

XIII MIĘDZYKONFERENCYJNE KOŁOKWIUM
"MODELE W PROJEKTOWANIU I KONSTRUOWANIU MASZYN"
13th INTERNATIONAL CONFERENCE ON
"MODELS IN DESIGNING AND CONSTRUCTIONS OF MACHINES"
25-28.04.1989 ZAKOPANE

Andrzej T. CHWIEJ

Instytut Maszyn i Urządzeń Rolniczych
Politechnika Warszawska
Ośrodek w Płocku

GRAFY WIAZAŃ W MODELOWANIU STRUKTUR ŁAŃCUCHÓW KINEMATYCZNYCH

Streszczenie. W niniejszym referacie zaprezentowano możliwości zastosowania grafów wiązań do analizy złożonych łańcuchów kinematycznych. Wykorzystano w tym celu aparat analizy przyczynowości grafów wiązań więzów geometrycznych narzucanych na punkty należące do ostoi i poszczególnych ogniw. Pojawienie się konfliktu przyczynowościowego jest równoznaczne z występowaniem strukturalnych więzów biernych lub zbędnych stopni swobody.

1. Wstęp

Celem niniejszego referatu jest prezentacja możliwości wykorzystania grafów wiązań do analizy i syntezy złożonych łańcuchów kinematycznych. Oparcie się na formalizmie grafów wiązań jest podyktowane względami użytecznymi. Ten sam bowiem tryb postępowania daje się wykorzystać zarówno w analizie kinematyki i kinetostatyki, jak i dynamiki mechanizmów. W wielu przypadkach formalizm ten może być także przydatny w procesie obliczeń wytrzymałościowych, szczególnie na etapie tworzenia modeli obliczeniowych. Z kolei zastosowanie wspólnego, dla wszystkich wymienionych powyżej zagadnień, podejścia przyspiesza obliczenia (likwidacja konieczności stosowania procedur przekształcających dane wyjściowe z jednego etapu procesu obliczeniowego na dane wejściowe etapu kolejnego), upraszcza je, a przede wszystkim zmniejsza prawdopodobieństwo popełnienia błędów przy przenoszeniu wyników pomiędzy kolejnymi cyklami obliczeń. Oczywiście spełnione być tu muszą trzy elementarne wymagania stawiane takiemu formalizmowi: prostota (łatwość budowy modelu, jego przekształceń i interpretacji wyników), uniwersalność (formalizm taki powinien pokrywać możliwie całą rozpatrywaną dziedzinę, przy specjalnym potraktowaniu niewielkiej tylko liczby przypadków, także w potocznym rozumowaniu, uchodzących za osobliwe) i, przede wszystkim, niezawodność (odporność na błędy przekształceń i w miarę możliwości na błędy danych wejściowych). Grafy wiązań spełniają w zasadzie wszystkie powyższe postulaty.

Zalety tego podejścia uwidaczniają się przede wszystkim na etapie analizy struktury łańcucha kinematycznego. O ile bowiem w kinematyce, kinetostatyce, czy też dynamice można pokusić się, w oparciu o metody klasyczne, o wykorzystanie podobnego aparatu matematycznego, to zagadnienia związane ze strukturą wymagają zupełnie odmiennego zbioru pojęć, a więc i odrębnych metod postępowania.

W przypadku grafów wiązań ten sam model obliczeniowy wykorzystany jest do zagadnień związanych z jakościową analizą ruchu (analizą struktury), jak i analizą ilościową (kinematyką, kinetostatyką i dynamiką).

2. Grafy wiązań węzłów geometrycznych

Włączenie modelowania struktur łańcuchów kinematycznych do dziedziny zastosowań grafów wiązań oparte jest na budowie grafów dla poszczególnych węzłów nakładanych na punkty materialne składające się na łańcuch kinematyczny. Dotyczy to zarówno węzłów opisujących relacje pomiędzy punktami tego samego ognia (niezależnie czy stałego czy płynnego), jak i pomiędzy punktami węzłów konstrukcyjnych (w tym par kinematycznych).

Przy opisie matematycznym tych węzłów wygodne jest zastosowanie notacji wektorowo-macierzowej, acz w nieco odmiennej postaci, niż wykorzystana w

[3] i [4]. Równania przemieszczeń punktów należących do poszczególnych ogniw przybierają dla układu płaskiego formę relacji (1), zaś węzłów narzucanych przez węzły kinematyczne - relacji (2). Po ich różniczkowaniu względem czasu uzyskuje się równania (3) i (4), będące układami równań liniowych ze względu na prędkości uogólnione:

$$\{\underline{\dot{x}}_i = \underline{\dot{x}}_A + T(\varphi_A) \cdot \underline{\dot{r}}_i^A \quad (1)$$

$$\{\Phi_p(\underline{x}_i, \underline{x}_j, \underline{r}_i^A, \underline{r}_j^B) = 0 \quad (2)$$

$$\{\underline{\dot{x}}_i = \underline{\dot{x}}_A + \dot{\varphi}_A \cdot \underline{\dot{r}}_i^A + T_A \cdot \underline{\dot{r}}_i^A \quad (3)$$

$$\{\underline{\dot{x}}_i \cdot \nabla_i^x \Phi_p + \underline{\dot{x}}_j \cdot \nabla_j^x \Phi_p + \underline{\dot{r}}_i^A \cdot \nabla_i^r \Phi_p + \underline{\dot{r}}_j^B \cdot \nabla_j^r \Phi_p = 0 \quad (4)$$

gdzie:

\underline{x}_i - wektor położenia punktu "i" w globalnym układzie współrzędnych,

\underline{x}_A - wektor położenia początku lokalnego układu współrzędnych "A" w układzie globalnym,

\underline{r}_i^A - wektor położenia punktu "i" w lokalnym układzie współrzędnych "A",

φ - kąt obrotu układu "A",

$T(\varphi)$ - macierz obrotu o kąt " φ ",

∇^r - gradient względem współrzędnych lokalnych punktu "i",

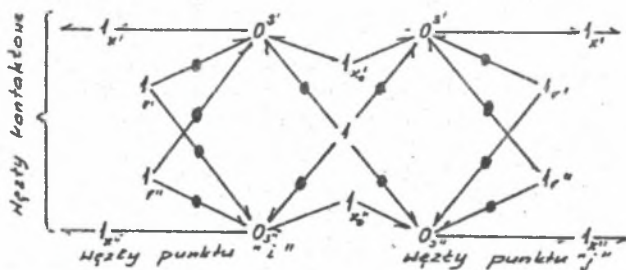
Φ_p - równanie węzłów geometrycznych dwustronnych odpowiadających węzłowi kinematycznemu.

Kropki nad symbolami skalarów, wektorów i macierzy oznaczają ich pochodne zupełne względem czasu, zaś kółka - pochodne cząstkowe względem parametrów (w danym przypadku - względem kąta obrotu " φ ").

Układowi (3) i (4) można przyporządkować odpowiednie grafy wiązań. Każdemu z równań odpowiada węzeł zerowy, zaś każdej ze zmiennych stanu - węzeł jedynkowy. Współczynniki proporcjonalności pomiędzy poszczególnymi zmiennymi stanu odwzorowywane są poprzez

transformatory. I tak przykładowy graf wiązań dla odkształcalnego ogniwa płaskiego przedstawiony został na rys. 1. Węzły typu "0" odpowiadają poszczególnym równaniom układów (3) i (4), zaś "1" - miejscami "próbkowania" wartości współrzędnych stanu, a ściślej ich prędkości. Na rys. poszczególne węzły zróżnicowano poprzez indeksy będące numerami równań lub nazwami wsp. stanu. Dla zwiększenia czytelności zdecydowano się jedynie na symboliczne oznaczenie transformatorów zaczerpniętymi kółkami (nie wpływają one bowiem na strukturę sprzężeń grafu).

Łącząc ze sobą subgrafy odpowiadające więzom nakładanym na poszczególne punkty ogniwa i punkty węzłów konstrukcyjnych, otrzymuje się pełny graf łańcucha kinematycznego, zwany dalej grafem bazowym.



Rys. 1. Graf wiązań dwupunktowego ogniwa płaskiego.

3. Budowa grafu szkieletowego łańcucha kinematycznego

Otrzymany w wyniku połączenia subgrafów podstawowych graf bazowy łańcucha, z jednej strony zawiera nadmiar pewnych informacji (oczywiście tylko dla analizy struktury obiektu), z drugiej strony informacje o pewnych istotnych właściwościach nie są dane w postaci jawnej, a więc konieczne staje się dokonanie operacji na grafie. Do podstawowych należy analiza konfliktów przyczynowościowych. Złożoność obliczeniowa algorytmów opartych na zasadach podanych w [1] jest klasy n^4 , gdzie n oznacza liczbę węzłów.

W celu zmniejszenia kosztów obliczeń należy dokonać redukcji grafu poprzez usunięcie transformatorów i niektórych gyratorów, sąsiadujących ze sobą sumatorów (węzłów zerowych i jedynkowych) tego samego typu, sumatorów dwusprzężeniowych, odbiorników energii, a także sprzężeń modelujących zerowe strumienie energii.

Otrzymany w wyniku powyższych redukcji graf jest wprawdzie nieprzydatny do celów analizy ilościowej, lecz zawiera w postaci jawnej bądź ukrytej informacje niezbędne do celów analizy jakościowej układu. Ze względu na usunięcie zeń wszystkich zbędnych do analizy strukturalnej węzłów, graf ten zwany będzie w dalszym ciągu grafem szkieletowym układu.

3. Analiza poprawności strukturalnej grafu wiązań

Jak wiadomo [1], graf wiązań jest modelem struktury układu równań opisujących rozważany obiekt fizyczny, przy czym każdemu równaniu elementarnemu odpowiada pojedynczy węzeł. Ściślej rzecz ujmując, jeden węzeł odpowiadający źródłu, bądź odbiornikowi energii modeluje jedno równanie, zaś transformatory i sumatory - modelują po dwa równania. Zważywszy, że każdemu ze sprzężeń węzła przypisane

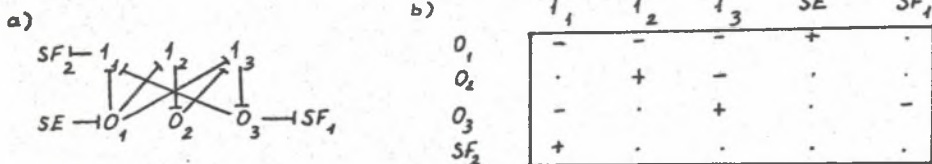
są dwie zmienne - przepływowa i wyłączeniowa (stosuje się tu nazwy zwyczajowe dla grafów wiązań), poprzez analizę, z którego równania, które wielkości mogą zostać wyznaczone, sprawdzić można poprawność strukturalną układu równań, a zatem i grafu wiązań. W formalizmie grafów odpowiada to tzw. rozprowadzaniu przyczynowości.

Z grubsza rzecz ujmując [1], istota rozprowadzania polega na możliwości przypisania każdemu ze sprzężeń jednej relacji wskazującej (zwanej właśnie przyczynowością), z równań którego węzła może zostać wyznaczona zmienna przepływowa danego sprzężenia. Ponieważ każdemu z typów węzłów przypisać można określone reguły dotyczące dopuszczalnych postaci relacji przyczynowościowych odpowiadających poszczególnym sprzężeniom tegoż węzła, zatem niemożność spełnienia którejkolwiek z nich oznacza sprzeczność w równaniach opisujących model fizyczny. Nazwa "rozprowadzanie" wywodzi się z techniki sekwencyjnego określania przyczynowości w oparciu o wartości uzyskane w poprzednich krokach postępowania.

Należy przy tym zdać sobie sprawę z tego, że rozprowadzanie jest operacją o stosunkowo znacznej złożoności obliczeniowej (klasy $n!$), a zatem limitującą rozmiary rozpatrywanych zagadnień. Stąd też wskazane jest dokonanie przed tą operacją maksymalnej redukcji grafu zachowującej jednak elementarne informacje o jego strukturze.

Częstokroć w teorii grafów analiza własności sprzężeń przeprowadzana jest w oparciu o tzw. macierz koincydencji grafu. Macierz ta jest macierzą kwadratową, o wskaźnikach rzędów i kolumn odpowiadających poszczególnym węzłom grafu. Elementy macierzy odwzorowują sprzężenia, a zatem jedną z wartości, które muszą przyjmować jest wartość nil (brak sprzężenia pomiędzy danymi węzłami, zwykle w zapisie macierzowym oznaczana jako 0). Ponieważ sprzężenia w grafie szkieletowym mogą łączyć wyłącznie węzły źródłowe z gyratorami bądź sumatorami (jak wiadomo węzły źródłowe są jednosprzężeniowe), zaś sprzężenie pomiędzy sumatorami może występować jedynie w przypadku, gdy jeden z nich jest węzłem typu 1, a drugi - 0, zatem przy założeniu, że gyratory traktowane są jako węzły osobliwe, liczone podwójnie, możliwe staje się usunięcie z macierzy koincydencji tych elementów jako dublujących informację. W rezultacie otrzymuje się macierz prostokątną, w której węzły zerowe odpowiadają kolumnom, a węzły jedynekowe - wierszom. Jeśli węzeł źródłowy sprzężony jest bezpośrednio z 0, to przyporządkowany jest on kolumnie, zaś sprzężony z 1 - wierszowi. Tak więc indeksy kolumn i wierszy odpowiadają wzajemnie koincydentnym grupom węzłów. Symetria ta zakłócona może być przez nieredukowalne gyratory. W takim przypadku każdy z gyratorów zastąpiony powinien zostać przez dwa pseudowęzły odpowiadające kolumnie bądź wierszowi. Zdefiniowana w ten sposób macierz zwana będzie w dalszym ciągu zredukowaną macierzą koincydencji (dla odróżnienia od macierzy typowej odtwarzającej wszystkie możliwe sprzężenia międzywęzłowe). Przykładowa macierz przedstawiona została na rys. 2.

Można udowodnić (dowód ten nie zostanie tu jednak przytoczony z powodu ograniczenia nałożonego na rozmiar tekstu referatu): przypisanie danemu sprzężeniu relacji przyczynowości jest równoznaczne przyjęciu, przez odpowiedni element zredukowanej macierzy koincydencji, jednej z dwu wartości: "+" lub "-". Zakładając, iż "+" odpowiada sprzężeniu, w którym wartość zmiennej wyłączeniowej wyznaczana jest z węzła jedynekowego, dowiedzieć można, że dla grafu poprawnego strukturalnie, w każdej kolumnie i w każdym wierszu występować musi jeden i tylko jeden element o wartości "+". Z braku miejsca, ani dowód tego twierdzenia, ani też wynikający z niego algorytm określania przyczynowości nie będzie tu prezentowany (algorytm ten bazuje na zliczaniu dopuszczalnych elementów wyróżnionych "+" w poszczególnych wierszach i kolumnach). Jego złożoność obliczeniowa jest rzędu wykładniczego, a nie $n!$.



Rys. 2. Budowa zredukowanej macierzy koincydencji: a) - przykładowy graf wiązań z rozprowadzonymi przyczynowościami, b) - zredukowana macierz koincydencji dla grafu szkieletowego z oznaczonymi przyczynowościami.

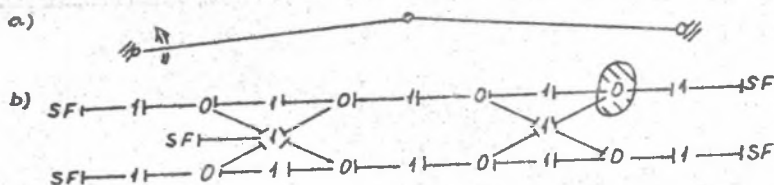
4. Analiza poprawności strukturalnej łańcucha kinematycznego

Poprawność strukturalna łańcucha kinematycznego jest równoważna rozwiązywalności układu równań modelującego występujące w nim więzy geometryczne. Jak wspomniano już wcześniej, analizy poprawności układu równań dokonać można poprzez sprawdzenie konfliktu przyczynowości odpowiadającego grafu. Bezpośrednie wykorzystanie przyczynowości grafu wiązań w sprawdzaniu jego poprawności przedstawione zostanie na trzech elementarnych przykładach płaskich układów kinematycznych stanowiących łańcuchowe połączenia kilku ogniw za pomocą węzłów obrotowych:

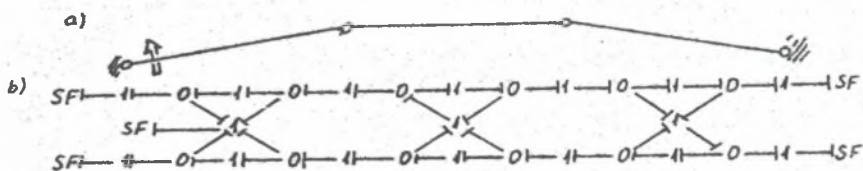
- a) trójkąta przegubowego (rys. 3),
- b) czworoboku przegubowego (rys. 4),
- c) pięcioboku przegubowego (rys. 5).

Przykłady te wybrano wyłącznie ze względu na ich czytelność graficzną. Wprowadzie ich analizę można przeprowadzić wykorzystując powszechnie znane wzory na ruchliwość strukturalną, jednak postępowanie takie staje się znacznie bardziej skomplikowane dla łańcuchów kinematycznych zawierających kontury wewnętrzne ([2]), a zupełnie jest nieprzydatne dla łańcuchów zbudowanych z grup należących do różnych rodzin. Ponieważ prezentowana tu metoda nie nawiązuje do podziału łańcucha na grupy, a tym bardziej do ich przynależności do poszczególnych rodzin, zatem biorąc pod uwagę jej ogólność, stopień formalizacji i sygnalizowaną możliwość doboru do analizy algorytmu o ograniczonej złożoności obliczeniowej, wydaje się być wygodnym narzędziem obliczeń prowadzonych na MC.

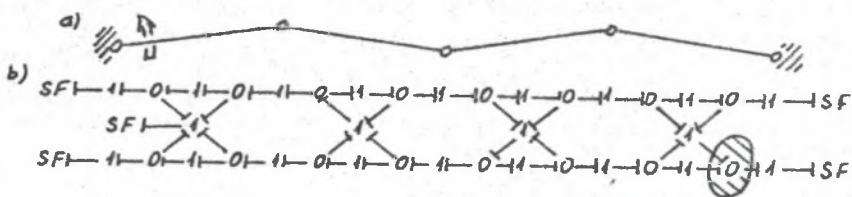
Jak łatwo można zauważyć, w przypadku a) jest to układ o ruchliwości 0. W przypadku b) występuje 1 stopień swobody, a więc istnieje możliwość przyłożenia jednego napędu (wymuszenia kinematycznego). Z kolei w przypadku c) ruchliwość wynosi 2, czyli pojedyncze wymuszenie nie narzuca położeń wszystkich ogniw. Na rysunkach 3a), 4a) i 5a) przedstawiono schematy kinematyczne, zaś na 3b), 4b) i 5b) - grafy wiązań z oznaczonymi przyczynowościami. Dla grafów z konfliktami rozkład przyczynowości przedstawiono wyłącznie dla jednego z możliwych rozwiązań pomijając dowód sprzeczności pozostałych. Węzły, w których powstaje konflikt, oznaczono kółkami. Jak widać, w przypadku przeszywnionego trójkąta (rys. 3) w węzle zerowym brakuje jednej przyczynowości. Analogiczna sytuacja zachodzi dla pięcioboku z pojedynczym wymuszeniem, stanowiącego układ o zbyt dużej liczbie stopni swobody (rys. 5) - w jednym z węzłów zerowych występuje nadmiar przyczynowości.



Rys. 3. Szkieletowy graf wiązań trójkąta przegubowego.



Rys. 4. Szkieletowy graf wiązań czworoboku przegubowego.



Rys. 5. Szkieletowy graf wiązań pięcioboku przegubowego.

LITERATURA

- 1 D.C. Karnopp, R.C. Rosenberg: "Introduction to Physical System Dynamics", McGraw-Hill B.C. - 1983.
- 2 S. Miller: "Podstawy syntezy strukturalnej układów kinematycznych", PWN, Warszawa 1984.
- 3 A.M. Bos, M.J.L. Tierneho: "Formula Manipulation in the Bond Graph Modeling and Simulation of Large Mechanical Systems" - J. Franklin Inst. Vol. 319 No 1/2.
- 4 M.J.L. Tierneho, A.M. Bos: "Modelling the Dynamics and Kinematics of Mechanical Systems with Multibond Graphs" - J. Franklin Inst. Vol. 319 No 1/2.

ГРАФЫ СВЯЗЕЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ ЦЕПНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Резюме. В докладе представлены возможности применения графов связей для анализа сложных кинематических цепей. Для этой цели используется аппарат причинного анализа графов связей геометрически накладываемых на точки рамы и отдельные звенья.

BOUND GRAPHS IN KINEMATIC CHAINS STRUCTURES MODELLING

Summary

The paper deals with the potentialities of bound graphs in the field of kinematic chains structures analysis. There are generated bound graphs of geometric constrains of link points. The structure of the linkage is checked using bound graph causality methods. Causality conflict of such graph arrives only in case of wrong structure.

Recenzent: prof. dr hab. inż. J. Wojnarowski

Wpłynęło do Redakcji 21.XII.1988 r.