

XIII MIĘDZYNARODOWE KOŁOKWIUM  
"MODELE W PROJEKTOWANIU I KONSTRUOWANIU MASZYN"  
13th INTERNATIONAL CONFERENCE ON  
"MODELS IN DESIGNING AND CONSTRUCTIONS OF MACHINES"  
25-28.04.1989 ZAKOPANE

Witold MAROWSKI

Instytut Podstaw Budowy Maszyn  
Politechnika Warszawska

#### MODELOWANIE DYNAMIKI UKŁADÓW Z POISSONOWSKIM WYMUSZENIEM IMPULSOWYM

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono niektóre metody badania układów poddanych działaniu obciążeń losowych modelowanych za pomocą poissonowskich ciągów impulsów. W przypadku nieliniowego układu o jednym stopniu swobody zastosowano metodę linearyzacji statystycznej oraz technikę symulacji cyfrowej. Techniki tej użyto również przy badaniu układu o dwóch stopniach swobody ze sprzężeniem autoparametrycznym.

#### 1. Wstęp

Siły działające na techniczne układy dynamiczne mają często charakter krótkotrwałych losowych oddziaływań o bardzo znacznych wartościach, lecz skończonych popędach. Jeśli można założyć wzajemną niezależność chwil ich występowania, mogą być one modelowane za pomocą ciągu losowych impulsów o czasowym rozkładzie Poissona. Tego rodzaju model matematyczny przyjęto w szeregu prac opublikowanych w ostatnich latach /p. np. [3,4,6,7] /. Również w niniejszej pracy rozważa się oddziaływanie takiego wymuszenia na układy dynamiczne o jednym i dwóch stopniach swobody. Zakłada się, że kształt impulsów określa funkcja  $\delta$  Diraca.

Zagadnienie takie można badać w sposób efektywny w przypadkach, gdy daje się ono sprowadzić do równania oscylatora liniowego. Stosowane są wówczas dwie zasadnicze metody: pierwsza, wykorzystująca teorię punktów losowych oraz zasadę superpozycji i pozwalająca na otrzymanie momentów i funkcji korelacyjnej odpowiedzi układu /p.np. [5]/ oraz druga, korzystająca z teorii stochastycznych równań różniczkowych i uogólnionego równania Fokkera-Plancka-Koźmogorowa. Taką metodę zastosowano m. in. w pracy [6], co pozwoliło na wyznaczenie niestacjonarnej funkcji charakterystycznej rozkładu prawdopodobieństwa odpowiedzi układu liniowego przy dowolnym rozkładzie prawdopodobieństwa wielkości impulsów.

## 2. Nieliniowy układ o jednym stopniu swobody

Metody omówione wyżej nie mogą być bezpośrednio zastosowane przy badaniu układów nieliniowych. Okazuje się jednak, iż w szeregu przypadków układów o jednym stopniu swobody można wykorzystać linearyzację statystyczną łącznie z metodą funkcji charakterystycznej. Takie podejście zastosowano w pracach [3,7]. Zastosowana metoda zostanie przedstawiona na przykładzie układu, którego równanie ruchu ma postać [3]:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu(ax^3 + bx^3) = P(t) \quad /1/$$

gdzie  $P(t)$  jest impulsowym procesem wymuszającym o czasowym rozkładzie Poissona i dowolnym rozkładzie prawdopodobieństwa popędów.

Związek /1/ zastępuje się ekwiwalentnym równaniem liniowym:

$$\ddot{x} + 2h_e\dot{x} + \omega_e^2 x = P(t) \quad /2/$$

Ekwiwalentne liniowe tłumienie  $h_e$  i sztywność  $\omega_e^2$  wyznacza się minimalizując średniokwadratowy błąd linearyzacji e/p.[3,7]/, co prowadzi do otrzymania układu nieliniowych równań algebraicznych. Występujące w tych równaniach momenty odpowiedzi układu zlinearyzowanego określa się za pomocą metody przedstawionej w pracy [6], pozwalającej na wyznaczenie funkcji charakterystycznej odpowiedzi układu /2/ na podstawie odpowiadającego mu uogólnionego równania Fokkera-Plancka-Koźmogorowa. W przypadku normalnego o zerowej wartości średniej rozkładu prawdopodobieństwa wielkości impulsów funkcję tę można zapisać następująco:

$$\Psi(z_1, z_2, t) = \exp \left[ -\lambda \int_0^t \left\{ 1 - \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 e^{-2h_e(t-\xi)} \left[ (z_1 - h_e z_2) f_1(t-\xi) + z_2 f_2(t-\xi) \right]^2 \right) \right\} d\xi \right] \quad /3/$$

gdzie:

$$f_1(q) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} \sin \omega q & \text{dla } h_e < \omega_e \\ q & \text{dla } h_e = \omega_e \\ \frac{1}{\tilde{\omega}} \sinh \tilde{\omega} q & \text{dla } h_e > \omega_e \end{cases} \quad f_2(q) = \begin{cases} \cos \omega q & \text{dla } h_e < \omega_e \\ 1 & \text{dla } h_e = \omega_e \\ \cosh \tilde{\omega} q & \text{dla } h_e > \omega_e \end{cases} \quad /4/$$

$$\omega = \sqrt{\omega_e^2 - h_e^2} \quad ; \quad \tilde{\omega} = \sqrt{h_e^2 - \omega_e^2} \quad /5/$$

$\sigma$  jest odchyleniem standardowym wielkości impulsów, zaś  $\lambda$  oznacza intensywność procesu Poissona.

Na podstawie zależności /3/ można ze znanych wzorów wyznaczyć momenty procesu wyjściowego w zależności od współczynników linearyzacji, co pozwala na rozwiązanie układu równań określających te współczynniki. W szczególności jest /p. [3] /:

$$m_{10} = E[x] = 0 \quad ; \quad m_{01} = E[\dot{x}] = 0 \quad /6/$$

$$m_{20}^u = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^2 x^2(t) = \frac{\lambda \sigma^2}{4h_e \omega_e^2} \quad ; \quad m_{02}^u = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}^2(t) = \frac{\lambda \sigma^2}{4h_e} \quad /7/$$

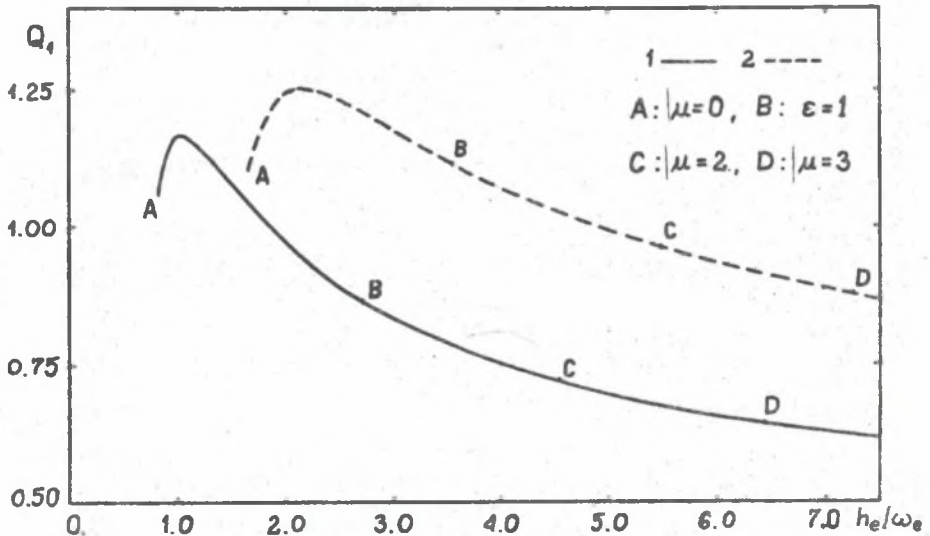
Zastosowanie metody linearyzacji statystycznej może wpływać na własności odpowiedzi, należy zatem przeanalizować dokładność otrzy-

manyh rezultatów. Dogodnie jest wykorzystać w tym celu technikę symulacji cyfrowej. Użyta metoda /p.[4]/ polega na numerycznym rozwiązywaniu równania drgań swobodnych układu nieliniowego, tj. równania /1/ z zerową prawą stroną. Oddziaływanie wymuszenia impulsowego uwzględnia się nadając skokowe przyrosty prędkości układu w chwilach pojawiania się impulsów. Metoda ta pozwoliła na stwierdzenie słuszności związków /6/, zatem dokładność linearyzacji statystycznej może być określona za pomocą funkcji:

$$Q_1(p) = \epsilon_{i1}^2(p) / \epsilon_{is}^2(p) \quad /i=1,2/ \quad /8/$$

gdzie  $\epsilon_{i1}^2$  i  $\epsilon_{is}^2$  oznaczają ustalone wartości wariancji otrzymane odpowiednio z metody linearyzacji lub symulacji cyfrowej,  $p$  jest parametrem, którego wpływ na dokładność wyników jest badany,  $i=1$  oznacza przemieszczenie, zaś  $i=2$  - prędkość.

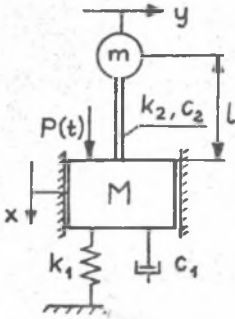
Analiza takich funkcji prowadzi do wniosku, iż dokładność metody linearyzacji maleje ze wzrostem przemieszczeń lub prędkości układu. Jest to powodem jej nieprzydatności w przypadku czysto nieliniowego tłumienia  $h=0$  w równaniu /1// oraz przy zbyt dużych wartościach odchylenia standardowego wielkości impulsów  $\epsilon$ . Dokładność metody linearyzacji maleje na ogół ze wzrostem wartości stosunku  $h_e/\omega_e$ , co wynika z przytoczonych w pracy [3] zależności pomiędzy tymi wielkościami, a parametrami układu lub wymuszenia, ale może być ona stosowana zarówno dla pod-, jak i dla nadkrytycznego tłumienia w układzie /2/. Jako przykład na rys. 1 pokazano przebieg funkcji  $Q_1(h_e/\omega_e)$  przy zmieniającym się współczynniku  $\mu$  w równaniu /2/.



Rys. 1. Wskaźnik dokładności metody linearyzacji statystycznej.  
 Fig. 1. Accuracy index of the stochastic linearization technique.

$\omega_e=6.0$  [1/s],  $a=2.0$  [s/m<sup>2</sup>],  $b=36.0$  [1/m<sup>2</sup>s<sup>2</sup>],  $\lambda=1.0$  [1/s],  $\epsilon=3.0$  [m/s]  
 /1/  $h=5.0$  [1/s], /2/  $h=10.0$  [1/s]

### 3. Układ o dwóch stopniach swobody ze sprzężeniem autoparametrycznym



Rys. 2. Układ ze sprzężeniem autoparametrycznym.  
Fig. 2. System with autoparametric coupling.

Zastosowanie metody linearyzacji jest niemożliwe w przypadku układów, których zasadnicze własności są związane z występowaniem nieliniowych składników równań ruchu, takich jak pokazany na rys.2 układ ze sprzężeniem autoparametrycznym. Układy tego typu mają dość duże znaczenie praktyczne [p.[1,2]], zaś postać ich równań ruchu wyklucza możliwość ścisłego rozwiązania. Do analizy stosuje się zatem metody przybliżone [1,2]. Jedną z nich może być technika symulacji cyfrowej. Sposób jej wykorzystania w przypadku wymuszenia modelowanego za pomocą poissonowskiego ciągu impulsów zostanie przedstawiony niżej.

Przyjmując bezwymiarowe współrzędne:

$$x_1 = x/x_0 ; \quad x_2 = y/x_0 \quad /9/$$

i parametry:

$$R = \frac{m}{M+m} ; \quad r = \frac{\omega_2}{\omega_1} ; \quad \varepsilon = \frac{6x_0}{5l} ; \quad \zeta_1 = \frac{c_1}{2(M+m)\omega_1} ; \quad \zeta_2 = \frac{c_2}{2m\omega_2} \quad /10/$$

gdzie:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M+m}} ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}} \quad /11/$$

zaś  $x_0$  jest pewnym przemieszczeniem odniesienia, oraz wprowadzając bezwymiarowy czas  $\tau = \omega_1 t$  i bezwymiarowy proces wymuszający:

$$W(\tau) = \frac{P(\tau/\omega_1)}{(M+m)\omega_1^2 x_0} \quad /12/$$

można równania ruchu rozważanego układu zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= [W(\tau) - 2\zeta_1 x_3 - x_1 + \varepsilon R(x_4^2 - 2\zeta_2 r x_2 x_4 - r^2 x_2^2) + \varepsilon^2(x_2^2 W(\tau) - \\ &\quad - 2\zeta_1 x_3 x_2^2 - x_1 x_2^2)] / [1 + \varepsilon^2(1-R)x_2^2] \\ \dot{x}_4 &= [-2\zeta_2 r x_4 - r^2 x_2 + \varepsilon(x_2 W(\tau) - 2\zeta_1 x_2 x_3 - x_1 x_2) - \varepsilon^2(1-R)x_2 x_4] / \\ &\quad / [1 + \varepsilon^2(1-R)x_2^2] \quad /13/ \end{aligned}$$

Zastosowany algorytm symulacji cyfrowej polega na rozwiązywaniu równań opisujących drgania swobodne badanego układu /t.j.  $W(\tau) = 0$  w /13//. W chwilach występowania impulsów wymuszenia prędkości ciał  $M$  i  $m$  doznają skokowych przyrostów, wyznaczanych z trzeciego i czwartego z równań /13/. Można przy tym pominąć występujące w tych równaniach siły skończone, gdyż ich popędy są w czasie działania impulsów typu  $\delta$  Diraca równe zero. W przypadku gdy za przemieszczenie odniesienia  $x_0$  obierze się ustaloną wartość odchylenia standardowego przemieszczenia układu z zablokowanym eliminatorem, którą można wyliczyć ze wzoru analogicznego do zależności /7/, skokowe przyrosty prędkości ciał układu są określone następująco:

$$\Delta x_3(\tau_j) = 2 \frac{I(\tau_j)}{\sigma_I} \sqrt{\frac{\zeta_1}{\lambda_b}} \frac{1 + \varepsilon^2 x_2^2}{1 + \varepsilon^2 (1-R) x_2^2}$$

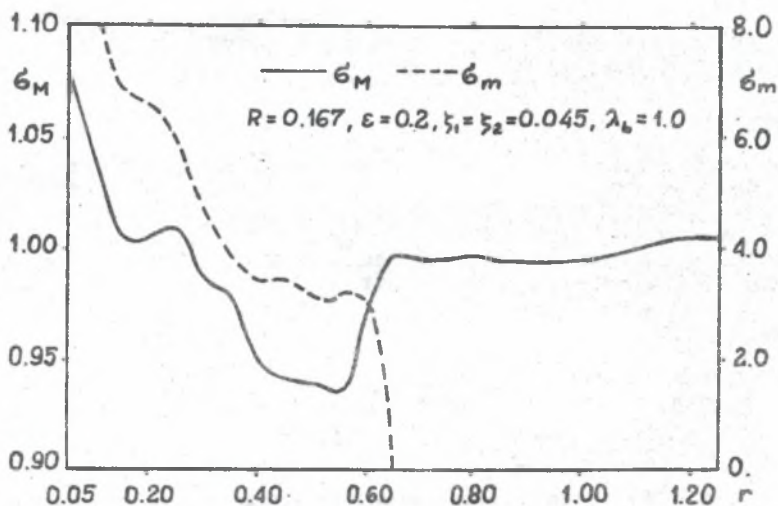
$$\Delta x_4(\tau_j) = 2 \frac{I(\tau_j)}{\sigma_I} \sqrt{\frac{\zeta_1}{\lambda_b}} \frac{\varepsilon x_2}{1 + \varepsilon^2 (1-R) x_2^2} \quad /14/$$

We wzorach /14/  $I(\tau_j)$  oznacza impuls pojawiający się w chwili  $\tau_j$ ,  $\sigma_I$  - odchylenie standardowe wielkości impulsów, zaś  $\lambda_b$  - bezwymiarową intensywność procesu Poissona.

Równania /13/ i /14/ umożliwiają generowanie realizacji odpowiedzi. Chwile występowania i wielkości impulsów obciążenia określa się za pomocą odpowiednich generatorów cyfrowych. Ustalono momenty przeszerzenia i prędkości wyznacza się metodą uśredniania względem czasu dla dostatecznie długiego odcinka jednej realizacji.

Obliczenia prowadzono dla przypadku normalnego o zerowej wartości średniej rozkładu prawdopodobieństwa wielkości impulsów. Stwierdzono, iż wartości średnie współrzędnych  $x_i$ ,  $i=1, \dots, 4$  są praktycznie równe zero, co jest zgodne z symetryczną budową układu i własnościami wymuszenia.

Przebadano również wpływ niektórych parametrów układu na ustalone wartości odchyłeń standardowych jego przemieszczeń i prędkości. Przykładowo, na rys. 3 pokazano zależność odchyłeń standardowych przemieszczeń ciał M i m od stosunku częstotliwości  $r$ . Jak widać, pomiędzy obydwooma elementami układu istnieje przepływ energii, zwłaszcza dla  $r \in (0.25, 0.65)$ . Zjawisko to jest jednak o wiele mniej wyraźne, niż w przypadku wymuszenia harmonicznego, występuje za to w szerszym przedziale zmienności  $r$  /por. [1]/.



Rys. 3. Odchylenia standardowe przemieszczeń układu ze sprzężeniem autoparametrycznym.

Fig. 3. Standard deviations of displacements of the system with an autoparametric coupling.

Układ /13/, a także równanie rozważane w rozdziale 2, rozwiązywano stosując algorytm Gear'a. Dla zachowania dokładności konieczne było niekiedy prowadzenie obliczeń na zmiennych podwójnej precyzji.

#### LITERATURA

- [1] R.S. HAXTON, A.D.S. BARR: The autoparametric vibration absorber. *Trans. ASME, J.Eng.Ind.*, 94, /1972/, pp.119-125.
- [2] R.A. IBRAHIM: *Parametric Random Vibration. Research Studies Press, Letchworth 1985.*
- [3] W. MAROWSKI: Zastosowanie metody linearyzacji do analizy nieliniowego oscylatora poddanego działaniu przypadkowych impulsów. *Mech. Teor. i Stos.*, nr 1/89 /w druku/.
- [4] W. MAROWSKI, J. WROBEL: Symulacyjne modelowanie drgań nieliniowego układu o jednym stopniu swobody pod działaniem poissonowskiego ciągu impulsów. *Symposium „Modelowanie w mechanice”, Beskid Śląski /1988/. Zbiór referatów*, pp.331-338.
- [5] S.K. SRINIVASAN, R. SUBRAMANIAN, S. KUMARASWAMY: Response of linear vibratory systems to nonstationary stochastic impulses. *J.Sound Vibr.*, 6, /1967/, pp.169-179.
- [6] A. TYLIKOWSKI: Pewna metoda badania liniowych układów poddanych poissonowskiemu wymuszeniu impulsowemu. *XI Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”. Poznań - Błażejewko /1984/. Streszczenia referatów.*
- [7] A. TYLIKOWSKI, W. MAROWSKI: Vibration of a non-linear single degree of freedom system due to Poissonian impulse excitation. *Int.J.Non-Linear Mech.*, 21, /1986/, pp.229-238.

#### MODELLING OF THE DYNAMICS OF SYSTEMS SUBJECTED TO POISSONIAN IMPULSE EXCITATION

##### Summary

In the paper some methods of investigation of systems subjected to Poissonian impulse excitation are presented. Nonlinear single degree of freedom system is investigated both by means of stochastic linearization and digital simulation techniques. The last-mentioned technique is also applied to examine the two degree of freedom system with an autoparametric coupling.

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С ПУАССОНОВСКИМ ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

##### Резюме

В работе рассматриваются методы анализа систем находящихся под действием пуассоновских импульсных процессов. Нелинейную систему с одной степенью свободы исследуется с помощью методов статистической линейризации и численной симуляции. Последний метод применяется тоже для исследования системы с двумя степенями свободы и автопараметрической связью.