

XIII MIĘDZYNARODOWE KOŁOKWIUM
"MODELE W PROJEKTOWANIU I KONSTRUOWANIU MASZYN"
13th INTERNATIONAL CONFERENCE ON
"MODELS IN DESIGNING AND CONSTRUCTIONS OF MACHINES"
25-28.04.1989 ZAKOPANE

Stefan SAWIAK

Wydział Budowy Maszyn
Politechnika Gdańska

ZASTOSOWANIE METODY SZTYWNYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DO MODELOWANIA MECHANIZMÓW PŁASKICH W OBLICZENIACH DYNAMICZNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono możliwości zastosowania metody sztywnych elementów skończonych w obliczeniach dynamicznych mechanizmów płaskich z uwzględnieniem deformacji ogniów mechanizmu. Opracowano model obliczeniowy i wyprowadzono równania różniczkowe ruchu w oparciu o równania Lagrange'a mieszanego typu. Równania zapisano w postaci macierzowej. Opracowano algorytm ich rozwiązania oraz program obliczeniowy.

1. Wprowadzenie

Celem pracy jest opracowanie metody pozwalającej obliczać ruch mechanizmów płaskich z uwzględnieniem deformacji ogniów mechanizmu. Założono, że ogniwa mogą wykonywać dowolne duże ruchy płaskie, a odkształcenia punktów ogniów mogą być niewielkie oraz że ogniwa mechanizmu połączone są ze sobą za pomocą idealnych par kinematycznych bez tarcia i luzu.

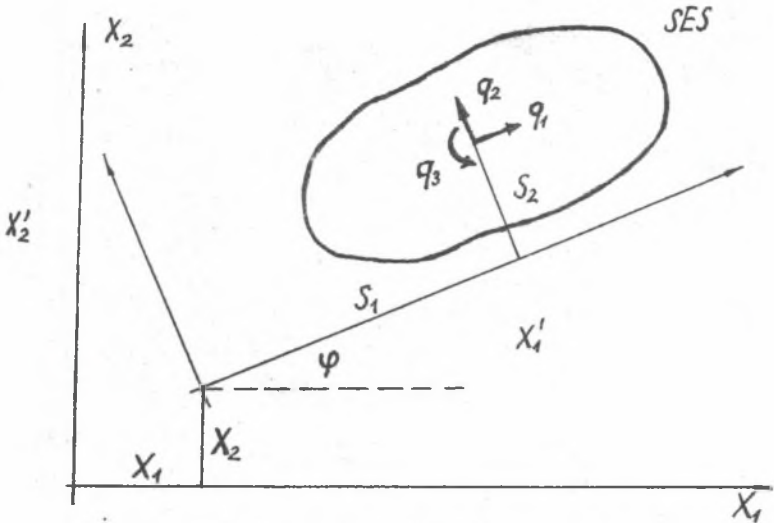
2. Model obliczeniowy

Układ, którym jest cały mechanizm, składa się z podukładów, za który przyjmujemy się jedno ogniwo mechanizmu. Podukłady dyskretyzują się sztywnymi elementami skończonymi, pomiędzy którymi znajdują się elementy sprężysto-tłumiące [1]. Tak zamodelowany podukład może uwzględniać odkształcalność ogniów. Podukłady połączone są ze sobą za pomocą idealnych par kinematycznych w całym mechanizmie. Połączenia te reprezentowane są przez równania więzów geometrycznych o postaci:

$$f(q, t) = 0 \quad (1)$$

gdzie: q - wektor współrzędnych układu,
 t - czas.

W celu określenia położenia dowolnego SES wybrano układ współrzędnych $X'_1 X'_2$ ruchomy związany z poruszającym się podukładem (rys.1).



Rys.1. Opis sztywnego elementu skończonego

Położenie SES opisane jest za pomocą zależności [2]:

$$X' = Q^T X + q_e + S \quad (2)$$

gdzie: $q_e^T = \{q_1, q_2, q_3\}^T$

$$X^T = \{X_1, X_2, \varphi\}^T \quad (3)$$

$$S^T = \{S_1, S_2, 0\}^T$$

Q - macierz transformacji współrzędnych z układu $X_1 X_2$ do układu $X'_1 X'_2$ (rys.1).

Wektor X opisuje ruch wybranego punktu podukładu. Ruch ten może być dowolny i jest znany. Wynika on bowiem z ruchu mechanizmu o ogniwach nieodkształcalnych. Wektor q_e przedstawia przemieszczenia względne dowolnego SES, służy więc do opisu deformacji odkształcalnych ogniw. Założono, że deformacje te mogą być niewielkie. Wektor S służy do określenia położenia SES w podukładzie.

Wektor prędkości SES można wyrazić poprzez równanie [2]:

$$\dot{X}' = Q^T \dot{X} + \dot{q}_e + \dot{\varphi} A (q_e + S) \quad (4)$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

3. Równania różniczkowe ruchu podukładu

Wykorzystując równania Lagrange'a II rodzaju oraz (4) otrzymano równania różniczkowe ruchu dla dowolnego SES, które będą przedstawione na konferencji.

Wprowadzając wektor q_r współrzędnych SES numer r o postaci:

$$q_r^T = \{q_e^T, X^T\} \quad (6)$$

równania różniczkowe ruchu SES nr r można przedstawić w postaci macierzowej:

$$A_r(q_r) \cdot \ddot{q}_r + B_r(q_r, \dot{q}_r) \cdot \dot{q}_r + C_r(q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \cdot q_r = P_r(q_r, \dot{q}_r, t) \quad (7)$$

Energię potencjalną elementów sprzężysto-tłumiących występujących pomiędzy dwoma sztywnymi elementami skończonymi oblicza się w sposób identyczny jak w klasycznej metodzie SES [1]. Z tego względu wybór układu współrzędnych do opisu ruchu podukładu w układzie wirującym związanym z ogniwem jest najkorzystniejszy.

Podatność ogniwa w równaniach różniczkowych ruchu dla elementu sprzężysto-tłumiącego uwzględniana jest w macierzy sztywności poprzez dodanie pewnej macierzy C_k .

Na podstawie równań (7) można napisać w postaci macierzowej równania różniczkowe ruchu dla danego podukładu, w skład którego może wchodzić dowolna liczba SES i EST. Po wprowadzeniu wektora współrzędnych podukładu:

$$q_p^T = \{q_{e1}, q_{e2}, \dots, q_{ei}, \dots, q_{mi}\}^T, \quad (8)$$

gdzie wektor q_{ei} jest wektorem i -tego SES tego podukładu, równania różniczkowe ruchu podukładu przyjmują postać:

$$A_p \ddot{q}_p + B_p \dot{q}_p + C_p q_p = P_p \quad (9)$$

4. Równania różniczkowe ruchu układu

Podukłady modelu obliczeniowego połączone są w cały układ za pomocą par kinematycznych, których równania więzów można przedstawić w postaci (1).

Wprowadzimy wektor współrzędnych całego układu:

$$q^T = \{q_u, \lambda\}^T \quad (10)$$

gdzie: $q_u^T = \{q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pi}, \dots, q_{pk}\}^T, \quad (11)$

w którym wektor q_{pi} jest wektorem współrzędnych podukładu nr i
 λ - wektor nieznanych mnożników Lagrange'a. $\lambda = \text{col}\{\lambda_i\}$,
 ($i = 1, 2, \dots, l$), gdzie l jest liczbą równań więzów.

Mnożniki Lagrange'a zostały wprowadzone z tego względu, że nie wszystkie współrzędne w wektorze q_u są współrzędnymi uogólnionymi, na skutek występowania par kinematycznych. W przypadku, gdyby w układzie nie było więzów równania ruchu, byłyby opisane zgodnie z równaniem Lagrange'a II rodzaju. W analizowanym zaś przypadku występują więzy, równania ruchu należy więc tworzyć za pomocą równań Lagrange'a mieszanego typu, o postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_u} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_u} = P + P' \quad (12)$$

gdzie: P' - dodatkowe siły uogólnione występujące w układzie na skutek występowania więzów, które można obliczyć z zależności:

$$P'_i = \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_{ui}} \quad (13)$$

gdzie: l - jest liczbą równań więzów.

Równanie (13) można przedstawić w postaci macierzowej jako:

$$P' = -W_L \cdot \lambda \quad (14)$$

W wektorze q_u (11) znajdują się współrzędne znane pod względem ruchu, które oznaczymy przez q_z , oraz nieznanne, których szukamy q_n .

Rozbijając wektor (10) na:

$$q^T = \{q_n, \lambda, q_z\}^T \quad (15)$$

można równanie więzów (1) przedstawić w postaci:

$$W(q, t) \cdot q = 0 \quad (16)$$

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu względem czasu równania (16) otrzymujemy:

$$W(q, t) \ddot{q} + 2\dot{W}(q, \dot{q}, t) \dot{q} + \ddot{W}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) q = 0 \quad (17)$$

Równania różniczkowe ruchu dla całego układu bez uwzględnienia połączeń między podukładami mają postać:

$$A_u \ddot{q}_u + B_u \dot{q}_u + C_u q_u = P_u \quad (18)$$

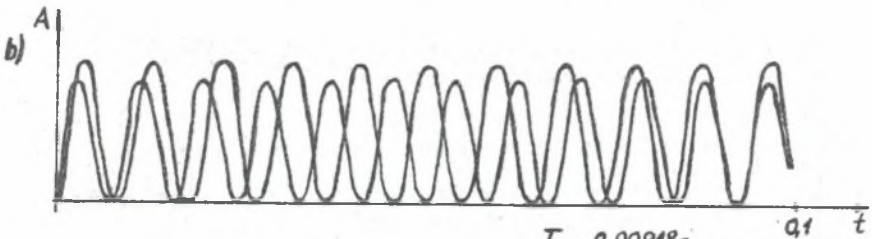
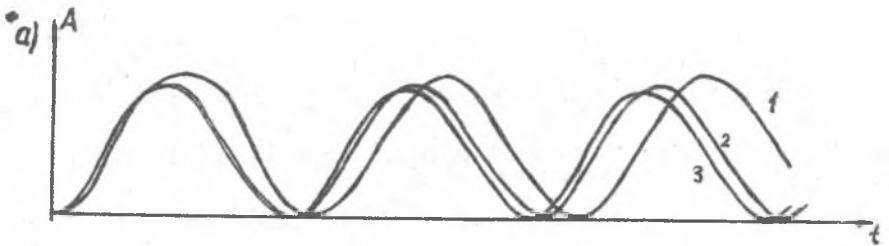
Wykorzystując równanie Lagrange'a mieszanego typu oraz wzory (14), (15), (17) i (18), otrzymuje się równania różniczkowe ruchu całego układu. W postaci macierzowej mają one postać:

$$A \ddot{q} + B \dot{q} + C q = P \quad (19)$$

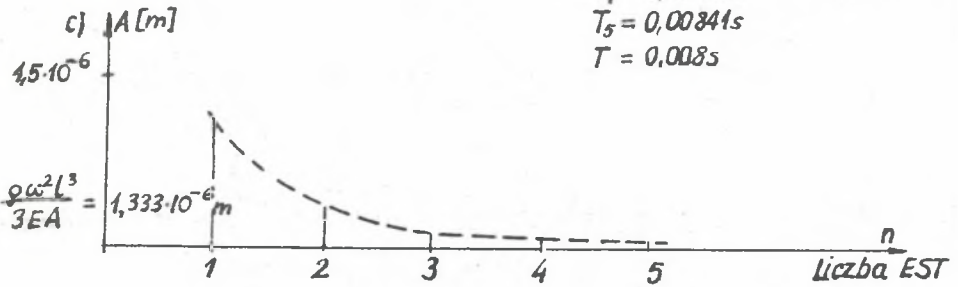
Równanie (19) rozwiązuje się metodą bezpośredniego całkowania Newmarka-Wilsons krok po kroku otrzymując rozwiązanie.

Wykorzystując (15), równania (19) można przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} Aq_n & 0 & Aq_z q_n \\ Wq_n & 0 & Wq_z \\ Aq_n q_z & 0 & Aq_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_n \\ \ddot{\lambda} \\ \ddot{q}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Bq_n & 0 & Bq_z q_n \\ 2Wq_n & 0 & 2Wq_z \\ Bq_n q_z & 0 & Bq_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_n \\ \dot{\lambda} \\ \dot{q}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Cq_n & WLq_n & Cq_z q_n \\ Wq_n & 0 & Wq_z \\ Cq_n q_z & WLq_z & Cq_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_n \\ \lambda \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_z \\ 0 \\ P_n \end{Bmatrix} \quad (20)$$



$T_1 = 0,00918s$
 $T_5 = 0,00341s$
 $T = 0,008s$



Rys.2. Wyniki obliczeń
 Fig.2. Results

5. Przykłady obliczeń

Opracowano program obliczeń na minikomputer IBM. Przeprowadzono obliczenia dla kilku przykładów;

(obliczenia dla pręta wirującego i mechanizmu jarzmowego).

Pręt wirujący z prędkością jednostajną wokół stałego punktu podzielono na 2, 3, 4 i 5 sztywnych elementów skończonych. Dla tak zamodelowanego układu obliczono przemieszczenia końca pręta. Wyniki obliczeń pokazano na rys.2.

Na rys.2a,b przedstawiono przemieszczenie końca pręta w kierunku osi pręta dla różnej gęstości podziału w funkcji czasu. Widać, że ze wzrostem gęstości podziału okres drgań ruchu końca pręta dąży do wyniku analitycznego $T = 0,008$ s. Na rys.2c przedstawiono amplitudy ruchu końca pręta w zależności od liczby elementów sprężystych w modelu. Widać zbieżność wyników do wyniku analitycznego wraz ze wzrostem gęstości podziału.

LITERATURA

- [1] J. KRUSZEWSKI; i inni: Metoda sztywnych elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1976.
- [2] E. WITTBRODT: Dynamika układów o zmiennej konfiguracji. Zeszyty Naukowe PG, Mechanika, Gdańsk 1984.

APPLIED RIGID FINITE ELEMENT METHOD TO MODELING OF PLANAR MECHANISMS IN THE DYNAMICS CALCULATION

S u m m a r y

We analyse the dynamic of planar mechanisms with influence deformation of links of mechanisms by the rigid finite element method. The calculation model is showed, the differential equation of motion is introduced to base oneself on Lagrange's equations mixed type. The equations are showed in matrix form. The algorithm of solution and computer programme are introduced.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЖЕСТКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ В ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Р е з ю м е

В работе представлено возможность применения метода конечных упругих элементов в расчетах динамических плоских механизмов с учетом деформации его членов. Разработано вычисленную модель и сделано дифференциальные уравнения движения при помощи уравнений Лагранжа, смешанного типа, алгоритм решения и вычисленную программу.

Recenzent: dr inż. A . Nowak

Wpłynęło do Redakcji 18.XII.1988 r.