ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria. MECHANIKA z. 91 Nr kol. 1026

XIII MIĘDZYNARODOWE KOLOKWIUM
"MODELE W PROJEKTOWANIU I KONSTRUOWANIU MASZYN"

13th INTERNATIONAL CONFERENCE ON
"MODELS IN DESIGNING AND CONSTRUCTIONS OF MACHINES"

25-28.04.1989 ZAKOPANE

Tadeusz BIL

Wydział Mechaniczny
Wyższa Szkoła Inżynierska Koszalin

PRZESTRZENNY MODEL MECHANIZMU DŹWIGNIOWEGO I JEGO MOŻLIWOŚCI

Streszczenie. W pracy przedstawiono model matematyczny trójczłonowego przestrzennego mechanizmu dźwigniowego, który uogólnia całą klasę mechanizmów elementarnych. Przedstawiono kilka przykładów syntezy mechanizmów otrzymanych metodą optymalizacji na podstawie opracowanego modelu.

1. Wprowadzenie

We współczesnej technice spotykana jest wielka liczba różnorakich układów kinematycznych i mechanizmów. Przy ich projektowaniu pojawia się zatem potrzeba porównywania różnych struktur tych układów w celu wybrania najlepszej z określonego punktu widzenia. Takie porównanie jest możliwe jedynie przy znajomości podstawowych charakterystyk poszczególnych struktur.

Przy projektowaniu mechanizmów pojawia się problem przeglądu wszystkich możliwych struktur. Istnieje taka teoretyczna możliwość [1]. Proces wyboru wariantu mechanizmu spełniającego założenia wymaga dwuetapowego procesu syntezy:

1) synteza (określenie) struktury,
2) synteza parametryczna.

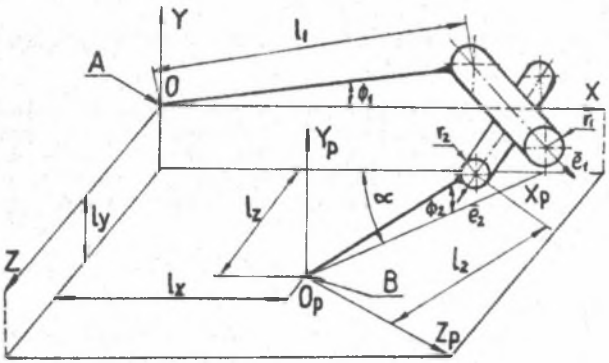
Synteza struktury prowadzona jest w dużym stopniu intuicyjnie. Synteza parametryczna powtarzana jest dla każdej struktury, a ostateczny wynik syntezy daje porównanie struktur. Takie postępowanie prowadzi do potrzeby opracowania ogromnej liczby modeli matematycznych mechanizmów dostosowanych do wymagań. Jednocześnie łatwo zauważyć niespójność takiego postępowania: poświęca się duże nakłady, aby znaleźć optymalne wartości parametrów struktury, która wcześniej wybrana została intuicyjnie [2].

Celowe zatem wydaje się stworzenie wspólnego modelu matematycznego dla całej grupy mechanizmów, który umożliwiłby jednoetapową syntezę mechanizmów w postaci tylko syntezy parametrycznej [3].

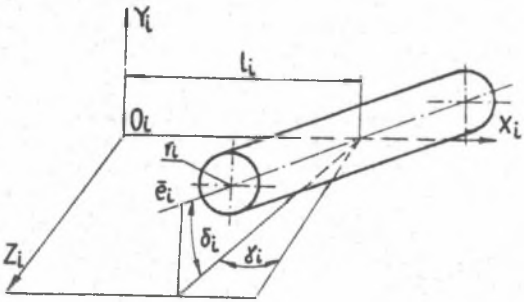
2. Model matematyczny mechanizmów dźwigniowych

W praktyce stosowane są różnorodne mechanizmy dźwigniowe służące do przetworzenia ruchu postępowego i obrotowego na obrotowy. Wśród nich wyróżnia się następujące mechanizmy elementarne: tangensowy, sinusowy, korbowo-wodzikowy, czworobok przegubowy w różnych modyfikacjach i mechanizmy kulisowe (jarzmowe) kilku postaci. Mechanizmy te mogą być wykonane jako elementarne trójczłonowe z jedną parą kinematyczną wyższą lub jako elementarne czteroczłonowe tylko z parami kinematycznymi niższymi. Para kinematyczna wyższa może być wykonana w postaciach: dwie powierzchnie cylindryczne, powierzchnia sferyczna - płaszczyzna i inne. Wymienione postacie stosowane są w praktyce ze względu na możliwości wykonania tych powierzchni (wałek, kula, płaszczyzna) z dużą dokładnością wymiarową i kształtową.

Dla wymienionych wyżej mechanizmów elementarnych wspólnym modelem jest uogólniony model mechanizmu dźwigniowego trójczłonowego z wyższą parą kinematyczną w postaci dwu powierzchni cylindrycznych (mechanizm drążkowy) - (rys. 1). Mechanizm ten składa się z dwu ruchomych ogniw w postaci dźwigni zakończonych powierzchniami cylindrycznymi. Ogniwa połączone są z ostoją poprzez pary kinematyczne A i B. W parach tych może wystąpić, w zależności od potrzeb, ruch postępowy obrotowy lub śrubowy. Położenie i wymiary każdego członu opisać można 5 parametrami (rys.2): odległość l_i dowolnego punktu osi wałeczka od początku układu współrzędnych, w którym element ten jest przedstawiony; promień r_i wałeczka;



Rys. 1. Schemat mechanizmu dźwigniowego



Rys. 2. Położenie elementów pary wyższej w przestrzeni.

oraz trzy kąty ϕ_i, γ_i, i δ_i ustalające położenie osi wałeczka w przestrzeni. Położenie wzajemne układów współrzędnych można opisać czterema parametrami: trzy przesunięcia l_x, l_y, l_z odpowiednio wzdłuż osi x, y, z i kąt obrotu α względem osi Oy. W ten sposób cały mechanizm trójczłonowy opisywany jest 14 parametrami, z

których nie wszystkie są niezależne. Zmieniając wartości tych parametrów, uzyskujemy mechanizmy o różnych własnościach. Szczególnymi przypadkami są m.in. wszystkie wymienione wyżej mechanizmy. Ogólnie mówiąc, można uzyskać mechanizmy przetworzenia ruchu postępowego obrotowego i śrubowego w dowolnej kombinacji.

Opis przedstawionego mechanizmu może być dokonany za pomocą jednego tylko równania:

$$(\bar{P}_1-\bar{P}_2)\frac{(\bar{e}_1\times\bar{e}_2)}{|\bar{e}_1\times\bar{e}_2|}-r_1-r_2=\varepsilon, \tag{1}$$

które określa odległość między dwoma powierzchniami cylindrycznymi w przestrzeni przedstawionymimi w postaci wektorów punktów leżących na osiach tych powierzchni $\bar{P}_i$, wersorów kierunkowych ich osi $\bar{e}_i$ i promieni r_i. Wersory i wektory w tym równaniu powinny być zdefiniowane w nieruchomym układzie współrzędnych. W tym celu wprowadźmy dwa nieruchome układy współrzędnych: Oxyz i pomocniczy $O_px_py_pz_p$ (rys.1), a także ruchome układy współrzędnych $O_ix_iy_iz_i$, w których opiszemy położenie powierzchni cylindrycznych (rys.2).

W układach $O_ix_iy_iz_i$ wektory $\bar{P}_i$ i wersory $\bar{e}_i$ można przedstawić następująco:

$$\bar{P}_{io}=\begin{bmatrix}l_i\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \bar{e}_i=\left[Ax_i\right]\cdot\left[Ay_i\right]\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{2}$$

gdzie: $\left[Ax_i\right]$, $\left[Ay_i\right]$ – macierze obrotu odpowiednio względem osi Ox_i i Oy_i w postaci:

$$\left[Ax_i\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\delta_i & \sin\delta_i\\0 & -\sin\delta_i & \cos\delta_i\end{bmatrix} \qquad \left[Ay_i\right]=\begin{bmatrix}\cos\gamma_i & 0 & -\sin\gamma_i\\0 & 1 & 0\\\sin\gamma_i & 0 & \cos\gamma_i\end{bmatrix} \tag{3}$$

Macierz obrotu wokół osi Oz dla obu układów można zapisać, jak następuje:

$$\left[Bz_i\right]=\begin{bmatrix}\cos\phi_i^* & -\sin\phi_i^* & 0 & 0\\\sin\phi_i^* & \cos\phi_i^* & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4}$$

gdzie: $\phi_i^*=\phi_i+\phi_i^c$;

ϕ_i – kąt obrotu;

ϕ_i^c – wartość początkowa tego kąta.

Natomiast przejście od układu pomocniczego $O_px_py_pz_p$ do układu podstawowego Oxyz można przedstawić w postaci macierzy:

$$\left[Cy\right] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & l_x \\ 0 & 1 & 0 & l_y \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & l_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Zastosowano tu macierze 4-go rzędu dla umożliwienia jednoczesnego zapisu obrotu i przesunięcia wektorów.

W nieruchomym układzie współrzędnych otrzymamy więc:

$$\bar{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\cos\phi_1^* \\ l_1\sin\phi_1^* \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \bar{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2\cos\phi_2^*\cos\alpha + l_x \\ -l_2\sin\phi_2^* + l_y \\ -l_2\cos\phi_2^*\sin\alpha + l_z \end{bmatrix} ; \tag{6}$$

$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \left[B'z_1\right]\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\delta_1\cos\phi_1^* + \cos\delta_1\sin\gamma_1\sin\phi_1^* \\ \cos\delta_1\cos\gamma_1 \\ \sin\delta_1\sin\phi_1^* - \cos\delta_1\sin\gamma_1\cos\phi_1^* \end{bmatrix} ; \tag{7}$$

$$\bar{e}_2 = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z \end{bmatrix} = \left[Cy'\right]\cdot\left[Bz_2'\right]\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-\sin\delta_2\sin\phi_2^* - \cos\delta_2\sin\gamma_2\cos\phi_2^*)\cos\alpha + \cos\delta_2\cos\gamma_2\sin\alpha \\ -\sin\delta_2\cos\phi_2^* - \cos\delta_2\sin\gamma_2\sin\phi_2^* \\ (-\sin\delta_2\sin\phi_2^* - \cos\delta_2\sin\gamma_2\cos\phi_2^*)\sin\alpha + \cos\delta_2\cos\gamma_2\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{8}$$

Macierze B'i C' otrzymano odpowiednio z macierzy B i C po wykreśleniu 4-go wiersza i 4-tej kolumny.

Ostatecznie po podstawieniu zależności (6) - (8) do równania (1) otrzymamy:

$$\frac{\left|(x_1 - x_2)(y_3z_4 - z_3y_4) + (y_1 - y_2)(z_3x_4 - x_3z_4) + (z_1 - z_2)(x_3y_4 - y_3x_4)\right|}{\sqrt{(y_3z_4 - z_3y_4)^2 + (z_3x_4 - x_3z_4)^2 + (x_3y_4 - y_3x_4)^2}} - r_1 - r_2 = \varepsilon \tag{9}$$

Równanie (9) opisuje funkcję położenia mechanizmu (rys.1) w sytuacji, gdy osie powierzchni cylindrycznych nie będą równoległe (mianownik równania (9) różny od zera). W innym przypadku równanie to należy zastąpić równaniem:

$$\sqrt{(y_3z_2 - z_3y_2)^2 + (z_3x_2 - x_3z_2)^2 + (z_3y_2 - y_3z_2)^2} - r_1 - r_2 = \varepsilon \tag{10}$$

3. Analiza mechanizmu

Funkcja położenia mechanizmu jest zależnością między parametrami określającymi położenie dźwigni wyjściowej mechanizmu od parametrów

określających położenie dźwigni wejściowej. Będzie to np. kąt ϕ_2 (jeżeli para B jest obrotową) i kąt ϕ_1 (jeżeli para A jest obrotową), lub przesunięcie l_y (jeżeli para A jest parą postępową). Wartość ε określa rzeczywistą odległość między powierzchniami. W przypadku styczności powierzchni zachodzi $\varepsilon = 0$.

Jeżeli przyjmiemy, że funkcja ta jest zadaną np. w postaci:

$$\phi_2 = f(\theta) \tag{11}$$

gdzie: $\theta = \phi_1$ – dla ruchu obrotowego w parze A,

$\theta = l_y$ – dla ruchu postępowego,

$\theta = f(\phi_1, l_y)$ – dla ruchu złożonego,

to podstawiając równanie (11) do równania (9) lub (10) otrzymamy zależność dla ε, która będzie określać różnicę między założoną a rzeczywistą funkcją położenia mechanizmu. Wartość ε jest więc w przybliżeniu błędem funkcji położenia mechanizmu. Błąd ten może być określony z dowolną dokładnością, powtarzając iteracyjnie obliczenia wg wzorów (9) lub (10) i korygując w każdej iteracji wartość kąta ϕ_2 o wartość błędu ε.

4. Optymalna synteza mechanizmów

Syntezę mechanizmów prowadzono ze względu na dokładność realizacji liniowej funkcji położenia, przy przetworzeniu ruchu postępowego i obrotowego na obrotowy w zakresie obrotu dźwigni wyjściowej ±0.8 rad. Syntezowano wszystkie możliwe warianty mechanizmów elementarnych. Numerycznie syntezę zrealizowano za pomocą algorytmu optymalizacji zmiennej metryki DFP [4] na mikrokomputerze IBM PC/XT. Program napisano w języku TurboPascal 4.0. Jako kryterium optymalizacji przyjęto sumę kwadratów błędu ε w n punktach funkcji położenia mechanizmu rozmieszczonych w węzłach wielomianu Czebyszewa I-go rzędu (n – liczba zmiennych parametrów mechanizmu). W tablicy 1 przedstawiono wyniki syntezy mechanizmów przetworzenia ruchu postępowego na obrotowy, a w tablicy 2 – ruchu obrotowego na obrotowy. Podane w tablicach parametry były zmiennymi decyzyjnymi w procesie optymalnej syntezy. Parametrami stałymi w procesie syntezy poszczególnych mechanizmów były: $\alpha, l_y, l_z = 0$. Przy syntezie mechanizmu korbowo-wodzikowego zmienna | była suma $r_1 + r_2$, której optymalna wartość wynosiła 0.97. Dla mechanizmu czworoboku przegubowego wartość ta wynosiła 0.37. W pozostałych przypadkach suma $r_1 + r_2$ była niezmienna i wynosiła 0.1. Wymiary liniowe traktowano jako bezwymiarowe.

Tablica 1.

Nazwa mechanizmu	Parametry									Błąd
	l_1	l_2	l_x	γ_1	γ_2	δ_1	δ_2	ϕ_{01} / l_{x0}	ϕ_{02}	$\delta\phi_2$ [rad]
Sinusowy	1.0	1.02	0	$\pi/2$	0	0.1	0	0.1	0	0.00286
Tangensowy	0.98	1.0	0	0	$\pi/2$	0	-0.1	-0.11	0	0.00553
Korb-wodz.	1.27	1.0	-.001	0	0	0	0	0.52	-0.33	0.00092
Drążkowy 1	1.01	1.0	0	-.95	.62	.06	-.03	-0.05	0.05	0.000013

Tablica 2.

Nazwa mechanizmu	Parametry									Błąd
	l_1	l_2	l_x	γ_1	γ_2	δ_1	δ_2	ϕ_{o1} / l_{xo}	ϕ_{o2}	$\delta\phi_2$ [rad]
Kulisowy 1	10.0	1.02	9.0	$\pi/2$	0	0.01	0	0.01	0	0.002030
Kulisowy 2	9.97	1.0	9.0	0	$\pi/2$	0	0.09	0.01	0	0.004260
Czworobok	9.84	1.0	8.86	0	0	0	0	-.026	0.11	0.000531
Drążkowy 2	10.0	1.0	9.0	-.99	.58	-.02	.03	0.005	-0.05	0.000009

5. Uwagi i wnioski

1. Przedstawiony w pracy fizyczny model mechanizmu przestrzennego (rys.1) pozwala na jednoetapową syntezę elementarnych mechanizmów dźwigniowych w postaci syntezy parametrycznej.
2. Odpowiadający mu model matematyczny jest prosty i pozwala na łatwą numeryczną analizę mechanizmów.
3. Opisany model pozwala na syntezę przestrzennych mechanizmów dźwigniowych o prawie liniowej funkcji położenia, znacznie przewyższających dokładnością mechanizmy elementarne płaskie.

LITERATURA

[1] S. Miller: Przegląd i systematyka mechanizmów - Archiwum Budowy Maszyn - Warszawa 1984.

[2] W. Tarnowski: Wykorzystanie polioptymalizacji do jednoczesnej optymalizacji struktury konstrukcji i jej parametrów. Zeszyty Naukowe Wydziału Mechanicznego nr 10, WSInż, Koszalin 1987.

[3] T.Bil : Synteza mechanizmu dźwigniowego z wyższą parą kinematyczną w postaci powierzchni cylindrycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej 1987, seria Mechanika z. 85.

[4] Himmelblau D.M. Applied nonlinear programming. New York: McGraw-Hill 1972.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА И ЕГО ВОЗМОЖНОСТИ

Р е з ю м е

В работе представлена математическая модель трёхзвенного пространственного рычажного механизма, который обобщает целый класс элементарных механизмов. Представлено несколько примеров синтеза механизмов полученых методом оптимизации на основе этой модели.

THREE-DIMENSIONSIONAL MODEL OF THE LINK MECHANISM AND ITS CAPACITY

S u m m a r y

A model of three-members three-dimensional bar linkage which may be used as a generalization of models of all elementary mechanisms is proposed. A few examples of a synthesis of mechanisms completed by an optimization method, on the presented model, are given.

Recenzent: doc. dr inż. S. Wojciech

Wpłynęło do Redakcji 3.I.1989 r.