ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MECHANIKA z. 91 Nr kol. 1026

XIII MIĘDZYNARODOWE KOLOKWIUM
"MODELE W PROJEKTOWANIU I KONSTRUOWANIU MASZYN"

13th INTERNATIONAL CONFERENCE ON
"MODELS IN DESIGNING AND CONSTRUCTIONS OF MACHINES"

25-28.04.1989 ZAKOPANE

Лонгин Михайлович ЗОРИЙ

Львовский политехнический институт

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Резюме. Излагаются основные свойства и способы построения фундаментальных решений, а также их применения к развитию методов исследования устойчивости и малых колебаний упругих систем.

I°. Основные свойства и способы построения фундаментальных решений

Важная роль в аналитических методах исследования задач механики принадлежит уравнению

$$L[y] = \delta^{(j)}(x-\alpha) \qquad (j = 0,1,2,\ldots) \qquad /I/$$

и его фундаментальному решению

$$\varphi(x,\alpha) \equiv K(x,\alpha)\,\theta(x-\alpha) \qquad (j=0) \qquad /2/$$

Здесь L - линейное дифференциальное выражение n -го порядка, причем коэффициент $p_0(x)$ при старшей производной положителен на рассматриваемом промежутке $a \le x \le b$; $K(x,\alpha)$, $\delta(x)$ и $\theta(x)$ - функции Коши, Дирака и Хевисайда соответственно. Частные решения уравнения /I/ определяются формулой

$$\tilde{y}_j = (-1)^j \frac{\partial^j \varphi(x,\alpha)}{\partial \alpha^j} \qquad (j = 1,2,\ldots) \qquad /3/$$

Установлено также [1], что функция $K(x,\alpha)$ вместе со своими последовательными частными производными по параметру α всегда образуют фундаментальную систему решений /ф.с.р./ уравнения $L[y]=0$. На этой основе разработаны способы построения общих решений для уравнений, являющихся определяющими в задачах статики и динамики неоднородных упругих систем, допускающих полное разделение переменных, в аналогичных задачах математической физики и др. В указанные решения функции распределения параметров системы /жесткостей, масс, нагрузок и т.д./ входят в общем виде; они могут иметь конечные разрывы и сингулярные включения.

Например, для решения уравнения

$$L[y]-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i y(x_i)\delta(x-x_i)=0 \qquad /4/$$

/α_i, x_i - некоторые параметры, причем

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b \qquad /,$$

в [1] получена следующая формула

$$Q_r(x)=\psi(x)+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\psi_i\phi_{xi}+\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j>i}^{r}\alpha_i\alpha_j\psi_i\phi_{ji}\phi_{xj}+$$
$$+\sum_{i=1}^{r-2}\sum_{j>i}^{r-1}\sum_{k>j}^{r}\alpha_i\alpha_j\alpha_k\psi_i\phi_{ji}\phi_{kj}\phi_{xk}+\cdots+ \qquad /5/$$
$$+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r\psi_1\phi_{21}\phi_{32}\ldots\phi_{r,r-1}\phi_{xr};$$

$\psi(x)$ - некоторое решение уравнения /4/ при $\alpha_i=0$ $(i=\overline{1,r})$;

$$\psi_i=\psi(x_i);\ \phi_{xi}=\phi(x,x_i);\ \phi_{ji}=\phi(x_j,x_i). \qquad /6/$$

Таким образом, каждой системе фундаментальных функций уравнения $L[y]=0$ отвечает построенная по /5/ ф.с.р. уравнения /4/.

Следует отметить основные способы построения функций $K(x,\alpha)$: в виде рядов по степеням разности $x-\alpha$ или же по степеням некоторого параметра [1,2]. Первый из них применим, когда

$$L[y]\equiv y^{(n)}+\sum_{i=1}^{n}P_i(x)y^{(n-i)}=0 \qquad /7/$$

и коэффициенты $P_i(x)$ - голоморфные функции. Для нормальных фундаментальных функций $y_k(x,\alpha)$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ этого уравнения выведена формула [2]:

$$y_k(x,\alpha) = \frac{(x-\alpha)^k}{k!} + \sum_{s=0}^{\infty} b_{n+s,k} \frac{(x-\alpha)^{n+s}}{(n+s)!}, \qquad /8/$$

где
$$b_{n+s,k}(\alpha) = -\sum_{r=0}^{s} C_s^r \sum_{i=1}^{n} p_i(\alpha)^{(s-r)} b_{n-i+r,k} \qquad /9/$$
/здесь в качестве начальных значений следует брать элементы k - того столбца нормальной фундаментальной матрицы при $x=\alpha$ /. Заметим, что
$$y_{n-1}(x,\alpha) \equiv K(x,\alpha). \qquad /10/$$

Полагая в /1/
$$L[y] \equiv L_0[y] - \rho M[y], \qquad /11/$$
$$M[y] \equiv \sum_{\mu=0}^{r} b_\mu(x) y^{(r-\mu)} \quad (r < n) \qquad /12/$$
где ρ - некоторый параметр, можно строить функцию $K(x,\alpha)$ в виде ряда [1]
$$K(x,\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i K_i(x,\alpha); \qquad /13/$$
$$K_i(x,\alpha) = \int_{\alpha}^{x} K_0(x,\tau) U_{i-1}(\tau,\alpha)\, d\tau; \qquad /14/$$
$$U_{i-1}(x,\alpha) \equiv M[K_{i-1}(x,\alpha)] \quad (i = 1,2,\ldots). \qquad /15/$$
При этом $K_0(x,\alpha)$ - функция Коши уравнения $L_0[y]=0$. Соотношения /13 - 15/ применимы, если в /1/ коэффициенты $p_i(x)$ - интегрируемые функции.

Сходимость рядов /8/ и /13/ доказана методом мажорант. Эти ряды можно выразить через элементарные функции или в квадратурах, если таковыми являются ф.с.р. рассматриваемых уравнений. Например, если
$$L[y] \equiv \left(f(x) y^{(n)}\right)^{(n)} \quad (f(x) > 0)$$
то
$$K(x,\alpha) = \frac{1}{((n-1)!)^2} \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{f(s)} \left[(x-s)(s-\alpha)\right]^{n-1} ds. \qquad /16/$$

В случаях, когда известна некоторая ф.с.р. уравнения /7/ $\{\psi_i(x)\}$, можно пользоваться формулой

$$K(x,\alpha)=\frac{1}{W(\psi_i(\alpha))}\begin{vmatrix}\psi_1(\alpha) & \psi_2(\alpha) & \ldots & \psi_n(\alpha)\\ \psi_1'(\alpha) & \psi_2'(\alpha) & \ldots & \psi_n'(\alpha)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \psi_1^{(n-2)}(\alpha) & \psi_2^{(n-2)}(\alpha) & \ldots & \psi_n^{(n-2)}(\alpha)\\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \ldots & \psi_n(x)\end{vmatrix} \qquad /17/$$

/ W – определитель Вронского указанной ф.с.р./. При этом из теорем о единственности решения задачи Коши следует, что формулы / 8, 10, 13, 17 / дают различные представления одной и той же функции $K(x,\alpha)$.

Обобщение известного метода начальных параметров на неоднородные упругие системы обусловлено построением функций /8/. Их нетрудно выражать через функцию $K(x,\alpha)$ и ее производные по α. Например, для уравнения /7/ при $n=2$

$$y_0(x,\alpha)=p_1(\alpha)K(x,\alpha)-\dot K(x,\alpha)\,;\quad y_1(x,\alpha)\equiv K(x,\alpha). \qquad /18/$$

При $n=4$

$$y_0=(p_3-p_2'+p_1'')\Big|_{x=\alpha}\cdot K-(p_2-2p_1')\Big|_{x=\alpha}\cdot\dot K+ + p_1(\alpha)\ddot K-\dddot K\,;\quad y_1=(p_2-p_1')\Big|_{x=\alpha}\cdot K-p_1(\alpha)\dot K+\ddot K\,; \qquad /19/$$

$$y_2=p_1(\alpha)\cdot K-\dot K\,;\quad y_3\equiv K.$$

Здесь и далее точками сверху обозначены частные производные по параметру α.

Полезными оказываются также тождества вида

$$K(x,\alpha)\equiv\sum_{i=0}^{n-1}y_i(x,\beta)K^{(i)}(\beta,\alpha), \qquad /20/$$

причем $\alpha\le\beta\le x$ / $K^{(0)}\equiv K$, $K^{(1)}\equiv K'$, ... ; в /20/ вместо $K(x,\alpha)$ можно взять решение какой-либо другой задачи Коши для уравнения /7//.

2°. О методе характеристических рядов

Рассмотрим краевую задачу для уравнения /4/ при $n = 2$, когда

$$L[y] \equiv (fy')' + \rho\varrho(x)[F(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x)]y, \qquad /21/$$

а граничные условия имеют вид

$$(fy' - e_1 y)\big|_{x=a} = 0 \; ; \; (fy' + e_2 y)\big|_{x=b} = 0 \, . \qquad /22/$$

Такую задачу получаем, например, из уравнения продольных /крутильных/ колебаний упругого стержня и соответствующих краевых условий заменой $u(x,t) = y(x)\exp\lambda t$ / $u(x,t)$ /- продольное перемещение, λ - характеристический показатель ; e_1, e_2 - параметры упругого закрепления; $f = EF(x)$ - продольная жесткость стержня /.

Если в /4/ $\alpha_i = 0$ / $i = \overline{1,r}$ /, то общее решение выгодно определять так

$$y = C_0 K(x,a) + C_1 \dot{K}(x,a) \qquad /23/$$

/ C_0, C_1 - произвольные постоянные /. Подставляя /23/ в условия /22/, приходим к характеристическому уравнению

$$\left[e_1 e_2 K + e_1 f(b) K' + e_2 f(a)\dot{K} + f(a)f(b)\dot{K}'\right]\Big|_{\substack{x=b \\ \alpha=a}} = 0 \qquad /24/$$

/ левая часть этого уравнения называется характеристическим определителем рассматриваемой задачи/.

Пусть в /4/ параметры $\alpha_i \neq 0$, причем

$$\alpha_i = M_i \lambda^2 + b_i \lambda + c_i \qquad /25/$$

Здесь M_i, b_i, c_i - величины сосредоточенных в сечении с координатой x_i массы, трения и жесткости. Для получения характеристического определителя задачи следует в /24/ заменить $K(x,\alpha)$ функцией $Q_r(x,\alpha)$, построенной по формуле /5/ с учетом /25/ [1, 2]. Аналогично поступаем в случаях $n > 2$.

Особого внимания заслуживает случай, когда $K(x,\alpha)$ не зависит от λ / напр., /16//. Так, из /24/ при $e_1 \to \infty$ и $e_2 = 0$ получаем уравнение

$$1 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \phi_{i0} + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j>i}^{r} \alpha_i \alpha_j \phi_{i0}\phi_{ji} + \dots + \qquad /26/$$
$$+ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \phi_{10}\phi_{21}\dots\phi_{r,r-1} = 0 \, .$$

В /26/ содержится множество характеристических уравнений для задач о продольных /крутильных/ колебаниях консоли, несущей в точках x_i упруго подкрепленные массы и имеющей любую заданную функцию распределения жесткости /в т.ч. изменяющуюся скачками/.

Поскольку построение и исследование уравнений вида /24/ может оказаться сложной проблемой, то здесь целесообразно применять метод характеристических рядов [1, 2]. Он основан на понятии характеристического ряда задачи, представлении характеристических определителей в виде рядов по параметрам λ или p / при определении эйлеровых значений/, и применении критериев устойчивости целых функций и последовательностей двусторонних оценок для критических значений нагрузок при дивергенции и флаттере, а также для низших частот собственных колебаний.

В зависимости от постановки задачи различают характеристические ряды двух видов:

$$R_1 \equiv A_0(p) + A_1(p)\lambda + A_2(p)\lambda^2 + \ldots \qquad /27/$$

$$R_2 \equiv B_0(p) + B_2(p)\lambda^2 + B_4(p)\lambda^4 + \ldots \qquad /28/$$

/ для рассматриваемых задач эти ряды - целые функции от λ и p /.

Эйлерово значение p_0 является наименьшим корнем уравнения

$$A_0(p) \equiv a_0 - a_1 p + a_2 p^2 - \ldots = 0 \qquad /29/$$

Для приближенного определения p_0 можно пользоваться известными оценками [1, 2] ; простейшие из них имеют вид:

$$(p_0)_- < p_0 < (p_0)_+ \qquad /30/$$

$$(p_0)_- = a_0(a_1^2 - 2a_0a_2)^{-\frac{1}{2}}\ ;\ (p_0)_+ = 2a_0\left[a_1 + (a_1^2 - 4a_0a_2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}. \qquad /31/$$

Значение p_* параметра нагрузки, отвечающее флаттерному виду потери устойчивости /при слиянии первых корней соответствующей вещественной пары функций/ можно определять так:

$$(p_*)_- < p_* < (p_*)_+ \quad , \qquad /32/$$

где $(P_*)_-$ и $(P_*)_+$ – наименьшие корни уравнений

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_3 & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad /33/$$

/более точные оценки, а также случаи слияния высших корней вещественных пар, определяются нулями определителей высших порядков/.

В неконсервативных задачах упругой устойчивости с рядами вида /27/ критическим значением параметра нагрузки является меньшее из P_0 и P_*. Квазикритическое значение в случаях рядов /28/ – меньшее из P_0 и $\widetilde{P}_*$; значение $\widetilde{P}_*$ параметра нагрузки /обусловленное слиянием первой и второй частот и отвечающее автоколебательной неустойчивости / оценивается как и в /32/, причем $(\widetilde{P}_*)_-$ и $(\widetilde{P}_*)_+$ – наименьшие корни уравнений, полученных из /33/ заменой

$$A_{2K} = B_{2K} \; ; \qquad A_{2K-1} = K B_{2K} \qquad /34/$$

/эйлерово значение определяется как и прежде $(A_0 \equiv B_0)$ /.

Оценки для квадрата основной частоты $\omega_0^2 = -\lambda^2$ получаются из /31/ заменой

$$a_K = B_{2K} \quad (K = 0, 1, 2, \dots) \qquad /35/$$

Все указанные двусторонние оценки применимы , если ряды /27 – 29/ – целые функции нулевого рода. Для рассматриваемых задач это имеет место [2].

В неконсервативных задачах при использовании рядов вида /28/ следует учитывать возможность так называемых эффектов дестабилизации [2] .

Если характеристическое уравнение задачи имеет вид

$$\widetilde{F}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, P) = 0 \; , \qquad /36/$$

то априорные условия отсутствия дестабилизации можно записать так [2]

$$b_i = \varepsilon \widetilde{M}_i \quad (i = 1, 2, \dots, r) \qquad /37/$$

При этом значение $\widetilde{P}_*$, определенное без учета трения $(\varepsilon = 0)$, является критическим, поскольку введение сколь-угодно малых сил внешнего трения / $\varepsilon > 0$/ устраняет критический случай и обеспечивает асимптотическую устойчивость системы при значениях параметра нагрузки $P < \widetilde{P}_*$.

Список основных исследований по разработке метода характеристических рядов и его применениям, а также полученные результаты содержатся в [1,2]. Дальнейшее развитие метода основано на идее частичной дискретизации /не дискретизируются коэффициенты при старших производных определяющих уравнений, к примеру, жесткости систем/ с использованием формул вида /2-6/. При этом следует отметить способ построения дифференциальных уравнений устойчивости и колебаний неоднородных упругих систем в так называемой обратной форме. Последнее позволяет определять необходимое количество высших частот и соответствующих им форм колебаний и решать по-новому ряд задач механики деформируемых систем с переменным распределением параметров.

ЛИТЕРАТУРА

I Л.М.ЗОРИЙ. Об универсальных характеристических уравнениях в задачах колебаний и устойчивости упругих систем. Известия АН СССР, Механика твердого тела, № 6, 1982, с.155-162.

2 Расчеты и испытания на прочность. Метод и программа расчета на ЭВМ устойчивости и малых колебаний прямолинейных стержней переменного сечения. Методические рекомендации МР 213-87. - М.: ВНИИНМАШ, 1987, 43 с.

FUNDAMENTAL SOLUTIONS AND RESEARCH METHODS OF DEFORMING SYSTEMS

S u m m a r y

The paper presents the basic characteristics and methods of obtaining fundamental solutions, as well as their application to the development of research methods of stability and small vibrations in elastic systems with variable parameter distribution.

ROZWIĄZANIA PODSTAWOWE I METODY BADAŃ UKŁADÓW ODKSZTAŁCALNYCH

S t r e s z c z e n i e

W pracy przedstawiono podstawowe charakterystyki i metody otrzymywania rozwiązań podstawowych oraz ich zastosowanie do rozwoju metod badawczych stabilności i małych drgań układów sprężystych ze zmiennym rozkładem parametrów.

Recenzent: dr inż. G. Wróbel

Wpłynęło do Redakcji 10.II.1989 r.