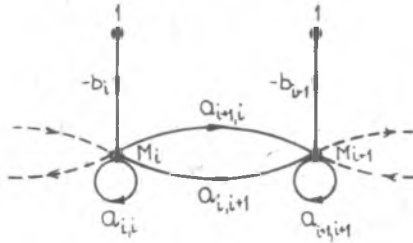
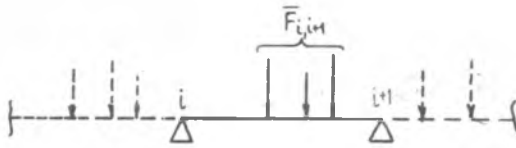
Rys. 14

Rozważmy dla przykładu belkę czteroprzęsłową (rys. 12). Układ równań metody trzech momentów dla tej belki przedstawiono w postaci grafów C i M na rysunkach 13 i 14.

Analizując otrzymane grafy (rys. 13 i 14) można zauważyć, że postać grafu dla każdego wewnętrznego przęsła belki ciągłej jest taka sama (rys. 15 i 16).

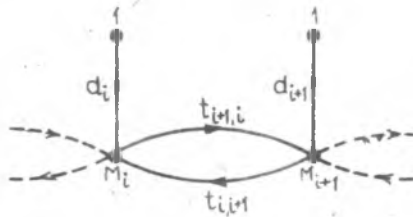
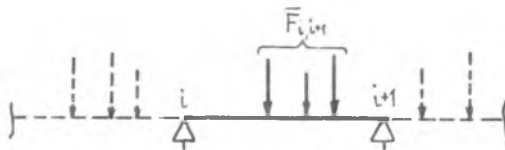
W przypadku przęsła zewnętrznego (rys. 17 i 18) otrzymujemy graf mniej złożony.

W związku z tym można narysować graf C lub M dla dowolnej belki wieloprzęsłowej, pomijając wypisywanie równań metody trzech momentów. Używamy przez to znaczne zmniejszenie czasu obliczeń.



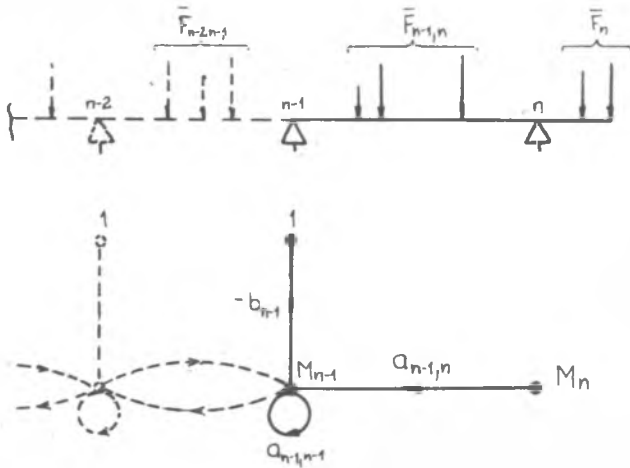
Graf G przęsa $i, i+1$

Rys. 15



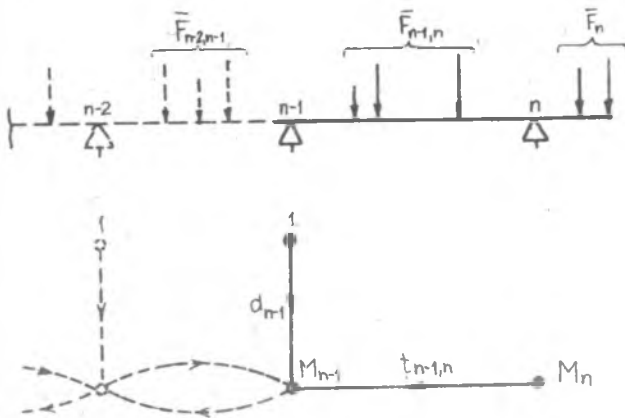
Graf M przęsa $i, i+1$

Rys. 16



Graf C przęsta zewnętrznego ze wspornikiem

Rys. 17



Graf M przęsta zewnętrznego ze wspornikiem

Rys. 18

3.1. Metoda ogólna. Reguły Desoera i Masona

Metoda ogólna rozwiązywania grafów przepływu sygnałów polega na zastosowaniu reguły Desoera [1] w przypadku grafów C lub reguły Masona [2,3] w przypadku grafów M.

Postać tych reguł jest identyczna^{x)}:

$$s_j = \sum_i \frac{s_i \sum_k T_k D_k}{D}, \quad (10)$$

gdzie:

s_j - zmienna wyjściowa,

s_i - sygnał źródło grafu przyporządkowany i-temu wierzchołkowi,

T_k - transmitancja k-tej ścieżki otwartej,

D_k - wyznacznik części grafu, która nie styka się z k-tą ścieżką otwartą,

D - wyznacznik grafu.

Według reguły Desoera wyznacznik grafu C określa się zależnością:

$$D = (-1)^n T_{mn}, \quad (11)$$

gdzie:

T_{mn} - iloczyn transmitancji m-tej kombinacji zawierającej wszystkie węzły grafu z wyjątkiem źródła, z n nie stykających się pętli.

Dla grafów M, zgodnie z regułą Masona, wyznacznik grafu obliczamy ze wzoru:

$$D = 1 + (-1)^1 T_{m1} + (-1)^2 T_{m2} + \dots + (-1)^n T_{mn}, \quad (12)$$

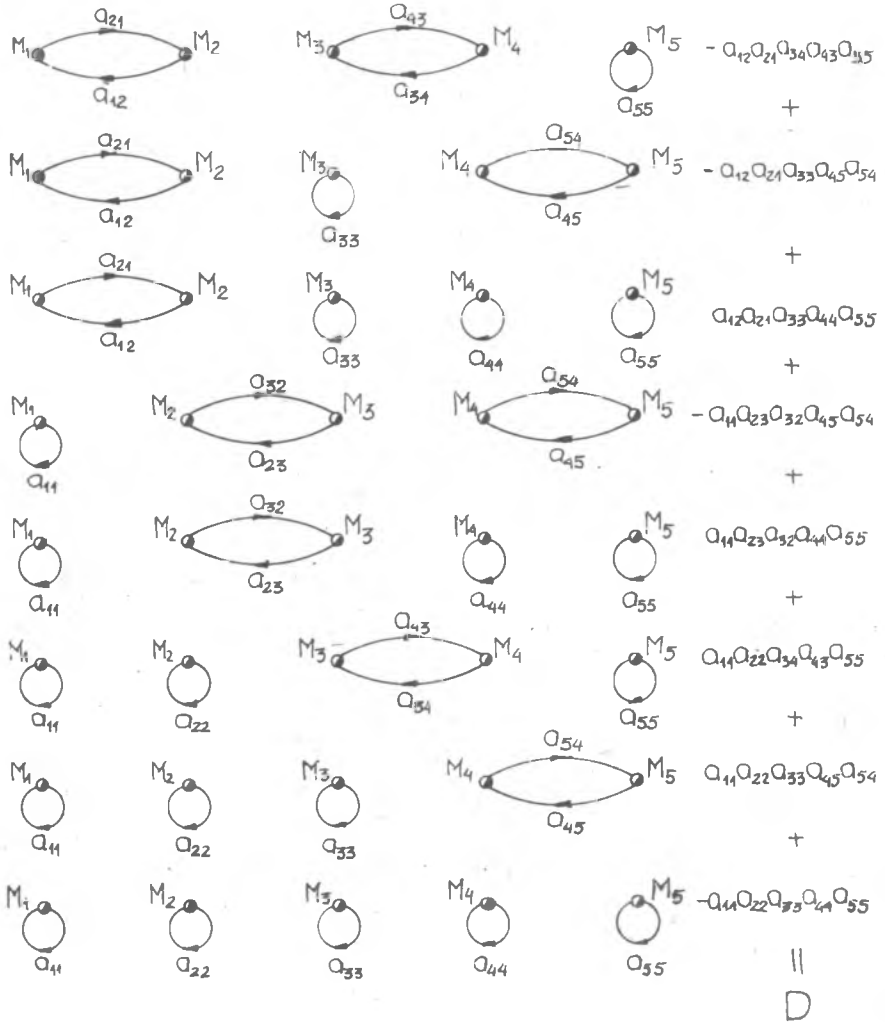
gdzie:

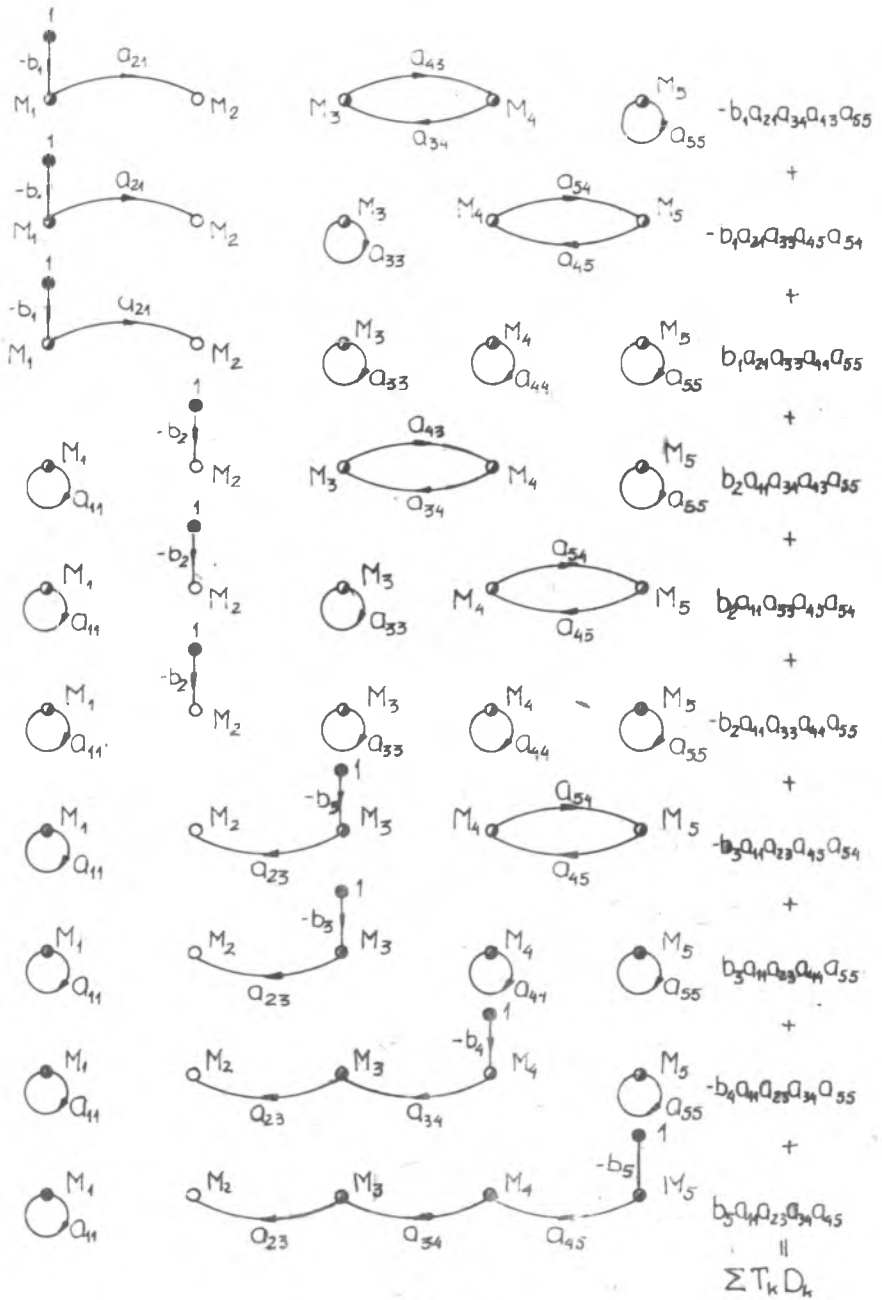
T_{mn} - iloczyn transmitancji m-tej możliwej kombinacji z n nie stykających się pętli.

Dla przykładu wyznaczymy moment M_2 na podstawie grafu (rys, 13) stosując regułę Desoera.

W tym celu wszystkie możliwe kombinacje nie stykających się pętli przedstawiono na rysunku 19, zaś rysunek 20 przedstawia wszystkie ścieżki otwarte węzła reprezentującego moment M_2 i ich wyznaczniki. Stosując wzór (10) otrzymujemy równanie (13) określające szukany moment M_2 .

^{x)} Inaczej dla poszczególnych reguł wyznacza się wielkości występujące we wzorze (10).





Rys. 20

$$M_2 = \frac{-b_1^{a_{21}}(a_{33}^{a_{44}a_{55}} - a_{34}^{a_{43}a_{55}} - a_{33}^{a_{45}a_{54}}) +}{-a_{12}^{a_{21}}(a_{34}^{a_{43}a_{55}} + a_{33}^{a_{45}a_{54}} - a_{33}^{a_{44}a_{55}}) + a_{11}^{a_{23}}a_{32}(a_{55}^{a_{44}} - a_{45}^{a_{54}}) +}$$

$$\frac{-b_2^{a_{11}}(a_{34}^{a_{43}a_{55}} + a_{33}^{a_{45}a_{54}} - a_{33}^{a_{44}a_{55}}) +}{+a_{11}^{a_{22}}(a_{34}^{a_{43}a_{55}} + a_{33}^{a_{45}a_{54}} - a_{33}^{a_{44}a_{55}})}$$

$$\underline{-b_3^{a_{11}a_{23}}(a_{44}^{a_{55}} - a_{45}^{a_{54}}) + b_4^{-a_{11}a_{23}}a_{34}^{a_{55}} - b_5^{a_{11}a_{23}}a_{34}^{a_{45}}} \quad (13)$$

W podobny sposób można wyznaczyć inne szukane momenty, tzn. M_1, M_3, M_4 i M_5 .

Zastosujemy teraz regułę Masona do wyznaczenia momentu M_2 dla grafu M z rysunku 14.

Wszystkie możliwe kombinacje z n niestykających się pętli dla rozpa-trywanego grafu pokazano na rysunku 21.

Na podstawie zależności (12) wyznacznik grafu wynosi:

$$D' = 1 - (t_{12}t_{21} + t_{23}t_{32} + t_{34}t_{43} + t_{45}t_{54}) + t_{12}t_{21}t_{34}t_{43} +$$

$$+ t_{12}t_{21}t_{45}t_{54} + t_{23}t_{32}t_{45}t_{54}$$

Na rysunku 22 przedstawiono wszystkie ścieżki otwarte grafu pomiędzy źródłami a wierzchołkiem reprezentującym moment M_2 oraz wyznaczone ich transmitanoje i wyznaczniki.

Zgodnie z regułą Masona szukany moment M_2 wynosi:

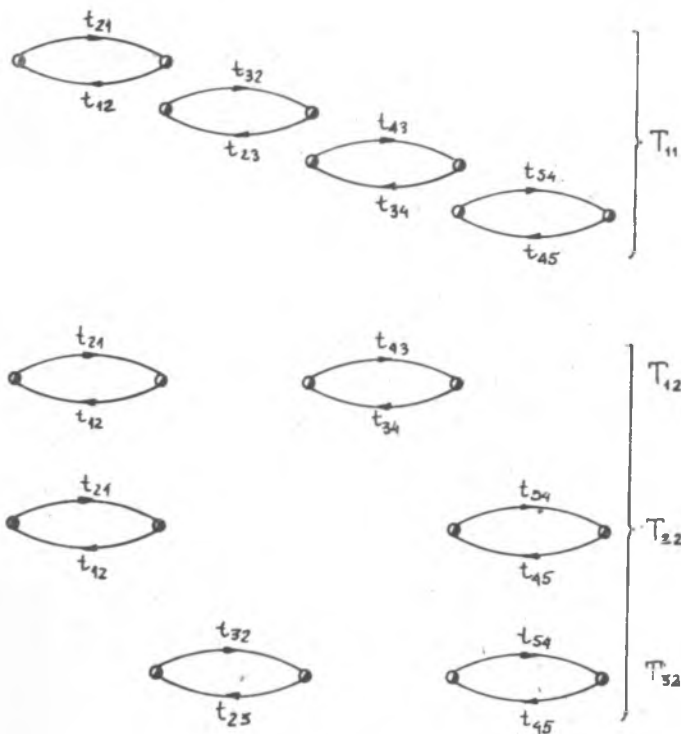
$$M_2 + \frac{d_1 t_{21} (1 - t_{34} t_{43} - t_{45} t_{54}) + d_2 (1 - t_{34} t_{43} - t_{45} t_{54}) +}{1 - (t_{12} t_{21} + t_{23} t_{32} + t_{34} t_{43} + t_{45} t_{54}) + t_{12} t_{21} t_{34} t_{43} +}$$

$$\frac{+ d_3 t_{23} (1 - t_{45} t_{54}) + d_4 t_{23} t_{34} + d_5 t_{23} t_{34} t_{45}}{+ t_{12} t_{21} t_{45} t_{54} + t_{23} t_{32} t_{45} t_{54}} \quad (14)$$

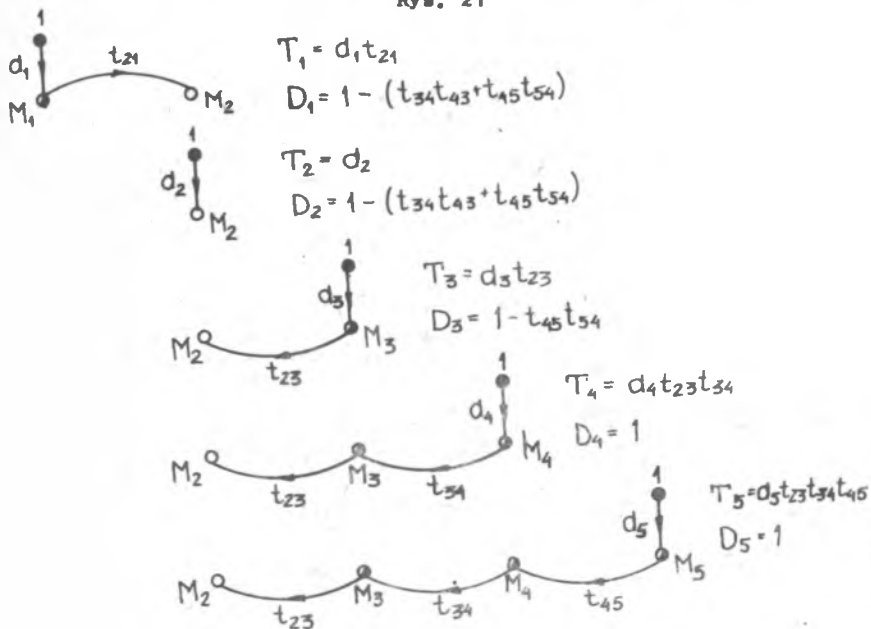
Zależność (14) jest oczywiście analogiczna do otrzymanej poprzednio zależności (13).

Przykład

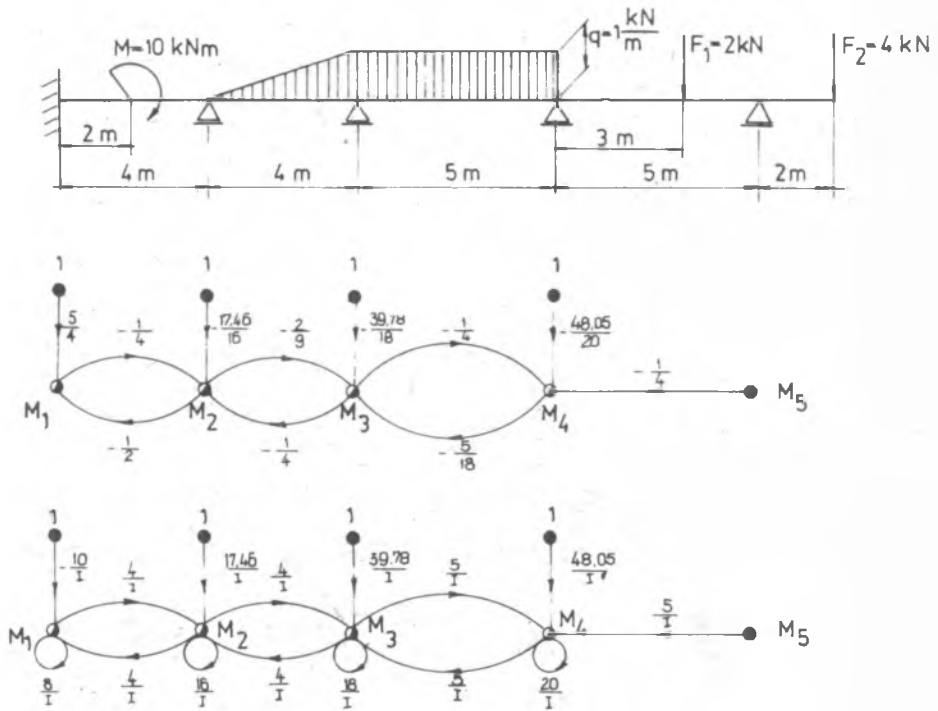
Dla ilustracji metody dokonano obliczeń belki ostereprzęsłowej ze wspornikiem, poddanej możliwym obciążeniom zewnętrznym. Rozważaną belkę, jej grafy M i C oraz uzyskane wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 23.



Rys. 21



Rys. 22



$$M_1 = 1,765 \text{ [kNm]}$$

$$M_2 = -1,03 \text{ [kNm]}$$

$$M_3 = -2,009 \text{ [kNm]}$$

$$M_4 = 0,1 \text{ [kNm]}$$

$$M_5 = -8 \text{ [kNm]}$$

4. WNIOSKI

Zastosowanie metody grafów przepływu sygnałów w analizie wieloprzęsłowych belek ciągłych w znaczny sposób upraszcza procedurę obliczeń, W metodzie tej każdy nieznan moment podporowy wyznacza się niezależnie od pozostałych. Jest to dodatkowa korzyść w przypadku, gdy chcemy wyznaczyć tylko interesujące nas momenty podporowe.

Ważną zaletą grafu przepływu sygnałów jest jego niezmienniczy charakter względem warunków podporowych.

Metoda grafów przepływu sygnałów, zastosowana w analizie wieloprzęsłowych belek ciągłych, pozwala na opuszczenie etapu wypisywania równań metody sił lub równań trzech momentów. Pozwala ona również w prosty sposób wykorzystać elektroniczną technikę obliczeniową [10]. Prowadzi to do znacznego uproszczenia i zmniejszenia pracochłonności obliczeń belek statycznie niewyznaczalnych.

LITERATURA

- [1] Rajcyn T.M.: Synteza układów sterowania automatycznego metodą grafów. WNT, Warszawa 1973 (tłumaczenie książki: Т.М. Райцин: Синтез систем автоматического управления методом направленных графов. Энергия 1970).
- [2] Robichaud L., Boisvert M., Robert J.: Grafy przepływu sygnałów. PWN, Warszawa 1968 (przekład książki - Graphes de fluence, Applications a l'electrotechnique et a l'electronique. Calculateurs analogiques et digitaux: Eyrolles, Paris 1961).
- [3] Wojnarowski J.: Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych, IPKM, PTMTiS Nr 38, Gliwice 1977.
- [4] Błaszkiwiak S., Kąozkowski Z.: Metoda Crossa. PWN, Warszawa 1963.
- [5] Jakubowicz A., Orłoś Z.: Wytrzymałość materiałów. WNT, Warszawa 1978.
- [6] Gerstle K.H.: Flow graphs in structural analysis. Journal of the Structural Division, Proceeding of the ASCE No St10, 1960, 125-137.
- [7] Feng C.C., Benton R.D.: Flow graph of moment distribution. Journal of the Structural Division, Proceeding of the ASCE, No St2, 1964, ss. 153-177.
- [8] Feng C.C., Stead K.A.: Slope deflection and moment flow graphs. Journal of the Structural Division. Proceeding of the ASCE, No St3, 1967.
- [9] Wojnarowski J., Møder A.: Zastosowanie grafów przepływu momentów do analizy belek statycznie niewyznaczalnych. Sesja "Przemysł i my", IPKM Zeszyt 20/54, Gliwice 1974, ss. 109-127.
- [10] Young K.R., Hoberock L.L., Thompson J.G.: An algorithm for automatic reduction of complex signal flow graphs. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Trans. ASME ser. G. vol. 98 Nr 4, December 1976, 367-379.

Recenzent: Prof. zw. dr hab. Kazimierz Wrześniowski

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК ГРАФОМ СИГНАЛОВ**Р е з ю м е**

Представлено применение графов сигналов для анализа неразрезных балок. Базируя на методе сил и уравнениях трёх моментов, показан способ моделирования неразрезных балок графом сигналов. Расчеты этим методом можно провести, используя электронную вычислительную технику.

MODELLING OF CONTINUOUS BEAMS BY SIGNAL FLOW GRAPHS**S u m m a r y**

In this paper the use of signal flow graphs in the analysis of continuous beams is presented.

The way of modelling of continuous beams is shown on the ground of the method of forces and equations of three moments. These calculations can be carried out using the electronic technique of calculation.