

XIII MIĘDZYNARODOWE KOŁOKWIUM  
"MODELE W PROJEKTOWANIU I KONSTRUOWANIU MASZYN"  
13th INTERNATIONAL CONFERENCE ON  
"MODELS IN DESIGNING AND CONSTRUCTIONS OF MACHINES"  
25-28.04.1989 ZAKOPANE

Mikołaj KIRKACZ

ZSRR, Politechnika w Charkowie, Katedra Detalej Maszyn

Leonid KURMAZ

ZSRR, Politechnika w Charkowie, Katedra Detalej Maszyn  
Instytut Technologii Maszyn i Sprzętu Mechanicznego  
Politechnika Świętokrzyska w Kielcach

Eugeniusz GULIŃSKI

Instytut Technologii Maszyn i Sprzętu Mechanicznego  
Politechnika Świętokrzyska w Kielcach

## WYKORZYSTANIE W UKŁADACH NAPĘDOWYCH SPRZĘGIEŁ PODATNYCH O KWAZI-ZEROWEJ SZTYWNOŚCI

Streszczenie. W pracy uzasadniono konieczność umieszczenia w układach napędowych sprzęgieł podatnych o kwazi-zerowej sztywności dla zmniejszenia obciążeń dynamicznych, przedstawiono kształt wymaganej charakterystyki sprężystej takich sprzęgieł, jak również podano przykład ich realizacji fizycznej.

### 1. Wprowadzenie

Zwiększanie mocy i prędkości maszyn, co jest cechą charakterystyczną naszych czasów, powoduje znaczny wzrost obciążeń dynamicznych w układach napędowych.

Z tego powodu wynika potrzeba opracowania metod obliczeń takich obciążeń, jak również realizacji wyników tych obliczeń, tj. takiej zmiany parametrów napędów, która zabezpiecza zmniejszenie obciążeń dynamicznych.

Właściwości konstrukcji układów napędowych dają możliwość w szerokim zakresie zmieniać charakterystyki elementów podatnych napędu, które łączą masy bezwładne. Biorąc pod uwagę, że zmiana charakterystyk podatnych w drodze zmiany długości odcinków wałów pomiędzy masami bezwładnymi, jak również zmiana średnic tych odcinków nie zawsze jest możliwa / a częściej jest niemożliwa /, to przy stałych wymiarach napędu najlepsze wyniki daje zmiana charakterystyk sprężystych sprzęgieł podatnych układu napędowego.

Wynika stąd potrzeba uzasadnienia kształtu charakterystyk sprężystych sprzęgieł podatnych układów napędowych. Daje to możliwość ustalenia modeli obliczeniowych układów napędowych ze sprzęgłami podatnymi przy projektowaniu takich układów o minimalnych obciążeniach dynamicznych.

## 2. Podstawy teoretyczne wyznaczenia potrzebnej sztywności sprzęgieł podatnych

Rozpatrzmy ruch  $n$ -masowych modeli układów napędowych, który może być opisany następującym równaniem operatorowym [1]:

$$(A \cdot p^2 + C) \cdot K(p) = F(p), \quad (1)$$

gdzie:  $K(p) = \left\| \begin{matrix} M_{k,k+1}(p) \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\|_1^{n-1}$  - wektor przekształceń momentów sprężystych  $M_{k,k+1}(t)$  na odcinkach układu napędowego;

$F(p) = \left\| \begin{matrix} f_k(p) \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\|_1^{n-1}$  - wektor przekształceń obciążeń zewnętrznych;

$A, C$  - macierz jednostkowa i macierz sprężysto-bezwładnościowa parametrów układu napędowego.

W celu wyznaczenia wartości momentów sprężystych na  $(k, k+1)$  - tym odcinku modelu układu napędowego rozwiążemy równanie (1) względem  $M_{k,k+1}(p)$ :

$$\Delta(p) \cdot M_{k,k+1}(p) = \Delta_{k,k+1}(p), \quad (2)$$

gdzie:  $\Delta(p)$  - wielomian operatorowy macierzy  $\|H\| = \left\| \begin{matrix} h_{jk} \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\|_1^{n-1} = A \cdot p^2 + C$ ;

$\Delta_{k,k+1}(p)$  - wielomian operatorowy, otrzymany z macierzy  $\|H\|$  w drodze zamiany  $k$ -tej kolumny kolumną obciążeń zewnętrznych  $F(p)$ .

$$\text{Oczywiście, że } \Delta_{k,k+1}(p) = \sum_{j=1}^{n-1} f_j \cdot h_{jk}, \quad (3)$$

gdzie:  $h_{jk}$  - podwyznacznik względny macierzy  $\|H\|$ .

Biorąc pod uwagę, że:

$$f_j = C_{j,j+1} \cdot (I_j^{-1} \cdot M_j(p) - I_{j+1}^{-1} \cdot M_{j+1}(p)) + p \cdot M_{j,j+1}(0) + M_{j,j+1}(0), \quad (4)$$

równanie (3) przyjmuje postać:

$$\Delta_{k,k+1}(p) = \sum_{j=1}^{n-1} C_{j,j+1} \cdot (I_j^{-1} \cdot M_j(p) - I_{j+1}^{-1} \cdot M_{j+1}(p) + p \cdot \alpha_{j,j+1}(0) + \alpha_{j,j+1}(0)) \cdot H_{jk}, \quad (5)$$

przy czym:  $I_j$  - moment bezwładności  $J$ -tej masy modelu, do której jest przyłożony moment zewnętrzny  $M_j(t)$ ;  $C_{j,j+1}$ ,  $\alpha_{j,j+1}(t)$  - sztywność i względny kąt zakręcania  $(J, J+1)$ -go odcinka sprężystego modelu napędu;  $M_{j,j+1}(0)$ ,  $\alpha_{j,j+1}(0)$  - warunki początkowe dla momentu sprężystego  $M_{j,j+1}(t) = C_{j,j+1} \cdot \alpha_{j,j+1}(t)$ .

Z (5) wynika, że dla osiągnięcia absolutnej niezmienności momentu sprężystego  $M_{k,k+1}(t)$  w zależności od momentu  $M_j(t)$  konieczne i dostatecznie jest, aby:

$$-C_{j-1,j} \cdot I_j^{-1} \cdot H_{j-1,k} + C_{j,j+1} \cdot I_j^{-1} \cdot H_{jk} = 0. \quad (6)$$

Macierz:

$$\|H\| = \|h_{jk}\|_{1}^{n-1} = \begin{vmatrix} p^2 + C_{12} \cdot R_{12} & -C_{12} \cdot R_2 & 0 & \dots & 0 \\ -C_{23} \cdot R_2 & p^2 + C_{23} \cdot R_{23} & -C_{23} \cdot R_3 & \dots & 0 \\ 0 & -C_{34} \cdot R_3 & p^2 + C_{34} \cdot R_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p^2 + C_{n-1,n} \cdot R_{n-1,n} \end{vmatrix} \quad (7)$$

jest trzechrzędkową, tj.  $h_{jk} = 0$  przy  $|j-k| > 1$  dla wszystkich  $j, k = 1, 2, \dots, n-1$ .

Dla takiego rodzaju macierzy można udowodnić, że podwyznacznik względny  $H_{j,k}$  jest proporcjonalny do elementów  $h_{i,i+1}$  ( $i = k, k+1, \dots, j-1$ ), tj.:

$$H_{jk} = h_{k,k+1} \cdot h_{k+1,k+2} \cdot \dots \cdot h_{j-1,j} \cdot B_{jk}, \quad (8)$$

gdzie:  $B_{jk}$  - współczynnik proporcjonalności, który jest zależny od elementów  $h_{k,k+1}$ ,  $h_{k+1,k+2}$ ,  $h_{j-1,j}$ ,  $R_s = I_s^{-1}$ ,  $R_{s,s+1} = I_s^{-1} + I_{s+1}^{-1}$  ( $s = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Wynika z tego, że:

$$H_{j-1,k} = \left( \prod_{i=k}^{j-2} C_{i,i+1} \cdot R_{i,i+1} \right) \cdot B_{j-1,k} \quad (9)$$

$$H_{jk} = \left( \prod_{i=k}^{j-1} C_{i,i+1} \cdot R_{i,i+1} \right) \cdot B_{jk}$$

albo:

$$-C_{j-1,j} \cdot \left( \prod_{i=k}^{j-2} C_{i,i+1} \cdot R_{i,i+1} \right) \cdot B_{j-1,k} + C_{j,j+1} \cdot \left( \prod_{i=k}^{j-1} C_{i,i+1} \cdot R_{i,i+1} \right) \cdot B_{jk} = \prod_{i=k}^{j-1} C_{i,i+1} \cdot \left( -\prod_{i=k}^{j-2} R_{i,i+1} \cdot B_{j-1,k} + C_{j,j+1} \cdot \prod_{i=k}^{j-1} R_{i,i+1} \cdot B_{jk} \right) = 0. \quad (10)$$

W ten sposób dla osiągnięcia absolutnej niezmienności reakcji sprężystej w  $(K, K+1)$ -tym ogniwie modelu w stosunku do momentu zewnętrznego przykładanego do  $J$ -tej masy ostatecznie mamy:

$$\prod_{i=k}^{j-1} C_{i,i+1} = C_{k,k+1} \cdot C_{k+1,k+2} \cdots C_{j-1,j} = 0, \quad (11)$$

co oznacza, że sztywność jednego albo kilku odcinków modelu układu napędowego pomiędzy masami  $K$ -tą i  $J$ -tą musi być równa zeru, co się zgodza z wnioskami [2].

Wątek absolutnej niezmienności (11) fizycznie nie może być zrealizowany, ale umożliwia on rozwiązywanie problemów minimalizacji maksymalnych obciążeń dynamicznych w ogniwach układów napędowych.

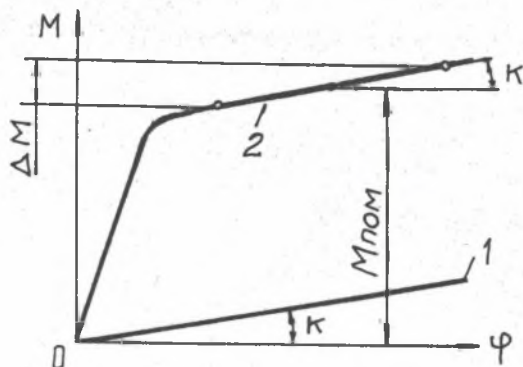
Nie mając możliwości osiągnięcia absolutnej niezmienności reakcji sprężystej, nie trzeba rezygnować z osiągnięcia tej niezmienności z jakąś dokładnością.

Reasumując, można wyciągnąć wnioski, że dla zmniejszenia obciążeń dynamicznych na odcinkach układu napędowego należy zmniejszyć sztywność jednego albo kilku odcinków modelu układu w pobliżu masy przykładania momentu zewnętrznego, tj. umieścić w układzie napędowym sprzęgło podatne o małej sztywności.

### 3. Kontakt pożądanej charakterystyki sprężystej sprzęgła podatnego

Dla sprzęgieł podatnych oprócz żądanej małej sztywności odcinka roboczego charakterystyki sprężystej jest jeszcze wymóg podstawowy - zapewnienie potrzebnej nośności sprzęgła, czyli zapewnienie potrzebnej wartości przenoszonego momentu obrotowego.

Przy żądanej małej sztywności sprzęgła osiągnięcie potrzebnej wartości przenoszonego przez napęd momentu obrotowego powoduje znaczny kąt skręcania półtarcz sprzęgła, jak również znaczny kąt skręcania wałów, co przedstawiono krzywą 1 na rys. 1. Wartości tych ką-



Rys.1. Żądana charakterystyka sprężysta sprzęgła podatnego

Fig.1. Required elastic characteristic of the flexible coupling

tów skręcenia są znacznie większe od dopuszczalnych [3].

W celu zmniejszenia kąta skręcenia przejście od wartości przenieszonego momentu  $M = 0$  do wartości bliskiej nominalnej musi być zrealizowane z dużą sztywnością, a odcinek roboczy charakterystyki sprężystej powinien posiadać żądaną małą sztywność.

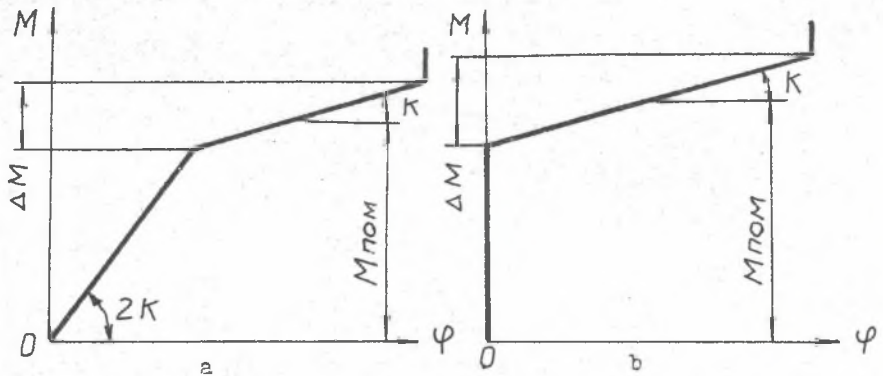
Wynika z tego kształt charakterystyki sprzęgła podatnego, przedstawiony krzywą 2 na rys.1.

Dla zapewnienia żądanych warunków pracy napędu wartość  $\Delta M$  na charakterystyce sprężystej powinna być większa od stałych zmian przenieszonego przez napęd momentu obrotowego.

#### 4. Realizacja fizyczna żądanej charakterystyki sprężystej sprzęgła podatnego

Jednym z rodzajów sprzęgieł podatnych, których charakterystyka jest bardzo podobna do żądanej, jest sprzęgło podatne ze śrubowymi sprężynami napiętymi wstępnie i umieszczonymi obwodowo pomiędzy wysięgowymi podporami należącymi do różnych półtarcz sprzęgła. Taki rodzaj sprzęgieł firmy Hochreuter i Braun [4] ma charakterystykę przedstawioną na rys. 2a.

Z punktu widzenia możliwości wykonania sprzęgła wbudowanego w elementy napędu, na przykład w koła zębate, może być polecane sprzęgło również ze sprężynami śrubowymi, wstępnie napiętymi i obwodowo rozmieszczonymi pomiędzy podporami, które umieszczone są jednocześnie na dwóch półtarczach sprzęgła [5]. Charakterystyka takich sprzęgieł jest przedstawiona na rys. 2b.



Rys.2. Charakterystyki sprężyste istniejących sprzęgieł podatnych  
 Fig.2. Elastic characteristics of real flexible couplings

#### LITERATURA

- [1] Z.Osiński: Teoria drgań. PWN, Warszawa 1978.
- [2] F.N.Kalinin: K woprosu primienienija muft kwazinułewoj żostkosti. ZSRR, "Dieponirowannyje rukopisi", 1981, nr.1/111/, s.95
- [3] Z.Dąbrowski, M.Maksymiuk: Wały i osie. PWN, Warszawa 1985.
- [4] Z.Osiński: Sprzęgła i hamulce. PWN, Warszawa 1985.
- [5] M.N.Iwanow : Dietali maszyn. Moskwa 1984.

#### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ПРИВОДАХ УПРУГИХ МУФТ КВАЗИНУЛЕВОЙ ЖЕСТКОСТИ

##### Резюме

В статье представлено обоснование использования в приводах упругих муфт квазинулевой жесткости для уменьшения динамических нагрузок, представлена желаемая форма упругой характеристики таких муфт, а также даны примеры их физической реализации.

#### USING FLEXIBLE COUPLING WITH QUASINULL STIFFNES IN DRIVE SYSTEMS

##### Summary

In this paper has been substantiated necessity of locate the flexible coupling with quasinull stiffnes in drive systems for reduce of dynamic loading. Also has been presented the shape of the required elastic characteristic this kind of coupling, as well has been given the example of their practical realization.

Recenzent: doc. dr inż. Z/ Jaskóła

Wpłynęło do Redakcji 15.XII.1988 r.