

XIII MIĘDZYNARODOWE KOŁOKWIUM
"MODELE W PROJEKTOWANIU I KONSTRUOWANIU MASZYN"
13th INTERNATIONAL CONFERENCE ON
"MODELS IN DESIGNING AND CONSTRUCTIONS OF MACHINES"
25-28.04.1989 ZAKOPANE

Piotr FEDELIŃSKI
Tadeusz BURCZYŃSKI

Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
Politechnika Śląska

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH
DO ANALIZY WPŁYWU KSZTAŁTU NA CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH UKŁADU

Streszczenie. W pracy przedstawiono zastosowanie rachunku wariacyjnego do określenia zależności częstości drgań własnych od funkcji opisujących zmianę kształtu układu. Wrażliwość częstości została wyrażona za pomocą całki brzegowej z funkcji zależnej od częstości i postaci drgań. Do rozwiązania zagadnienia własnego zastosowano metodę elementów brzegowych. Zbadano własności prezentowanej metody na przykładzie ciała dwuwymiarowego.

1. Wprowadzenie

Jednym z ważnych zadań w procesie konstruowania jest dobór optymalnej postaci geometrycznej konstrukcji. W przypadku układu obciążonego dynamicznie jego zachowanie jest uzależnione od częstości drgań własnych. Przez maksymalizację częstości przy przyjętych ograniczeniach można zmniejszyć przemieszczenia i związane z nimi odkształcenia i naprężenia.

W pracy przedstawiono analizę wpływu kształtu na częstości drgań własnych, która stanowi nieodłączny element poszukiwania optymalnej postaci geometrycznej metodami gradientowymi.

Do rozwiązania postawionego zadania zastosowano metodę elementów brzegowych (MEB).

2. Analiza wrażliwości częstości drgań własnych na zmianę kształtu układu

Rozpatrzmy ciało sprężyste zajmujące obszar Ω i ograniczone brzegiem Γ . Zakładamy, że ciało jest zamocowane na

części brzegu Γ_1 i swobodne na części Γ_2 ($\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ i $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$).

Zagadnienie drgań swobodnych jest opisane równaniem:

$$\sigma_{i,j,j} + \omega^2 \rho u_i = 0, \quad (2.1)$$

gdzie: $\sigma_{i,j}$ - tensor naprężeń,

ω - częstość drgań własnych,

ρ - gęstość materiału,

u_i - składowa amplitudy drgań.

Zakładamy, że rozpatrywane ciało zmienia swój kształt. Zmiana położenia punktów obszaru zajmowanego przez ciało opisana jest funkcją g . Przy infinitezymalnej zmianie kształtu transformacja współrzędnych wyrażona jest równaniem:

$$x_i^* = x_i + \delta g_i, \quad (2.2)$$

gdzie δg_i jest wariacją funkcji g .

Przyjmujemy, że funkcja opisująca zmianę kształtu może być wyrażona za pomocą pewnej liczby parametrów a_r ($r=1,2,\dots,R$) nazywanych parametrami kształtu. Wówczas:

$$\delta g_i = g_{i,r} \delta a_r. \quad (2.3)$$

Zmianie kształtu odpowiada zmiana pola przemieszczeń określona przez:

$$\delta u_i = \delta \bar{u}_i + u_{i,j} \delta g_j, \quad (2.4)$$

gdzie $\delta \bar{u}_i$ oznacza wariację przemieszczeń dla stałego kształtu ciała.

Równanie zagadnienia własnego dla transformowanego obszaru może być zapisane w równoważnej postaci wariacyjnej. W tym celu mnożymy równ. (2.1) przez dowolne przemieszczenie wirtualne spełniające warunki brzegowe i po scałkowaniu przez części otrzymujemy:

$$\int_{\Omega^*} \sigma_{i,j}(u) \varepsilon_{i,j}(u) d\Omega^* = \omega^2 \int_{\Omega^*} \rho u_i u_i d\Omega^*. \quad (2.5)$$

Dla określenia zależności między częstością i parametrami kształtu obliczamy wariację obu stron równ. (2.5):

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(\delta \bar{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) n_m \delta g_m d\Gamma = \\ \delta(\omega^2) \int_{\Omega} \rho u_i u_i d\Omega + \omega^2 \left[2 \int_{\Omega} \rho u_i \delta \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \rho u_i u_i n_m \delta g_m d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

gdzie n_m jest wektorem normalnym do brzegu.

Uwzględniając w równ. (2.6), że:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(\delta \bar{u}) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho u_i \delta \bar{u}_i d\Omega = 0, \quad (2.7)$$

oraz przyjmując warunek normalizacyjny na funkcje własne:

$$\int_{\Omega} \rho u_i u_i = 1, \quad (2.8)$$

otrzymujemy równanie określające wariację częstości drgań własnych (por. Haug, Choi, Komkov [6] i Szefer [8]):

$$\delta\omega = \frac{1}{2\omega} \int_{\Gamma} \left[\sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) - \omega^2 \rho u_i u_i \right] n_m g_{m,r} \delta a_r d\Gamma. \quad (2.9)$$

Wyznaczenie wariacji częstotliwości drgań własnych wymaga obliczenia całki brzegowej z funkcji zależnej od częstotliwości i postaci drgań własnych oraz odkształceń i naprężeń na brzegu.

Do rozwiązania zagadnienia własnego i określenia wrażliwości układu o dowolnym kształcie zastosowano MEB [3,4]. Metoda pozwala dokładniej określić potrzebne wielkości na brzegu [2] niż metoda elementów skończonych (MES).

3. Rozwiązanie zagadnienia własnego metoda elementów brzegowych

Do rozwiązania zagadnienia własnego zastosowano symetryczną wersję MEB zaproponowaną przez Haishenga [5].

W omawianej metodzie stosowane jest rozwiązanie podstawowe elastostatyki [1,7]. Równ. (2.1) jest mnożone przez rozwiązanie podstawowe wyrażone w przemieszczeniach U_{ki} i całkowane po obszarze zajmowanym przez ciało:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} U_{ki} d\Omega + \omega^2 \rho \int_{\Omega} u_i U_{ki} d\Omega = 0, \quad (3.1)$$

Przyjmujemy, że przemieszczenia u_i można wyrazić w postaci sumy iloczynów funkcji $f^j(X)$ zależnych od położenia punktu i nieznanymi współczynnikami α_i^j :

$$u_i(X) = \alpha_i^j f^j(X), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

Po podstawieniu powyższego wyrażenia do równ. (3.1) otrzymujemy:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} U_{ki} d\Omega + \omega^2 \rho \alpha_i^j \int_{\Omega} f^j U_{ki} d\Omega = 0. \quad (3.3)$$

W wyniku zastosowania wzoru Somigliany przekształcamy równ. (3.3) do równoważnego brzegowego równania całkowego:

$$c_{ki} u_i - \int_{\Gamma} U_{ki} p_i d\Gamma + \int_{\Gamma} P_{ki} u_i d\Gamma + \omega^2 \rho \left[c_{ki} \psi_{li}^j - \int_{\Gamma} U_{ki} \eta_{li}^j d\Gamma + \int_{\Gamma} P_{ki} \psi_{li}^j d\Gamma \right] \alpha_l^j = 0 \quad (3.4)$$

gdzie: c_{ki} - współczynniki zależne od położenia punktu względem brzegu i jego kształtu,

p_i - siły na brzegu,

P_{ki} - siły na brzegu odpowiadające polu przemieszczeń U_{ki} ,

ψ_{li}^j - pole przemieszczeń wywołane działaniem siły $\delta_{ll} f^j$ (δ_{li} - delta Kroneckera),

η_{li}^j - siły na brzegu odpowiadające polu przemieszczeń ψ_{li}^j .

W celu obliczenia całek brzegowych dzielimy brzeg na elementy. Każdy z elementów posiada pewną liczbę węzłów zależną od typu elementu. Przeszaczenia i siły wewnątrz elementu wyrażamy przez wartości w węzłach. Równ. (3.4) układamy dla każdego węzła na brzegu. W efekcie otrzymujemy układ równań, który może być zapisany w postaci macierzowej:

$$[H]\{u\} - [G]\{p\} + \omega^2 \rho ([H][\psi] - [G][\eta])\{\alpha\} = 0, \quad (3.5)$$

gdzie: $[H]$ - macierz zależna od całek brzegowych z funkcji P_{ki} i funkcji kształtu,
 $[G]$ - macierz zależna od całek brzegowych z funkcji U_{ki} i funkcji kształtu,
 $[\psi]$ - macierz wartości funkcji ψ_{li}^j w węzłach,
 $[\eta]$ - macierz wartości funkcji η_{li}^j w węzłach,
 $\{u\}$ - wektor przemieszczeń węzłów brzegowych,
 $\{p\}$ - wektor sił na brzegu.

Nieznany wektor współczynników $\{\alpha\}$ wyznaczamy z równania:

$$\{u\} = [F]\{\alpha\}, \quad (3.6)$$

Macierz $[F]$ zawiera wartości funkcji f^j w węzłach.
 Po uwzględnieniu zależności (3.6) otrzymujemy:

$$[H]\{u\} - [G]\{p\} - \omega^2 [M]\{u\} = 0. \quad (3.7)$$

Przez $[M]$ oznaczono macierz bezwładności:

$$[M] = -\rho \left([H][\psi] - [G][\eta] \right) [F]^{-1}. \quad (3.8)$$

Otrzymane macierze $[H]$, $[G]$ i $[M]$ są pełne i niesymetryczne.
 Równ. (3.7) można przekształcić do postaci (por. Haisheng [5]):

$$[\hat{K}]\{u\} - \{R\} - \omega^2 [\hat{M}]\{u\} = 0. \quad (3.9)$$

W powyższym równaniu macierze $[\hat{K}]$ i $[\hat{M}]$ są symetryczne.
 Obliczamy je z następujących zależności:

$$[\hat{M}] = [Q] + [Q]^T, \quad (3.10)$$

$$[\hat{K}] = [\bar{Q}] + [\bar{Q}]^T. \quad (3.11)$$

Macierze $[Q]$ i $[\bar{Q}]$ wyznaczamy z równań:

$$[Q] = [C][G]^{-1}[M], \quad (3.12)$$

$$[\bar{Q}] = [C][G]^{-1}[H], \quad (3.13)$$

$$[C] = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} [\Phi]^T [\Phi] d\Gamma_e, \quad (3.14)$$

gdzie przez E oznaczono liczbę elementów brzegowych.

Macierz $[\Phi]$ jest macierzą funkcji kształtu interpolujących przemieszczenia i siły wewnątrz elementu.

Wektor $\{R\}$ jest wektorem obciążeń skupionych przyłożonych do węzłów:

$$\{R\} = [C]\{p\}. \quad (3.15)$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymujemy równanie zagadnienia własnego w postaci:

$$[\hat{K}_{22}]\{u_2\} - \omega^2 [\hat{M}_{22}]\{u_2\} = 0, \quad (3.16)$$

Indeksem 2 oznaczono podmacierze związane z brzegiem swobodnym.

Wprowadzenie symetrycznych macierzy pozwala na zastosowanie bardziej efektywnych metod rozwiązywania zagadnienia własnego. Jednocześnie zmniejsza się efekt niedokładności całkowania numerycznego i tym samym poprawia się dokładność częstości drgań własnych.

4. Przykład numeryczny

Opracowano program komputerowy, który określa wrażliwość częstości drgań własnych dla zagadnienia dwuwymiarowego.

Do dyskretyzacji ośrodka zastosowano liniowe elementy brzegowe.

Program wyznacza najniższe częstości i odpowiadające im postacie za pomocą iteracyjnej metody potęgowej z wyczerpywaniem.

W wyniku obliczeń określana jest wariacja częstości spowodowana przesunięciem każdego z węzłów osobno w kierunku normalnym do brzegu w stronę wnętrza obszaru.

Za pomocą programu zbadano własności dynamiczne prostokątnej tarczy obustronnie sztywno utwierdzonej (rys.4.1a).

Przyjęto, że tarcza znajduje się w płaskim stanie odkształcenia i wykonana jest z materiału o następujących własnościach:

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ [Pa]}, \quad \rho = 8000 \text{ [kg/m}^3\text{]}, \quad \nu = 0.3.$$

Określono częstości i postacie drgań własnych stosując do dyskretyzacji MEB i MES (rys.4.1). Wykonano obliczenia dla podziału tarczy na 20, 30 i 40 elementów brzegowych. Na rys. 4.2 pokazano trzy najniższe postacie drgań własnych, a w tab. 4.1 częstości dla różnych sposobów dyskretyzacji.

Tab. 4.1

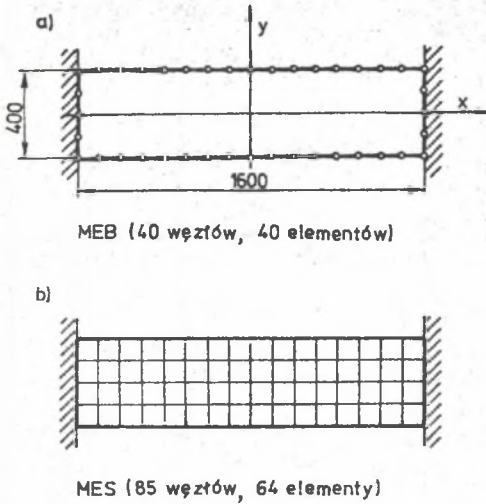
Dyskret.	Liczba elem.	Częstość [rad/s]		
		ω_1	ω_2	ω_3
MEB	20	12960	30440	32180
	30	12550	28710	32550
	40	12400	28080	32680
MES	64	12420	27070	32820

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że rozwiązania otrzymane MEB nieznacznie różnią się od rozwiązania MES nawet przy niewielkiej liczbie elementów.

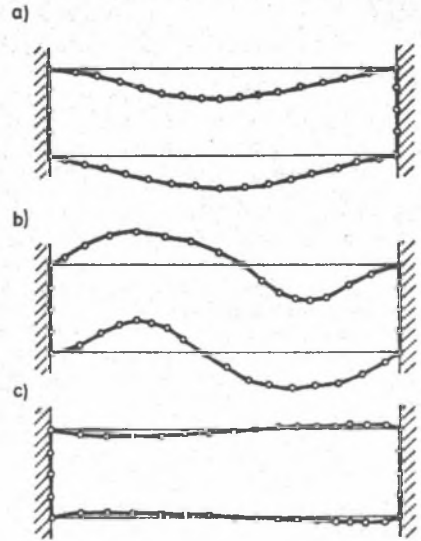
Na rys. 4.3a przedstawiono wyniki analizy wrażliwości pierwszej częstości dla różnego podziału badanej tarczy. W celu porównania wyników dla różnej liczby elementów wariację częstości $\delta\omega_1$ podzielono przez wariację pola powierzchni $\delta\Omega$. Wyniki dotyczą modyfikacji brzegu prawej części tarczy polegającej na przesunięciu każdego węzła do wnętrza obszaru o $\delta a_r = 0.04$ [m]. Wykresy dla lewej części są symetryczne do pokazanych.

Na rys. 4.3b przedstawiono wykresy wrażliwości trzech najniższych częstości. Przesunięcie węzłów brzegowych do wnętrza obszaru w pobliżu miejsca utwierdzenia powoduje zmniejszenie każdej z trzech badanych częstości.

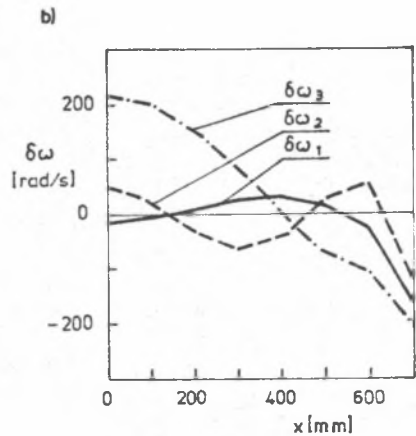
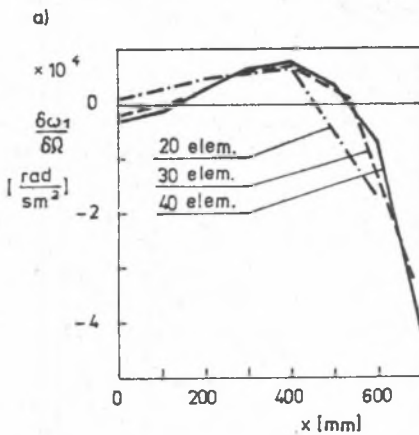
Porównanie częstości otrzymanych MEB i MES, a także zbadanie wpływu dyskretyzacji na wyniki analizy wrażliwości wykazało, że metoda może być stosowana przy niewielkiej liczbie elementów brzegowych. Znajomość wrażliwości umożliwia efektywne poszukiwanie kształtu układu o maksymalnej częstości lub jego optymalne rozstrojenie przy przyjętych ograniczeniach.



Rys.4.1. Dyskretyzacja tarczy prostokątnej: a) elementami brzegowymi, b) elementami skończonymi
 Fig.4.1. Discretization of the rectangular plate using: a) boundary elements, b) finite elements



Rys.4.2. Postacie drgań własnych: a) pierwsza, b) druga, c) trzecia
 Rys.4.3. Mode shapes of free vibration: a) first, b) second, c) third



Rys.4.3. Analiza wrażliwości częstotliwości drgań własnych: a) wariacja pierwszej częstotliwości dla różnej liczby elementów brzegowych, b) trzech najniższych częstotliwości
 Fig.4.3. Sensitivity analysis of natural circular frequencies: a) variation of first frequency for the different number of elements, b) variation of the three lowest frequencies

LITERATURA

- [1] C.A. BREBBIA, D. NARDINI: Dynamic Analysis in Solid Mechanics by Alternative Boundary Element Procedure, Int. J. Soil Dyn. Earthquake Eng., 1983, Vol.2, No.4, 228-233.
- [2] C.A. BREBBIA, J.C.F. TELLES, L.C. WROBEL: Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1984.
- [3] P. FEDELIŃSKI, T. BURCZYŃSKI: Shape Sensitivity Analysis of Eigenvalues Using Boundary Elements, in Proc. XIII Symp. Vibrat. Phys. Systems, Poznań- Błażejewko, 1988, 77-78.
- [4] P. FEDELIŃSKI, T. BURCZYŃSKI: The Boundary Element Method for Shape Design Sensitivity Analysis of Natural Frequencies, in Proc. Int. Conf. MASAD'88, Wrocław, 1988, 138-141.
- [5] R. HAISHENG: The Symmetric Dynamic Boundary Element Method (SDBEM) for Transient Elastodynamic Analysis, in Proc. Boundary Element X, Ed. C.A. Brebbia, Springer-Verlag, Berlin, 1988, Vol.4, 375-386.
- [6] E.J. HAUG, K.K. CHOI, V. KOMKOV: Design Sensitivity Analysis of Structural Design, Academic Press, New York, 1985.
- [7] D. NARDINI, C.A. BREBBIA: A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements, in Boundary Element Methods in Engineering, Ed. C.A. Brebbia, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 312-326.
- [8] G. SZEFER: Analiza wrażliwości i optymalizacja układów dynamicznych z rozłożonymi parametrami, Zesz. Nauk. AGH, Kraków, 1982, nr 942, 5-36.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ПРИ АНАЛИЗЕ ВЛИЯНИЯ ФОРМЫ НА ЧАСТОТУ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ

Резюме

В работе представлено применение вариационного исчисления для определения зависимости частот собственных колебаний от функций, которые описывают изменение формы системы. Чувствительность частот определена при помощи граничного интеграла, зависящего от собственного значения и функции. Для решения задачи на собственные значения применен метод граничных элементов. Исследованы свойства представленного метода на примере двумерного тела.

APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD
TO THE ANALYSIS OF SHAPE INFLUENCE ON NATURAL FREQUENCIES

Summary

The variational method is used to express the relationship between frequency and the function that defines a modification of the shape. The frequency sensitivity is expressed in the boundary integral form which depends on the natural frequency and mode. The Boundary Element Method is applied to solve the eigenvalue problem. The properties of the presented method are studied for a two-dimensional body.

Recenzent: doc. dr inż. S. Wojciech

Wpłynęło do Redakcji 30.XII.1988 r.