

XIII MIĘDZYNARODOWE KOŁOKWIUM
"MODELE W PROJEKTOWANIU I KONSTRUOWANIU MASZYN"
13th INTERNATIONAL CONFERENCE ON
"MODELS IN DESIGNING AND CONSTRUCTIONS OF MACHINES"
25-28.04.1989 ZAKOPANE

Andrzej BUCHACZ, Józef WOJNAROWSKI
Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
Politechnika Śląska w Gliwicach

HIPERGRAFY I LICZBY STRUKTURALNE UKŁADÓW PRĘTOWYCH JAKO MODELE W SYNTEZIE CIĄGŁYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH

Streszczenie: W celu rozszerzenia klasy syntezowanych struktur układów ciągłych metodami syntezy układów dyskretnych, w pracy wyznaczono charakterystyki dynamiczne podukładów dwuprętowych metodą obciążonych hipergrafów i liczb strukturalnych. Przedstawiono różne postacie tych charakterystyk, implikowane zarówno warunkami brzegowymi, jak i miejscem przyłączenia podukładu dwuprętowego do pozostałej części układu ciągłego. W zakończeniu podano warunek współmierności złożonego n - odcinkowego układu ciągłego, umożliwiającą syntezę jego charakterystyki dynamicznej.

1. Wprowadzenie

Pomimo bardzo dobrze poznanych metod syntezy układów dyskretnych oraz osiągniętych na ich podstawie rezultatów w dziedzinie filtrów mikroelektronicznych (por. np. [1,2,3,4]), problem syntezy układów fizycznych - w tym również mechanicznych - o parametrach rozłożonych w sposób ciągły znajduje się w dalszym ciągu na etapie formułowania.

Zagadnienie utworzenia modeli pojedynczych prętów z klasycznymi i nieklasycznymi warunkami brzegowymi w postaci hipergrafów przedstawiono w pracach [5,6]. Takie ujęcie umożliwia wykorzystanie wąskiej klasy metod syntezy układów dyskretnych do syntezy ciągłych drgających układów prętowych.

W celu rozszerzenia zarówno klasy metod, jak i syntezowanych struktur o ciągle układy rozgałęzione w pracy wyznaczono charakterystyki dynamiczne układów prętowych dwuodcinkowych, modelując je hipergrafami i liczbami strukturalnymi. Ponadto, ze względu na sposób połączenia podukładu dwuprętowego z pozostałą częścią układu przedstawiono możliwe jego położenia względem niej oraz postać charakterystyki implikowaną tym położeniem.

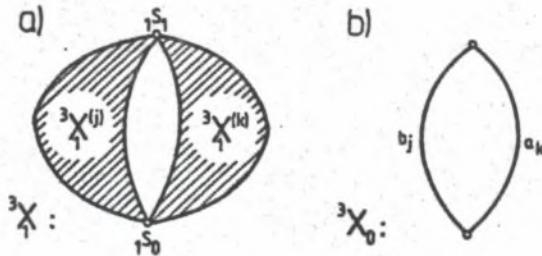
2. Charakterystyki dynamiczne dwuodcinkowych układów prętowych

Jak już nadmieniono we wprowadzeniu, charakterystyki dynamiczne złożonego drgającego wzdłużnie lub skrętnie układu prętowego można określać nie tylko poprzez podatności dynamiczne pojedynczego pręta, lecz także za pomocą podatności dynamicznych podukładów zbudowanych z dwóch prętów.

Aby zatem wyznaczyć podatności lub/i sztywności dynamiczne n odcinkowego modelu drgającego układu prętowego, opisuje się go hipergrafem obciążonym - obciążonym grafem blokowym trzeciej kategorii (por. np. [7,8]):

$${}^3X_{\frac{1}{1}} = \langle {}^3X_{\frac{1}{1}}^{(j)}, {}^3X_{\frac{1}{1}}^{(k)} \rangle, \quad (1)$$

który pokazano na rys. 1a.



Rys. 1

Liczba strukturalna dopełniająca szkieletu ${}^3X_{\frac{1}{1}}$ (rys. 1b) jest równa:

$$A_0^d = [b_j \ a_k], \quad (2)$$

natomiast liczby strukturalne 3A oraz ${}^3A_{\frac{1}{j}}$ są następujące:

$$\begin{cases} {}^3A = [b_j \ a_k] \downarrow \begin{bmatrix} 2A_j \\ 2A_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2A_{jb} & 2A_j \\ 2A_k & 2A_{ka} \end{bmatrix}, \\ {}^3A_{0j} = [a_j] \downarrow [{}^3A] = \begin{bmatrix} 2A_{jab} & 2A_{ja} \\ 2A_k & 2A_{ka} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (3)$$

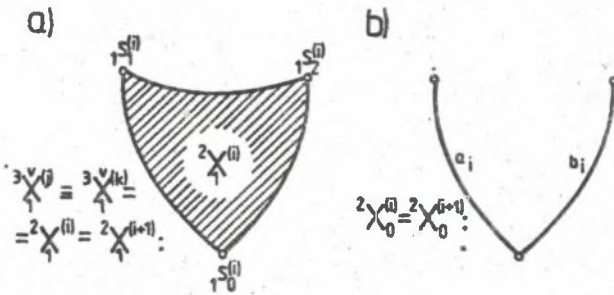
gdzie: \downarrow oznacza operację przeniesienia wskaźników dolnych (por. np. [7]).

W przypadku $n = 2$, $j = 1$, $k = 1+1$ oraz gdy struktura bloków ${}^3X_{\frac{1}{1}}^{(j)} = {}^3X_{\frac{1}{1}}^{(k)} = {}^2X_{\frac{1}{1}}^{(1)} = {}^2X_{\frac{1}{1}}^{(1+1)}$ jest pokazana na rys. 2, wówczas liczby

strukturalne 2A i ${}^2A_{a_1}$ wynoszą odpowiednio:

$$\begin{cases} {}^2A \stackrel{\equiv}{=} {}^3A = \begin{bmatrix} A_{ib} & A_i \\ A_{i+1} & A_{i+1,a} \end{bmatrix}, \\ {}^2A_{a_1} \stackrel{\equiv}{=} {}^3A_{a_1} = \begin{bmatrix} A_{iab} & A_{ia} \\ A_{i+1} & A_{i+1,a} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (4)$$

gdzie: $\stackrel{\equiv}{=}$ oznacza równość strukturalną liczb strukturalnych drugiej i trzeciej kategorii (por. np. [7,8]).



Rys. 2

W tablicach rzędów pochodnych liczb strukturalnych 2A i ${}^2A_{a_1}$

$$P = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P_{a_1} = \begin{pmatrix} 21 \\ 01 \end{pmatrix}$$

nie ma kolumn identycznych, zatem liczby strukturalne zupełne są równe:

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \mathcal{A}_{ib} \mathcal{A}_{i+1} + \mathcal{A}_i \mathcal{A}_{i+1,a} \\ \mathcal{A}_{a_1} = \mathcal{A}_{iab} \mathcal{A}_{i+1} + \mathcal{A}_{ia} \mathcal{A}_{i+1,a} \end{cases} \quad (5)$$

Podatność dynamiczna $Y_{a_1}^{(i)}$, czyli w punkcie, któremu przyporządkowano współrzędną $s_i^{(i)}$ (rys. 2), wynosi:

$$Y_{a_1} = \frac{Y_{iab} Y_{ib} + Y_{ia} Y_{i+1,a}}{Y_{ib} + Y_{i+1,a}}, \quad (6)$$

a wyrażając ją przez podatności dynamiczne pojedynczych prętów otrzymuje się:

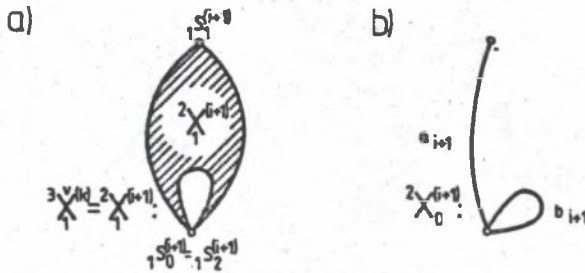
$$Y_{SS}^{(i)} = Y_{a_1} = \frac{\frac{l^{(i)}}{(EF)^{(i)}_g(l)_s} \text{th}_g(l)_s + \frac{l^{(i)}}{(EF)^{(i)}_g(l)_s} \text{cth}_g(l)_s + \frac{l^{(i)}}{(EF)^{(i)}_g(l)_s} \text{ctth}_g(l)_s + \frac{l^{(i+1)}}{(EF)^{(i+1)}_g(l+1)_s} \text{th}_g(l+1)_s}{\frac{l^{(i)}}{(EF)^{(i)}_g(l)_s} \text{cth}_g(l)_s + \frac{l^{(i+1)}}{(EF)^{(i+1)}_g(l+1)_s} \text{ctth}_g(l+1)_s}} \quad (6)_1$$

gdzie: $(EF)^{(i)} = E^{(i)} F^{(i)}$, $(EF)^{(i+1)} = E^{(i+1)} F^{(i+1)}$;

$E^{(i)}, E^{(i+1)}$ są modułami Younga prętów odpowiednio "i" oraz "i+1";
 $F^{(i)}, F^{(i+1)}$ - przekrojami poprzecznymi prętów;
 $\gamma^{(i)} = \sqrt{\rho^{(i)} E^{(i)}} l^{(i)} s, \gamma^{(i+1)} = \sqrt{\rho^{(i+1)} E^{(i+1)}} l^{(i+1)} s$;
 $\rho^{(i)}, \rho^{(i+1)}$ - gęstościami tworzyw prętów; $l^{(i)}, l^{(i+1)}$ - długościami prętów; $s = \sqrt{-1} \omega$, ω jest częstością drgań własnych.

Jeżeli $n = 2, j = 1, k = i+1$ oraz ${}^2X_1^{(j)} = {}^2X_1^{(i)}$ (rys. 2) i ${}^3X_1^{(k)} = {}^2X_1^{(i+1)}$ (rys. 3), to liczby strukturalne 2A i 3A są równe:

$${}^2A \stackrel{e}{=} {}^3A = \begin{bmatrix} A_{ib} & A_i \\ A_{i+1,b} & A_{i+1,ab} \end{bmatrix}, \quad {}^2A_{0j} \stackrel{e}{=} {}^3A_{0j} = \begin{bmatrix} A_{iab} & A_{ia} \\ A_{i+1,b} & A_{i+1,ab} \end{bmatrix}, \quad (7)$$



Rys. 3

natomiast liczby strukturalne uzupełne po wyznaczeniu tablic rzędów pochodnych:

$$P = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ i } P_{a_1} = \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \end{pmatrix}$$

i stwierdzeniu, iż nie ma w nich kolumn identycznych, przyjmą postać:

$$\begin{cases} a = a_{ib} a_{i+1,b} + a_{i+1,ab} \\ a_{a_1} = a_{iab} a_{i+1,b} + a_{ia} a_{i+1,ab} \end{cases} \quad (8)$$

Podatność dynamiczna dwucinkowego, utwierdzonego w prawym końcu układu prętowego [$s_2^{(i+1)} = 0$], liczona w tym punkcie układu, któremu przyporządkowano współrzędną $s_1^{(i)}$ (por. rys. 2), wynosi:

$$Y_{ai} = \frac{Y_{iab} Y_{ia} Y_{i+1,b} + Y_{ia} Y_{i+1,ab} Y_{i+1,b}}{Y_{ib} Y_{i+1,b} + Y_{i+1,ab} Y_{i+1,b}} \quad (9)$$

a wyrażając ją przez podatności dynamiczne pojedynczych prętów otrzymuje się ostatecznie:

$$Y_{su}^{(i)} = Y_{ai} = \frac{\frac{|(i)|}{(EF)_{(i)} l_{(i)} s} \operatorname{th} \gamma^{(i)} l_{(i)} s + \frac{|(i+1)|}{(EF)_{(i+1)} l_{(i+1)} s} \operatorname{ctgh} \gamma^{(i+1)} l_{(i+1)} s}{\frac{|(i)|}{(EF)_{(i)} l_{(i)} s} \operatorname{ctgh} \gamma^{(i)} l_{(i)} s + \frac{|(i+1)|}{(EF)_{(i+1)} l_{(i+1)} s} \operatorname{th} \gamma^{(i+1)} l_{(i+1)} s}$$

$$\left[\begin{aligned} & + \frac{(i)}{(EF)(i)_2(i)_s} \operatorname{cthy}(i)_s \frac{(i-1)}{(EF)(i-1)_2(i-1)_s} \operatorname{cthy}(i-1)_s \frac{(i-1)}{(EF)(i-1)_2(i-1)_s} \operatorname{cthy}(i-1)_s \\ & + \frac{(i-1)}{(EF)(i-1)_2(i-1)_s} \operatorname{cthy}(i-1)_s \frac{(i-1)}{(EF)(i-1)_2(i-1)_s} \operatorname{cthy}(i-1)_s \end{aligned} \right] \quad (9)_1$$

Wyznaczając natomiast podatność dynamiczną¹⁾ w punkcie $s_2^{(i)} = s_1^{(i+1)}$, należy obliczyć pochodną algebraiczną liczby strukturalnej zupełnej \mathcal{A} w (8) względem krawędzi b_1 (por. rys. 2) lub krawędzi a_{i+1} (por. rys. 3), czyli:

$$\mathcal{A}_{b_1} = \mathcal{A}_{a_{i+1}} = \mathcal{A}_{ib} \mathcal{A}_{i+1,ab}$$

natomiast podatność dynamiczna $Y_{b_1} = Y_{a_{i+1}}$ wynosi:

$$Y_{b_1} = Y_{a_{i+1}} = \frac{Y_{ib} Y_{i+1,ab} Y_{i,b}}{Y_{ib} Y_{i+1,b} + Y_{i+1,ab} Y_{i,b}} \quad (10)$$

a po podstawieniu podatności dynamicznych pojedynczych prętów otrzymuje się:

$$Y_{b_1}^{(i)} = Y_{a_{i+1}}^{(i)} = \frac{\frac{(i)}{(EF)(i)_2(i)_s} \operatorname{cthy}(i)_s \frac{(i-1)}{(EF)(i-1)_2(i-1)_s} \operatorname{cthy}(i-1)_s \frac{(i-1)}{(EF)(i-1)_2(i-1)_s} \operatorname{cthy}(i-1)_s}{\frac{(i)}{(EF)(i)_2(i)_s} \operatorname{cthy}(i)_s + \frac{(i-1)}{(EF)(i-1)_2(i-1)_s} \operatorname{cthy}(i-1)_s} + \frac{(i-1)}{(EF)(i-1)_2(i-1)_s} \operatorname{cthy}(i-1)_s \frac{(i-1)}{(EF)(i-1)_2(i-1)_s} \operatorname{cthy}(i-1)_s}}{\frac{(i)}{(EF)(i)_2(i)_s} \operatorname{cthy}(i)_s + \frac{(i-1)}{(EF)(i-1)_2(i-1)_s} \operatorname{cthy}(i-1)_s} + \frac{(i-1)}{(EF)(i-1)_2(i-1)_s} \operatorname{cthy}(i-1)_s \frac{(i-1)}{(EF)(i-1)_2(i-1)_s} \operatorname{cthy}(i-1)_s}} \quad (10)_1$$

Wyznaczone podatności dynamiczne układów dwuprętowych: swobodnego - wz. (6)₁ i utwierdzonego - wz. (9)₁ i (10)₁ są oprócz podatności dynamicznych elementów jednoodcinkowych zależnościami wyjściowymi do syntezy układów prętowych.

Warto podkreślić, że wyznaczone podatności dynamiczne układów dwuprętowych [wz. (6)₁, (9)₁, (10)₁] są zależnościami takich podukładów, rozważanych w połączeniu z pozostałą częścią układu prętowego. Grafy badanych układów (linie ciągłe) wraz z grafem trzeciej kategorii $\mathcal{X}_1^{(i+2)}$, modelującym tę pozostałą część układu pokazano na rys. 4.

Na rys. 4 nie oznaczono przypadku dołączenia "pozostałej części układu" (por. rys. 4a) do wierzchołków $s_2^{(i)} = s_1^{(i+1)}$ i oczywiście s_{i0} , ponieważ podatność dynamiczną wyznaczoną względem krawędzi b_1 i tym samym a_{i+1} można sprowadzić do podatności pojedynczego pręta przy założeniu warunku współmierności złożonego układu prętowego.

¹⁾ Rozważanego utwierdzonego w prawym końcu dwuodcinkowego układu prętowego.

układzie zawsze można wyróżnić element podstawowy, scharakteryzowany wielkością γ i wówczas układ ten można rozważać jako złożony drgający wzdłużnie lub skrętnie mechaniczny układ prętowy o parametrach rozłożonych w sposób ciągły, utworzony z elementów podstawowych. Ponadto pręty rozpatrywanego układu - elementy podstawowe lub zbudowane z elementów podstawowych - mogą być wykonane z tworzyw o różnych własnościach i to nie tylko mechanicznych. Warto również dodać, że przedstawione ujęcie warunku współmierności jest także w świetle racji technologicznej wytworu zagadnieniem bardzo złożonym głównie w konkretnej realizacji wyników syntezy¹⁾.

W praktyce jednak, bez naruszenia ogólności rozważań, można przyjąć szczególną postać warunku współmierności, jako $l^{(i)} = l$. Oznacza to, że wszystkie odcinki syntezowanego układu ciągłego są wykonane z tego samego tworzywa, czyli $\rho^{(i)} = \rho$, $E^{(i)} = E$ ($i=1, 2, \dots, n$)²⁾. Innymi słowy, w każdym n -odcinkowym układzie można wyróżnić element podstawowy o długości l i w ten sposób długość $l^{(i)}$ każdego pręta o stałym przekroju $F^{(i)}$ jest równa długości elementu podstawowego.

4. Uwaga końcowa

Wyznaczone w pracy podatności i tym samym sztywności dynamiczne podukładów dwuprętowych: swobodnego - wz.(6)₁ i utwierdzonego - wz.(9)₁ i (10)₁ są po dalszych przekształceniach - podstawą syntezy drgających wzdłużnie lub skrętnie rozgałęzionych układów mechanicznych o parametrach rozłożonych w sposób ciągły.

Pracę wykonano w ramach C.P.B.P. 02.13

LITERATURA

- [1] W.E.Henlein, W.H.Holmes, Aktivnye fil'try dlja integral'nych schem, Svjaz', Moskva 1980.
- [2] G.C.Temes, S.K.Mitra red., Teoria i projektowanie filtrów, WNT, Warszawa 1978.
- [3] M.Białko red., Filtry aktywne RC, WNT, Warszawa 1979.
- [4] F.Kamiński, Synteza obwodów liniowych o stałych rozłożonych. I. Synteza schodkowych torów niejednorodnych, PWN, Warszawa 1976.

¹⁾ Między innymi dlatego, że wtedy stanowi również pole dociekań inżynierii materiałowej.

²⁾ Upraszcza to praktyczną realizację wyników syntezy, zwłaszcza w świetle wspomnianej racji technologicznej wytworu.

- [5] A. Buchacz, Transformacje charakterystyk dynamicznych na płaszczyźnie zmiennej zespolonej prętów prostych drgających wzdłużnie jako element syntezy układów prętowych, Zb. ref. XX Sympozjonu - Modelowanie w Mechanice, PTMTS, Gliwice (1981), 125-132.
- [6] A. Buchacz, J. Wojnarowski, Hipergrafy prętów z nieklasycznymi warunkami brzegowymi jako modele do syntezy układów ciągłych, Zb. ref. XXVIII Sympozjonu - Modelowanie w Mechanice, PTMTS, Gliwice (1989), (w druku).
- [7] S. Bellert, H. Woźniacki, Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych, WNT, Warszawa 1968.
- [8] J. Wojnarowski, Zastosowanie grafów w analizie drgań układów mechanicznych, PWN, Warszawa - Wrocław 1981.

HYPERGRAPHS AND STRUCTURAL NUMBERS OF ROD STRUCTURES AS MODELS FOR SYNTHESIS OF CONTINUOUS SYSTEMS

S u m m a r y

In this paper we construct the hypergraphs of mechanical continuous systems and obtain the dynamical characteristics for two - rods subsystems. It is possible thanks to applying loaded hypergraphs and structural numbers of higher category. Various forms of these characteristics dependent on boundary conditions and place of joining two - rods subsystems to remaining part of continuous system are presented. In conclusion commensurability condition for consisted of continuous systems about n segment was described.

ГИПЕРГРАФЫ И СТРУКТУРНЫЕ ЧИСЛА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ КАК МОДЕЛИ В СИНТЕЗЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Р е з ю м е

Чтобы расширить класс синтезированных структур систем с распределенными параметрами с использованием методов синтеза систем с сосредоточенными параметрами, в работе определяются динамические характеристики стержневых подсистем построенных из двух отрезков методом нагруженных гиперграфов и структурных чисел. Представляются разные виды этих характеристик, возникающие как из граничных условий, так из места соединения двухотрезковой подсистемы с остальной частью системы. В заключении даются условия соизмерности сложной n - отрезковой стержневой системы, при помощи которых можно вести синтез ее динамической характеристики.

Recenzent: doc. dr inż. R. Klus

Wpłynęło do Redakcji 3.I.1989 r.