P. 3362/81

ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

MECHANIKA

Z. 72
GLIWICE
1981

P 3362/81

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 679

ANDRZEJ WILK

WPŁYW PARAMETRÓW TECHNOLOGICZNYCH I KONSTRUKCYJNYCH NA DYNAMIKĘ PRZEKŁADNI O ZĘBACH PROSTYCH

(skrót)

GLIWICE 1981

OPINIODAWCY

Prof. zw. dr hab. inż. Wiesław Krzyś
Prof. zw. dr hab. inż. Ludwik Müller
Prof. zw. dr hab. inż. Zbigniew Osiński
Prof. dr hab. inż. Józef Wojnarowski

REDAKTOR NACZELNY WYDAWNICTW UCZELNIANYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Jan Bandrowski

REDAKTOR DZIAŁU

Jan Darlewski

SEKRETARZ REDAKCJI

Kazimiera Rymarz

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Eugenia Mandrak

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0817

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 2. 44-100 Gliwice

Nakł. 150+85 Ark. wyd. 7,1 Ark. druk. 6,75 Papier druk. kl. VII 70x100 100 g
Oddano do druku 2.02.1981 Podpis. do druku 9.03.1981 Druk ukończ. w czerwcu 1981
Zam. 165/81 Cena zł 18,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

Str.

1. Cel i zakres pracy 5

2. Model dynamiczny przekładni zębatej 8

2.1. Problemy modelowania zjawisk dynamicznych w przekładni zębatej 8

2.2. Równanie względnego ruchu pary kół zębatych 15

2.3. Metoda rozwiązywania równania ruchu 18

2.4. Algorytm wyznaczania rozwiązań równania ruchu 20

3. Wpływ tłumienia na wartość współczynnika K_d 22

4. Wpływ luzu międzyzębnego na zjawiska dynamiczne w przekładni zębatej 25

4.1. Porównanie wartości ugięć statycznych, odchyłek i luzów w zazębieniu 26

5. Zależność obciążeń dynamicznych od charakterystyki sprężystej zazębienia 29

5.1. Wyniki obliczeń 30

5.2. Analiza otrzymanych wyników 32

6. Wpływ wskaźnika zazębienia na zależność współczynnika K_d od prędkości ruchu 39

7. Wpływ odchyłek wykonania zazębienia na obciążenia dynamiczne przekładni 40

7.1. Odwzorowanie odchyłek wykonania zazębienia w modelu dynamicznym przekładni 41

7.2. Parametry statystyczne odchyłek pseudolosowych 45

7.3. Rozkład prawdopodobieństwa ekstremalnych wartości obciążeń dynamicznych 45

7.4. Wpływ rozkładu odchyłek losowych na wartość współczynnika K_d 46

7.5. Wyniki obliczeń 47

7.6. Analiza otrzymanych wyników 49

7.7. Zestawienie wyników obliczeń 56

8. Analiza własności dynamicznych przekładni o modyfikowanym zarysie zębów 58

8.1. Wyniki obliczeń 60

8.2. Analiza wyników obliczeń 65

8.3. Uwagi końcowe 72

Str.

9. Wpływ naturalnego zużycia zębów na wartość współczynnika K_d 73
9.1. Wyniki obliczeń 73
9.2. Analiza wyników obliczeń 74
10. Weryfikacja teoretycznych wyników pracy 76
10.1. Badania eksperymentalne 76
10.2. Ocena dokładności wyników pracy 82
10.3. Uwagi końcowe 84
11. Perspektywy wykorzystania numerycznej metody wyznaczania obciążeń dynamicznych w obliczeniach wytrzymałościowych zazębienia... 85
11.1. Wykorzystanie wyników pracy w obliczeniach inżynierskich.. 85
11.2. Wykorzystanie numeryoznej metody wyznaczania obciążeń dynamicznych w obliczeniach wytrzymałościowych zazębienia... 86
11.3. Perspektywy wykorzystania numerycznej metody wyznaczania obciążeń dynamicznych do analizy wpływu korekcji zazębienia na własności dynamiczne przekładni 94
12. Podsumowanie i wnioski 97
Literatura 101
Streszczenia 105

1. CEL I ZAKRES PRACY

W procesie projektowania przekładni zębatych zachodzi potrzeba doboru cech konstrukcyjnych i technologicznych zazębienia. Właściwy dobór tych cech wiąże się bezpośrednio z problemem optymalizacji przekładni zębatej. Podstawą optymalizacji jest ścisłe określenie funkcji - kryterium optymalizacji - zwanej także funkcją celu lub funkcją kryterialną. W projektowaniu przekładni zębatej wymaga się spełnienia nie jednego, lecz przynajmniej kilku kryteriów. Kryteria te są sobie najczęściej przeciwstawne, np.: wysoka trwałość, niski koszt i mały ciężar. Z tego względu konieczne jest stosowanie optymalizacji wielokryterialnej. Zagadnienie optymalizacji przekładni zębatej jest problemem złożonym, próby rozwiązania tego zagadnienia były podejmowane przy wykorzystaniu ETO [L. 20, 39, 69].

Optymalizacja cech geometrycznych zazębienia nie sprawia większych trudności w procesie projektowania. Natomiast znaczne trudności występują przy uwzględnieniu wpływu tych cech na stan dynamiczny przekładni. Istotnym problemem jest uwzględnienie w metodach obliczeniowych możliwych stanów dynamicznych i ich wpływu na prawidłową współpracę kół zębatych i trwałość przekładni. Doskonalenie obecnie stosowanych metod obliczeń wytrzymałościowych kół zębatych wymaga określenia wartości obciążeń dynamicznych oraz informacji o zmianie tych obciążeń na odcinku przyporu. Wartości obciążeń dynamicznych i ich rozkłady na odcinku przyporu uzależnione są między innymi od wielu cech zazębienia. Doświadczalne wyznaczenie wpływu różnych parametrów zazębienia na zjawiska dynamiczne w przekładni jest nierealne ze względu na dużą liczbę ich kombinacji, które mogą wystąpić w praktyce. Z tego względu celowe jest opracowanie analitycznej metody wyznaczania obciążeń dynamicznych w oparciu o przyjętą koncepcję modelu dynamicznego przekładni. W pracy wykorzystano numeryczną metodę opartą na dyskretnym modelu dynamicznym przekładni, opracowanym wg koncepcji L. Müllera.

Celem pracy jest przeanalizowanie, na podstawie wyników obliczeń numerycznych, wpływu doboru najbardziej istotnych cech zazębienia na zjawiska dynamiczne w przekładni zębatej o zębach prostych.

W szczególności celem tym jest określenie wpływu następujących czynników:

- współczynnika tłumienia,
- luzu międzyzębnego,
- charakterystyki sprężystej zazębienia,
- wskaźnika zazębienia,

- odchyłek wykonawczych,
- różnych sposobów modyfikacji zarysu zęba,
- odchyłek zarysu zęba, wywołanych wskutek jego zużycia.

Analiza uzyskanych danych liczbowych pozwoliła ustalić istotne i dające się pominąć wpływy różnych czynników, a także granice dopuszczalnych uproszczeń obliczeniowych.

Istotny wpływ na stan dynamiczny przekładni wykazują odchyłki wykonania kół zębatych. Odchyłki te wiążą się bezpośrednio z etapami procesu wytwarzania kół zębatych i mogą być podzielone na odchyłki korpusu koła, zazębienia oraz montażu pary kół. Niektóre przyrządy pomiarowe, stosowane do sprawdzania kół zębatych, rejestrują łączne działanie kilku odchyłek. Największe znaczenie dla oceny stanu dynamicznego przekładni ma odchyłka współpracy jednostronnej, stanowiąca wartość wypadkową licznych odchyłek wykonawczych. Odchyłkę tę wyznacza się za pomocą przyrządu do badania współpracy sprawdzanego koła z kołem wzorcowym. Przedstawia ona różnicę między rzeczywistym kątem obrotu badanego koła a kątem wynikającym z przełożenia, przy stałej odległości osi obu kół i stykaniu się zawsze tych samych (lewych lub prawych) boków zębów. Przyrząd rejestruje zarówno odchyłkę kinematyczną przekładni, zwykle o częstotliwości obrotów koła oraz odchyłkę kinematyczną na podziałce o częstotliwości zazębienia. Odchyłkę kinematyczną na podziałce koła można w ogólnym przypadku rozłożyć na składową okresową, wywołaną np. odchyłką kąta zarysu narzędzia i składową losową powstałą na skutek np. niejednostajności podziałek. Jednym z zadań pracy jest ocena wpływu obu składowych odchyłek wykonania kół zębatych na obciążenia dynamiczne przekładni o zębach prostych.

Dla zmniejszenia efektów dynamicznych, spowodowanych zmianą sztywności zazębienia, stosuje się w praktyce produkcyjnej modyfikację zarysu zęba. Dotychczas najczęściej stosowało się modyfikację po tzw. "krótkiej ewolwencie" (modyfik. MAAGA). W pracach [L. 37, 42] zaproponowano inny sposób modyfikacji po tzw. "długiej ewolwencie", który umożliwia znaczne obniżenie obciążeń dynamicznych w przekładniach wykonanych dokładnie. Wpływ modyfikacji zarysu zęba na zmniejszenie efektów dynamicznych jest ograniczony wskutek oddziaływania odchyłek wykonawczych zazębienia, które występują w rzeczywistej przekładni. Jednym z zadań pracy jest przeprowadzenie analizy dynamicznej obu rozpatrywanych sposobów modyfikacji, a także ocena wpływu losowych odchyłek zazębienia oraz wartości obciążenia przenoszonego przez przekładnię na efektywność modyfikacji.

Dalszym celem pracy jest przeanalizowanie możliwości wykorzystania numerycznej metody wyznaczania obciążeń dynamicznych w obliczeniach wytrzymałościowych zazębienia. Zaproponowano nowy sposób obliczeń, który uwzględnia indywidualne wartości współczynnika obciążeń dynamicznych. Sposób ten opiera się na numerycznym wyznaczeniu chwilowych wartości naprężeń w przekroju podstawy zęba oraz nacisków na jego powierzchni. Po indywidualnym rozpatrzeniu zmian tych wartości, w zależności od położenia punktu styku zę-

bów na odcinku przyporu, można zdefiniować współczynniki obciążeń dynamicznych dla celów praktycznych.

Praca podzielona jest na dwanaście rozdziałów. W rozdziale 2 przedstawiono wybrane zagadnienia modelowania zjawisk dynamicznych w przekładniach zębatych oraz uzasadniono wybór przyjętego modelu dynamicznego przekładni o zębach prostych. W rozdziale tym podano bezwymiarową postać równania różniczkowego opisującego względny ruch pary kół zębatych oraz przedstawiono algorytm numerycznego rozwiązywania tego równania. W oparciu o uzyskane wyniki rozwiązań tego równania w rozdziałach 3-9 przeanalizowano wpływ rozpatrywanych cech konstrukcyjnych i technologicznych zazębienia na obciążenia dynamiczne. W rozdziale 10 przeprowadzono weryfikację uzyskanych analitycznie wyników badań przez porównanie z rezultatami badań eksperymentalnych różnych autorów. Perspektywy zastosowania numerycznej metody wyznaczania obciążeń dynamicznych w obliczeniach wytrzymałościowych zazębienia podano w rozdziale 11, w którym zaproponowano nowy sposób obliczeń, oparty na wykorzystaniu indywidualnych wartości współczynników obciążeń dynamicznych. Rozdział 12 zawiera podsumowanie całości pracy i wnioski.

2. MODEL DYNAMICZNY PRZEKŁADNI ZĘBATEJ

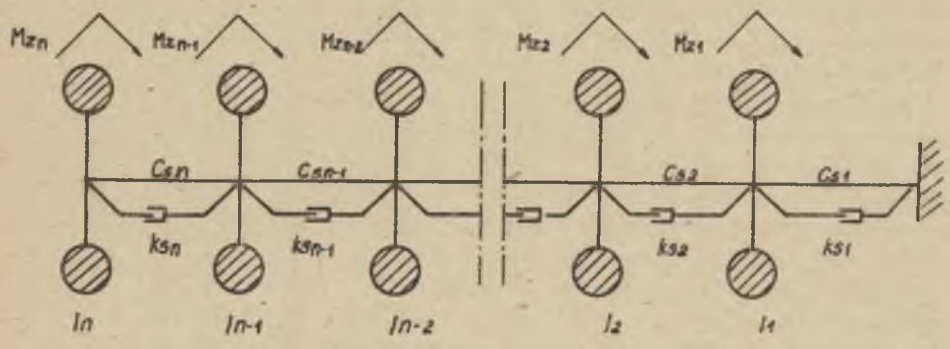
2.1. Problemy modelowania zjawisk dynamicznych w przekładni zębatej

Proces modelowania zjawisk dynamicznych w przekładni zębatej obejmuje dwa zasadnicze etapy - zbudowanie modelu nominalnego (fizycznego) i matematycznego. Model fizyczny powinien dostatecznie wiernie odtwarzać badany obiekt rzeczywisty, tj. przekładnię zębatą, pod kątem widzenia jej stanu dynamicznego, a jednocześnie być możliwie prosty i łatwy w badaniu. Pod pojęciem dostatecznej wierności rozumie się dostateczną zgodność rezultatów badań modelu i obiektu rzeczywistego. Po określeniu modelu fizycznego można przystąpić do opisu matematycznego jego cech i procesów w nim zachodzących. Prowadzi to do podania pewnego zbioru zależności matematycznych noszącego nazwę modelu matematycznego, który powinien w sposób jednoznaczny odpowiadać modelowi nominalnemu.

Przyjęcie stopnia uproszczenia modelu fizycznego jest zagadnieniem trudnym, gdyż przekładnia zębata jest obiektem nieliniowym i ciągłym, a ponadto występują w niej różne rodzaje drgań. Idealny model fizyczny powinien być zatem nieliniowy o nieskończonej liczbie stopni swobody oraz powinien umożliwiać rozpatrywanie drgań skrętnych, giętnych, promieniowych i wzdłużnych. Sporządzenie takiego modelu jest możliwe, ale niecelowe, bo model matematyczny ma wówczas tak złożoną postać, że posługiwanie się nim jest znacznie utrudnione, nawet przy zastosowaniu ETO. Dlatego w przypadku przekładni zębatych najczęściej są stosowane modele o budowie dyskretnej, umożliwiające rozpatrywanie tylko drgań skrętnych [L. 6, 17, 22, 25, 26, 35, 45, 62]. Spotyka się także modele przekładni jednostopniowej, które uwzględniają; oprócz drgań skrętnych, drgania giętne lub promieniowe podpór [L. 43, 47, 60].

W pracach na temat badań dynamicznych przekładni zębatych można wyróżnić dwa najczęściej stosowane sposoby modelowania zjawisk dynamicznych. Pierwszy sposób modelowania polega na rozpatrywaniu przekładni łącznie z innymi elementami układu napędowego, takimi jak: silnik napędowy, maszyna robocza oraz człony pośredniczące, tj. wały, sprzęgła i inne. W omawianym modelu przyjmuje się zwykle założenie, że zęby przekładni mają stałą (średnią) sztywność. W przypadku drugiego sposobu modelowania zakłada się, że obciążenie zewnętrzne przekładni zębatej jest stałe, natomiast jedyną przyczyną obciążeń dynamicznych przekładni są źródła wewnętrzne, a więc zmienna sztywność zazębienia, odchyłki wykonawcze i inne.

Przykład pierwszego sposobu modelowania przedstawiono na rys. 2.1 [L. 26].



Rys. 2.1. Model dynamiczny układu napędowego [L. 26]

Jest to model wielomasowy, składający się z szeregu brył o momentach bezwładności I_1 ... I_n, połączonych więzami sprężystymi o sztywnościach skrętnych c_{si} ... c_{sn} i więzami dyssypacyjnymi o tłumieniu k_{s1} ... k_{sn}. Do poszczególnych brył układu mogą być przyłożone wymuszenia w postaci momentów M_{z1} ... M_{zn}. W przedstawionym modelu silnik jest reprezentowany przez parametry I_1, c_{s1}, k_{s1} oraz utwierdzenie, którym zastępuje się bezwładność sieci elektrycznej. Maszynę roboczą reprezentuje człon o parametrach I_n, c_{sn}, k_{sn}. Model uwzględnia tylko średnią, stałą w czasie, wartość sztywności zazębień oraz zakłada, że tłumienie drgań jest wiskotyczne. Drgania skrętne modelu opisuje się za pomocą układu równań różniczkowych liniowych, które przedstawiają model matematyczny badanego napędu. Rozwiązanie tego układu równań umożliwia wyznaczenie składowej przejściowej i ustalonej przemieszczeń skrętnych, a następnie momentów dynamicznych występujących w poszczególnych miejscach układu napędowego. Analizując otrzymane w ten sposób przebiegi momentów dynamicznych, można wyznaczyć wskaźniki jakości dynamicznej napędu, przy założeniu, że w zazębieniu nie występują wewnętrzne wymuszenia drgań. Wskaźnikami tymi są między innymi: współczynnik przeciążenia w trakcie procesu przejściowego, częstotliwości rezonansowe, których liczba jest równa liczbie stopni swobody przyjętego modelu, a także współczynniki uwielokrotnienia amplitudy w rezonansach.

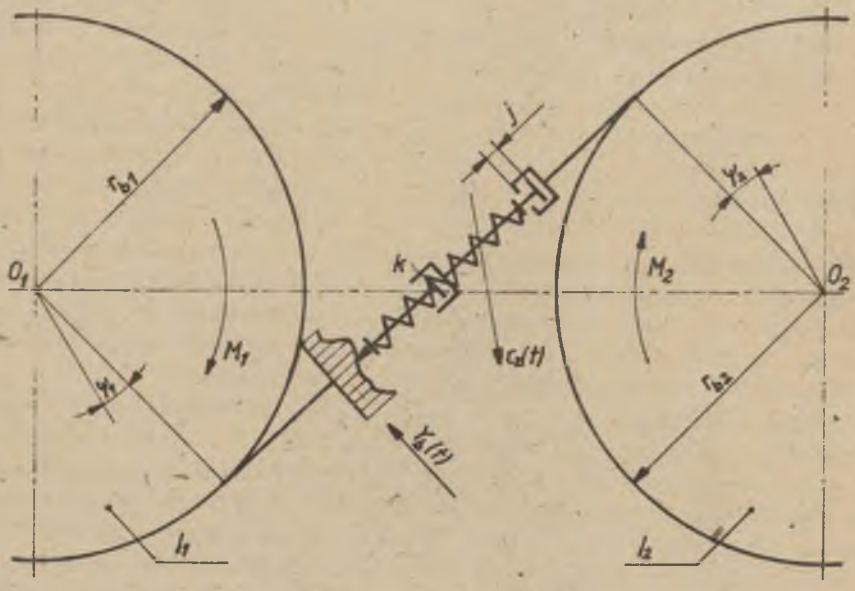
Badania analityczne omawianego modelu stwarzają możliwości wpływania na charakterystyki dynamiczne układu drogą racjonalnego doboru odpowiednich wartości parametrów modelu w procesie projektowania. Przykładowo, dobierając odpowiednio wartości: parametrów silnika, przełożeń międzystopniowych, momentu bezwładności i sztywności sprzęgła, można wpływać na wartość przeciążenia w procesie przejściowym lub na położenie stref rezonansowych układu, co jednak dla przekładni przemysłowych pracujących ciągle nie ma istotnego znaczenia.

W ostatnim okresie rozwijane są także inne metody modelowania układów napędowych, oparte na wykorzystaniu grafów i liczb strukturalnych [L. 1, 77, 78, 79, 80] . Modelowanie to ma charakter systemowy, tzn. istnieje możliwość odwzorowania układów mechanicznych za pomocą struktur algebraicznych oraz prowadzenia eksperymentu numerycznego.

W wielu przypadkach obciążenia zewnętrzne są stałe. Wtedy sposób opisu zjawisk dynamicznych, w którym zakłada się stałą sztywność zazębienia, nie wnosi bliższych informacji o stanie dynamicznym przekładni. Tymczasem nawet przy stałym obciążeniu w przekładni, mogą wystąpić znaczne obciążenia dynamiczne wskutek zmiany sztywności zazębienia, odchyłek wykonawczych zębów i innych czynników wewnętrznych.

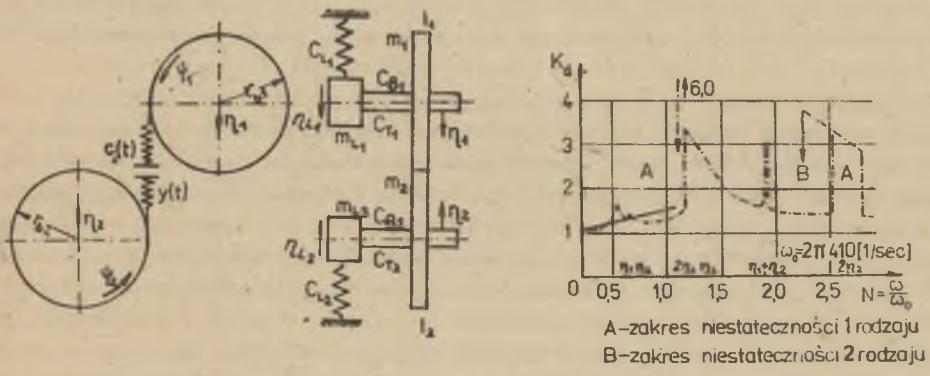
Drugą grupę modeli dynamicznych przekładni stanowią układy o zmiennej sztywności zazębienia [L. 5, 6, 17, 46, 60, 83]. W tym przypadku, wpływy obciążeń zewnętrznych i odchyłek kinematycznych przekładni są pomijane ze względu na niską częstotliwość wymuszeń i mały współczynnik uwielokrotnienia amplitudy, a jako przyczynę obciążeń dynamicznych przyjmuje się źródła wewnętrzne o dużej częstotliwości zmian.

Przykład układu zaliczanego do tej grupy modeli przedstawiono na rys. 2.2 [L. 6, 31]. Model składa się z dwóch kół połączonych tłumikiem i sprężyną o zmiennej sztywności. Sztywność sprężyny jest funkcją czasu, stosownie do zmiany liczby zębów będących w zazębieniu. W modelu uwzględniono wpływ odchyłek kinematycznych opisanych funkcją $Y_b(t)$.



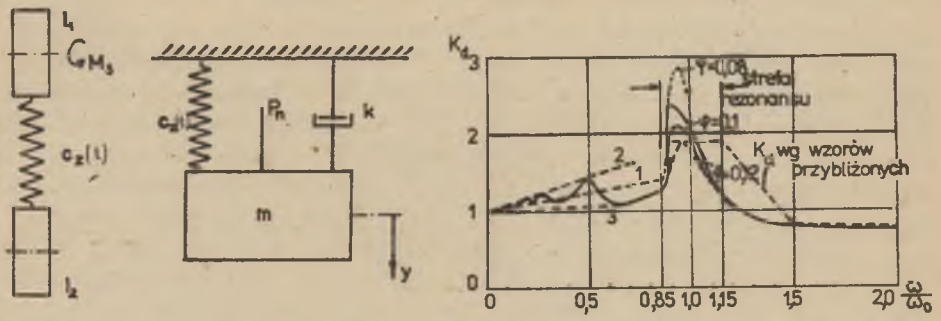
Rys. 2.2. Model dynamiczny przekładni jednostopniowej [L. 6, 31]

W jednym z najnowszych opracowań [L. 60] stworzono model dynamiczny jednostopniowej przekładni zębatej przedstawiony na rys. 2.3. W tym przypadku para kół zębatych wraz z wałami i łożyskami jest traktowana jako układ złożony z 6 mas, którego ruch jest opisany 6 równaniami różniczkowymi. W równaniach tych uwzględniono: I_1, I_2 - momenty bezwładności zębnika i koła; m_1, m_2 - masy obu kół; $c_z(t)$ - sztywność zazębienia; c_{B1}, c_{B2} - sztywność wałów przy zginaniu; c_{T1}, c_{T2} - sztywność wałów przy skręcaniu; c_{L1}, c_{L2} - sztywność łożyskowania; m_{L1}, m_{L2} - masy wałów przekładni, r_{b1}, r_{b2} - promienie kół zasadniczych, wyliczając ψ_1, ψ_2 - kąty obrotu kół; η_{L1}, η_{L2} - liniowe przemieszczenia wałów; η_1, η_2 - liniowe przemieszczenia obu kół; y(t) - odkształcenia zębów. Wyniki badań analitycznych, przeprowadzonych w oparciu o ten model, przedstawiono na rys. 2.3, w postaci zależności współczynnika K_d od prędkości ruchu ω/ω_o.



Rys. 2.3. Model dynamiczny jednostopniowej przekładni zębatej oraz zależność współczynnika K_d od prędkości ruchu [L. 60]

Jak widać w określonych zakresach prędkości, ruch układu może być niestateczny, tj. przy małym tłumieniu obecność nieznacznego wymuszenia prowadzi do znacznego powiększenia amplitud drgań. Po przeanalizowaniu otrzymanych wyników autor opracowania [L. 60] stwierdził, że model może być uproszczony do postaci przedstawionej na rys. 2.4, gdyż uwzględnienie wpływu dalszych czynników (rys. 2.3) nie wnosi istotnych informacji o przebiegu drgań przekładni, a tylko utrudnia prowadzenie badań analitycznych. W modelu uproszczonym (rys. 2.4) bryła o masie m, reprezentującej masę kół, powiązana jest z podstawą za pomocą tłumika k i sprężyny o sztywności $c_z(t)$, która imituje sprężystość zazębienia. Wyznaczoną w oparciu o ten model zależność współczynnika K_d od prędkości ruchu ω/ω_o przedstawiono na rys. 2.4. Jak widać, wyraźne przyrosty obciążeń dynamicznych obserwuje się w tym przypadku nie tylko w strefie głównego rezonansu, ale



Rys. 2.4. Uproszczony model dynamiczny przekładni oraz zależność współczynnika K_d od prędkości ruchu [L. 60]

również przy prędkości ruchu $\omega/\omega_0 = 1/2,\ 1/3,\ 1/4$. W rezonansie maksymalna wartość obciążeń dynamicznych maleje ze wzrostem współczynnika tłumienia.

Analizę rozpatrywanych modeli dynamicznych przekładni zębatych o zmiennej sztywności zazębienia przeprowadzono w pracy [L. 62]. W modelach tych całkowita sztywność zazębienia opisana jest funkcją czasu lub obrotu koła. Wyznaczenie tej funkcji oparte jest na rozpatrzeniu względnych statycznych przemieszczeń kół. Ten sposób opisu zjawisk dynamicznych w zazębieniu jest w przybliżeniu poprawny, gdy dynamiczne przemieszczenia względne nieznacznie różnią się od przemieszczeń statycznych, co ma miejsce w przypadku przekładni wykonanych dokładnie (wartości odchyłek wykonawczych są pomijalnie małe w stosunku do przemieszczeń zębów). Istotną wadą omawianych modeli jest brak możliwości opisywania niejednostajności podziałek kół zębatych. W przypadku znacznych odchyłek podziałki o wartości większej od przemieszczeń statycznych może wystąpić chwilowy brak kontaktu współpracujących zębów, znajdujących się w strefie przyporu, co oznacza zmianę rzeczywistej sztywności zazębienia. W modelach tych nie można uwzględnić tego zjawiska, gdyż sztywność zazębienia opisana jest z góry przyjętą funkcją obrotu koła. Rozpatrywany przypadek chwilowego braku styku współpracujących zębów często występuje w rzeczywistej przekładni i z uwagi na to powinien być uwzględniony w modelu.

W ostatnim okresie w pracach z zakresu badań dynamicznych przekładni rozwijany jest sposób modelowania zjawisk dynamicznych oparty na opisie współpracy zębów oddzielnie dla jednoparowego i dwuparowego zazębienia, przy założeniu stałej lub zmiennej sztywności pary współpracujących zębów na odcinku przyporu [L. 25, 35, 40, 62, 64, 75, 76]. Ten sposób opisu zjawisk dynamicznych stwarza możliwość analizy obciążeń dynamicznych na powierzchni zębów (wzdłuż odcinka przyporu), przy jednoczesnym uwzględnieniu dowolnych odchyłek zarysu i niejednostajności podziału oraz przy założeniu dowolnej charakterystyki sprężystej zazębienia.

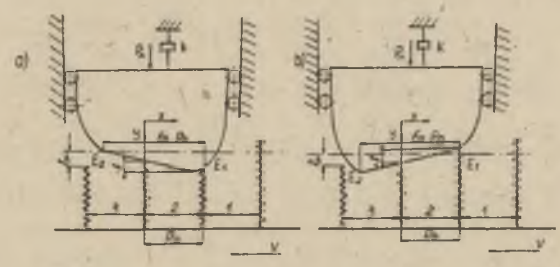
W omawianej grupie modeli można wyróżnić dyskretny model dynamiczny przekładni opracowany przez L. Müllera. Model ten (rys. 2.5) odtwarza pod kątem widzenia zjawisk dynamicznych przekładnię jednostopniową o zębach prostych.

Budowa tego modelu oparta jest na następujących założeniach:

a) uwzględniane są wyłącznie drgania skrętne pary kół zębatych,
b) sztywność jednej pary współpracujących zębów jest stała lub zmienna na odcinku przyporu,
c) wały wraz z kołami oraz kadłub przekładni traktuje się jako elementy idealnie sztywne,
d) obciążenie zewnętrzne jest stałe,
e) tłumienie drgań przyjęto jako wiskotyczne, a zderzenia zębów, po rozwarciu styku ich powierzchni, uważa się jako sprężyste.

Dokładny opis modelu przedstawiono w pracach [L. 35, 36, 42], natomiast w opracowaniu [L. 62] uzasadniono szczegółowo analogię między przekładnią o zębach prostych a modelem, w zakresie opisu zjawisk dynamicznych zachodzących na powierzchni współpracujących zębów (wzdłuż odcinka przyporu). W pracy tej podano odpowiedniości między podobnymi cechami modelu i przekładni oraz związki zachodzące między skalami, umożliwiające przeliczenie parametrów rzeczywistej przekładni na parametry modelu.

Problem modelowania przekładni zębatej może być również traktowany nieco inaczej, tj. w następujący sposób. Układa się równanie różniczkowe opisujące względny ruch obrotowy pary kół zębatych, które przez zwyczajne przekształcenie odwzorowuje się na ruch posuwisty, przy czym koła przyjmują w modelu postać bryły wspieranej na palisadzie sprężyn, co ułatwia interpretację. Tym niemniej samo równanie i związki są wyprowadzane w oparciu o geometrię kół zębatych. Z tego względu w pracy niekiedy mówi się o modelu zamiast o kołach zębatych, np. mówi się o sprężynach zamiast o zębach, co ułatwia ilustrowanie wyników. Na przykład na rysunku kół trudno



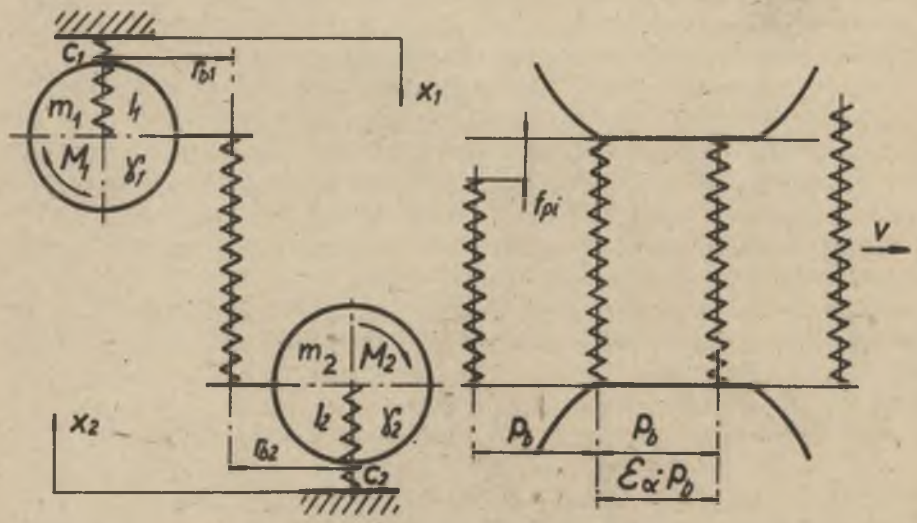
Rys. 2.5. Model dynamiczny przekładni jednostopniowej

jest przedstawić podziałki i jej odchyłki, natomiast w modelu można wielkości te przedstawić w zasadniczo różnych skalach, bez zniekształcenia sen-

su fizycznego. Analizując zjawiska dynamiczne występujące w modelu, trzeba mieć jednak na uwadze rzeczywiste koła zębate i stale kontrolować analogię między przekładnią a modelem.

Rozpatrywany model przekładni dotyczy zasadniczo kół o zębach prostych zarówno walcowych, jak i stożkowych, może być także zaadaptowany dla kół o zębach śrubowych [L. 68]. Wymaga to rozważenia dodatkowych problemów, odpowiadających specyfice zębów śrubowych, między innymi związanych z wyznaczeniem całkowitej sztywności zazębienia.

Dla celów teoretycznych model Mullera może być rozbudowany przez uwzględnienie wpływów dalszych czynników. Przykładem tego jest model dynamiczny pary kół zębatych ułożyskowanych podatnie, przedstawiony na rys. 2.6, [L. 43], który stanowi rozwinięcie podstawowego modelu. Składa się on z dwóch kół zębatych o masach m_1, m_2 i masowych momentach bezwładności I_1, I_2. Sztywność zazębienia c_z zależy od zmiennej wzdłuż odcinka przyporu sztywności jednej pary zębów $c(t)$ i liczby par zębów, będącej w danej chwili w zazębieniu. Sztywność łożysk c_1, c_2 nie jest wielkością stałą, lecz zależy od ich odkształcenia.



Rys. 2.6. Model dynamiczny kół zębatych ułożyskowanych podatnie [L. 43]

Analizując wpływ sztywności łożysk na wartość sił międzyzębnych przekładni w pracy [L. 43] wykazano, że w najczęściej spotykanych rozwiązaniach konstrukcyjnych można pominąć drgania osi kół i obliczać wyłącznie drgania skrętne, po odpowiednim dobraniu wartości zredukowanej masy kół. Uwzględnienie drgań osi kół nie wpływa bowiem w sposób istotny na wyniki obliczeń numerycznych współczynnika obciążeń dynamicznych a powoduje znaczne wydłużenie czasu pracy maszyny cyfrowej.

2.1.1. U w a g a k o ń c o w a

Głównym celem pracy jest przeprowadzenie analizy wpływu doboru istotnych cech zazębienia na zjawiska dynamiczne w przekładni o zębach prostych. Uwzględniając znaczną liczbę wariantów obliczeń, którą należało wykonać dla różnych kombinacji parametrów zazębienia, zdecydowano się na przyjęcie modelu dynamicznego, opracowanego wg koncepcji L. Müllera, którego przydatność do opisu zjawisk dynamicznych w przekładni została potwierdzona w licznych pracach zarówno teoretycznych, jak i eksperymentalnych.

2.2. Równanie względnego ruchu pary kół zębatych

Ruch drgający pary kół zębatych, przy założeniu stałego obciążenia zewnętrznego, może być opisany za pomocą następującego równania [L. 32]

$$I\ddot{\psi} + k_s\dot{\psi} + c_s(t)\, G\left[(\psi - \psi_b), \psi_j\right] = M_1, \qquad (2.1)$$

w którym wprowadzono następujące wielkości:

$$I = \frac{I_1 I_2}{u^2 I_1 + I_2}, \qquad u = \frac{r_{b2}}{r_{b1}},$$

$$\psi = \psi_1 - u\,\psi_2, \qquad \psi_b = \psi_{b1} - u\,\psi_{b2}, \qquad (2.2)$$

gdzie:

- I_1, I_2 – momenty bezwładności zębnika i koła,
- I – zastępczy moment bezwładności,
- u – przełożenie kół,
- r_{b1}, r_{b2} – promienie kół zasadniczych zębnika i koła,
- ψ_1, ψ_2 – kąty obrotu zębnika i koła,
- ψ – kąt obrotu względnego kół,
- ψ_{b1}, ψ_{b2} – kąty dodatkowego obrotu wskutek odchyłek wykonania zębnika i koła,
- ψ_b – kąt dodatkowego obrotu względnego kół,
- ψ_j – kąt obrotu zębnika odpowiadający wartości luzu międzyzębnego,
- M_1 – stały moment zewnętrzny działający na zębnik,
- $c_s(t)$ – sztywność skrętna zazębienia,
- k_s – współczynnik tłumienia przy skręcaniu.

Dzieląc obie strony równania (2.1) przez wyrażenie $r_{b1}\, b$, otrzymuje się następującą postać równania ruchu

$$m_b \ddot{Y} + k\dot{Y} + c_z(t)\, G\left[(Y - Y_b), J_n\right] = \frac{P_n}{b}, \qquad (2.3)$$

w którym oznaczono:

$$m_b = \frac{I}{r_{b1}^2 b}, \qquad k = \frac{k_s}{r_{b1}^2 b}, \tag{2.4}$$

$$Y_b = \psi_b r_{b1}, \qquad Y = \psi r_{b1},$$

$$c_z(t) = \frac{c_s(t)}{r_{b1}^2 b}, \qquad J_n = \psi_J r_{b1},$$

gdzie:

$c_z(t)$ - sztywność zazębienia,
J_n - międzyzębny luz normalny,
P_n - wartość siły międzyzębnej,
b - szerokość koła.

Równanie (2.3) opisuje względny ruch pary kół zębatych, jak również ruch bryły o masie m_b w modelu L. Mullera połączonej z podstawą tłumikiem k i współpracującej z palisadą sprężyn o sztywności $c_z(t)$. Przemieszczenie tej bryły, mierzone od stanu nienapiętych sprężyn, oznaczono przez Y.

Przyjmując, że w ogólnym przypadku odchyłki zazębienia Y_b składają się z odchyłek losowych S i okresowych F, a ponadto wprowadzając dalsze oznaczenia:

$$c_z(t) = \sum_{i=1}^{N+1} c_i(t) \; X_i(t); \qquad \omega_o = \sqrt{\frac{c_m}{m_b}}$$

$$c_i(t) = c_m \lambda_i(t); \qquad \varphi = \frac{k}{2\sqrt{m_b c_m}} \tag{2.5}$$

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T c(t)dt$$

otrzymuje się po przekształceniu następującą postać równania ruchu:

$$\ddot{Y} + 2\varphi\omega_o \dot{Y} + \omega_o^2 \left\{ \sum_{i=1}^{N+1} X_i(t) \lambda_i(t) \; G\left[(Y - S_i - F_i), J_n\right] \right\} = \frac{P_n}{b m_b} = A, \tag{2.6}$$

gdzie:

$c(t)$ - sztywność jednej pary zębów,
c_m - średnia sztywność jednej pary zębów,
φ - bezwymiarowy współczynnik tłumienia,
ω_o - częstość drgań własnych pary kół zębatych wyznaczona dla przyporu jednoparowego,
$\lambda_i(t)$ - funkcja sztywności i-tej pary zębów,

S_i, F_i - odchyłki: losowa i okresowa i-tej pary zębów,

N - liczba par zębów kolejno ze sobą współpracujących[x],

T - przedział czasu, w którym ma miejsce współpraca jednej pary zębów.

W powyższym równaniu $X_i(t)$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru tych t, dla których występuje współpraca i-tej pary zębów, przy czym w przypadku stałej prędkości ruchu v oraz pomijając możliwość styku zębów poza odcinkiem przyporu otrzymuje się

$$X_i(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ - gdy } \quad i\,T_z \leq t \leq (i + \varepsilon_\alpha)T_z \\ \\ 0 \text{ - w przypadku przeciwnym} \end{array} \right\}, \qquad (2.7)$$

gdzie:

ε_α - wskaźnik zazębienia,

$T_z = P_b/v$ - podziałka mierzona czasem,

P_b - podziałka zasadnicza.

Funkcja G, uwzględniająca luz w zazębieniu J_n, określona jest w następujący sposób

$$G\left[(Y-S_i-F_i),\ J_n\right] = \left\{ \begin{array}{ll} Y-S_i-F_i, & \text{gdy } \quad Y-S_i-F_i \geq 0 \\ 0, & \text{gdy } \quad -J_n \leq Y-S_i-F_i < 0 \\ Y-S_i-F_i+J_n, & \text{gdy } \quad Y-S_i-F_i < -J_n \end{array} \right\}. \qquad (2.8)$$

Po wprowadzeniu względnego czasu $\tau = \omega_o . t$ oraz wykorzystaniu zależności $A = \omega_o^2\, Y_{st}$, równanie ruchu można przekształcić do bezwymiarowej postaci

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\varphi \frac{dy}{d\tau} + \sum_{i=1}^{N+1} X_i(\tau)\ \lambda_i(\tau)\ G\left[(y-s_i-f_i),\ j_n\right] = 1, \qquad (2.9)$$

przy czym:

$$y = \frac{Y}{Y_{st}}, \qquad s_i = \frac{S_i}{Y_{st}},$$

$$f_i = \frac{F_i}{Y_{st}}, \qquad j_n = \frac{J_n}{Y_{st}},$$

gdzie:

Y_{st} - ugięcie statyczne jednej pary zębów.

---

[x] Wszystkie wielkości występujące we wzorze ze wskaźnikiem N+1 równe są z definicji wielkościom ze wskaźnikiem 1.

Wartość obciążeń dynamicznych P_{sd} odniesionych do obciążenia statycznego P_{st}, działających na powierzchnię i-tej pary zębów, można obliczyć na podstawie zależności

$$\left(\frac{P_{sd}}{P_{st}}\right)_i = X_i(\tau)\ \lambda_i(\tau)\ G\left[(y - s_i - f_i),\ j_n\right]. \qquad (2.10)$$

Reasumując powyższe, po przekształceniach otrzymuje się bezwymiarową postać równania opisującego względny ruch kół, w którym częstość zazębienia wyrażona jest jako wielokrotność częstości drgań własnych, natomiast liniowe przemieszczenia zębów, odchyłki wykonawcze zazębienia oraz luzy określone są jako wielokrotność ugięcia statycznego jednej pary zębów. Pozwala to na bezpośrednie określenie współczynnika obciążeń dynamicznych K_{di} dla każdej pary zębów będącej w zazębieniu, a mianowicie

$$K_{di} = \max\left(\frac{P_{sd}}{P_{st}}\right)_i. \qquad (2.11)$$

Gdy przekładnia zębata obarczona jest odchyłkami o charakterze losowym, to obrazy zmian obciążeń dynamicznych działających na powierzchnię kolejnych par zębów wykazują znaczne różnice. Zachodzi wtedy potrzeba statystycznego opracowania wyników.

W tym przypadku w pracy przyjęto, dla celów praktycznych, następujące definicje współczynnika obciążeń dynamicznych:

$$K_{dm} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{di} \qquad (2.12)$$

oraz

$$K_{d\delta} = K_{dm} + \vartheta \sigma_K, \qquad (2.13)$$

gdzie:

σ_K – odchylenie standardowe wartości współczynnika K_{di} dla N kolejnych par zębów,

$\vartheta = 2$.

2.3. Metoda rozwiązywania równania ruchu

Równanie różniczkowe, opisujące względny ruch pary kół zębatych, rozwiązywano w pracy za pomocą dwóch metod numerycznych, a mianowicie:

1) metodą Rungego-Kutty, przy zastosowaniu maszyny cyfrowej Odra 1204; wyniki obliczeń zamieszczono w rozdziałach 7 i 8,
2) metodą Eulera, przy zastosowaniu programowalnego kalkulatora HP29C.

Znaczną część obliczeń przeprowadzono przy użyciu kalkulatora programowalnego typu HP29C. Z tego względu zastosowano jedną z najprostszych metod numerycznych - metodę Eulera - zdając sobie sprawę, że metoda ta daje stosunkowo dobre wyniki (tzn. mały błąd) jedynie dla małych wartości elementarnego kroku obliczeń h.

Równanie (2.9) opisujące względny ruch kół zębatych może być zapisane w postaci wzoru różnicowego

$$a + 2\varphi V + \sum_{i=1}^{N+1} X_i(\tau)\, \lambda_i(\tau)\, u_i = 1, \qquad (2.14)$$

w którym oznaczono:

$$V = \frac{\Delta y}{\Delta \tau} = \frac{\Delta y}{h} \qquad a = \frac{\Delta V}{\Delta \tau} = \frac{\Delta V}{h},$$

gdzie:

u_i - względne ugięcie i-tej pary współpracujących zębów, odniesione do ugięcia statycznego.

Elementarny krok oblicza się z zależności

$$h = \Delta T\, \omega_o = \frac{T_z}{n_{max}} \frac{2\pi}{T_o} = \frac{2\pi}{n_{max}} \frac{\omega_o}{\omega}, \qquad (2.15)$$

gdzie oprócz poprzednio podanych oznaczeń

n_{max} - liczba przedziałów przypadających na jeden okres zazębienia.

Istota metody Eulera polega na tym, że całka równania różniczkowego $y' = f(\tau, y)$ w każdym przedziale $[\tau_i, \tau_{i+h}]$ jest przedstawiona dwoma wyrazami szeregu Taylora [L. 9]:

$$y(\tau_i + h) = y(\tau_i) + h\, y'(\tau_i) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.16)$$

Błąd takiego oszacowania wynosi

$$R_2 = \left| \frac{h^2}{2}\, y''(\tau_i + \delta h) \right| \leq \frac{h^2}{2} M_2, \qquad (2.17)$$

gdzie

$$0 < \delta < 1; \quad M_2 = \max \left| y''(\tau) \right|; \quad \tau_i < \tau < \tau_{i+h}.$$

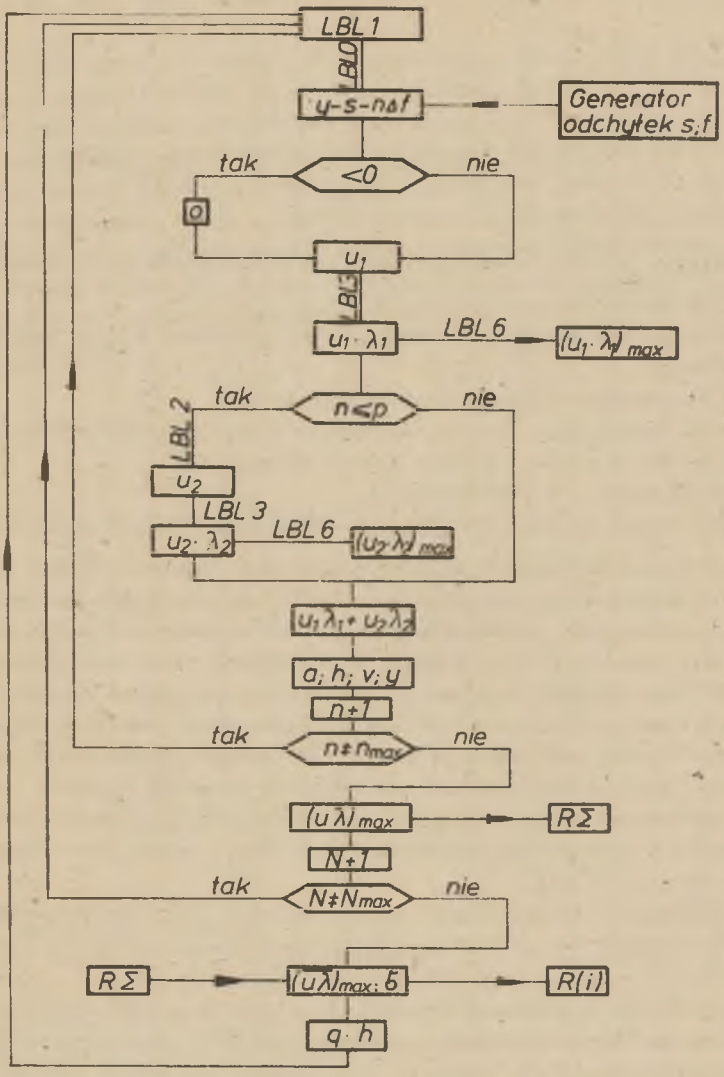
Z zależności tej wynika, że błąd obliczeń jest proporcjonalny do kwadratu elementarnego kroku h. Krok obliczeń h jest z kolei odwrotnie proporcjonalny do liczby n_{max} przedziałów przypadających na jeden okres zazębienia oraz wprost proporcjonalny do wartości stosunku T_z/T_o. Ze wzrostem liczby n_{max} wydłuża się proporcjonalnie czas obliczeń. Szczegółową

analizę błędów obliczeń oraz wybór optymalnej wartości n_{max} omówiono w rozdziale 10.2.

2.4. Algorytm wyznaczania rozwiązań równania ruchu

W pracy zamieszczono przykład algorytmu wyznaczania rozwiązań równania względnego ruchu kół, przy użyciu programowalnego kalkulatora HP29C (rys. 2.7). Algorytm ten umożliwia obliczenie współczynnika obciążeń dynamicznych w zależności od prędkości ruchu pary kół zębatych obarczonych odchyłkami okresowymi i losowymi. Szczegółowe programy obliczeń prowadzonych przy zastosowaniu tego kalkulatora i maszyny cyfrowej Odra 1204 mogą być udostępnione przez autora.

Na schemacie przedstawionym na rys. 2.7 oznaczono: n - numer określający położenie punktu współpracy zębów na odcinku przyporu, N - numer kolejnego zazębienia, p - liczba wyznaczająca wskaźnik zazębienia, f - okresowa składowa odchyłki kinematycznej, s - losowa składowa odchyłki kinematycznej, u - względne ugięcie jednej pary zębów, λu - obciążenie dynamiczne jednej pary zębów, a - chwilowa wartość przyspieszenia względnego ruchu kół, V - chwilowa wartość prędkości ruchu, y - chwilowa wartość względnego przemieszczenia kół, h - elementarny krok obliczeń. W wyniku obliczeń otrzymuje się średnią wartość maksymalnych obciążeń dynamicznych, występujących podczas współpracy N kolejnych par zębów, równą wartości współczynnika K_{dm} (wzór 2.12) oraz odchylenie standardowe tych obciążeń.



Rys. 2.7. Schemat blokowy wyznaczania rozwiązania równania ruchu

3. WPŁYW TŁUMIENIA NA WARTOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKA K_d

Tłumienie drgań w przekładni zębatej spowodowane jest różnymi czynnikami, a mianowicie:

- rozproszeniem energii w warstwie oleju zawartego między współpracującymi zębami,
- tarciem współpracujących powierzchni zębów,
- tarciem wewnętrznym wskutek odkształceń współpracujących zębów, wieńców kół, wałów, korpusu i innych elementów przekładni,
- stratami energii w łożyskowaniu,
- rozproszeniem energii wskutek rozbryzgiwania oleju w przekładni.

W rzeczywistej przekładni procesy powodujące tłumienie drgań są bardzo złożone i wiedza o nich jest niepełna. Wyniki badań doświadczalnych, mających na celu wyznaczenie wartości współczynnika tłumienia w zazębieniu, przedstawiono w pracach [L. 2, 6, 15]. Współczynnik tłumienia określano zwykle na podstawie pomiaru dekrementu logarytmicznego drgań swobodnych pary kół zębatych. Jak wynika z doświadczeń, rozproszenie energii w warstwie oleju zawartego między współpracującymi zębami wynosi kilkanaście procent całkowitego rozproszenia energii w przekładni zębatej. Wartość tę uzyskano przez porównanie wyników badań przeprowadzonych na rolkach pracujących z poślizgiem z rezultatami pomiarów rozproszenia energii w rzeczywistej przekładni zębatej [L. 2].

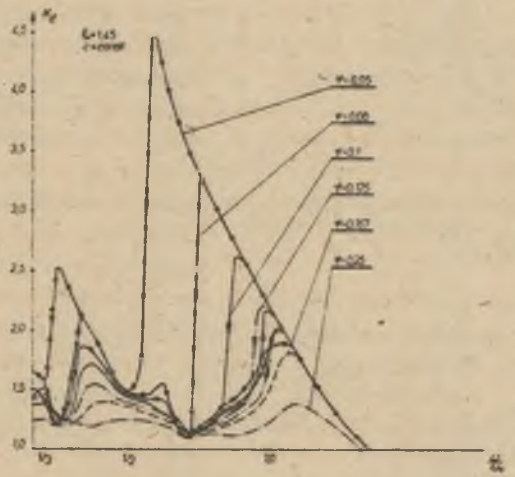
Ze względu na przypadkowość i różnorodność przyczyn rozproszenia energii w przekładni zębatej przyjęcie matematycznego opisu sił oporów jest znacznie utrudnione. Przykładowo, jak wynika z badań doświadczalnych [L. 21], zmiana kierunku doprowadzania oleju do strefy zazębienia ma istotny wpływ na tłumienie drgań i wartości obciążeń dynamicznych kół zębatych. Zjawisko to jest trudne do wyjaśnienia bez dokładnego poznania procesów powodujących rozproszenie energii. Wynika stąd celowość prowadzenia dalszych badań zmierzających do ustalenia mechanizmu tłumienia drgań w różnych miejscach przekładni zębatej oraz matematycznego opisu tego zjawiska.

Na podstawie dotychczasowego stanu wiedzy z tego zakresu przyjęto w modelu dynamicznym tłumienie wiskotyczne. Całkowite tłumienie drgań w przekładni zębatej reprezentowane jest w modelu przez jeden tłumik związany z bryłą (rys. 2.5). Tłumienie to charakteryzuje się przez podanie bezwymiarowego współczynnika φ. Jak wynika z prac doświadczalnych, współczynnik φ zmienia się w zależności od różnych czynników, z których największy wpływ

ma prędkość [L. 42]. Przy dużych prędkościach, jego wartość wynosi około 0,1 [L. 6].

W przypadkach małych wartości współczynnika φ, drgania kół zębatych mogą być niestateczne. Badania analityczne stateczności ruchu pary kół zębatych były prowadzone w pracach [L. 15, 22, 62].

Dla określenia wpływu współczynnika tłumienia na wartość obciążeń dynamicznych w przekładni, rozwiązano równanie różniczkowe ruchu 2.9, przy założeniu różnych wartości tego współczynnika, a mianowicie, przyjmując φ = 0,05; 0,08; 0,1; 0,125; 0,167; 0,25. Obliczenia przeprowadzono przy założeniu stałej sztywności jednej pary zębów (rys. 3.1), względnie zmiennej wg paraboli sztywności zębów (rys. 3.2) oraz przyjmując bezbłędne wykonanie kół zębatych.

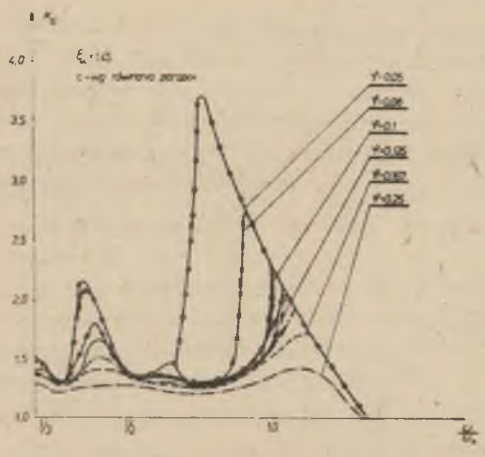


Rys. 3.1. Wpływ współczynnika tłumienia φ na zależność współczynnika K_d od prędkości

Przy założeniu φ = 0,1, ruch kół zębatych jest stateczny. Ze względu na nieliniowy charakter równania ruchu, w obszarze głównego rezonansu występują dwie różne wartości współczynnika K_d, którym odpowiadają różne amplitudy drgań. Maksymalna wartość tego współczynnika jest większa przy obniżaniu prędkości ruchu, niż przy jej narastaniu, występuje tutaj zjawisko "przeskoku", charakterystyczne dla układów nieliniowych L.[4,55]. Podczas przyporu jednoparowego obserwuje się wtedy odrywanie zębów (rys.5.11) a więc ujawnia się obecność luzów w zazębianiu. Największe obciążenie dynamiczne występuje w tym przypadku w strefie zazębienia dwuparowego.

Jak wynika z doświadczeń, współczynnik K_d w rzeczywistej przekładni odpowiada najczęściej górnej gałęzi wykresu. Nieznaczne pobudzenia wywo-

łane odchyłkami wykonania lub niesprzyjającymi warunkami początkowymi powodują przeskok z dolnej krzywej na górną.



Rys. 3.2. Wpływ współczynnika tłumienia φ na zależność współczynnika K_d od prędkości

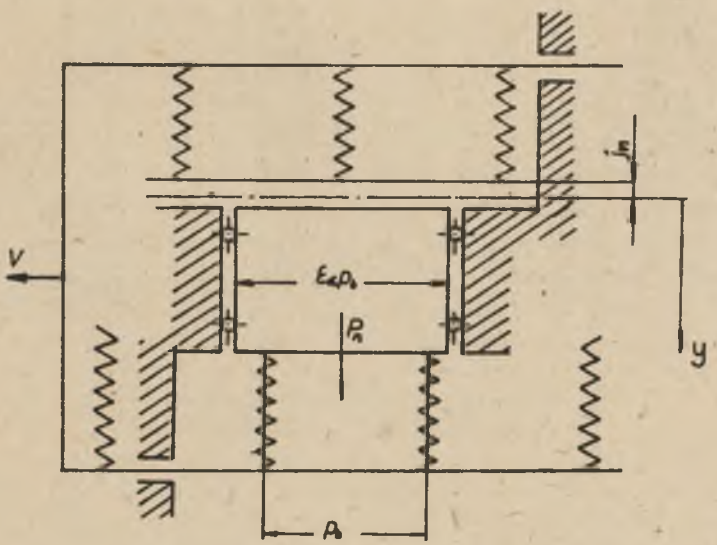
W przypadku małych wartości współczynnika tłumienia (np. φ = = 0,05), zjawisko "przeskoku" występuje również w zakresie podkrytycznym, tj. przy częstościach mniejszych od rezonansowej, w strefie lokalnego rezonansu (rys. 3.1, 3.2).

Ze wzrostem współczynnika tłumienia następuje zmniejszenie zakresu niestacjonarności drgań w obszarze głównego rezonansu, aż do całkowitego wyeliminowania tego zjawiska. Przykładowo, przy wartości współczynnika φ = 0,167 i większej zjawisko to nie występuje. Jednocześnie ze wzrostem współczynnika tłumienia następuje oczywiste obniżenie amplitud drgań i obciążeń dynamicznych zazębienia, szczególnie w strefie głównego rezonansu. Przykładowo, przy założeniu stałej sztywności jednej pary zębów, dla współczynnika φ = 0,05, otrzymuje się w obszarze rezonansu maksymalną wartość współczynnika K_d równą około 4,4, dla φ = 0,1 otrzymuje się wartość tego współczynnika równą około 2,7, natomiast dla φ = 0,25 współczynnik ten osiąga wartość około 1,45.

Porównując wykresy zmian obciążeń dynamicznych, uzyskanych dla różnych wartości współczynnika tłumienia φ, z wynikami badań doświadczalnych i teoretycznych innych autorów, do dalszych obliczeń przyjęto wartość tego współczynnika równą 0,1. Celowe jest prowadzenie dalszych badań doświadczalnych zmierzających do poznania procesów rozpraszania energii w różnych miejscach przekładni, ustalenia odpowiedniego modelu tłumienia drgań i identyfikacji jego parametrów. Badania te należałoby przeprowadzić w rzeczywistych przekładniach o różnych rozwiązaniach konstrukcyjnych.

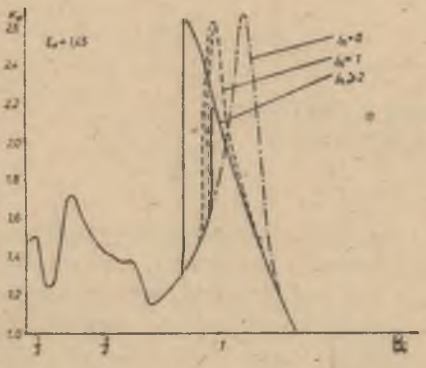
4. WPŁYW LUZU MIĘDZYZĘBNEGO NA ZJAWISKA DYNAMICZNE W PRZEKŁADNI ZĘBATEJ

Badania analityczne nad wpływem luzu na dynamikę przekładni zębatej walcowej mogą być przeprowadzone w oparciu o model dynamiczny posiadający dodatkową palisadę sprężyn, znajdującą się nad bryłą. Model ten przedstawiono na rys. 4.1. Dodatkowa palisada sprężyn reprezentuje sprężystość par zębów stykających się niepracującymi bokami. Bryła współpracuje z tymi sprężynami tylko wtedy, gdy bezwzględna wartość ujemnego przemieszczenia y przekroczy wartość luzu j_n. Wykorzystując omawiany model rozwiązano w pracy równanie różniczkowe ruchu 2.9, przy założeniu różnych wartości luzów w zazębieniu. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci zależności współczynnika K_d od prędkości ruchu dla kół wykonanych bezbłędnie (rys. 4.2), oraz kół obarczonych odchyłkami losowymi (rys. 4.3). W przypad-

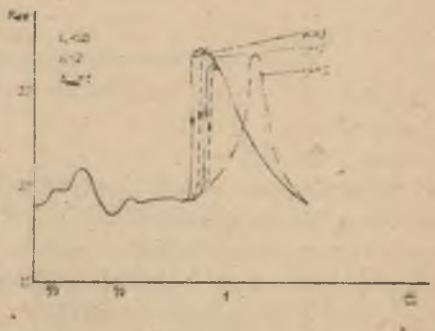


Rys. 4.1. Model dynamiczny przekładni z ograniczonym luzem międzyzębnym

ku występowania losowych odchyłek, współczynnik $K_{dó}$, uwzględniający rozproszenie maksymalnych wartości sił dynamicznych wyznaczonych dla kolejnych par zębów, obliczony był zgodnie ze wzorem 2.13. W obliczeniach za-



Rys. 4.2. Zależność współczynnika obciążeń dynamicznych od prędkości ruchu



Rys. 4.3. Zależność współczynnika obciążeń dynamicznych od prędkości ruchu

łożono stałą sztywność zazębienia jednej pary zębów. Jak wynika z rys.4.2 i 4.3 zmniejszenie wartości luzu międzyzębnego powoduje jedynie zmiany współczynnika K_d w obszarze głównego rezonansu, polegające na przesuwaniu się szczytowych wartości tego współczynnika w kierunku większych prędkości. Jednocześnie, ograniczenie luzu powoduje zmniejszenie zakresu prędkości, w którym występuje niestacjonarność drgań przekładni w obszarze głównego rezonansu, aż do zupełnego wyeliminowania tego zjawiska dla zazębienia bezluzowego.

Na podstawie wyników przedstawionych na rys. 4.2 można stwierdzić, że w przekładni dokładnie wykonanej przebieg współczynnika K_d nie zmienia się przy powiększaniu luzu powyżej wartości równej $2\,Y_{st}$. Podobnie zachowuje się przekładnia, w której występują losowe odchyłki zazębienia o maksymalnej wartości $s_{max} = 1$ (rys. 4.3). Wtedy powiększenie luzu powyżej wartości $j_n = 2 + s_{max} = 3$ nie powoduje zmian wartości współczynnika K_d.

4.1. Porównanie wartości ugięć statycznych, odchyłek i luzów w zazębieniu

Jeżeli luz w zazębieniu jest kilkakrotnie większy od sumy ugięć statycznych zębów oraz odchyłek zazębienia, to podczas pracy przekładni nie dochodzi do styku niepracujących boków zębów, a więc charakterystyka dynamiczna przekładni jest w tym przypadku taka sama, jak przy założeniu luzu o wartości nieskończenie dużej. Potwierdzają to omówione wyżej wyniki obliczeń (rys. 4.2). Dla sprawdzenia, w jakich przypadkach warunek ten zachodzi, przeprowadzono niezbędne obliczenia rachunkowe.

Ugięcie statyczne jednej pary zębów można obliczyć wg przybliżonego wzoru 11.4

$$Y_{st} \cong 0{,}06\ Q\ d_{w1}\ [\mu m],$$

gdzie:

$Q = \frac{P_{st}}{b\ d_{w1}}$ - wskaźnik obciążenia kół $[N/mm^2]$,

P_{st} - nominalna wartość siły obwodowej $[N]$,

b - szerokość kół $[mm]$,

d_{w1} - średnica toczna zębnika $[mm]$.

W przekładniach ogólnego przeznaczenia wskaźnik obciążenia może zmieniać się od wartości $Q \leq 1\ N/mm^2$ dla materiałów nieutwardzanych do wartości $Q = 4\ N/mm^2$ dla powierzchni hartowanych [L. 42]. Wstawiając powyższe wartości do przybliżonego wzoru 11.4, ugięcie statyczne jednej pary zębów Y_{st} oblicza się z następujących zależności:

- dla materiałów nieutwardzanych

$$Y_{st} \leq 0{,}06\ d_{w1}\ [\mu m], \qquad (4.1)$$

- dla materiałów utwardzanych

$$Y_{st} \cong 0{,}24\ d_{w1}\ [\mu m]. \qquad (4.2)$$

Na podstawie porównania wartości luzów i odchyłek wykonania (wg PN-75/M-88521) z wyznaczonymi wg wzorów (4.1, 4.2) ugięciami można wyciągnąć następujące wnioski:

- dotyczące wartości odchyłek:

a) w przekładniach wykonanych w wysokiej klasie dokładności (klasy 4÷6) o zębach silnie obciążonych ($Q = 4\ N/mm^2$), odchyłki zazębienia zarówno losowe, jak okresowe są bliskie jedności,

b) w pozostałych przypadkach są one większe, a nawet wielokrotnie większe od jedności,

- dotyczące wartości luzów:

c) w przekładniach wykonanych z małą dokładnością (klasa 8), o zębach silnie obciążonych, przy założeniu pasowania typu E,D,C luzy są bliskie wartości sumy ugięć i odchyłek zazębienia,

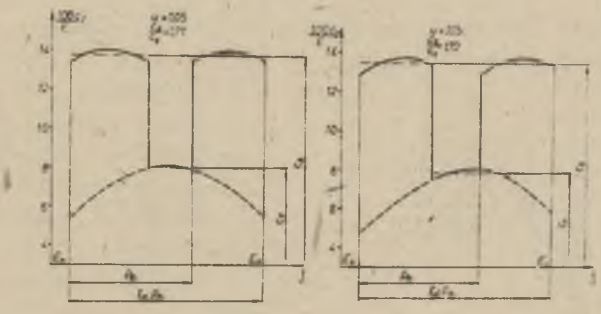
d) w pozostałych przypadkach luzy są większe, a nawet wielokrotnie większe od tej sumy.

Wnioski dotyczące wartości odchyłek zostaną wykorzystane w rozdziale 7; będą one przydatne do analizy wpływu odchyłek na współczynnik K_d.

Biorąc pod uwagę wnioski dotyczące luzów oraz wyniki wyżej omówionych obliczeń numerycznych, można dla większości przypadków przyjąć w modelu luz o wartości nieskończenie dużej, co wpływa na uproszczenie programów i skrócenie czasu obliczeń.

5. ZALEŻNOŚĆ OBCIĄŻEŃ DYNAMICZNYCH OD CHARAKTERYSTYKI SPRĘŻYSTEJ ZAZĘBIENIA

Sztywność współpracujących zębów przekładni zmienia się w zależności od położenia punktu współpracy na odcinku przyporu. Wyznaczanie zmian sztywności zazębienia wzdłuż tego odcinka było tematem wielu prac teoretycznych i doświadczalnych [L. 15, 50, 57, 62, 63, 81] . Zagadnienie to omówiono w rozdziale 11. Zakładając, że problem wyznaczania sztywności zazębienia został dostatecznie rozpoznany, w pracy zajęto się analizą jej wpływu na dynamikę przekładni.



Rys. 5.1 i 5.2. Zmiany sztywności zazębienia na odcinku przyporu [L. 63]

Przykładowe zmiany sztywności zazębienia wzdłuż odcinka przyporu przedstawiono na rys. 5.1 i 5.2. Wykresy uzyskano analitycznie, przy zastosowaniu maszyny cyfrowej, wykorzystując metodę obliczeń sztywności przedstawioną w pracy [L. 63]. W obliczeniach założono równomierny rozkład obciążenia wzdłuż szerokości koła oraz pominięto wpływ odkształcalności wieńca koła. Wyniki obliczeń dotyczą kół monolitowych, w których odkształcalność wieńca jest znikomo mała w stosunku do odkształceń zębów. Na rysunku przedstawiono stosunek całkowitej sztywności zazębienia c_z do współczynnika sprężystości wzdłużnej materiału E, w zależności od współrzędnej ξ wyznaczającej położenie punktu na linii przyporu. Poszczególne wykresy dotyczą przekładni walcowych jednostopniowych o różnych przełożeniach.
Sztywność jednej pary zębów c jest w pewnym stopniu uzależniona od wskaźnika obciążenia Q, ze względu na nieliniowy charakter zależności odkształceń powierzchni współpracujących zębów od obciążenia. Przeprowadzone w pracy [L. 63] obliczenia analityczne wykazały, że w przypadku uwzględnienia

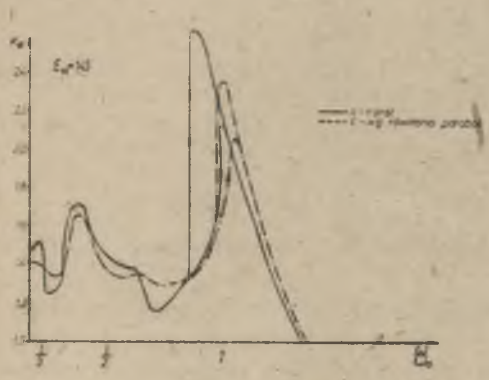
deformacji wieńca dużego koła, wpływ wartości obciążenia Q na sztywność można zaniedbać, sumaryczna sztywność ulega obniżeniu, przy czym różnica między maksymalną i minimalną wartością sztywności na odcinku przyporu zmniejsza się znacznie. W tym przypadku można w praktycznych analizach przyjąć c = const.

Uwzględniając spotykane w praktyce różne rozwiązania konstrukcyjne kół zębatych, w pracy przeprowadzono porównanie obciążeń dynamicznych zazębienia dla dwóch wariantów, a mianowicie:

- przy założeniu stałej sztywności jednej pary zębów, c = const, a więc przy uwzględnieniu deformacji wieńca koła zębatego,
- przy założeniu zmiennej sztywności jednej pary zębów, co odpowiada przyjęciu kół monolitowych.

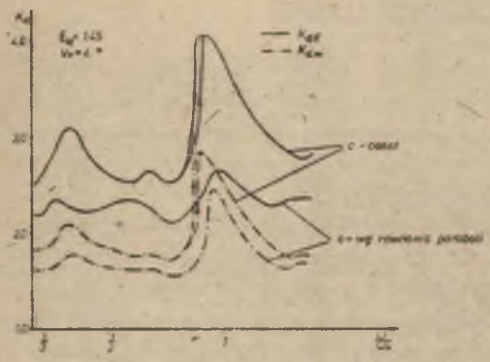
5.1. Wyniki obliczeń

Wyniki rozwiązań równania ruchu przedstawiono na wykresach (rys. 5.3 do 5.17). Na rysunkach porównano zmiany współczynnika K_d lub $K_{dó}$ w funkcji prędkości ruchu ω/ω_0, wyznaczone przy założeniu stałej lub zmiennej sztywności dla kół wykonanych bezbłędnie (rys. 5.3), z odchyłkami losowymi o nierównomierności $V_p = 4$ (rys. 5.4), z odchyłkami okresowymi o wartości + 2 oraz - 1 (rys. 5.5 i 5.6). W przypadku zmiennej sztywności zakładano w obliczeniach jej zmiany wg równania paraboli, zgodnie z rys. 5.2, wykonanym dla przekładni o przełożeniu u = 3,15. Współczynniki K_{dm}, $K_{dó}$ zdefiniowano zgodnie ze wzorami 2.12 i 2.13.

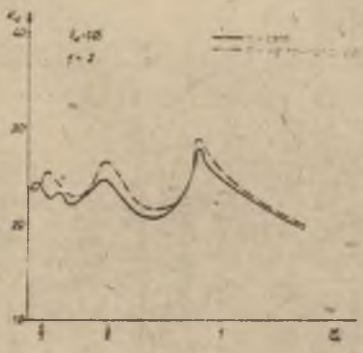


Rys. 5.3. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu

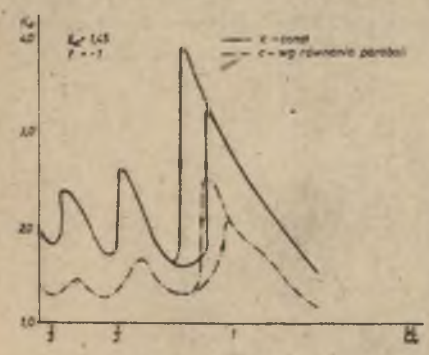
Rys. 5.7 przedstawia porównanie wykresów zależności współczynnika K_d od prędkości ruchu. Poszczególne wykresy odpowiadają różnym wartościom przełożenia jednostopniowej przekładni zębatej, przy założeniu zmiennej sztywności jednej pary zębów. Współczynnik obciążeń dynamicznych uzależniony jest w dużym stopniu od stosunku maksymalnej wartości sztywności zazębienia c_2 w strefie przyporu dwuparowego do minimalnej wartości c_1 podczas przyporu jednoparowego (rys. 5.8), Zmiany współczynnika K_d w obszarze głównego rezonansu w zależności od stosunku c_2/c_1 przedstawiono na rys. 5.9.



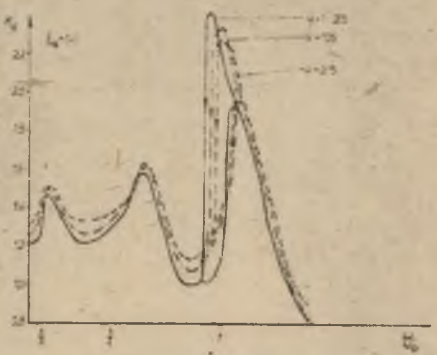
Rys. 5.4. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



Rys. 5.5. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



Rys. 5.6. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu

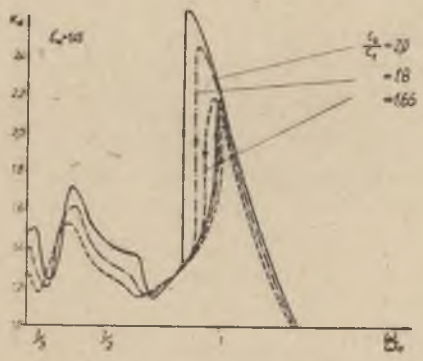


Rys. 5.7. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu

Wykresy (rys. 5.10 do 5.17) obrazują natomiast porównanie zmian obciążeń dynamicznych zazębienia na odcinku przyporu dla przekładni wykonanej bezbłędnie (rys. 5.10 i 5.11) oraz obarczonej odchyłkami losowymi (rys.5.12 do 5.15) i okresowymi (rys. 5.16 i 5.17) dla dwóch omawianych przypadków zmian sztywności. Poszczególne wykresy odpowiadają obszarowi głównego rezonansu, co oznaczono umownie na rysunkach przez $(\omega_o/\omega)_1$ oraz lokalnemu rezonansowi występującemu przy mniejszej prędkości ruchu, w których częstość drgań własnych jest dwukrotnie większa od częstości zazębienia, co oznaczono na rysunkach przez $(\omega_o/\omega)_2$.

5.2. Analiza otrzymanych wyników

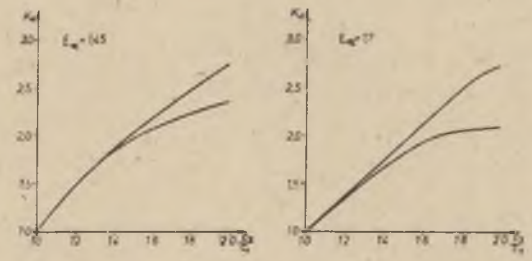
Podstawą analizy obciążeń dynamicznych są wykresy zawierające wyniki obliczeń numerycznych. Wykresy te będą analizowane w aspekcie przyczyn powstawania sił dynamicznych oraz własności wytrzymałościowych zazębienia.



Rys. 5.8. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu

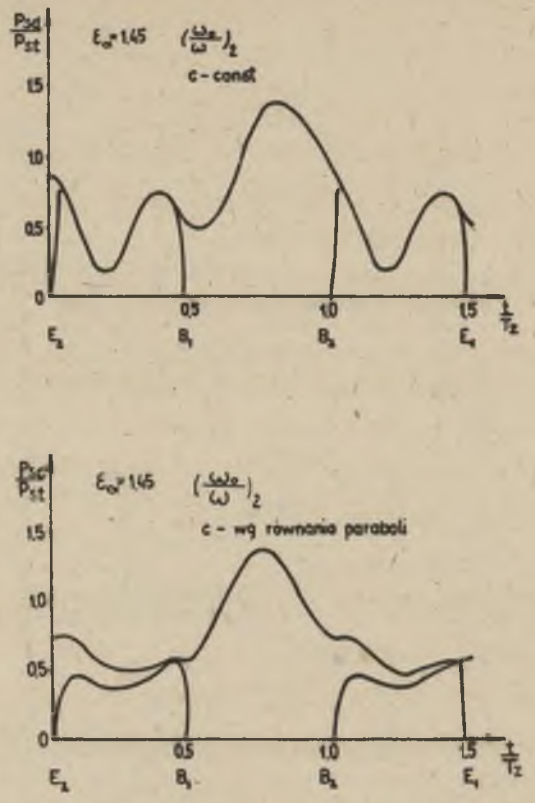
Rys. 5.3 przedstawia porównanie wartości współczynnika K_d w przekładni wykonanej bezbłędnie dla dwóch rozpatrywanych przypadków zmiany sztywności zazębienia, natomiast rys. 5.10 i 5.11 ilustrują zmiany obciążeń dynamicznych na odcinku przyporu dla obu przypadków.

Na podstawie wyników zamieszczonych na tych rysunkach można wyciągnąć następujące wnioski:

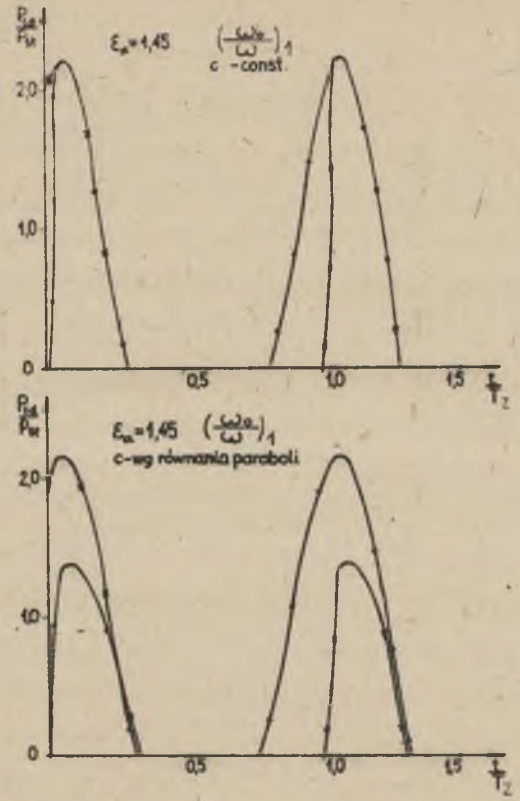


Rys. 5.9. Zależność współczynnika K_d w strefie głównego rezonansu od stosunku sztywności c_2/c_1

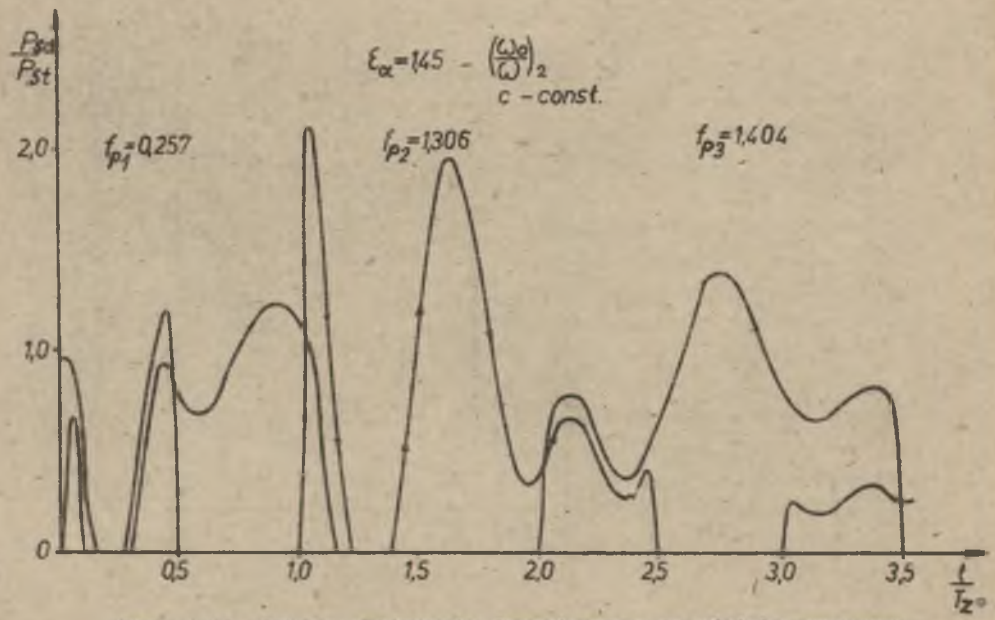
- w przypadku kół zębatych charakteryzujących się stałą sztywnością jednej pary zębów na odcinku przyporu, wartości współczynnika obciążeń dynamicznych, szczególnie w strefie głównego rezonansu, są większe od odpowiednich wartości tego współczynnika w przypadku kół o zmiennej sztywności jednej pary zębów. Oznacza to, że w rzeczywistej przekładni koła wykonane w postaci wieńców zębatych będą wykazywały większe wartości tego współczynnika, niż koła pełne,
- w przypadku współpracy kół zębatych o stałej sztywności jednej pary zębów występują znaczne obciążenia dynamiczne na początku odcinka przyporu, tj. w początkowym okresie styku kolejnych par zębów (rys. 5.11), co wpływa na zmniejszenie wytrzymałości na złamanie zębów koła napędzanego i obniżenie współczynnika pewności na zatarcie.



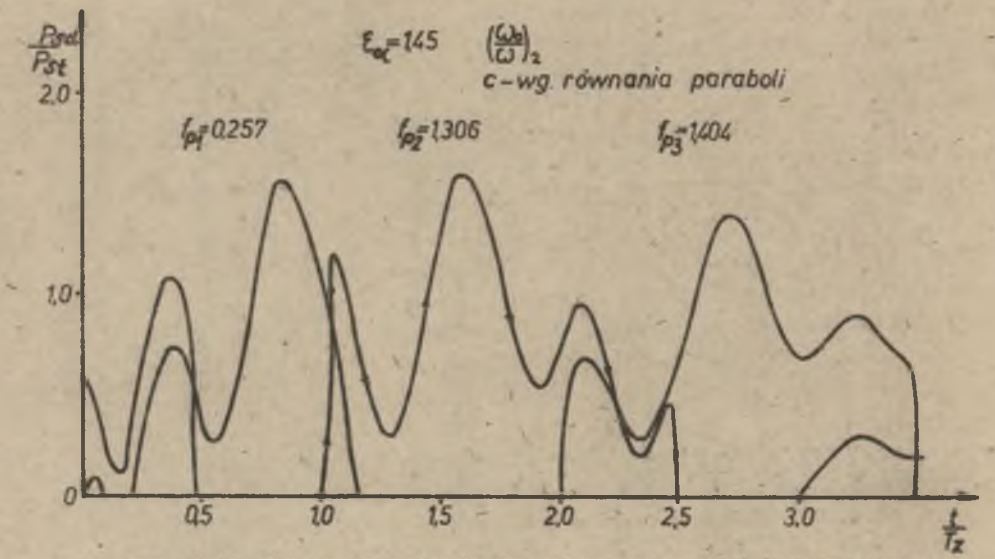
Rys. 5.10. Zmiany obciążenia dynamicznego na odcinku przyporu



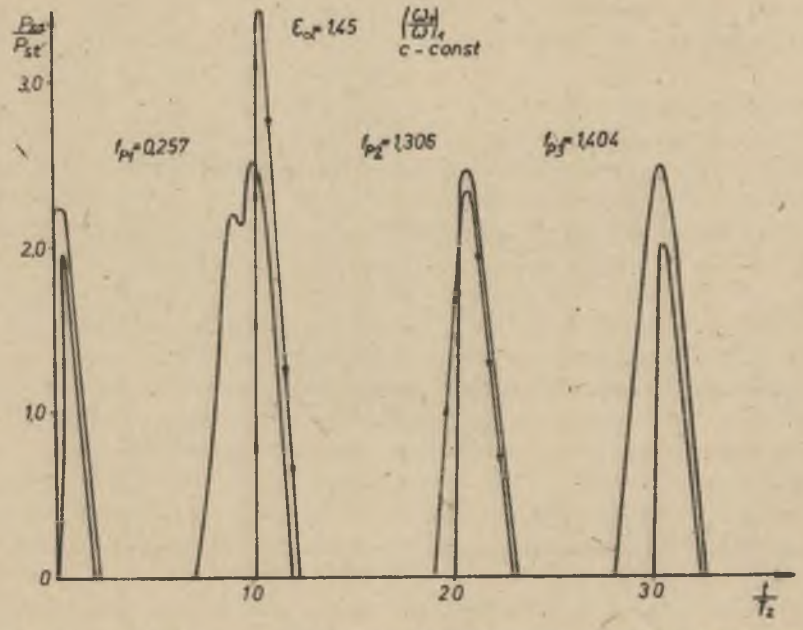
Rys. 5.11. Zmiany obciążenia dynamicznego na odcinku przyporu



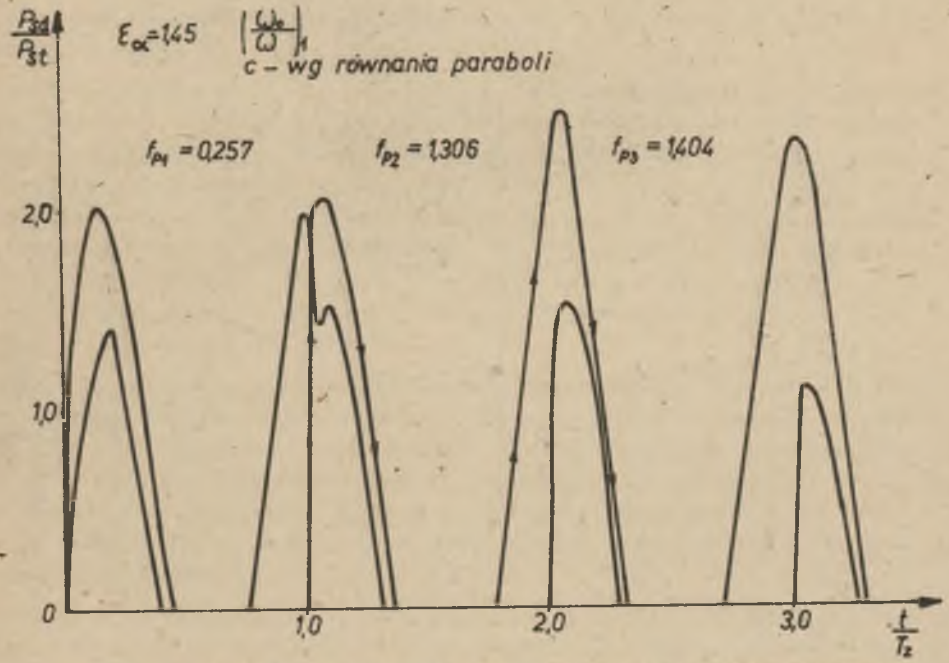
Rys. 5.12. Zmiany obciążenia dynamicznego na odcinku przyporu



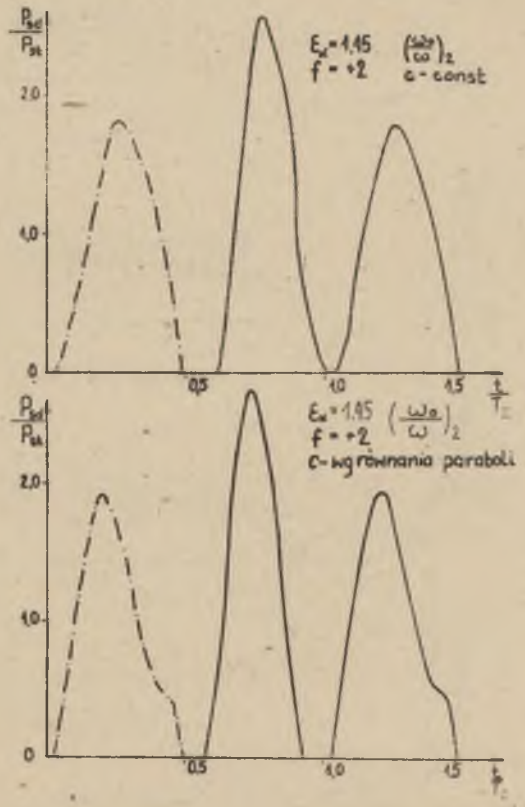
Rys. 5.13. Zmiany obciążenia dynamicznego na odcinku przyporu



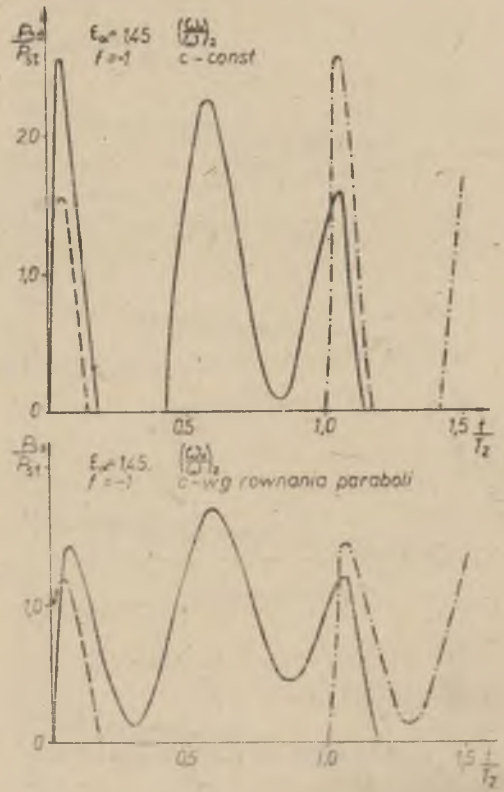
Rys. 5.14. Zmiany obciążenia dynamicznego na odcinku przyporu



Rys. 5.15. Zmiany obciążenia dynamicznego na odcinku przyporu



Rys. 5.16. Zmiany obciążenia dynamicznego na odcinku przyporu



Rys. 5.17. Zmiany obciążenia dynamicznego na odcinku przyporu

Na rys. 5.7 porównano wykresy współczynnika K_d w przekładni wykonanej bezbłędnie o różnych wartościach przełożenia u, którym odpowiadają różne charakterystyki sprężyste zazębienia.

Jak widać, w strefie głównego rezonansu wartości współczynnika K_d dla przekładni zwiększającej prędkość obrotową, tj. o przełożeniu u = 1:3,15, są większe od analogicznych wartości tego współczynnika w przekładni zmniejszającej prędkość obrotową, tj. o przełożeniu u = 3,15. W pozostałym zakresie prędkości wartości współczynnika K_d tylko nieznacznie się różnią.

Wykresy sztywności całkowitej zazębienia c_z (rys. 5.1 i 5.2), wyznaczone dla przypadku zmiennej sztywności zazębienia jednej pary zębów, można z dobrym przybliżeniem aproksymować odcinkami linii prostych. Jak widać, dla założeń podanych na rysunkach stosunek sztywności maksymalnej zazębienia c_2 do sztywności minimalnej c_1 wynosi około 1,7 i jest mniejszy od 2, tj. wartości występującej w przypadku, gdy sztywność zazębienia jednej pary zębów jest stała. Wartość stosunku c_2 do c_1 zależy od przełożenia przekładni u, wartości współczynników przesunięcia zarysu oraz wynikającego stąd wskaźnika zazębienia ε_α. Zagadnienie to omówiono w rozdziale 11.

Na rys. 5.8 przedstawiono zmiany współczynnika K_d w funkcji prędkości ruchu wyznaczone dla różnych wartości stosunku c_2/c_1, natomiast rys. 5.9 obrazuje zmiany współczynnika K_d w strefie głównego rezonansu w zależności od wartości c_2/c_1.

Na podstawie wyników przedstawionych na tych rysunkach można wysnuć następujące wnioski:

- wartości współczynnika K_d w przekładni wykonanej bezbłędnie maleją przy zmniejszaniu się wartości stosunku zmian sztywności c_2/c_1, szczególnie silnie w strefie głównego rezonansu; jednocześnie zmniejsza się zakres prędkości, w którym występuje niestacjonarność drgań,
- wraz z obniżeniem się wartości stosunku c_2/c_1, maleje różnica między maksymalnymi wartościami współczynnika K_d występującymi przy narastaniu i zmniejszaniu prędkości ruchu w sąsiedztwie rezonansu; w przypadku gdy $c_2/c_1 < 1,3$, współczynnik K_d osiąga w rezonansie tylko jedną wartość, a drgania są stacjonarne.

Na kolejnych rysunkach porównano wartości współczynnika K_d w funkcji prędkości ruchu, otrzymane przy założeniu stałej sztywności jednej pary zębów lub zmiennej sztywności, dla przekładni, w której występują odchyłki losowe zazębienia o nierównomierności $V_p = 4$ (rys. 5.4) lub odchyłki okresowe o znaku dodatnim (rys. 5.5) względnie o znaku ujemnym (rys. 5.6).

Na podstawie wyników przedstawionych na tych rysunkach można wyciągnąć następujące wnioski:

- wartości współczynnika K_d, wyznaczone dla zazębienia z odchyłkami losowymi względnie okresowymi o znaku ujemnym (np. jeżeli promień koła

zasadniczego zębnika jest mniejszy od wartości nominalnej), w przypadku gdy sztywność jednej pary zębów jest stała na odcinku przyporu, są większe od odpowiednich wartości tego współczynnika, w przypadku gdy sztywność jest zmienna, przy czym szczególnie duże różnice obciążeń występują na początku współpracy kolejnej pary zębów, co ma wpływ na wytrzymałość na złamanie zębów dużego koła oraz współczynnik pewności na zatarcie,

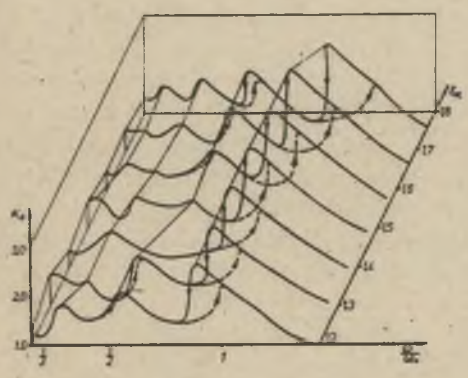
- wartości współczynnika K_d, jak również zmiany obciążeń dynamicznych na odcinku przyporu wyznaczone dla zazębienia obarczonego wyłącznie odchyłkami okresowymi o wartości dodatniej (np. jeżeli promień koła zasadniczego zębnika jest większy od nominalnego) nieznacznie różnią się dla obu rozpatrywanych przypadków sztywności.

Własności dynamiczne przekładni, jak również wytrzymałość zazębienia zależą w dużym stopniu od charakterystyki sprężystej zazębienia, a w szczególności od stosunku maksymalnej sztywności podczas przyporu dwuparowego do minimalnej jej wartości w strefie przyporu jednoparowego. Celowe jest prowadzenie w dalszych pracach badań, mających na celu określenie wpływu cech geometrycznych kół zębatych, a w szczególności ich korekcji na charakterystykę sprężystą i własności dynamiczne oraz wytrzymałościowe zazębienia.

6. WPŁYW WSKAŹNIKA ZAZĘBIENIA NA ZALEŻNOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKA K_d OD PRĘDKOŚCI RUCHU

Wartość wskaźnika zazębienia ε_α wpływa na charakterystykę sprężystą zazębienia, a tym samym na wartość współczynnika obciążeń dynamicznych K_d.

W pracy przeprowadzono analizę wpływu wartości współczynnika ε_α na zależność współczynnika K_d od prędkości ruchu dla przekładni walcowych i stożkowych o zębach prostych. W tym celu rozwiązano równanie różniczkowe 2.9 dla różnych wartości współczynnika ε_α wynoszących od 1,2 do 1,8. W równaniu założono wartość odchyłek losowych i okresowych równą zero, stałą sztywność jednej pary zębów oraz wartość współczynnika tłumienia $\varphi = 0{,}1$. Wyniki rozwiązań równania ruchu przedstawiono na wykresie zbiorczym, wykonanym dla $\varepsilon_\alpha = 1{,}2 \div 1{,}8$ (rys. 6.1). Wykres ten obrazuje zmiany współczynnika K_d w zależności od prędkości ruchu ω/ω_o. Na podstawie wyników zamieszczonych na tym rysunku można wyciągnąć następujące wnioski:



Rys. 6.1. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu przekładni o różnych wartościach wskaźnika zazębienia

- w strefie głównego rezonansu, w przekładni wykonanej bezbłędnie, zmiana wartości współczynnika ε_α w granicach od 1,2 do 1,6 praktycznie nie wpływa na wartości maksymalne współczynnika obciążeń dynamicznych K_d; zmianie współczynnika ε_α od wartości 1,6 do 1,8 towarzyszy powiększenie zakresu prędkości, w którym występuje niestacjonarność drgań,
- lokalne ekstrema współczynnika K_d, występujące w zakresie podkrytycznym, ulegają przesunięciu w kierunku większych prędkości ruchu wraz ze wzrostem współczynnika ε_α, przy czym w przypadku gdy ε_α znajduje się w granicach od 1,4 do 1,5 nie obserwuje się w przekładni wykonanej dokładnie, wyraźnego przyrostu współczynnika K_d w zakresie lokalnego rezonansu, w którym częstość zazębienia jest dwukrotnie mniejsza od częstości drgań własnych kół; zjawisko to może być wykorzystane w praktyce przy doborze zakresów prędkości przekładni.

7. WPŁYW ODCHYŁEK WYKONANIA ZAZĘBIENIA NA OBCIĄŻENIA DYNAMICZNE PRZEKŁADNI

W analizie zjawisk dynamicznych zachodzących w przekładniach zębatych najczęściej uwzględnia się wpływ odchyłek dokładności wykonania zazębienia zaliczanych do dwóch grup, a mianowicie:

A) wskaźników dokładności kinematycznej,
B) wskaźników płynności pracy.

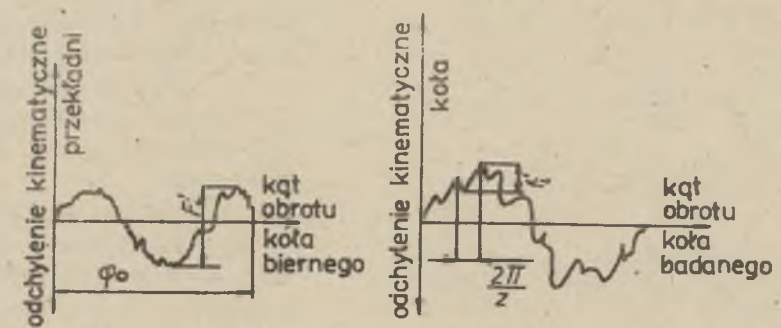
Ad A) Wskaźniki dokładności kinematycznej

Do grupy tej zalicza się na przykład odchyłkę kinematyczną przekładni F_i' (rys. 7.1), która jest różnicą algebraiczną największego i najmniejszego odchylenia kinematycznego przekładni, zaistniałego przy obrocie koła biernego o kąt φ_o wg wzoru

$$\varphi_o = \frac{2\pi z_1}{w}, \qquad (7.1)$$

gdzie:

z_1 - liczba zębów koła czynnego,
w - największy wspólny dzielnik liczb zębów z_1 i z_2.



Rys. 7.1. Odchyłka kinematyczna przekładni F_i', odchyłka kinematyczna na podziałce koła f_i'

Odchyłki wykonania wchodzące w skład tej grupy występują jeden raz podczas obrotu lub jeszcze rzadziej, a więc częstotliwość ich zmian jest równa lub mniejsza od częstotliwości obrotów kół zębatych. Z uwagi na niską

częstotliwość zmian odchyłki te nie powodują znacznego przyrostu amplitudy drgań i związanych z tym obciążeń dynamicznych. Efekty dynamiczne tych odchyłek mogą być analizowane w sposób uproszczony, wg metody przedstawionej w [L. 34]. Odchyłki te będą pominięte w analizie dynamicznej przekładni.

Ad B) Wskaźniki płynności pracy

W tej grupie najważniejszym wskaźnikiem z punktu widzenia dynamiki przekładni jest odchyłka kinematyczna na podziałce koła f_i' (rys. 7.1), która jest różnicą największego i najmniejszego odchylenia kinematycznego koła, przy jego obrocie o podziałkę kątową. Ze względu na znaczną częstotliwość powtarzania równą częstotliwości zazębienia, odchyłka ta w sposób istotny wpływa na stan dynamiczny przekładni. W ogólnym przypadku odchyłka ta składa się z części okresowej F, wynikającej np. z odchyłki kąta zarysu oraz części przypadkowej S, wywołanej np. losowymi odchyłkami podziałki. Obie składowe mogą być odwzorowane w modelu dynamicznym przekładni.

7.1. Odwzorowanie odchyłek wykonania zazębienia w modelu dynamicznym przekładni

W modelu dynamicznym przekładni istnieje możliwość bezpośredniego przenoszenia zapisu odchyłek zazębienia, otrzymanego za pomocą przyrządu do badania współpracy jednostronnej kół. Przyrząd ten rejestruje różnice między rzeczywistym i teoretycznym kątem obrotu badanego koła przy współpracy z kołem wzorcowym. Wykres otrzymany z tego przyrządu przedstawia w modelu dynamicznym ruch środka bryły przy przesuwaniu palisady sprężyn bez obciążenia. Tak więc wychylenie bryły modelu y wzdłuż odciętych osi x odpowiada obrazowi współpracy jednostronnej.

W rzeczywistej przekładni odchyłki wykonania zazębienia występują zarówno w zębniku, jak i kole. Dla ich odwzorowania w modelu celowe jest wyznaczenie odchyłki sumarycznej $\Delta\eta$, na podstawie znanych wartości odchyłek poszczególnych kół przy współpracy jednostronnej z kołem wzorcowym $\Delta\eta_1$ i $\Delta\eta_2$ [L. 52, 72].

Odchyłkę współpracy obu kół wyznacza się z zależności

$$\Delta\eta = \Delta\eta_1 - \Delta\eta_2, \tag{7.2}$$

przy czym:

$$\Delta\eta_1 = r_{b1}\ \Delta\psi_{1w},$$
$$\Delta\eta_2 = r_{b1}\ \Delta\psi_{2w} \cdot u \tag{7.3}$$

gdzie:

r_{b1} - promień zasadniczy zębnika,

u - przełożenie kół,

$\Delta\psi_{1w}$ - dodatkowy kąt obrotu koła 1 w stosunku do koła wzorcowego,

$\Delta\psi_{2w}$ - dodatkowy kąt obrotu koła 2 w stosunku do koła wzorcowego.

Sposób wyznaczania odchyłki współpracy obu kół dla szczególnych przypadków zilustrowano na rysunkach 7.2 i 7.3. Rys. 7.2 dotyczy przypadku gdy zazębienie wykazuje okresowe odchyłki wywołane różnicami średnic zasadniczych w stosunku do wartości nominalnych, natomiast rys. 7.3 dotyczy przypadku losowych odchyłek podziałki obu kół.

W pierwszym przypadku odchyłki promienia koła zasadniczego Δr_b spowodowane są odchyłkami kąta zarysu narzędzia $\Delta\alpha$, zgodnie z zależnością

$$\Delta r_b = - r\Delta\alpha \sin\alpha, \tag{7.4}$$

gdzie:

r - promień koła podziałowego

co prowadzi do okresowej odchyłki podziałki zasadniczej wg relacji

$$\frac{\Delta p_b}{p_b} = \frac{\Delta r_b}{r_b}, \tag{7.5}$$

gdzie:

r_b - promień koła zasadniczego,

p_b - podziałka zasadnicza.

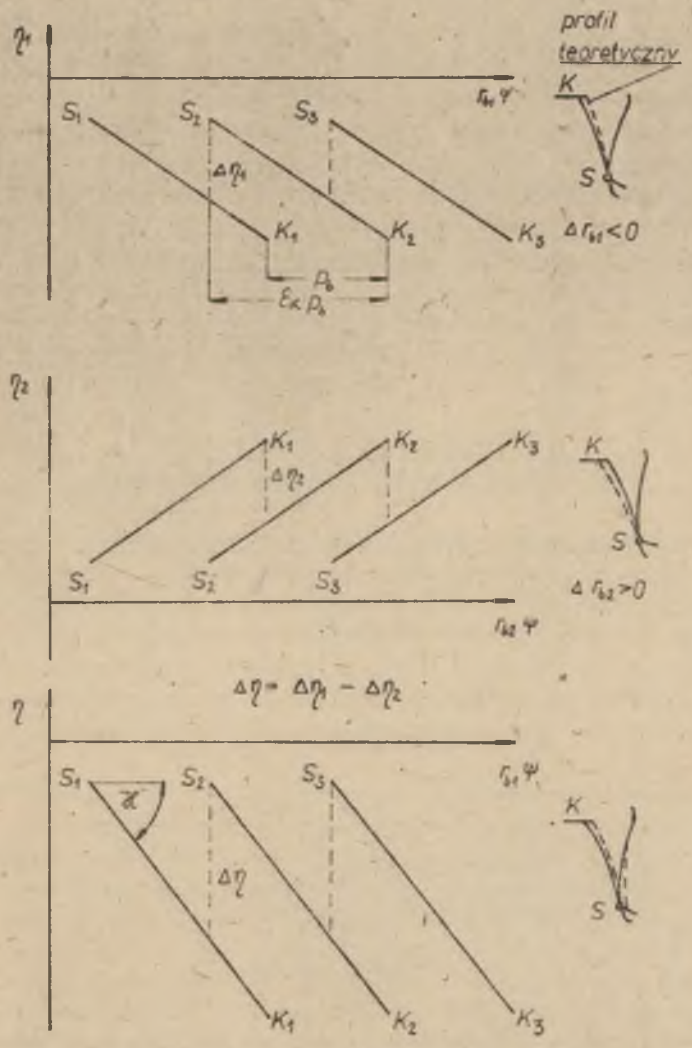
Wykorzystując zależność 7.2 można w tym przypadku wyznaczyć odchyłkę współpracy obu kół z następującego wzoru

$$tg\,\gamma = \frac{\Delta\eta}{p_b} = \frac{\Delta r_{b1}}{r_{b1}} - \frac{\Delta r_{b2}}{r_{b2}}, \tag{7.6}$$

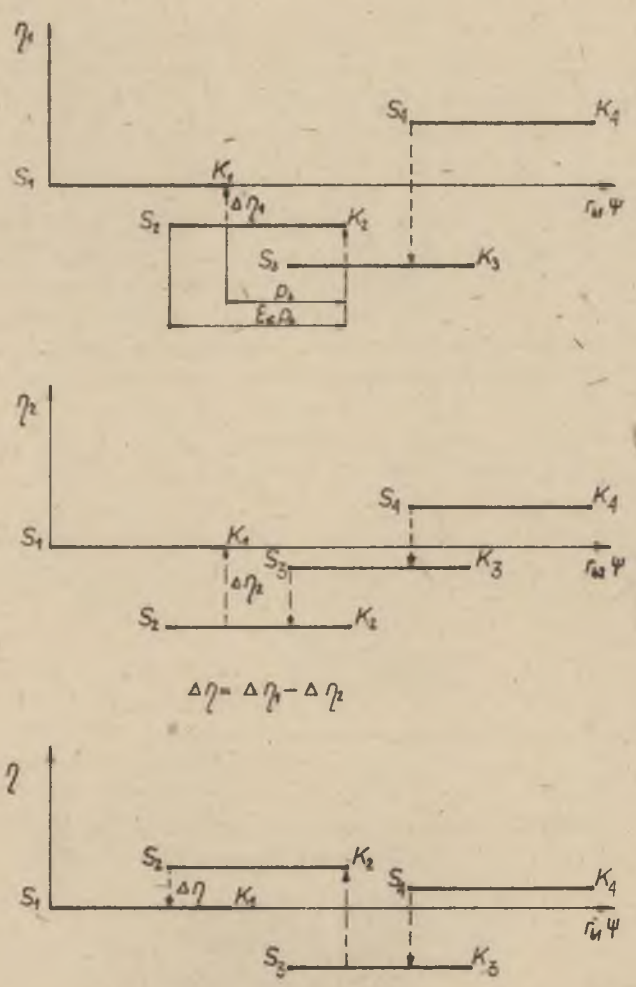
przy czym

$$\frac{\Delta\eta}{Y_{st}} = \frac{\Delta p_b}{Y_{st}} = f.$$

Wyznaczoną w ten sposób składową okresową odchyłki kinematycznej f można odwzorować w modelu przez odpowiedni dobór wartości i kierunku pochylenia dolnej krawędzi bryły, zgodnie z rys. 2.5. Składową losową odchyłki kinematycznej na podziałce koła s odwzorowano natomiast w modelu w postaci losowych różnic wysokości kolejnych sprężyn.



Rys. 7.2. Wyznaczanie odchyłki współpracy obu kół $\Delta\eta$, przy założeniu odchyłek promieni zasadniczych kół



Rys. 7.3. Wyznaczanie odchyłki współpracy obu kół $\Delta\eta$, przy założeniu losowych odchyłek podziałki

7.2. Parametry statystyczne odchyłek pseudolosowych

Analizę statystyczną odchyłek podziałki zasadniczej przeprowadzono w pracy [L. 25], wykorzystując wyniki pomiarów znacznej liczby kół. Na podstawie tej analizy stwierdzono, że dla większości przypadków rozkład częstości odchyłek podziałki zasadniczej jest rozkładem normalnym. Na podstawie histogramów odchyłek zamieszczonych w pracy [L. 25] można zauważyć, że w niektórych przypadkach ich rozkład odbiega od rozkładu normalnego.

Uwzględniając to, zjawiska dynamiczne w przekładni analizowano w rozdziale 7, przy założeniu losowych odchyłek zazębienia zarówno o rozkładzie jednostajnym, jak i normalnym, co pozwala na porównanie efektów dynamicznych dla obu przypadków odchyłek. Wartości liczbowe odchyłek pochodziły z generatorów liczb pseudolosowych.

7.3. Rozkład prawdopodobieństwa ekstremalnych wartości obciążeń dynamicznych

W przypadku stochastycznych wymuszeń drgań w przekładni, wywołanych losowymi odchyłkami kinematycznymi, maksymalne wartości obciążeń dynamicznych działających na powierzchnię zębów, a tym samym wartości współczynnika K_d, znacznie różnią się dla kolejnych zazębień. Z punktu widzenia wytrzymałości zmęczeniowej zazębienia celowe jest określenie rozkładu prawdopodobieństwa szczytowych wartości tych obciążeń, co umożliwi w dalszej kolejności poprawne zdefiniowanie współczynnika K_d dla celów praktycznych.

Dla określenia tego rozkładu przeprowadzono obliczenia numeryczne ugięć zębów, które przy założeniu stałej sztywności zazębienia są proporcjonalne do obciążeń dynamicznych. Obliczenia wykonano dla N = 500 kolejnych zazębień, wykonanych z odchyłkami niejednostajności podziału. Wartości liczbowe tych odchyłek tworzyły ciąg liczb o rozkładzie jednostajnym. Zgodnie z programem obliczeń, rozwiązując równanie ruchu 2,9, wyznaczano maksymalne ugięcia kolejnych par zębów, które następnie były klasyfikowane w zależności od ich wartości. Zestawienie niektórych wyników obliczeń wykonanych dla różnych prędkości ruchu przedstawiono poniżej:

Górna granica	Częstość występowania wartości szczytowych ugięcia poniżej górnej granicy
$\bar{u} + 1{,}0\ \sigma_u$	79,2 ÷ 85,2%
$\bar{u} + 1{,}5\ \sigma_u$	89,8 ÷ 91,6%
$\bar{u} + 2{,}0\ \sigma_u$	94,2 ÷ 94,8%
$\bar{u} + 3{,}0\ \sigma_u$	98,4 ÷ 99,6%

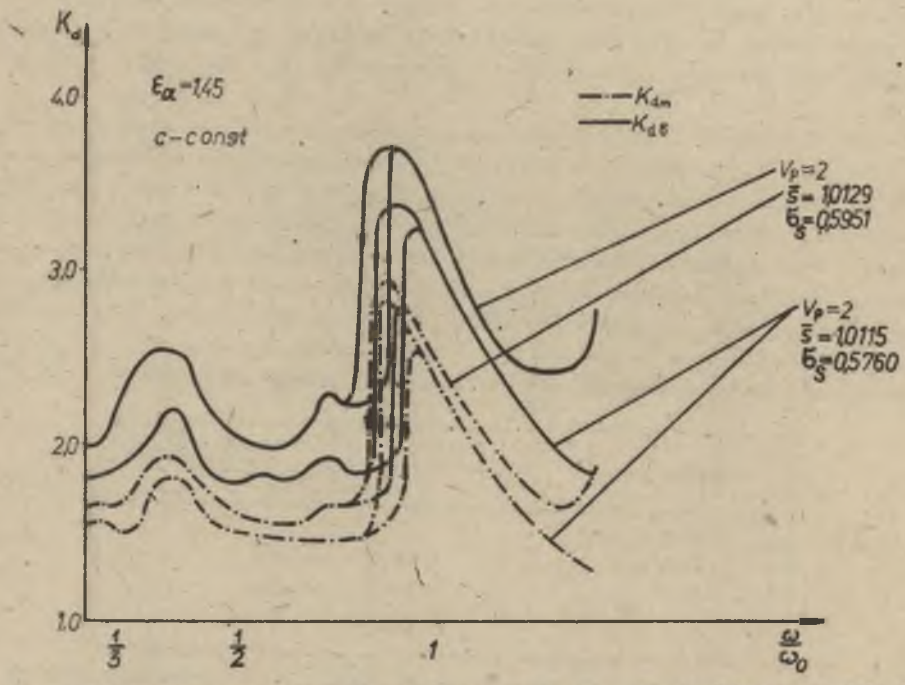
gdzie: $\bar{u}$ - średnia wartość ugięć; σ_u - odchylenie standardowe ugięć.

Jak wynika z tego zestawienia, w omawianym przypadku około 95% szczytowych wartości ugięć nie przekracza granicy górnej $\bar{u} + 2{,}0\,\sigma_u$, natomiast około 99% tych wartości znajduje się poniżej granicy $\bar{u} + 3{,}0\,\sigma_u$.

Wyniki analizy statystycznej ugięć mogą być wykorzystane w obliczeniach zmęczeniowych zazębienia prowadzonych wg zasad obowiązujących przy nieustalonych przebiegach obciążeń. Wyniki tej analizy uwzględniono także w praktyce przy obliczaniu współczynnika oboiążeń dynamicznych K_{dd} zgodnie ze wzorem 2.13.

7.4. Wpływ rozkładu odchyłek losowych na wartość współczynnika K_d

Na rys. 7.4. przedstawiono wyniki rozwiązań równania ruchu 2.9 otrzymane dla dwóch przypadków losowych odchyłek podziału, W obu przypadkach rozkłady częstości odchyłek są jednostajne, nierównomierność odchyłek $V_p = 2$, a parametry statyczne są zbliżone. Efekty dynamiczne wyznaczone dla obu przypadków znacznie się jednak różnią. Okazuje się, że wartość współczynnika K_d zależy nie tylko od rozkładu statystycznego odchyłek, a także od innych czynników, np. od wartości i znaku następujących po sobie odchyłek.



Rys. 7.4. Porównanie wykresów współczynnika K_d dla dwóch przypadków losowych odchyłek

Przykładowo, ustawiając w różnej kolejności wartości liczbowe odchyłek wchodzące w skład tego samego ciągu liczb uzyskano przy ustalonej prędkości ruchu następujące rozwiązania:

$K_{dm1} = 1,783$ oraz $\acute{o}_{K1} = 0,424$

$K_{dm2} = 1,496$ oraz $\acute{o}_{K2} = 0,312$

$K_{dm3} = 2,397$ oraz $\acute{o}_{K3} = 1,021$

Jak widać, różnice pomiędzy poszczególnymi wynikami są znaczne, zarówno co do wartości średniej, jak i odchylenia standardowego współczynnika K_d. Oczywiście nierównomierność odchyłek, jak i ich rozkłady statystyczne były identyczne we wszystkich rozpatrywanych przypadkach.

W odniesieniu do rzeczywistej przekładni oznacza to, że wartość współczynnika K_d przy ustalonej prędkości zależy nie tylko od rozkładu statystycznego, ale także od wartości i znaku następujących po sobie odchyłek. Przykładowo, można spodziewać się dużych obciążeń dynamicznych w przekładni przy niekorzystnym rozmieszczeniu odchyłek w kole, a więc, gdy występują na przemian odchyłki o wartości dodatniej i ujemnej. Ponadto dwie przekładnie wykonane w tej samej klasie dokładności w zależności od rozmieszczenia odchyłek podziałki mogą wykazywać znaczne różnice pod względem dynamicznym.

7.5. Wyniki obliczeń

Wyniki rozwiązań równania różniczkowego przedstawiono na wykresach (rys. 7.5 do 7.20). Dotyczą one kół walcowych, jak i stożkowych o zębach prostych. Na osi odciętych odkładano w skali logarytmicznej wartości stosunków częstości zazębienia do częstości drgań własnych pary kół zębatych ω_o, przy czym częstość ruchu zmieniano w zakresie od 0,3 do 1,7 ω/ω_o. Na osi rzędnych odkładano stosunek średniej wartości maksymalnych obciążeń dynamicznych $\bar{P}_d$ do obciążeń statycznych $(\bar{P}_d/P_{st})$. Wartości tych stosunków są jednocześnie obrazem zmian współczynnika sił dynamicznych $K_{dm} = f(\omega/\omega_o)$, jako funkcji zmian prędkości przekładni. Oś rzędnych jest osią współczynnika sił dynamicznych K_{dm}, gdy w kołach występują losowe odchyłki zazębienia lub współczynnika K_d w pozostałych przypadkach. Dodatkowo, przy losowych wymuszeniach drgań na rysunkach przedstawiono przebieg współczynnika $K_{dć}$ zdefiniowanego zgodnie ze wzorem 2.13, przy założeniu $\nu=2$. Porównanie wartości współczynników $K_{dć}$ i K_{dm} umożliwia ocenę dyspersji maksymalnych obciążeń dynamicznych w stosunku do wartości średniej tych obciążeń.

Współczynnik K_d wyznaczono przy założeniu stałej sztywności pojedynczej pary zębów. Jak wynika z rozdziału 5, jest to z punktu widzenia dynamiki przekładni najmniej korzystny przypadek zmiany sztywności zazębie-

nia, któremu odpowiadają największe wartości współczynnika K_d. Wtedy stosunek sztywności maksymalnej zazębienia c_2 do minimalnej c_1 wynosi 2. W rzeczywistej przekładni ma to w przybliżeniu miejsce, gdy koła wykonane są w postaci wieńców zębatych. Dla porównania pod względem dynamicznym różnych konstrukcji kół wyznaczono w niektórych przypadkach wartości współczynnika K_d, przy założeniu zmiennej sztywności pojedynczej pary zębów.

W pracy analizowano wpływ wskaźników płynności pracy na wartość współczynnika obciążeń dynamicznych K_d, a w szczególności rozpatrzono oddziaływanie:

- okresowych odchyłek f o znaku dodatnim (tys. 7.5, 7.6) lub ujemnym (rys. 7.7 i 7.8), przy założeniu stałej względnie zmiennej sztywności jednej pary zębów,
- losowych odchyłek niejednostajności podziału o nierównomierności V_p przy założenuu stałej sztywności jednej pary zębów (ryś. 7.9) lub zmiennej sztywności (rys. 7.10),
- losowych odchyłek podziału o nierównomierności V_p i okresowych f o wartości dodatniej (rys. 7.11),
- losowych odchyłek podziału o nierównomierności V_p i okresowych f o wartości ujemnej (rys. 7.12).

W przypadku losowych odchyłek podziału na wykresach określano ich wartość przez podanie nierównomierności V_p, która jest równa największej różnicy między dwiema odchyłkami wybranymi dowolnie z ich ciągu o liczebności N.

Wykresy zbiorcze współczynnika $K_{dó}$ zamieszczono na rysunkach 7.13 do 7.15. Wykresy te przedstawiają wartości tego współczynnika dla różnych skojarzeń losowych i okresowych odchyłek, przy ustalonych prędkościach ruchu. Wartości liczbowe odchyłek stanowiły w tym przypadku ciąg N = 36 liczb o rozkładzie jednostajnym. Poszczególne wykresy wykonano dla strefy głównego rezonansu, co oznaczono umownie na rysunku przez $(\omega_o/\omega)_1$ oraz lokalnych rezonansów występujących przy mniejszych prędkościach ruchu, oznaczonych na rysunkach odpowiednio przez $(\omega_o/\omega)_2$ oraz $(\omega_o/\omega)_3$. Wykresy współczynnika $K_{dó}$ dla strefy głównego rezonansu otrzymano przy uwzględnieniu mniejszej z dwu wartości tego współczynnika występującej przy narastaniu prędkości. Obliczenia wykonano przyjmując wartość czołowego wskaźnika zazębienia $\varepsilon_\alpha = 1{,}45$ oraz zakładając stałą sztywność zazębienia jednej pary zębów. Dla porównania, na rys. 7.20 przedstawiono zależność współczynnika K_d od wartości i znaku odchyłek okresowych, przy założeniu zmiennej sztywności jednej pary zębów. Uwzględniając fakt, że przekładnie o zębach prostych pracują często przy małych prędkościach, wyznaczono zależność współczynnika $K_{dó}$ od wartości odchyłek losowych i okresowych przy prędkościach ruchu poniżej 1/3 prędkości krytycznej (rys. 7.16 do 7.19). Współczynnik $K_{dó}$ wyznaczono w tym przypadku numerycznie, rozwiązując równanie różniczkowe ruchu metodą Rungego-Kutty, przy wykorzystaniu maszyny cyfrowej Odra 1204. W obliczeniach przyjęto wartość czołowego wskaźnika zazębienia $\varepsilon_\alpha = 1{,}65$, przy czym wartości liczbowe odchyłek losowych stanowiły ciąg N = 63 liczb o rozkładzie normalnym.

7.6. Analiza otrzymanych wyników

Podstawą analizy współczynnika K_d są wykresy zawierające wyniki obliczeń. Rysunki 7.5 do 7.8 przedstawiają zmiany współczynnika $K_d = f(\omega/\omega_o)$ wyznaczone w przypadku, gdy w przekładni występują okresowe odchyłki zazębienia o znaku dodatnim lub ujemnym. Na podstawie wyników podanych na tych rysunkach można wyciągnąć następujące wnioski:

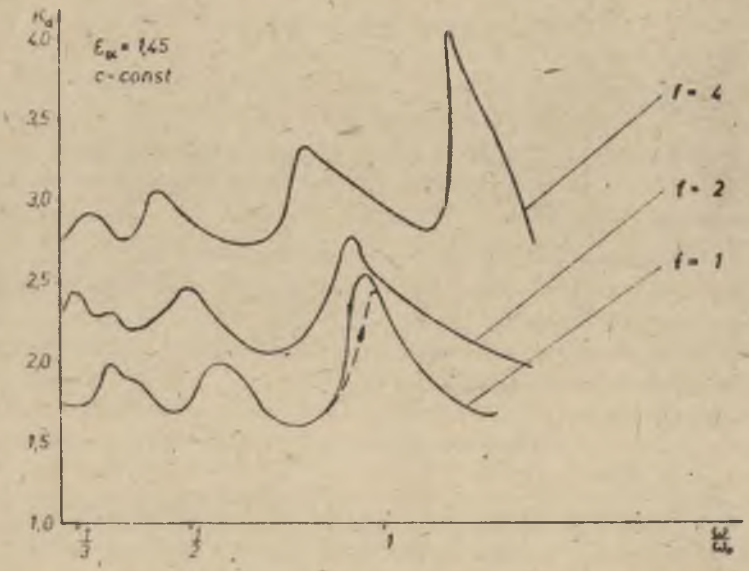
- w przypadku odchyłek ujemnych lub dodatnich większych od + 1 u_{st}, odpowiednie wartości współczynnika K_d są tym większe, im większa jest wartość bezwzględnia odchyłek,
- w przypadku ujemnych odchyłek zazębienia, obserwuje się zjawisko "przeskoku" w strefie głównego rezonansu,
- wraz ze wzrostem bezwzględnym wartości odchyłek okresowych następuje przesuwanie się stref rezonansów: głównego i lokalnych w kierunku mniejszych prędkości ruchu.

Na podstawie wykresów (rys. 7.9 i 7.10) przedstawiających wartości współczynników K_{dm} i $K_{dó} = f(\omega/\omega_o)$ dla różnych przypadków odchyłek losowych i zmian sztywności można sformułować następujące wnioski:

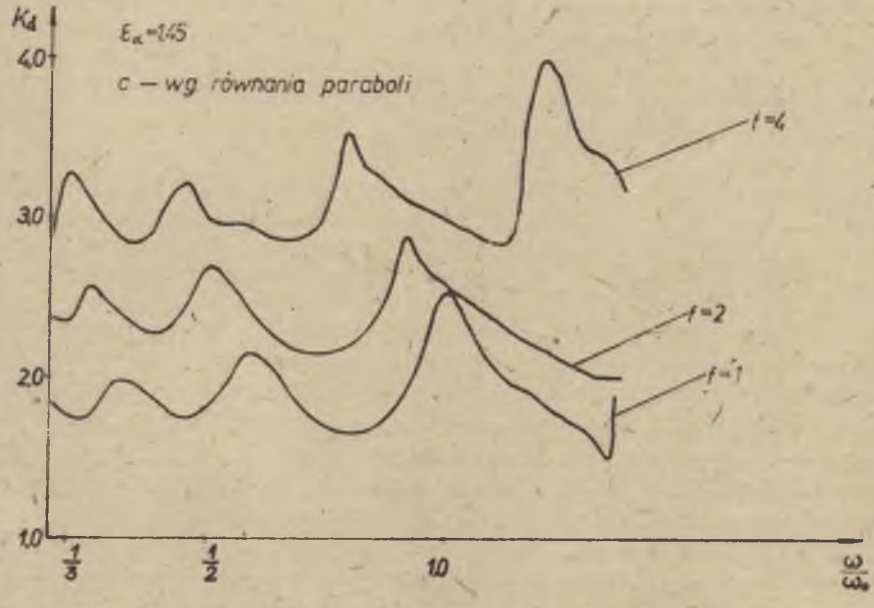
- ze wzrostem wartości odchyłek losowych rosną znacznie odchylenia standardowe wartości współczynnika obciążeń dynamicznych σ_K, stąd przyrost współczynnika $K_{dó}$ jest duży, podczas gdy współczynnik K_{dm} tylko nieznacznie rośnie; można także stwierdzić, że w przekładniach dokładnie wykonanych silnie obciążonych o hartowanych zębach, w których wartość odchyłek jest bliska wartości ugięcia statycznego ($V_p = 1$), wartości współczynnika $K_{dó}$ są mniejsze niż w przekładniach słabo obciążonych o zębach nieutwardzanych, wykonanych w tej samej klasie dokładności ($V_p=4$), ze względu na różnice względnych wartości odchyłek w obu rozpatrywanych przypadkach,
- w przypadku gdy sztywność jednej pary zębów jest zmienna na odcinku przyporu, wartości współczynników K_{dm} i $K_{dó}$ są znacznie mniejsze od odpowiednich wartości tych współczynników dla przekładni o stałej sztywności, co wykazano również w rozdziale 5.2.

W oparciu o dwa przykłady, na rysunkach 7.11 i 7.12 przedstawiono wartości współczynników K_{dm} i $K_{dó} = f(\omega/\omega_o)$, wyznaczone przy założeniu jednoczesnego występowania losowych i okresowych odchyłek zazębienia. Na podstawie wyników obliczeń zamieszczonych na tych rysunkach można wysnuć następujący wniosek:

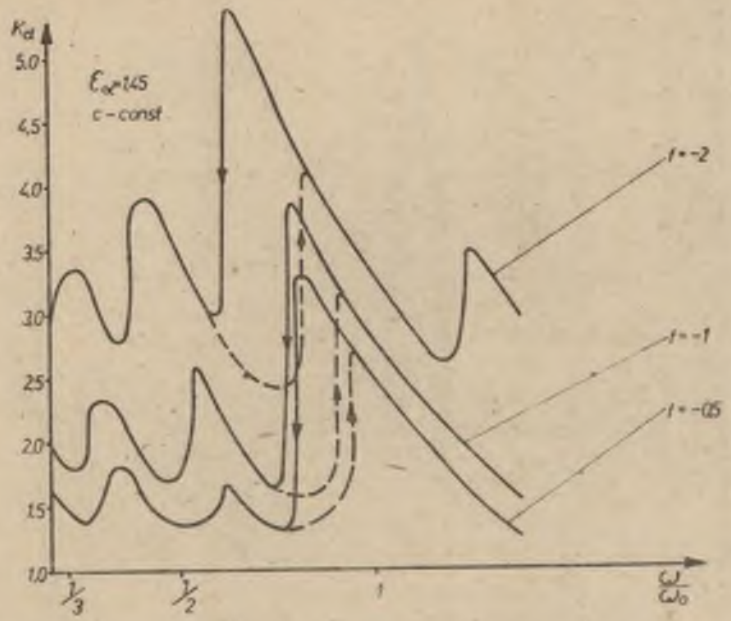
- przebieg współczynnika K_{dm}, a więc i średniej wartości maksymalnych obciążeń dynamicznych w funkcji prędkości, zależy głównie od wartości i znaku odchyłek okresowych, natomiast w mniejszym stopniu od wartości odchyłek losowych; ze wzrostem odchyłek losowych rośnie natomiast odchylenie standardowe wartości współczynnika obciążeń dynamicznych σ_K i wartość współczynnika $K_{dó}$.



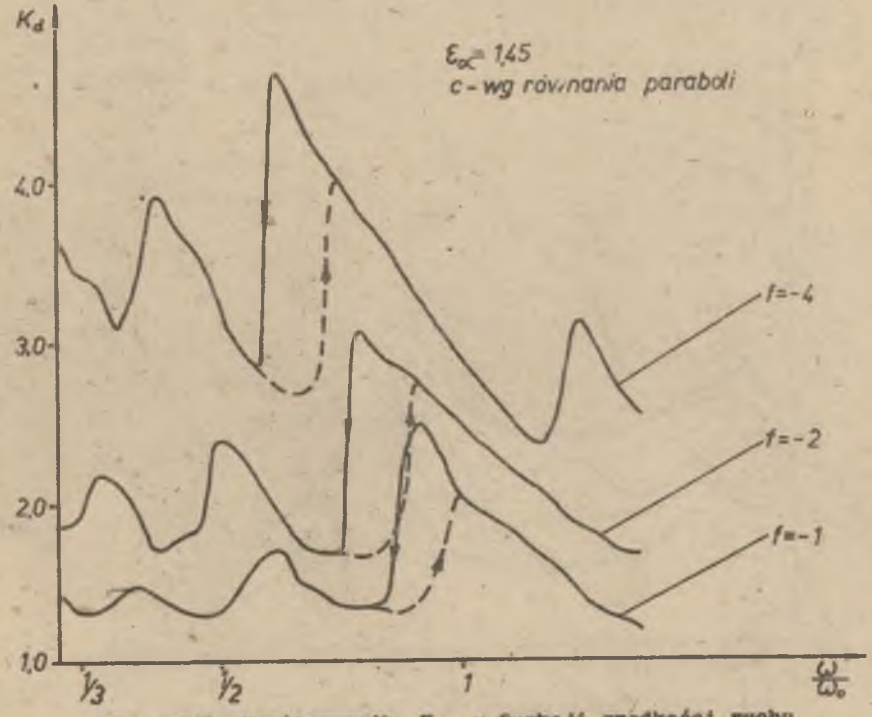
Rys. 7.5. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



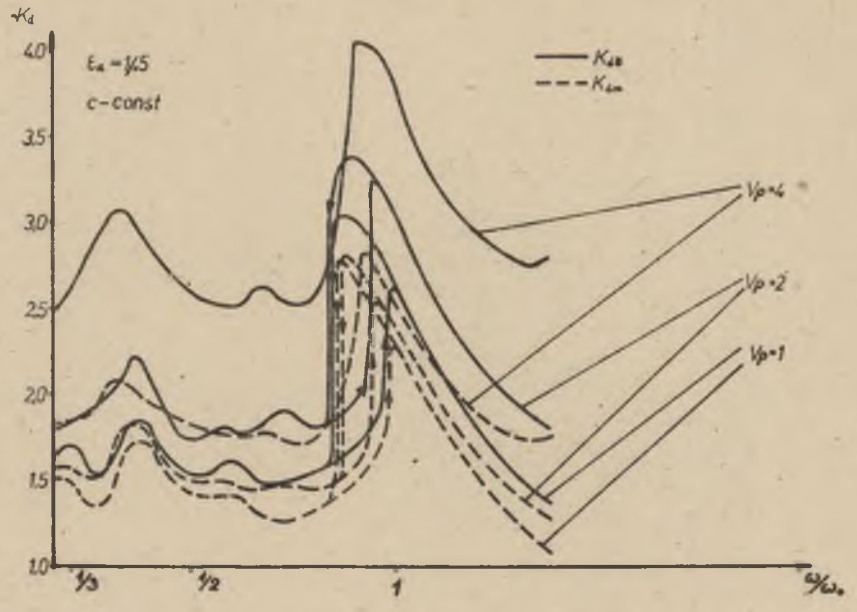
Rys. 7.6. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



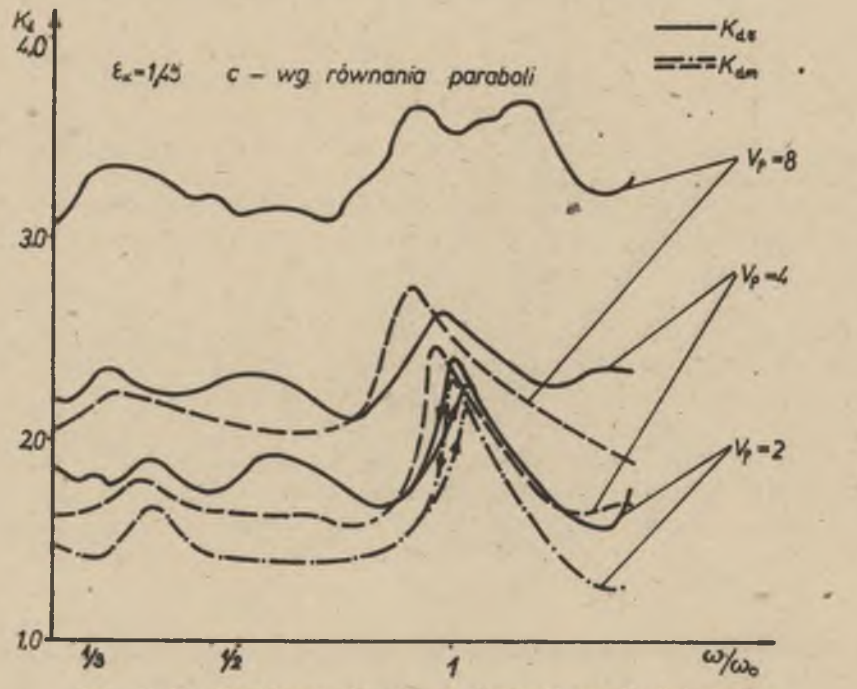
Rys. 7.7. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



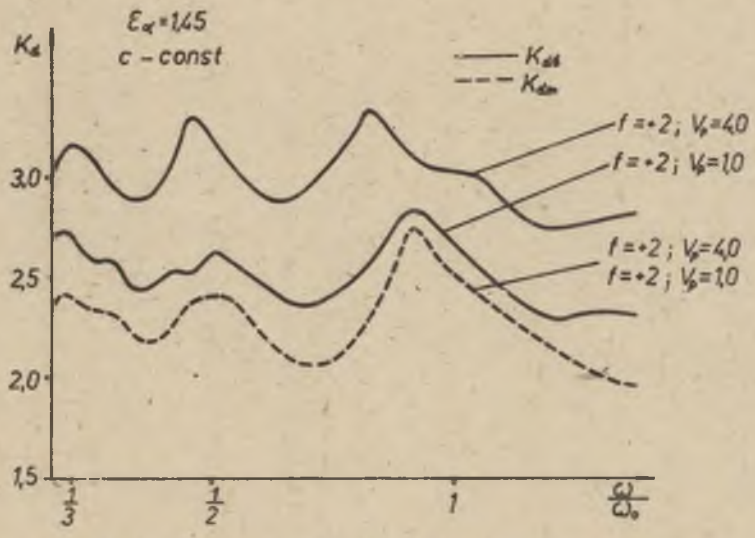
Rys. 7.8. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



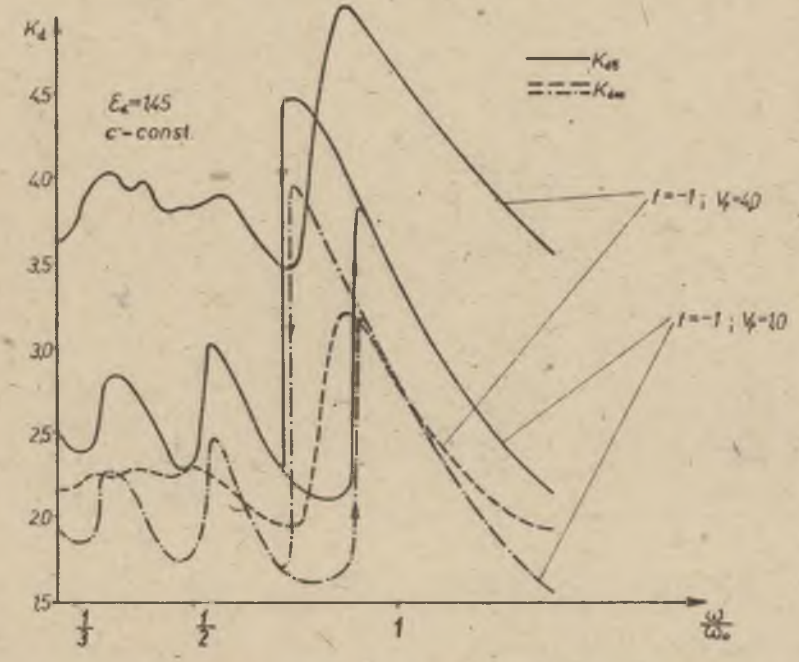
Rys. 7.9. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



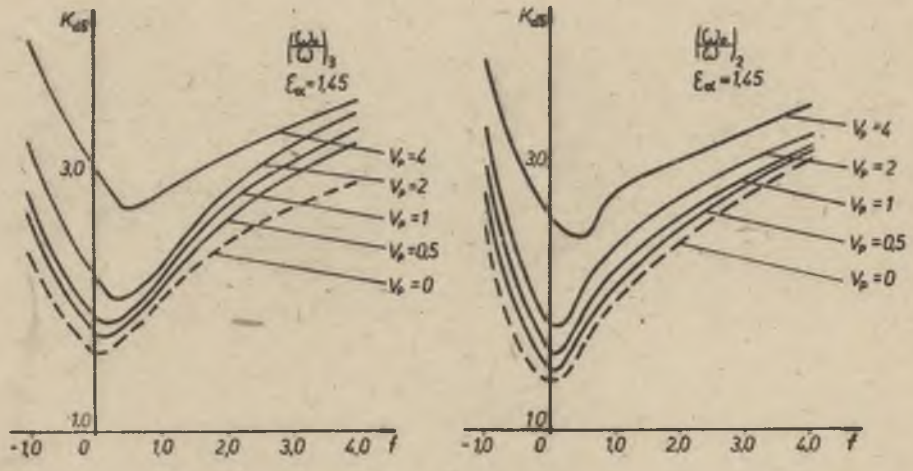
Rys. 7.10. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



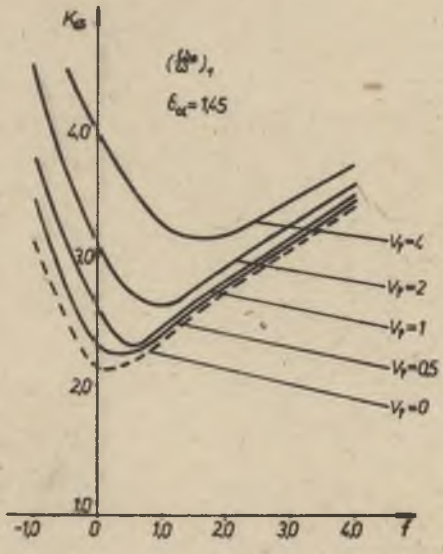
Rys. 7.11. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



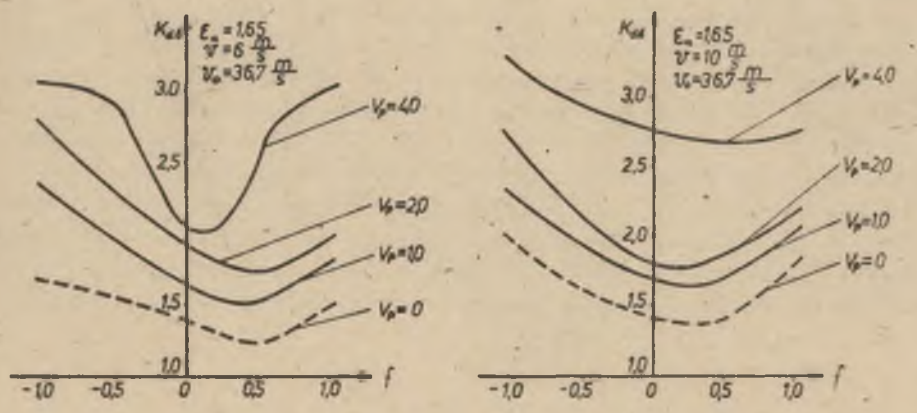
Rys. 7.12. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



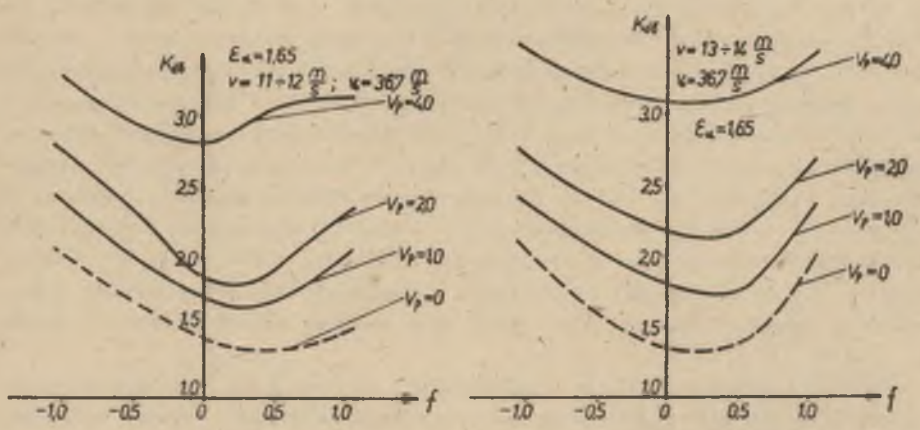
Rys. 7.13. i 7.14. Zależność współczynnika $K_{dś}$ od wartości odchyłek losowych i okresowych



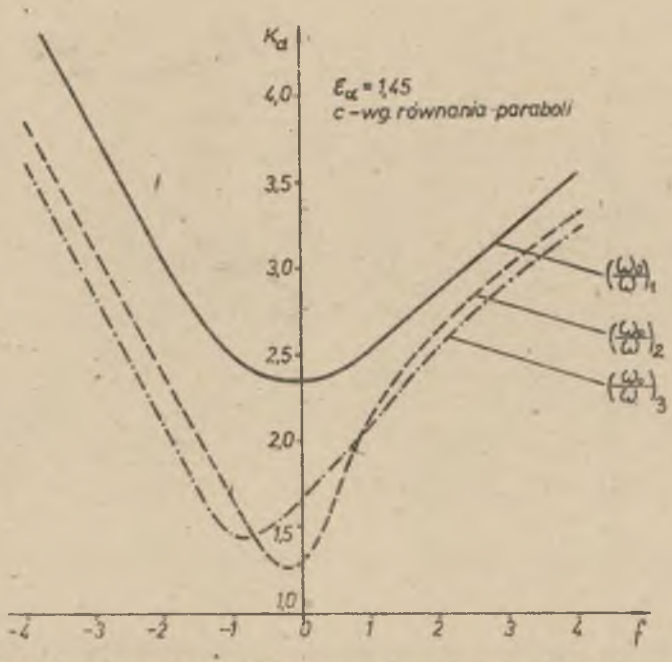
Rys. 7.15. Zależność współczynnika $K_{dś}$ od wartości odchyłek losowych i okresowych



Rys. 7.16 i 7.17. Zależność współczynnika $K_{dó}$ od wartości odchyłek losowych i okresowych



Rys. 7.18 i 7.19. Zależność współczynnika $K_{dó}$ od wartości odchyłek losowych i okresowych



Rys. 7.20. Zależność współczynnika K_d od wartości odchyłek okresowych

7.7. Zestawienie wyników obliczeń

Wyniki obliczeń współczynnika obciążeń dynamicznych, przy założeniu stałej sztywności jednej pary zębów dla zazębienia obarczonego odchyłkami losowymi i okresowymi o różnych wartościach i znaku, zestawiono na rysunkach 7.13 do 7.19. Poszczególne rysunki odpowiadają określonym prędkościom ruchu. Wykresy przedstawione na rysunkach 7.13 do 7.15 wykonano dla przypadku wskaźnika zazębienia $\varepsilon_\alpha = 1{,}45$ oraz jednostajnego rozkładu odchyłek losowych, natomiast na rysunkach 7.16 do 7.19 zamieszczono wykresy otrzymane przy założeniu $\varepsilon_\alpha = 1{,}65$ i normalnego rozkładu odchyłek losowych. Z tego względu wartości współczynnika $K_{dó}$ dla obu przypadków nie mogą być bezpośrednio porównywane. Na rysunku 7.20 przedstawiono wartości współczynnika K_d w zależności od wartości i znaku odchyłek okresowych w przypadku gdy sztywność jednej pary zębów jest zmienna wzdłuż odcinka przyporu.

Analizując wyniki obliczeń przedstawione na wykresach zbiorczych można zauważyć, że zarówno w przekładniach, w których odchyłki losowe zazębienia nie występują, jak i w przypadku ich występowania, krzywe współczynnika obciążeń dynamicznych w zależności od wartości i znaku odchyłek okresowych są niesymetryczne. Współczynnik $K_{dó}$ rośnie monotonicznie ze wzro-

stem bezwzględnej wartości ujemnej odchyłki, natomiast w przypadku odchyłek dodatnich wzrost nie jest monotoniczny. Minimalna wartość tego współczynnika występuje nie w przypadku, gdy okresowa odchyłka zazębienia jest równa zero, lecz gdy jej wartość jest dodatnia i wynosi od 0,3 do 0,5 Y_{st} a nawet 1,5 Y_{st}, dla przekładni z losowymi odchyłkami o nierównomierności $V_p = 4$, pracującej w zakresie głównego rezonansu. Omawiane wyniki obliczeń potwierdzają rezultaty badań analitycznych przedstawionych w pracy [L.42]. Przenosząc wyniki obliczeń do rzeczywistej przekładni można stwierdzić, że bardziej korzystne są odchyłki okresowe o znaku dodatnim od odchyłek o znaku ujemnym. Z tego względu zaleca się wykonywać w praktyce produkcyjnej podziałki kół napędzających nieco większe od podziałek kół napędzanych.

Różnice pomiędzy odpowiednimi wartościami współczynnika K_d, wyznaczonymi dla okresowych odchyłek o tej samej wartości bezwzględnej, lecz o różnym znaku, są duże w przypadku stałej sztywności zębów, a więc w kołach wykonanych w postaci wieńców zębatych, natomiast w przypadku zmiennej sztywności zębów (rys. 7.20), tj. w kołach pełnych, są znacznie mniejsze.

8. ANALIZA WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH PRZEKŁADNI O MODYFIKOWANYM ZARYSIE ZĘBÓW

W kołach zębatych wykonanych dokładnie występują podczas ruchu znaczne obciążenia dynamiczne, szczególnie w stanach rezonansowych.

Przyczyną drgań, względnie sił dynamicznych, jest w tym przypadku okresowa zmiana sztywności wywołana zmianą liczby par zębów pozostających w zazębieniu. Dla zmniejszenia efektów dynamicznych spowodowanych zmianą sztywności stosuje się w praktyce produkcyjnej modyfikację zarysu zęba. Zastosowanie modyfikacji wpływa również korzystnie na zwiększenie dopuszczalnego obciążenia, względnie współczynnika pewności na zatarcie zazębienia [L. 38]. Korzystne działanie modyfikacji polega w tym przypadku na zmniejszeniu siły międzyzębnej w strefie dużych poślizgów, przy jednoczesnym wzroście siły w strefie małych poślizgów (rys. 8.1). Zasady projektowania modyfikacji zarysu przedstawiono w pracy [L. 42]. Ze względów technologicznych zwykle modyfikuje się tylko zęby zębnika (rys. 8.1). Całkowitą długość odcinka przyporu e dzieli się na trzy odcinki: a, b_m, c. Najczęściej długości poszczególnych odcinków dobiera się wg następujących wzorów:

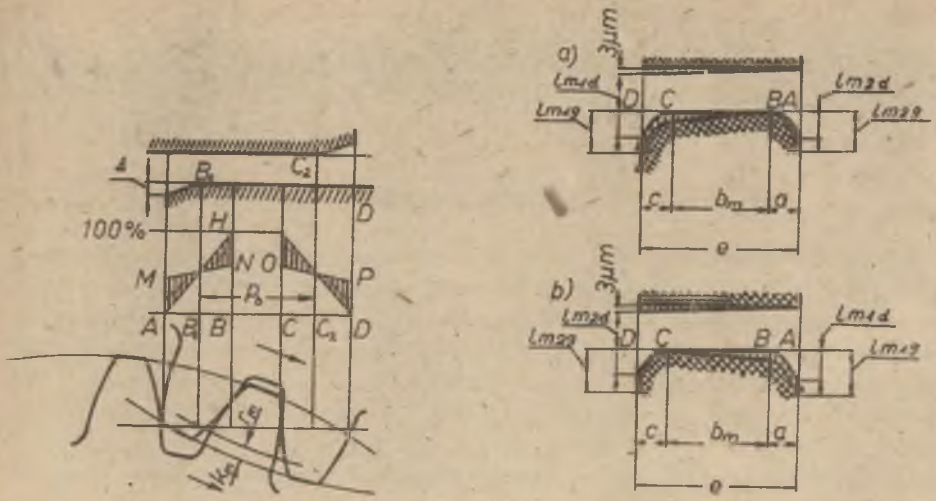
$$a \leq \frac{e - p_b}{2}, \tag{8.1}$$

$$b_m = p_b, \qquad c = \frac{e - p_b}{2},$$

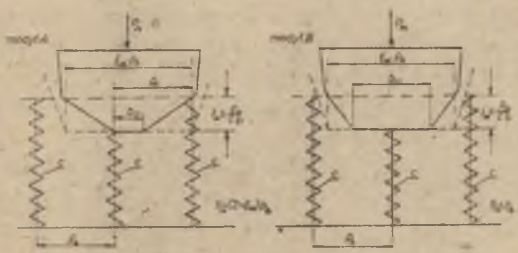
Głębokość modyfikacji l_m jest równa natomiast liczbowo ugięciu statycznemu pojedynczej pary zębów, powiększonemu o wartość dopuszczalnych odchyłek wykonania. Jak z tego wynika, głębokość modyfikacji dostosowana jest do wartości przenoszonego obciążenia, któremu odpowiada określone ugięcie statyczne. W przypadku gdy zachodzi potrzeba znacznego obniżenia efektów dynamicznych w przekładni, stosuje się inny sposób modyfikacji, po tzw. "długiej ewolwencie" [L. 37, 42]. Wtedy długość odcinka niemodyfikowanego zęba (rys. 8.1)

$$b_m = (2 - \varepsilon_\alpha)\, p_b. \tag{8.2}$$

Wpływ omawianych sposobów modyfikacji zarysu zęba na zjawiska dynamiczne w przekładni może być analizowany w oparciu o model dynamiczny przekładni. Kształt bryły, odpowiadający rozpatrywanym wyżej sposobom modyfikacji, przedstawiono na rys. 8.2. Jak widać, długość poziomego odcinka dol-



Rys. 8.1. Rozkład obciążenia wzdłuż odcinka przyporu dla kół modyfikowanych; zasady projektowania modyfikacji dla a) przekładni zmniejszającej, b) przekładni zwiększającej prędkość obrotową



Rys. 8.2. Model dynamiczny przekładni o modyfikowanym zarysie zębów

nej krawędzi bryły wynosi w pierwszym przypadku $b_m = p_b$, natomiast w drugim $b_m = (2 - \varepsilon_\alpha) p_b$, głębokość modyfikacji jest w obu przypadkach identyczna; jest ona równa ugięciu statycznemu pojedynczej sprężyny. Szczegółową analizę quasi-statycznych przemieszczeń bryły w modelu dla przekładni modyfikowanych, wykonanych bezbłędnie, przeprowadzono w pracy [L. 37].

Jak wynika z rozważań teoretycznych i badań doświadczalnych [L. 37, 44, 81] wpływ modyfikacji zarysu zęba na zmniejszenie efektów dynamicznych jest ograniczony wskutek oddziaływania różnych odchyłek wykonawczych zazębienia, które występują w rzeczywistej przekładni. Jednocześnie, na efektywność modyfikacji wpływa wartość obciążenia przenoszonego przez przekładnię. W pracy przeprowadzono analizę dynamiczną obu omawianych sposobów modyfikacji, a także ocenę wpływu losowych odchyłek zazębienia oraz wartości przenoszonego obciążenia na efektywność modyfikacji. Jako miarę efektywności modyfikacji przyjęto względne obniżenie nadwyżek dynamicznych

($K_{dó}$ - 1) przekładni z modyfikacją zębów w stosunku do niemodyfikowanej, w ustalonych warunkach pracy (rys. 8.12).

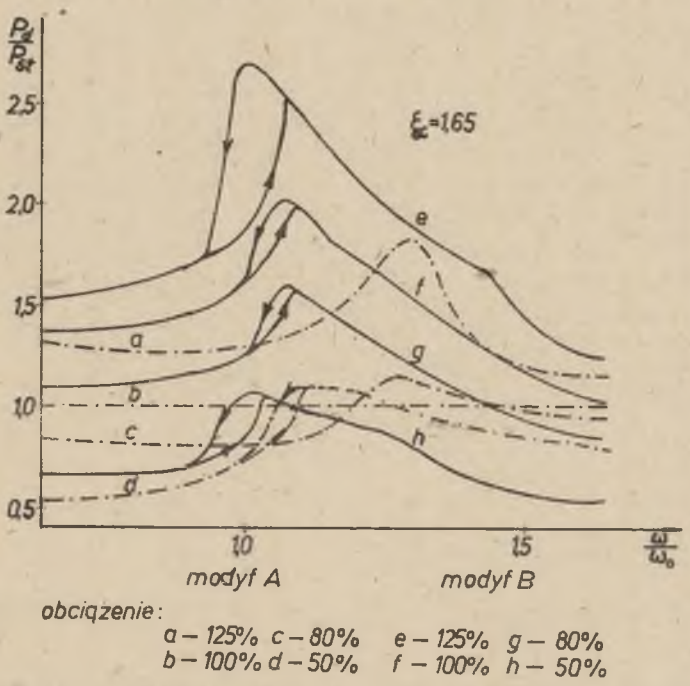
8.1. Wyniki obliczeń

Wyniki rozwiązań równania ruchu przedstawiono w postaci wykresów (rys. 8.3 do 8.19). W równaniach założono stałą sztywność pojedynczej pary zębów, wartość czołowego wskaźnika przyporu $\varepsilon_\alpha = 1{,}65$ lub 1,45 oraz wartość współczynnika tłumienia $\varphi = 0{,}1$. W pracy porównano wartości współczynnika sił dynamicznych dla przekładni niemodyfikowanych oraz z modyfikacją zazębienia wykonaną w różny sposób, tj. gdy długość odcinka niemodyfikowanego $b_m = (2 - \varepsilon_\alpha)\, p_b$ (modyfikacja A) oraz gdy $b_m = p_b$ (modyfikacja B). Wyniki porównań efektów dynamicznych obu rozpatrywanych sposobów modyfikacji w przekładni wykonanej bezbłędnie przedstawiono na rys. 8.3. Obliczenia przeprowadzono przy obciążeniach równych 100, 125, 80 oraz 50% obciążenia nominalnego, tzn. odpowiedniego dla założonej głębokości modyfikacji. Prędkość ruchu zmieniano w tym przypadku od wartości 2/3 do $1{,}5\omega/\omega_o$ a więc w zakresie, w którym występuje główny rezonans w przekładni niemodyfikowanej. Efektywność modyfikacji zarysu zęba zależy zarówno od obciążenia, jak i wartości odchyłek losowych zazębienia. Ocenę efektywności obu rozpatrywanych sposobów modyfikacji przeprowadzono dla jednostopniowej przekładni zębatej o następujących parametrach: $z_1 = z_2 = 30$, $m = 5$ mm, $\varepsilon_\alpha = 1{,}65$, wskaźnik obciążenia $Q = 3{,}1$ N/mm^2 odpowiada przekładniom silnie obciążonym, ugięcie statyczne pojedynczej pary zębów przy obciążeniu nominalnym $Y_{st} = 28{,}2$ μm, prędkość krytyczna $v_o = 36{,}7$ m/s.

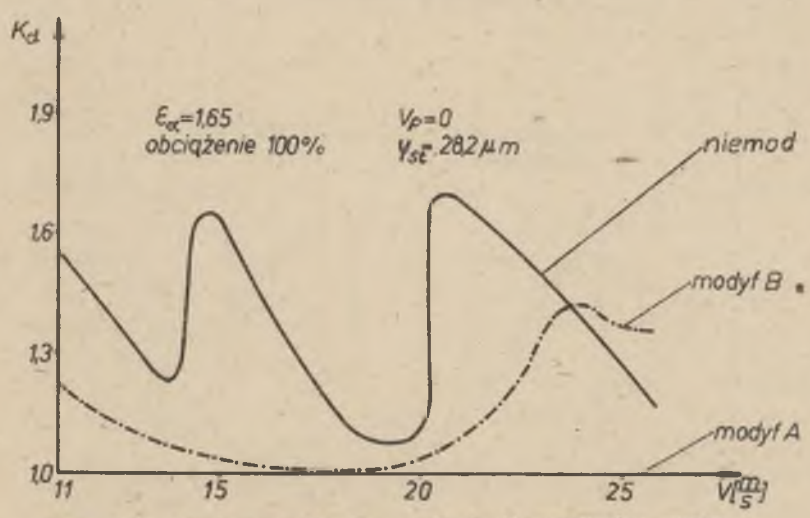
Wyniki rozwiązań równania ruchu, otrzymane metodą Rungego-Kutty za pomocą EMC zamieszczono na rysunkach 8.4 do 8.11. Poszczególne wykresy przedstawiają zależność współczynnika K_d lub $K_{dó} = f(v)$ dla przekładni niemodyfikowanych oraz z modyfikacją zazębienia A lub B przy założeniu obciążeń równych: 100 % (rys. 8.4, 8.5), 125 % (rys. 8.6, 8.7), 80% (rys. 8.8 8,9) i 50% (rys. 8.10, 8.11) wartości nominalnej. Prędkość ruchu v zmieniano w zakresie od 11 do 26 m/s. Zakres zmiany prędkości obejmował dwa lokalne rezonansy, oznaczone umownie na rysunkach przez $(\omega_o/\omega)_3$ oraz $(\omega_o/\omega)_2$. Rozpatrywano koła wykonane bezbłędnie oraz obarczone losowymi odchyłkami podziału o nierównomierności V_p. Przyjmowane w obliczeniach wartości liczbowe odchyłek przypadkowych stanowiły ciąg liczb o rozkładzie normalnym. Wykresy zbiorcze wyników obliczeń zamieszczono na rysunkach 8.12 do 8.15.

Modyfikacja zarysu zęba wpływa na zmianę rozkładu obciążenia dynamicznego na odcinku przyporu, co ma istotne znaczenie z punktu widzenia wytrzymałości zazębienia. Rozwiązując równanie różniczkowe 2.9 metodą Eulera wyznaczono przykładowe rozkłady tych obciążeń przy różnych prędkościach ruchu ω/ω_o dla przekładni z modyfikacją zębów A (rys. 8.16, 8.18) oraz

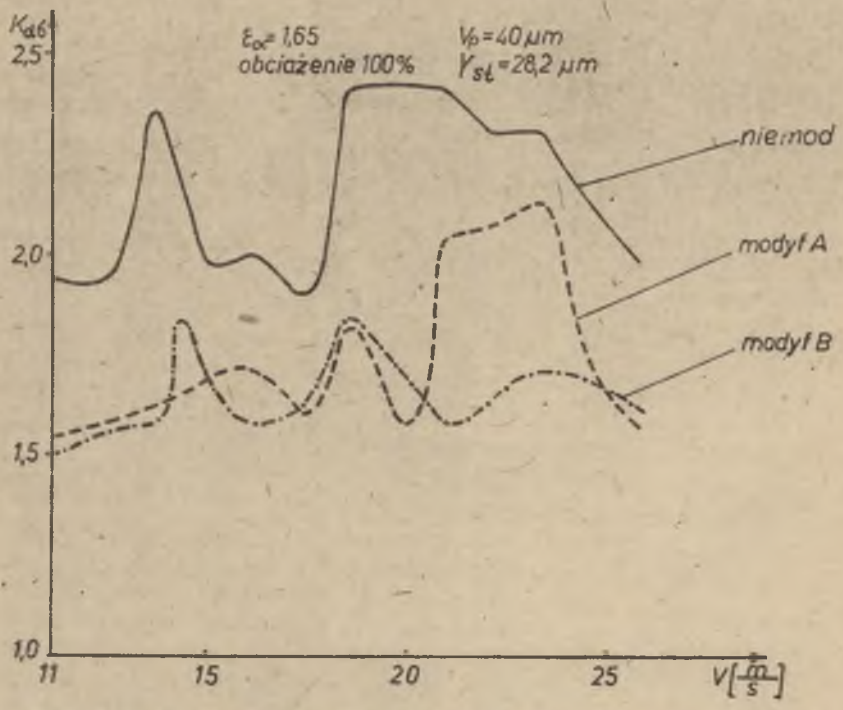
B (rys. 8.17, 8.19), wykonanych bezbłędnie (górny wykres) względnie obarczonych losowymi odchyłkami podziału (dolny wykres), przy założeniu wskaźnika zazębienia $\varepsilon_\alpha = 1{,}45$.



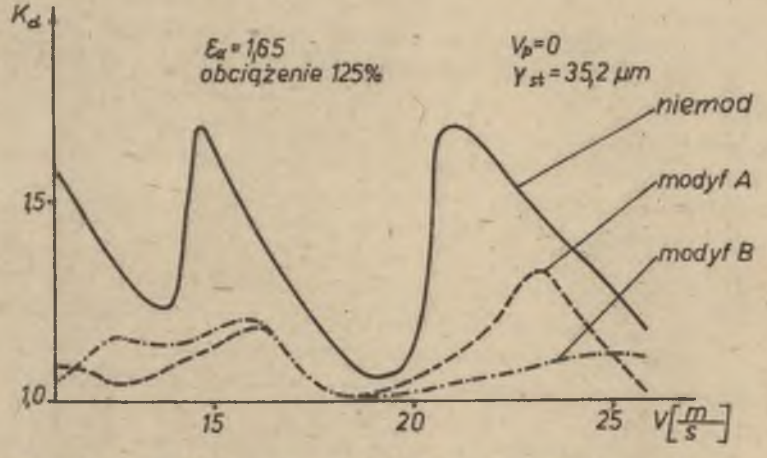
Rys. 8.3. Obciążenia dynamiczne zazębienia o modyfikowanym zarysie w funkcji prędkości ruchu



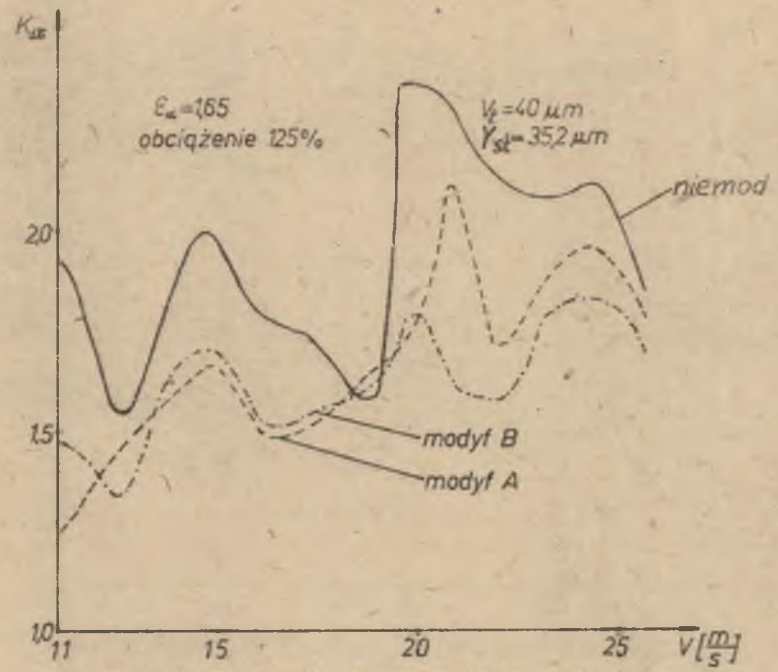
Rys. 8.4. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



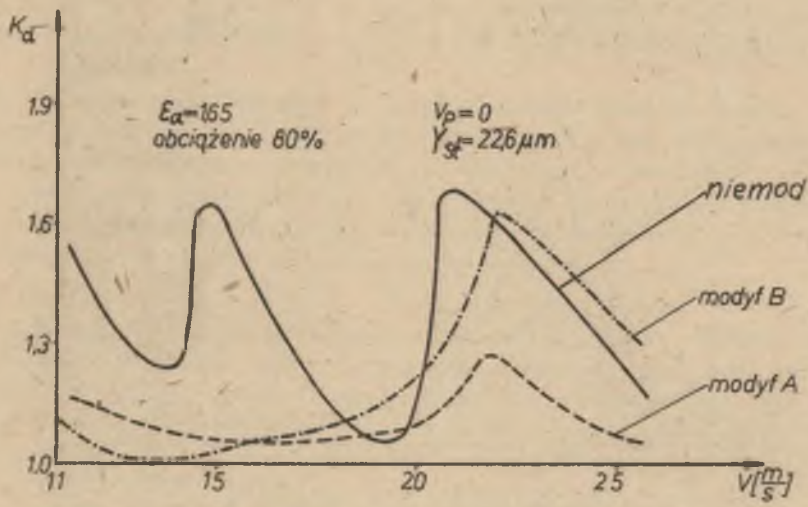
Rys. 8.5. Współczynnik $K_{dó}$ w funkcji prędkości ruchu



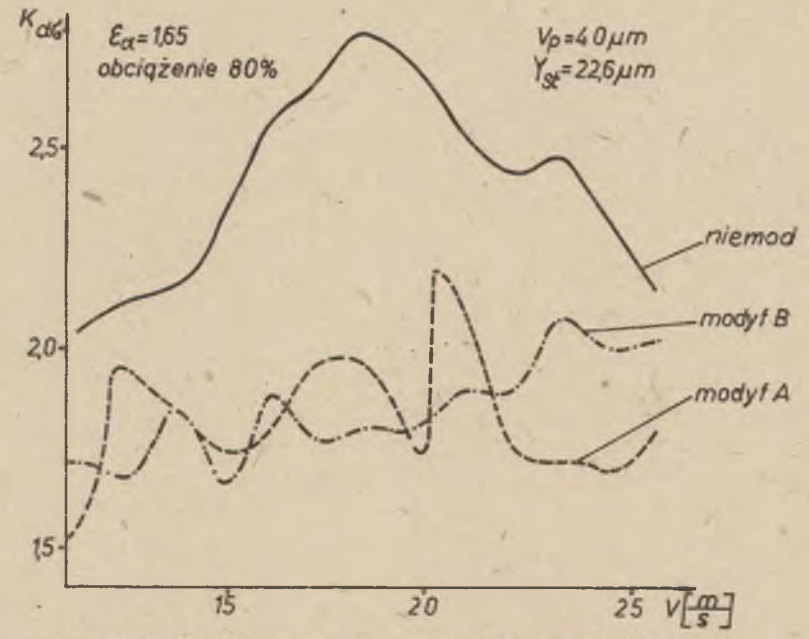
Rys. 8.6. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



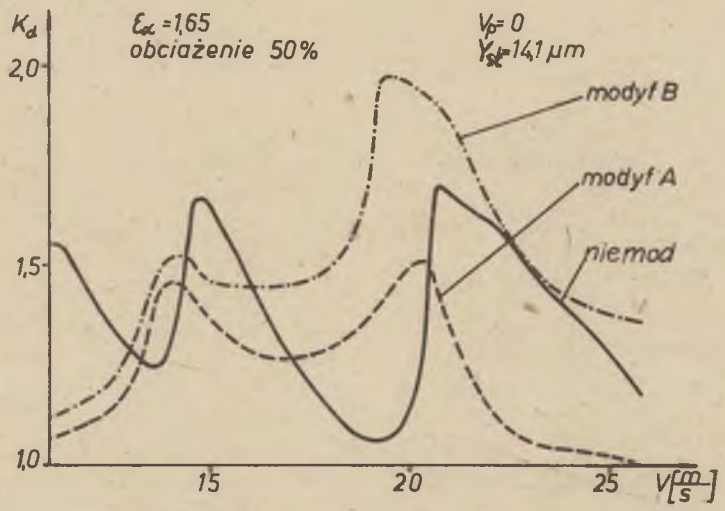
Rys. 8.7. Współczynnik $K_{dó}$ w funkcji prędkości ruchu



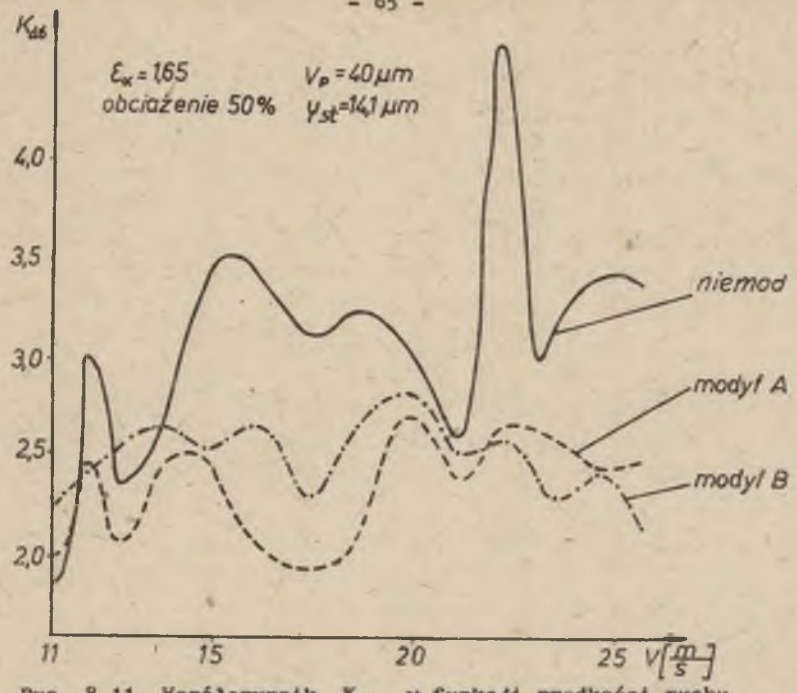
Rys. 8.8. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



Rys. 8.9. Współczynnik $K_{dб}$ w funkcji prędkości ruchu



Rys. 8.10. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



Rys. 8.11. Współczynnik $K_{dś}$ w funkcji prędkości ruchu

8.2. Analiza wyników obliczeń

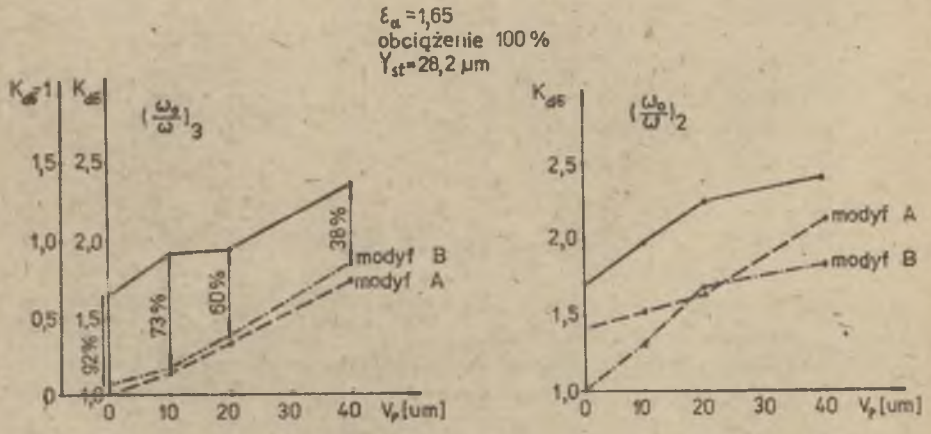
Podstawą analizy są wyniki obliczeń numerycznych przedstawione w pracy w postaci wykresów współczynnika $K_{dś} = f(v)$ oraz zmian obciążeń dynamicznych na odcinku przyporu. Wyniki te będą analizowane pod kątem efektywności obu rozpatrywanych sposobów modyfikacji oraz wytrzymałości zazębienia.

Rys. 8.3 przedstawia zależność od prędkości ruchu maks. wartości siły dynamicznej w zazębieniu P_d, odniesionej do wartości siły statycznej P_{st} przy obciążeniu nominalnym. Na rysunku tym porównano efekty dynamiczne obu rozpatrywanych sposobów modyfikacji, przy założeniu bezbłędnego wykonania kół, w różnych warunkach obciążenia przekładni. Na podstawie wyników zamieszczonych na tym rysunku można wysunąć następujące wnioski:

- w przekładni z modyfikacją zębów A (po "długiej ewolwencie") wykonanej bezbłędnie, w przypadku obciążenia nominalnego, tj. odpowiedniego dla założonej głębokości modyfikacji, siły utrzymują się na poziomie obciążenia statycznego w całym zakresie prędkości ruchu (linia b jest pozioma); natomiast w przekładni z modyfikacją zębów B, pracującej w tych samych warunkach, współczynnik obciążeń dynamicznych P_d/P_{st} jest duży i przekracza w strefie głównego rezonansu wartość 2,

- w rozpatrywanym przypadku przeciążenia przekładni (125% obciążenia nominalnego), modyfikacji A towarzyszą w strefie głównego rezonansu mniejsze obciążenia dynamiczne niż modyfikacji B, przy czym w tym drugim przypadku występuje odrywanie zębów i objawy niestacjonarności,
- w przypadku obciążenia wynoszącego 80% wartości nominalnej, modyfikacji B odpowiadają większe wartości współczynnika K_d w strefie głównego rezonansu niż modyfikacji A, natomiast przy obciążeniu wynoszącym 50% wartości tego współczynnika są zbliżone dla obu sposobów modyfikacji, przy czym występują objawy niestacjonarności drgań.

Rys. 8.4 do 8.11 przedstawiają zależność współczynnika $K_{d\delta} = f(v)$ dla przekładni niemodyfikowanych oraz z modyfikacją zębów A lub B, silnie obciążonych, przy założeniu losowych odchyłek podziału zazębienia. Wykresy zbiorcze, przedstawiające zależność współczynnika sił dynamicznych od wartości losowych odchyłek przy ustalonej prędkości ruchu, zamieszczono natomiast na rys. 8.12 do 8.15.

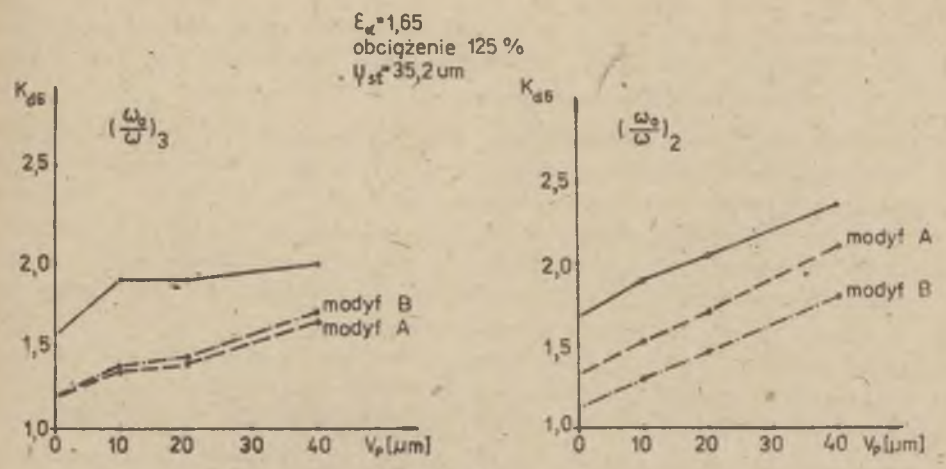


Rys. 8.12. Zależność współczynnika $K_{d\delta}$ od wartości losowych odchyłek zazębienia

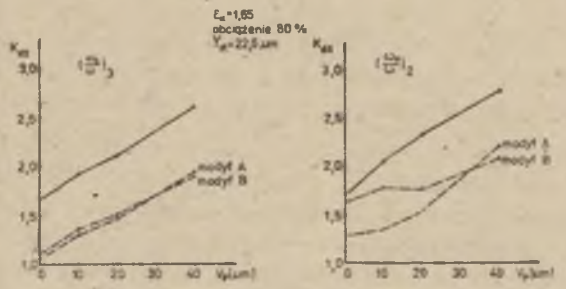
Wyniki obliczeń przedstawione na omawianych rysunkach dotyczą przekładni o parametrach podanych w poprzednim rozdziale. Wyniki te można uogólnić przez wprowadzenie bezwymiarowych parametrów zgodnie z rozdziałem 2.2, a więc zamiast prędkości v na osi odciętych wykresów można odmierzać stosunek prędkości ruchu do prędkości krytycznej v/v_o, natomiast wartość odchyłek można odnosić do ugięcia statycznego pojedynczej pary zębów Y_{st}.

Na podstawie wyników zamieszczonych na tych rysunkach można wyciągnąć następujące wnioski:

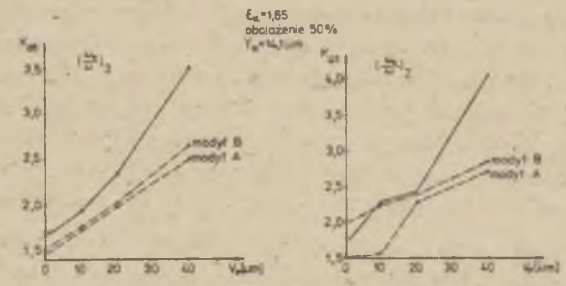
- w przypadku przekładni wykonanej bezbłędnie, pracującej przy obciążeniu nominalnym (odpowiednim dla założonej głębokości modyfikacji), zarówno



Rys. 8.13. Zależność współczynnika $K_{d\delta}$ od wartości losowych odchyłek zazębienia



Rys. 8.14. Zależność współczynnika $K_{d\delta}$ od wartości losowych odchyłek zazębienia



Rys. 8.15. Zależność współczynnika $K_{d\delta}$ od wartości losowych odchyłek zazębienia

zastosowanie modyfikacji B, jak i A wpływa na zmniejszenie współczynnika K_d, przy czym bardziej korzystna jest modyfikacja A, przy której nie występują nadwyżki dynamiczne,

- w miarę zwiększania się odchyłek podziału zmniejsza się wartość względnego obniżenia nadwyżki dynamicznej ($K_{dó}$ - 1) przekładni z modyfikacją zębów w stosunku do niemodyfikowanej (rys. 8.12), a więc maleje efektywność modyfikacji; w przypadku gdy nierównomierność losowych odchyłek V_p = = 20 μm (około 0,7 Y_{st}), co odpowiada 5 klasie dokładności wg PN wartości współczynnika $K_{dó}$ dla obu rozpatrywanych sposobów modyfikacji są zbliżone, natomiast przy większych odchyłkach o nierównomierności V_p = = 40 μm (około 1,4 Y_{st}), co odpowiada 7 klasie dokładności wg PN, istnieją zakresy prędkości, w których modyfikacji A towarzyszą większe obciążenia dynamiczne niż modyfikacji B (rys. 8.5),

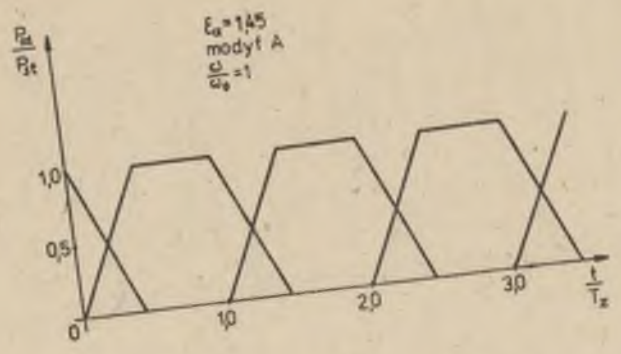
- w przypadku przeciążenia (125% obciążenia nominalnego), efektywność obu sposobów modyfikacji w przekładni wykonanej bezbłędnie jest mniejsza niż przy obciążeniu nominalnym, przy czym maleje ona znacznie ze wzrostem wartości odchyłek zazębienia,

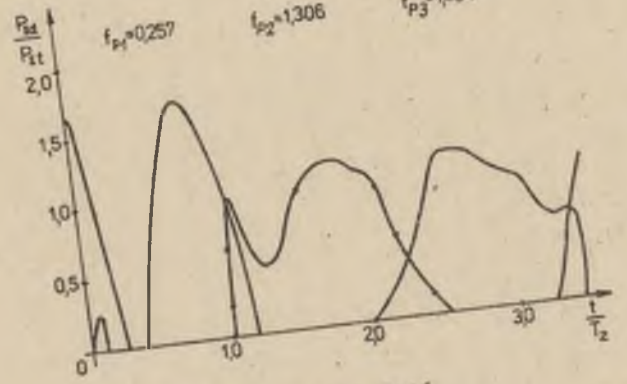
- w przypadku przeciążenia w zakresie małych prędkości ruchu poniżej prędkości v/v_o = 1/2, współczynnik $K_{dó}$ dla obu rozpatrywanych sposobów modyfikacji niewiele się różni, natomiast w strefie lokalnego rezonansu dla przekładni niemodyfikowanej przy prędkości v/v_o = 1/2, modyfikacji A towarzyszą większe nadwyżki dynamiczne niż modyfikacji B (rys. 8.6),

- w przypadku niedociążenia, przy założeniu losowych odchyłek zazębienia, wartości współczynnika $K_{dó}$ zarówno dla przekładni z modyfikacją zębów jak i niemodyfikowanych są większe od odpowiednich wartości tego współczynnika w przekładniach pracujących przy obciążeniu nominalnym wskutek zmniejszenia się ugięcia statycznego zazębienia, co prowadzi do jednoczesnego wzrostu względnych wartości odchyłek odniesionych do tego ugięcia,

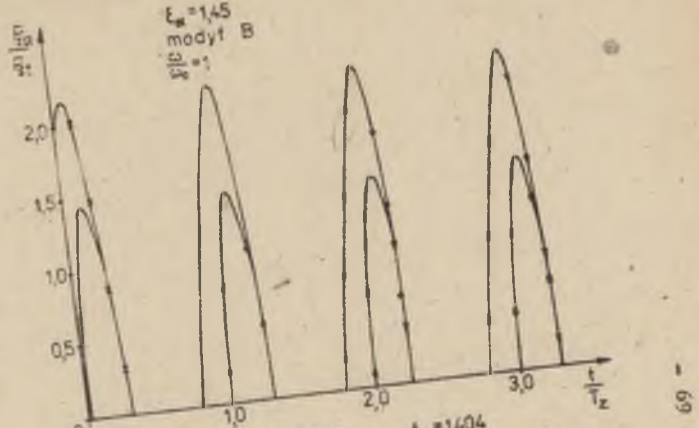
- w przypadku niedociążenia, w przekładni wykonanej dokładnie (w 5 klasie dokładności wg PN) pracującej przy prędkościach ruchu w pobliżu v/v_o = 1/2, zastosowanie modyfikacji A wpływa na wyraźne zmniejszenie wartości sił dynamicznych w zazębieniu, a zastosowanie modyfikacji B daje wtedy tylko nieznaczne obniżenie tych sił (obciążenie 80%) lub nawet powoduje ich wzrost (obciążenie 50%) w stosunku do przekładni niemodyfikowanych; przy małych prędkościach ruchu w pobliżu v/v_o = 1/3, względnie przy dużych wartościach odchyłek zazębienia, wartości obciążeń dynamicznych dla obu sposobów modyfikacji są zbliżone.

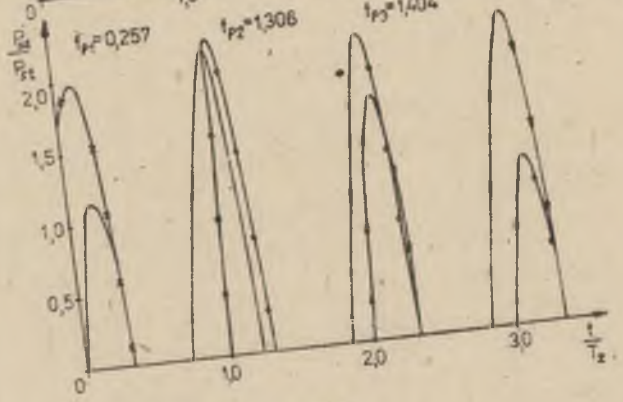
Zastosowanie modyfikacji zarysu zęba wpływa nie tylko na zmiany maksymalnych wartości sił dynamicznych działających w zazębieniu, ale wywołuje również zmiany rozkładów tych sił na odcinku przyporu, co ma istotne znaczenie z punktu widzenia wytrzymałości zazębienia. Na rysunkach 8.16 do





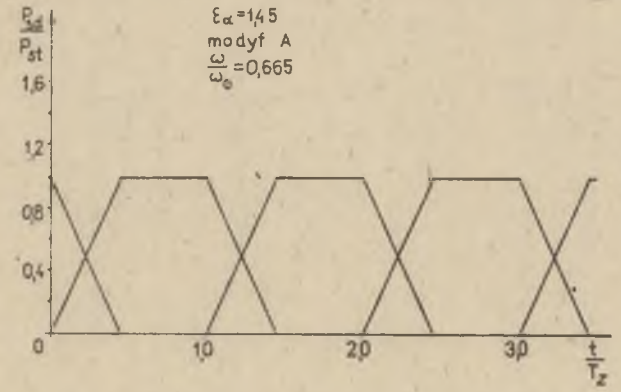
Rys. 8.16

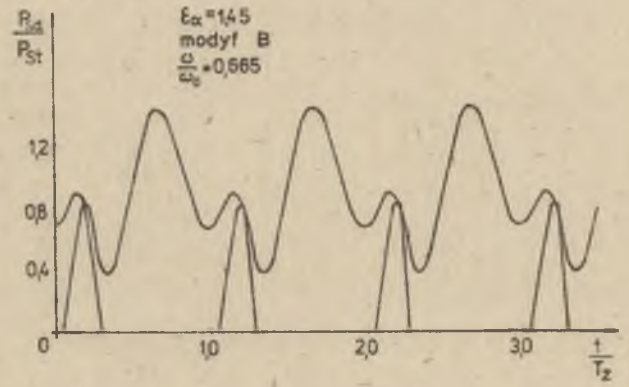


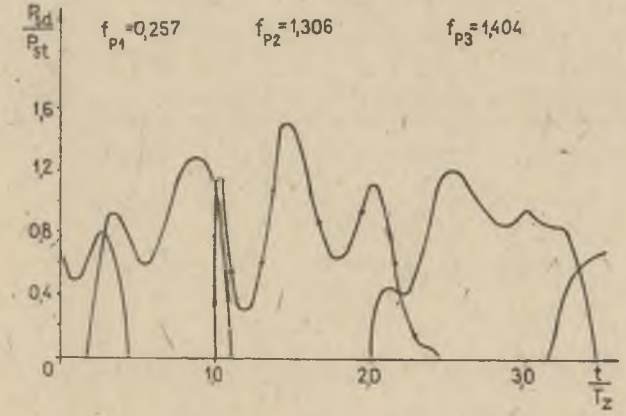


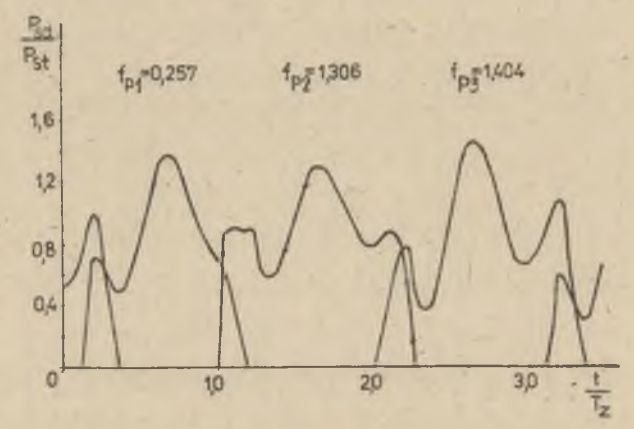
Rys. 8.17

Zmiany obciążeń dynamicznych na odcinku przyporu









Rys. 8.18

Rys. 8.19

Zmiany obciążeń dynamicznych na odcinku przyporu

8.19 przedstawiono przykłady porównania tych rozkładów dla obu rozpatrywanych sposobów modyfikacji A i B, przy bezbłędnym wykonaniu kół (górny wykres) oraz w przypadku występowania losowych odchyłek podziału o rozkładzie jednostajnym, przy założeniu nominalnego obciążenia przekładni. Na podstawie wyników obliczeń zamieszczonych na tych rysunkach można wyciągnąć następujące wnioski:

- w strefie głównego rezonansu (rys. 8.17), przy założeniu obciążenia nominalnego, zastosowanie modyfikacji B prowadzi do zmniejszenia wartości sił dynamicznych na początku odcinka przyporu w stosunku do kół niemodyfikowanych, co korzystnie wpływa na zwiększenie wytrzymałości na złamanie zębów dużego koła i współczynnika pewności na zatarcie (podobny efekt obserwuje się w przypadku zmiennej sztywności pojedynczej pary zębów - rys. 5.11), występuje jednak odrywanie się zębów, a maksymalna wartość siły jest ponad 2 razy większa od obciążenia statycznego, przy czym działa ona w końcowej fazie zazębienia, a więc na wierzchołki zębów zębnika, co jest niekorzystne ze względów wytrzymałościowych,
- w przekładni z modyfikacją zębów A, wykonanej bezbłędnie, pracującej przy prędkości krytycznej (rys. 8.16), nie występują nadwyżki dynamicznej, a rozkład obciążeń na odcinku przyporu odpowiada rozkładowi statycznemu przedstawionemu na rysunku 8.1; natomiast, gdy zazębienie tej przekładni wykazuje losowe odchyłki, nadwyżki dynamiczne są mniejsze niż w przekładni niemodyfikowanej, nie występuje odrywanie się zębów oraz zmniejszają się obciążenia w początkowej i końcowej fazie współpracy kolejnych par zębów, co korzystnie wpływa na wytrzymałość zazębienia i współczynnik pewności na zatarcie,
- w przekładniach wykonanych bezbłędnie pracujących pod obciążeniem nominalnym przy prędkościach ruchu poniżej krytycznej, zastosowanie modyfikacji B (rys. 8.19) prowadzi do zmian rozkładu sił na odcinku przyporu, polegających między innymi na zmniejszeniu się ich wartości w początkowej i końcowej fazie współpracy zębów, natomiast w przypadku modyfikacji A nie występują nadwyżki dynamiczne, a rozkład sił w zazębieniu odpowiada rozkładowi statycznemu (rys. 8.18),
- w przekładniach wykazujących losowe odchyłki zazębienia, pracujących przy prędkościach ruchu poniżej krytycznej, rozkłady obciążeń dynamicznych dla obu sposobów modyfikacji są podobne; obserwuje się obniżenie w porównaniu z przekładnią niemodyfikowaną obciążeń w początkowej fazie współpracy, co jest korzystne ze względów wytrzymałościowych.

W oparciu o wyznaczone numerycznie rozkłady sił dynamicznych w zazębieniu, istnieje możliwość prowadzenia w dalszych pracach szczegółowej analizy wpływu modyfikacji na zjawisko zatarcia kół zębatych za pomocą metody przedstawionej w [L. 38].

8.3. Uwagi końcowe

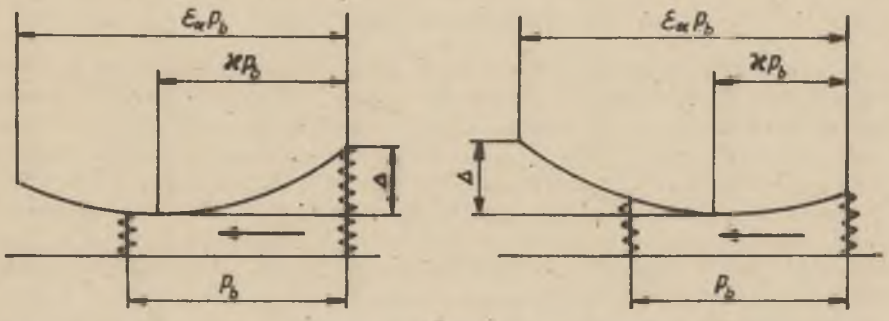
Numeryczna metoda wyznaczania obciążeń dynamicznych może być wykorzystana do analizy i interpretacji zjawisk dynamicznych zachodzących w przekładniach o modyfikowanym zarysie zębów. Jak wynika z tej analizy, modyfikacja zazębienia A (po tzw. "długiej ewolwencie") jest bardziej korzystna od modyfikacji B w przypadku przekładni silnie obciążonych, wykonanych dokładnie (w 3 lub 4 klasie dokładności wg PN), pracujących przy obciążeniu nominalnym lub przy niedociążeniu, szczególnie w zakresie dużych prędkości obrotowych, dochodzących nawet do prędkości głównego rezonansu. Omawiany wniosek, otrzymany na podstawie analizy wyników pracy, zgodny jest z rezultatami badań analitycznych przedstawionych w pracach [L. 37,40,42]. Zaletą modyfikacji A jest w tym przypadku nie tylko znaczne obniżenie współczynnika K_d w porównaniu z przekładniami niemodyfikowanymi, ale również korzystne, ze względów wytrzymałościowych, zmiany rozkładów obciążeń na odcinku przyporu. Efektywność obu sposobów modyfikacji zmniejsza się znacznie ze wzrostem losowych odchyłek zazębienia. W przekładniach o zębach słabo obciążonych, tj. wykonanych ze stali ulepszanych, ugięcia statyczne są mniejsze niż w przekładniach o zębach silnie obciążonych, a stąd wpływ odchyłek jest większy. W tym przypadku modyfikacja zarysu zęba nie prowadzi do istotnego obniżenia wartości współczynnika K_d, ale powoduje korzystne zmiany rozkładu obciążeń dynamicznych na odcinku przyporu, prowadzące do zwiększenia współczynników pewności na złamanie i zatarcie, co uzasadnia jej stosowanie.

W oparciu o wyznaczone numerycznie rozkłady obciążeń dynamicznych możliwe jest prowadzenie w dalszych pracach szczegółowej analizy wytrzymałościowej zazębienia modyfikowanego.

9. WPŁYW NATURALNEGO ZUŻYCIA ZĘBÓW NA WARTOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKA K_d

Wiele przekładni zębatych pracuje w warunkach znacznego zużycia zębów. Jak wynika z badań doświadczalnych [L. 44], omówionych w rozdziale 10, zużycie zębów prowadzi do wzrostu obciążeń dynamicznych, które po pewnym czasie eksploatacji ustalają się na stałym poziomie.

Wpływ zużycia zębów na wartość obciążeń dynamicznych przekładni może być analizowany w oparciu o badania modelowe. W tym przypadku odchyłki zarysu od ewolwenty teoretycznej wywołane zużyciem zęba traktuje się jak odchyłki okresowe, a więc nanosi się je bezpośrednio na odcinku $E_1 E_2$, tj. na dolnej krawędzi bryły modelu (rys. 2.5). Przy projektowaniu zarysu bryły wykorzystano wyniki badań doświadczalnych [L. 44], podczas których przeprowadzono pomiary geometryczne zużytych powierzchni bocznych zęba (rys. 10.4b). Jak widać, w procesie zużywania się zębów następuje przesunięcie ich zarysu w stosunku do ewolwenty teoretycznej przed zużyciem oraz dodatkowe zużycie głowy i stopy zęba. Uwzględniając wyniki tych pomiarów, przyjęto paraboliczny kształt dolnej krawędzi bryły (rys. 9.1). Kształt ten odwzorowuje w przybliżeniu odchyłki zarysu spowodowane zużyciem.



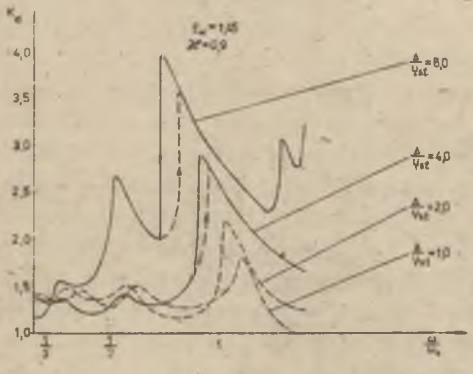
Rys. 9.1. Kształt bryły modelu dynamicznego przekładni o zużytych zębach

9.1. Wyniki obliczeń

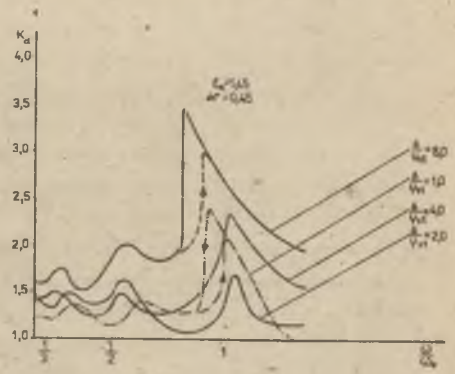
Rozwiązując metodą numeryczną równanie ruchu bryły 2.9 otrzymano zależność współczynnika $K_d = f(\omega/\omega_o)$ dla różnych przypadków zużycia. W obliczeniach przyjęto wartość czołowego wskaźnika zazębienia $\varepsilon_\alpha = 1{,}45$ oraz współczynnika tłumienia $\varphi = 0{,}1$. Rozpatrywano różne położenia na odcinku

przyporu punktu najmniejszego zużycia powierzchni, któremu w modelu odpowiada najniżej położony punkt zarysu bryły.

Położenie tego punktu w modelu przekładni wyznaczone jest za pomocą bezwymiarowej współrzędnej $\varkappa$ (rys. 9.1). Na rysunkach 9.2 i 9.3 przedstawiono zależność współczynnika $K_d = f(\omega/\omega_o)$, wyznaczoną dla dwu różnych wartości parametru $\varkappa$, przy założeniu maksymalnego zużycia Δ/γ_{st} w granicach od 1 do 8. Na podstawie wyników obliczeń wykonano także wykresy zbiorcze (rys. 9.4 do 9.7), które przedstawiają zależność współczynnika K_d od wielkości zużycia Δ/γ_{st} w strefie głównego rezonansu $(\omega_o/\omega)_1$ oraz w zakresie lokalnych rezonansów, przy mniejszych prędkościach $(\omega_o/\omega)_2$ oraz $(\omega_o/\omega)_3$.



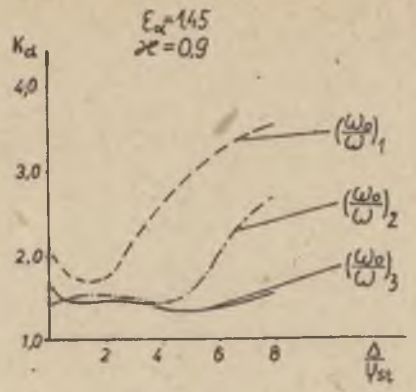
Rys. 9.2. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu



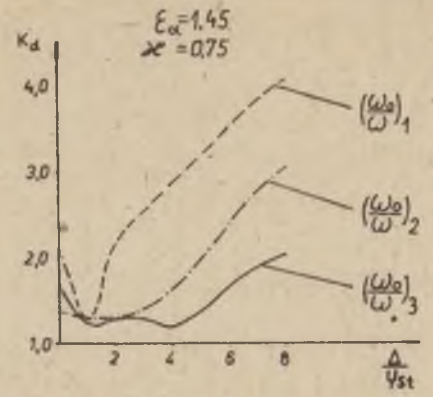
Rys. 9.3. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu

9.2. Analiza wyników obliczeń

Na podstawie otrzymanych wyników obliczeń można zauważyć, że w początkowym okresie pracy wzrost zużycia do wartości $(1 \div 2)\gamma_{st}$ powoduje obniżenie wartości obciążeń dynamicznych w stosunku do stanu wyjściowego w przekładni niedotartej. W strefie głównego rezonansu drgania kół są stacjonarne, a współczynnik K_d nie przekracza wartości 2. Niewielkie zużycie zębów spełnia podobną rolę, jak programowane zmiany zarysu wskutek modyfikacji, a więc prowadzi do zmniejszenia wartości współczynnika K_d. Zjawisko to występuje również w rzeczywistej przekładni, gdzie wskutek niewielkiego zużycia głowy zęba w procesie docierania obserwuje się wyraźne zmniejszenie efektów dynamicznych. Zwrócono na to uwagę w rozdziale 10 (rys. 10.4a). Dalszy wzrost wartości zużycia prowadzi do zwiększenia współczynnika K_d, który przy wartości $\Delta/\gamma_{st} = 4$ osiąga poziom wyjściowy, występujący w przekładni niedotartej. W przypadku gdy zużycie zębów $\Delta/\gamma_{st} = 8$, wartości współczynnika K_d w całym zakresie prędkości są znacznie większe od odpowiednich wartości tego współczynnika w przekładni niedotartej.

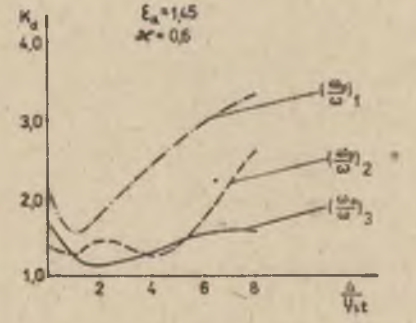


Rys. 9.4.

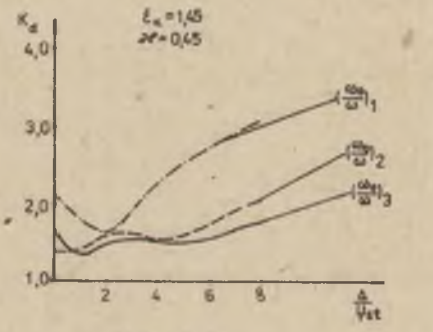


Rys. 9.5

Zależność współczynnika K_d od wartości zużycia zębów



Rys. 9.6



Rys. 9.7

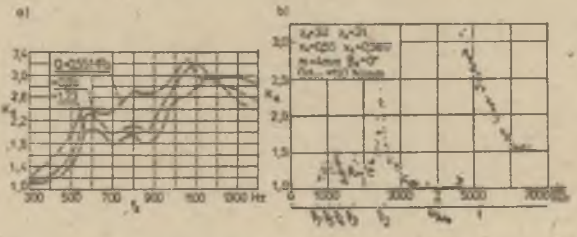
Zależność współczynnika K_d od wartości zużycia zębów

10. WERYFIKACJA TEORETYCZNYCH WYNIKÓW PRACY

10.1. Badania eksperymentalne

Wyniki teoretyczne uzyskane w pracy zostały zweryfikowane przez porównanie z rezultatami badań eksperymentalnych wykonanych przez różnych autorów. Rezultaty tych badań przedstawiono w licznych pracach [L. 5, 6, 11, 15, 16, 29, 30, 50, 53, 67, 70, 73, 74]. Badania te na ogół przeprowadzano na stanowiskach mocy krążącej, przy różnych obciążeniach statycznych, w funkcji prędkości obrotowej. Wartość obciążeń dynamicznych wyznaczano na stanowiskach najczęściej poprzez pomiar ugięcia zębów metodą tensometryczną, względnie metodą pomiaru drgań skrętnych kół. Stosowano także metodę pomiaru względnych przemieszczeń obwodowych współpracujących kół za pomocą przetworników sejsmicznych [L. 50].

Wyniki pomiarów tensometrycznych naprężeń u podstawy zęba w funkcji częstotliwości zazębienia i wartości nominalnego obciążenia przedstawiono na rys. 10.1a [L. 74]. Główny rezonans w tym przypadku ma miejsce przy częstotliwości około 1150 Hz. Lokalne ekstrema współczynnika K_d występują przy mniejszych prędkościach ruchu, a mianowicie przy częstotliwości zazębienia około 600 i 800 Hz.



Rys. 10.1. Zależność współczynnika K_d od prędkości ruchu
a - wg [L. 74], b - wg [L. 16]

Wyniki pomiarów tensometrycznych pary kół zębatych wykonanych w 3 klasie dokładności wg TGL przedstawiono na rys. 10.1b [L. 16]. Główny rezonans ma miejsce przy prędkości obrotowej około 4700 obr/min, natomiast dodatkowe ekstrema występują przy prędkościach ruchu odpowiadających 1/2, 1/3, 1/4 prędkości głównego rezonansu. Na rysunku widoczny jest duży przyrost współczynnika K_d przy narastaniu prędkości w strefie głównego re-

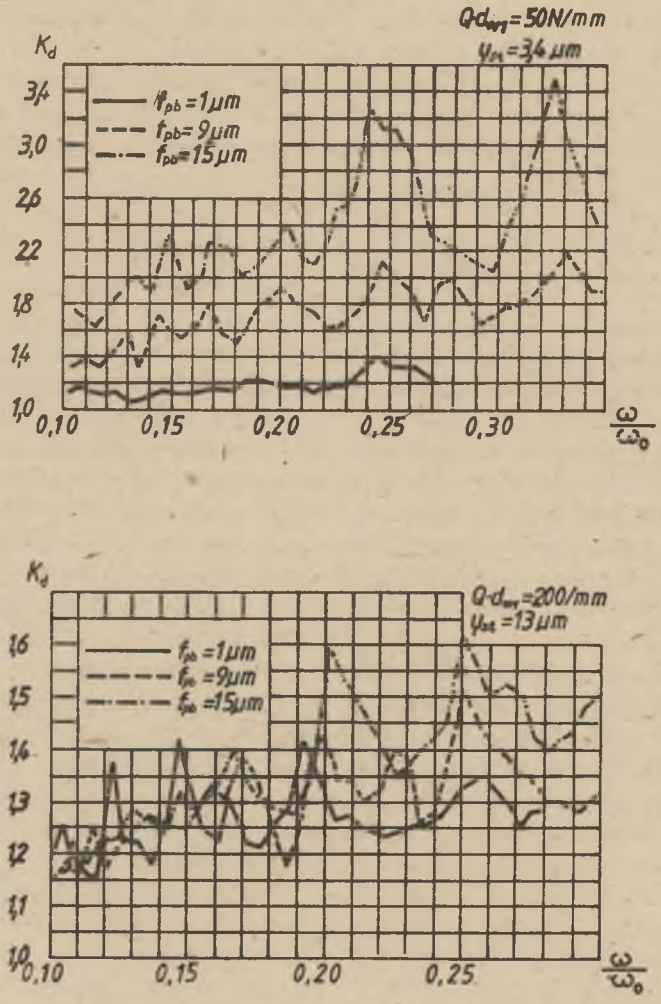
zonansu, co występowało na wykresach współczynnika K_d wyznaczonych w pracy teoretycznie dla przekładni wykonanych dokładnie.
Na wykresach teoretycznych obserwowano również wyraźne przyrosty współczynnika K_d przy prędkościach ruchu ω/ω_o = 1/2, 1/3 itd. Tak więc wyniki badań doświadczalnych potwierdzają w tym przypadku rezultaty obliczeń teoretycznych.

10.1.1. Wpływ wartości odchyłek zazębienia na współczynnik K_d

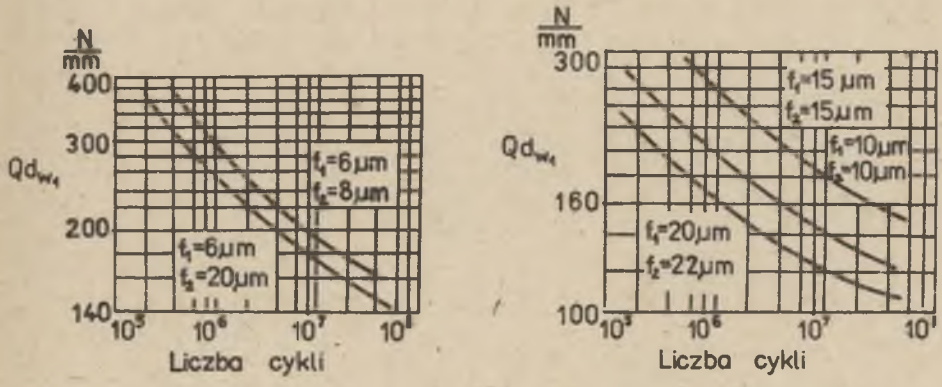
Wyniki pomiarów obciążeń dynamicznych kół zębatych, które wykazywały odchyłki podziałki, przedstawiono na rys. 10.2 [L. 16, 22]. Na rysunku tym porównano wykresy współczynnika K_d wyznaczone dla kół zębatych z odchyłkami podziałki zasadniczej o wartości f_{pb} = 1,9 i 15 μm, pracujących przy obciążeniu Q d_{w1} = 50 N/mm oraz 200 N/mm. Porównania dokonano w zakresie małych prędkości ruchu, tj. przy założeniu $\omega/\omega_o < 0{,}35$. Jak widać, wartości współczynnika K_d maleją ze wzrostem obciążenia. Jest to spowodowane równoczesnym wzrostem ugięcia statycznego zazębienia, co prowadzi do zmniejszenia względnej wartości odchyłek odniesionych od tego ugięcia. Przykładowo, przy obciążeniu Q dw_1 = 200 N/mm, ugięcie statyczne wynosi 13 μm, natomiast przy obciążeniu Q d_{w1} = 50 N/mm wynosi 3,4 μm. Tak więc względna wartość odchyłki podziałki f_{pb} = 15 μm wynosi w pierwszym przypadku około 1,1 γ_{st}, natomiast w drugim 4,4 γ_{st}. Z tego powodu wartości współczynnika K_d, odpowiadające obu rozpatrywanym wartościom odchyłek, znacznie się różnią. Jak widać, rezultaty badań eksperymentalnych są zbieżne z wynikami teoretycznymi uzyskanymi w pracy, na podstawie których stwierdzono zależność współczynnika K_d od względnej wartości odchyłek odniesionych do ugięcia statycznego. W pracy [L. 42] zamieszczono wyniki badań eksperymentalnych nad wpływem odchyłek zarysu na wartość granicznego obciążenia kół wykonanych ze stali CK 45 (odpowiednik stali 45 wg PN) ulepszanej do twardości 200 HB. Koła o parametrach $z_1 = z_2$ = 25, m = 5 mm pracowały przy prędkości obrotowej v = 18 m/s w oleju o lepkości 6,5°E. Obliczona wg wzoru 11.1 prędkość krytyczna kół wynosiła v_o = 45 m/s. Wyniki badań przedstawiono na rys. 10.3. Jak widać, w miarę wzrostu odchyłek maleje graniczne obciążenie przy założonej liczbie cykli, co jest spowodowane głównie wzrostem obciążeń dynamicznych.

W tablicy przedstawiono porównanie wyników omawianych badań doświadczalnych oraz rezultatów teoretycznych uzyskanych w pracy.

Sumaryczną wartość odchyłek zarysu obliczano zgodnie ze wzorem $f_f = f_1 + f_2$. Współczynnik K_d został określony przez interpolację wyników obliczeń numerycznych przedstawionych w pracy (rys. 7.6), otrzymanych przy założeniu zmiennej sztywności pojedynczej pary zębów dla prędkości ruchu kół $\omega/\omega_o = v/v_o = 0{,}4$.



Rys. 10.2. Współczynnik K_d w funkcji prędkości ruchu [L. 16]



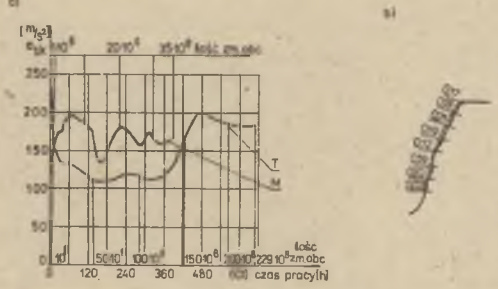
Rys. 10.3. Zależność granicznego obciążenia kół od wartości odchyłek zarysu [L. 42]

Lp.	Sumaryczna wartość odchyłki zarysu f_f [µm]	Względna wartość odchyłki f_f/y_{st}	Graniczne obciążenie przy 10^7 cykli [N/mm^2]	Współczynnik K_d wyznaczony teoretycznie	Stosunek granicznych obciążeń Q_1/Q_i	Stosunek K_{di}/K_{d1}
1	14	1,2	Q_1 = 1,56	K_{d1} = 2,1	1,0	1,0
2	20	1,9	Q_2 = 1,44	K_{d2} = 2,3	1,08	1,10
3	26	2,5	Q_3 = 1,36	K_{d3} = 2,4	1,15	1,14
4	30	3,6	Q_4 = 1,12	K_{d4} = 2,9	1,39	1,38

Na podstawie porównania wartości liczbowych zamieszczonych w odpowiednich kolumnach tablicy można stwierdzić, że otrzymane na drodze doświadczalnej wyniki są zgodne także pod względem ilościowym z rezultatami obliczeń teoretycznych.

10.1.2. Wpływ naturalnego zużycia na wartość współczynnika K_d

Obciążenia dynamiczne w przekładni zmieniają się podczas jej eksploatacji wskutek naturalnego zużywania się zębów. Wyznaczenie wpływu zużycia na wartość współczynnika K_d było tematem pracy [L. 44].
Przykładowe wyniki badań przeprowadzonych w tej pracy przedstawiono na rysunku 10.4. Obiektem badań były w tym przypadku 2 pary kół zębatych wykonanych ze stali ulepszanych (oznaczonych przez M) oraz utwardzanych powierzchniowo (oznaczonych przez T) o następujących parametrach: z_1 = 35, z_2 = 36, m = 3 mm. Koła pracowały przy obciążeniu Q_u = 1,79 N/mm^2. Podczas



Rys. 10.4. a - Zależność współczynnika K_d od czasu pracy przekładni [L. 44], b - zarys zęba po zużyciu

badań wyznaczono wartość skuteczną przyspieszeń drgań kół, która jest proporcjonalna do nadwyżki dynamicznej. Jak wynika z badań, w przypadku kół wykonanych ze stali ulepszanych (rys. 10.4a), obciążenia dynamiczne znacznie rosną w początkowym okresie pracy wskutek wystąpienia wyraźnych objawów zużycia zębów. W miarę upływu czasu eksploatacji wahają się one około pewnej wartości średniej, wyższej od wartości początkowej dla kół nowych.

Zarys zęba po zużyciu przedstawiono na rys. 10.4b. Jak widać zniekształcony wskutek zużycia zarys jest przesunięty równolegle w stosunku do ewolwenty teoretycznej i dodatkowo wykazuje zużycie głowy i stopy zęba. W procesie dalszego zużywania się zarys ten ulega już tylko przesunięciu, tj. rosną luzy obwodowe, ale nie zmienia się profil zęba, a tym samym obciążenie dynamiczne kół. W przypadku zębów utwardzanych powierzchniowo, w początkowym okresie pracy kół występowało wyraźne obniżenie obciążeń dynamicznych wskutek docierania zębów. Po tym okresie obciążenia te praktycznie pozostawały na stałym poziomie niższym od wartości początkowej, ze względu na nieznaczne zużycie zarysów zębów. Niewielkie zużycie głowy i stopy zęba w czasie docierania kół spełnia podobną rolę, jak modyfikacja zarysu, a więc prowadzi do obniżenia współczynnika K_d. Badania doświadczalne potwierdziły w tym przypadku rezultaty obliczeń teoretycznych przeprowadzonych w rozdziale 9, z których wynika, że zużycie głów zębów nieprzekraczające 2 Y_{st} prowadzi do zmniejszenia efektów dynamicznych w przekładni.

10.1.3. Wpływ modyfikacji zarysu na wartość obciążeń dynamicznych zazębienia

Badanie eksperymentalne nad wpływem sposobu modyfikacji na wartość sił dynamicznych w kołach zębatych opisano w pracach [L. 44, 81]. Badaniom eksperymentalnym poddana była para kół zębatych o module m = 3 mm oraz liczbie zębów $z_1/z_2 = 35/36$. Wskaźnik zazębienia wynosił 1,66. Badania prowadzono przy stałej prędkości obrotowej n = 1500 obr/min. W trakcie badań dokonano porównania obciążeń dynamicznych kół z modyfikacją zarysu wykonaną w różny sposób oraz koła niemodyfikowanego o bokach zębów szlifowanych. Poszczególne sposoby modyfikacji różniły się długością odcinka nie-

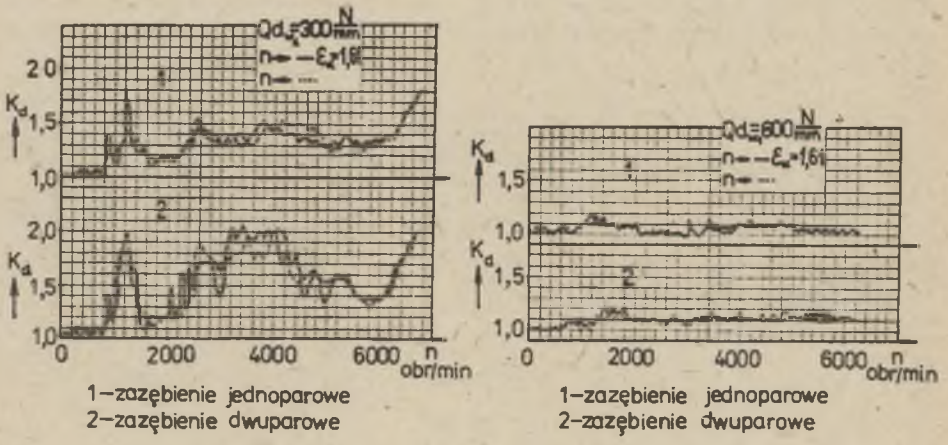
modyfikowanego b_m (rys. 8.1). Wyniki pomiarów tensometrycznych oraz przyspieszeń drgań skrętnych, otrzymanych podczas tych badań przedstawiono w tablicy:

Lp.	Sposób modyfikacji	Metoda drgań skręt.: stosunek przyspieszeń drgań w kole z modyfikacją zarysu i niemodyfikowanym	Metoda tensometryczna: stosunek naprężeń dynamicznych u podstawy zęba w kole z modyfikacją zarysu i niemodyfikowanym
1	Koło niemodyfikowane o szlifowanych zębach	1	1
2	$b_m = p_b$	0,91	0,96
3	$b_m = 0,9\ p_b$	0,82	0,75
4	$b_m = 0,6\ p_b$	0,79	0,58
5	$b_m = 0,4\ p_b$	0,77	0,47
6	$b_m = 0,34\ p_b$	0,64	-
7	$b_m = 0,2\ p_b$	0,80	0,64

Przedstawione wyniki pomiarów umożliwiają jedynie porównanie jakościowe rozpatrywanych sposobów modyfikacji, ze względu na różny sposób zdefiniowania współczynnika K_d w obu metodach pomiarowych, jak również z uwagi na zakłócenia pochodzące od stanowiska pomiarowego wpływające na wyniki metody drgań skrętnych. Jak widać, obie metody pomiarów wykazywały, że najbardziej efektywna jest modyfikacja A (poz. 6) lub bliska jej modyfikacja (poz. 5). Tak więc badania doświadczalne potwierdziły w sposób jakościowy wyniki obliczeń teoretycznych, z których wynikała znaczna efektywność modyfikacji A (po tzw. długiej ewolwencie), przy założeniu dokładnego wykonania kół.

Efektywność modyfikacji zarysu zęba zależy nie tylko od jej sposobu, ale również od obciążenia przekładni. Wyniki badań eksperymentalnych przeprowadzonych dla kół o modyfikowanym zarysie zębów, dokładnie wykonanych, przedstawiono na rys. 10.5 [L. 60].

Obiektem badań była para kół o zębach prostych o module m = 3 mm i przełożeniu u = 1. Koła pracowały przy obciążeniu nominalnym wynoszącym $Q\ d_{w1}$ = 600 N/mm, odpowiednim dla przyjętej głębokości modyfikacji zarysu zęba oraz przy obciążeniu $Q\ d_{w1}$ = 300 N/mm, a więc wynoszącym 50% obciążenia nominalnego. Jak wykazały badania (rys. 10.5), przy obciążeniu wynoszącym 50% wartości nominalnej, a więc, w przypadku gdy głębokość modyfikacji jest większa od ugięcia statycznego zazębienia, wartości współczynnika K_d w całym zakresie prędkości są znacznie wyższe od odpowiednich wartości tego współczynnika przy obciążeniu nominalnym. Przy zbyt małym obciążeniu mo-



Rys. 10.5. Wpływ obciążenia na wartości współczynnika K_d w funkcji prędkości ruchu dla kół o modyfikowanym zarysie zębów [L. 60]

dyfikacja zarysu daje podobne efekty dynamiczne, jak okresowa odchyłka zarysu zęba. Również w tym przypadku badania doświadczalne potwierdziły w pełni wyniki obliczeń teoretycznych.

10.2. Ocena dokładności wyników pracy

Na dokładność wyników uzyskanych w pracy wpływają następujące czynniki:

- stopień uproszczenia przyjętego modelu dynamicznego, co wiąże się bezpośrednio z kryterium poprawności modelowania,
- błędy oszacowania parametrów modelu, takich jak: współczynnik tłumienia, sztywność zazębienia,
- błędy obliczeń numerycznych wynikających z przyjętej metody rozwiązywania równania różniczkowego ruchu.

Zgodnie z istotą modelowania, poprawnie przyjęty model powinien przedstawiać w wyidealizowany, uproszczony sposób badaną rzeczywistość, a także powinien dostatecznie wiernie odtwarzać badany obiekt rzeczywisty pod wybranym kątem widzenia, a jednocześnie być możliwie prosty i łatwy w badaniu [L. 10]. Porównując wyniki badań modelowych oraz rezultaty badań doświadczalnych przedstawionych w rozdziale 10.1 można stwierdzić, że są zbieżne, a więc przyjęty model, mimo zastosowanych uproszczeń, spełnia kryterium dostatecznej wierności, a tym samym kryterium poprawności modelowania.

Parametry modelu oszacowano w następujący sposób. Bezwymiarowy współczynnik tłumienia φ przyjęto na podstawie wyników prac doświadczalnych i

teoretycznych innych autorów, przy czym wartość tego współczynnika dobrano tak, aby w stanach rezonansowych odpowiednie wartości współczynnika K_d wyznaczone teoretycznie w oparciu o model oraz na drodze doświadczalnej były zgodne. W niektórych rozwiązaniach konstrukcyjnych przekładni wartości tego współczynnika odbiegają od przyjętej do obliczeń. W tym przypadku celowe jest doświadczalne ustalenie tego parametru.

Drugi parametr modelu, tj. sztywność zazębienia, przyjęto na podstawie wyników prac teoretycznych i doświadczalnych omówionych w rozdziale 5. Charakterystyka sprężysta zazębienia zależy od sposobu rozwiązania konstrukcyjnego kół, a także od ich cech geometrycznych. Uwzględniając to, w pracy przeprowadzono obliczenia dla dwóch przypadków sztywności, z których jeden jest przypadkiem skrajnym, najbardziej niekorzystnym z punktu widzenia dynamiki przekładni. Jest to przypadek stałej sztywności pojedynczej pary zębów na odcinku przyporu. Z uwagi na to, w rzeczywistej przekładni wartości współczynnika K_d mogą w określonych przypadkach być mniejsze od odpowiednich wartości tego współczynnika wyznaczonych przy założeniu stałej sztywności zazębienia. Celowe jest prowadzenie w dalszych pracach badań zmierzających do wyznaczenia charakterystyki sprężystej zazębienia dla kół zębatych o różnych cechach geometrycznych. Wyniki tych prac mogłyby być wykorzystane w badaniach modelowych.

10.2.1. Oszacowanie wartości błędu numerycznej metody rozwiązywania równania różniczkowego ruchu

Większość przedstawionych w pracy wyników uzyskano rozwiązując równanie różniczkowe ruchu względnego kół za pomocą numerycznej metody Eulera. Tylko w niektórych przypadkach posłużono się metodą Rungego-Kutty, przy jednoczesnym zastosowaniu maszyny cyfrowej.

Oszacowanie wartości błędu przeprowadzono wyłącznie dla metody Eulera, przyjmując, że ta druga metoda obliczeń daje większą dokładność, przy założeniu tej samej wartości elementarnego kroku h.

Dla oszacowania wartości błędu metody Eulera zastosowano następujący sposób postępowania. Rozwiązano tą metodą równanie opisujące drgania wymuszone przy tłumieniu wiskotycznym. W szczególnym przypadku równanie to przyjmuje postać

$$\ddot{y} + 0{,}2\,\dot{y} + \omega^2 y = \sin(\nu t + \delta). \tag{10.1}$$

Współczynnik uwielokrotnienia amplitudy wyznacza się w tym przypadku zgodnie ze wzorem [L. 55]

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\nu^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\varphi^2\frac{\nu^2}{\omega^2}}} \tag{10.2}$$

Dla $\varphi = 0{,}1$; $\nu = \omega = 1$, otrzymuje się wartość $\mu = 5$.

Obliczenia przeprowadzono za pomocą programowalnego kalkulatora dla różnych wartości elementarnego kroku

$$h = \frac{2\pi}{n_{max}}, \qquad (10.3)$$

n_{max} - liczba przedziałów przypadająca na jeden okres drgań.

Jak wynika z obliczeń, wartość błędu maleje w przybliżeniu z kwadratem elementarnego kroku h, co stwierdzono również w rozdziale 2.3. Krok obliczeń h jest odwrotnie proporcjonalny do liczby przedziałów n_{max}. Czas obliczeń numerycznych jest z kolei proporcjonalny do liczby n_{max}. Wynika stąd że dla uzyskania dużej dokładności obliczeń należy zastosować mały krok obliczeń h, który odpowiada dużej liczbie n_{max}, co z kolei prowadzi do wydłużenia czasu obliczeń.

Uwzględniając powyższe, zdecydowano się na przyjęcie $n_{max} = 20$ dla prędkości ruchu w zakresie od 0,5 do 1,7 ω/ω_0, co odpowiada krokowi h od 0,628 do 0,185, natomiast przy mniejszych prędkościach stosowano $n_{max} = 40$. Wartość błędu obliczeń zmieniała się w rozpatrywanym przypadku od 0,3 do 5,6%.

Wyniki obliczeń pozwoliły również na określenie liczby okresów drgań, po których amplituda wychylenia układu praktycznie się ustala. Zauważono, że następuje to po około 10 okresach; w tym czasie zanikają przejściowe składniki drgań. Prawidłowość tę wykorzystano w trakcie rozwiązywania równania ruchu względnego kół.

10.3. Uwagi końcowe

Przeprowadzona analiza porównawcza wykazała, że wyniki rozwiązań równań różniczkowych, przedstawione w pracy, są dostatecznie zgodne z rezultatami badań eksperymentalnych. Biorąc pod uwagę, że równania te były opracowane w oparciu o model matematyczno-fizyczny przekładni, można stwierdzić, że model ten nadaje się do analizy i interpretacji zjawisk mających wpływ na współczynnik sił dynamicznych. Otrzymane, przy wykorzystaniu tego modelu, wyniki obliczeń numerycznych mogą być przydatne w obliczeniach wytrzymałościowych zazębienia, prowadzonych w procesie projektowania przekładni walcowych i stożkowych, a w szczególności do optymalnego wyboru ich cech.

Dla celów teoretycznych, w miarę potrzeby, model może być rozbudowany przez uwzględnienie wpływów dalszych czynników, natomiast dla celów praktycznych można ograniczyć się do jego uproszczonej postaci.

11. PERSPEKTYWY WYKORZYSTANIA NUMERYCZNEJ METODY WYZNACZANIA OBCIĄŻEŃ DYNAMICZNYCH W OBLICZENIACH WYTRZYMAŁOŚCIOWYCH ZAZĘBIENIA

11.1. Wykorzystanie wyników pracy w obliczeniach inżynierskich

W pracy dokonano analizy wpływu istotnych cech konstrukcyjnych i technologicznych na wartość i rozkład obciążeń dynamicznych wzdłuż odcinka przyporu. Wyniki obliczeń numerycznych związanych z tą analizą przedstawiono głównie w postaci wykresów. W procesie projektowania wykresy te mogą być wykorzystane do wyboru optymalnych wielkości założonych, względnie mogą służyć do porównania różnych wariantów założeń z punktu widzenia własności dynamicznych projektowanych przekładni.

Dla wstępnej oceny obciążeń dynamicznych zazębienia o założonych parametrach niezbędne jest określenie następujących danych wejściowych:

- prędkości ruchu kół zębatych w stosunku do prędkości krytycznej,
- charakteru i wartości odchyłek technologicznych oraz programowanych zmian zarysu zębów wywołanych modyfikacją.

W programie obliczeń numerycznych występuje względna wartość odchyłek wykonania odniesionych do ugięcia statycznego jednej pary zębów, stąd zachodzi potrzeba odpowiedniego przeliczenia tych odchyłek. Wyznaczenie tych danych wiąże się z kolei z koniecznością oszacowania prędkości krytycznej v_o, n_o lub częstości drgań własnych przekładni ω_o oraz ugięcia statycznego zazębienia y_{st}.

Zgodnie z [L. 42] krytyczna prędkość obwodowa jednostopniowej przekładni walcowej może być obliczona na podstawie wzoru

$$v_o = \frac{1}{z_1}\sqrt{\frac{2\, c_z \cos^2\alpha_w}{\pi\, \rho_m}}\sqrt{\frac{\eta + u^2}{\eta u^2}}, \qquad (11.1)$$

gdzie:

c_z - sztywność zazębienia,

z_1 - liczba zębów zębnika,

α_w - kąt przyporu na średnicy tocznej,

ρ_m - gęstość materiału,

u - przełożenie kół zębatych,

$\eta = L/b$ - stosunek długości wału do szerokości zębnika.

W praktycznych obliczeniach można posłużyć się przybliżonym wzorem [L.42]:

$$v_o \cong \frac{800}{z_1} \sqrt{\frac{1 + u^2}{u^2}}, \quad [m/s] \tag{11.2}$$

Ugięcie statyczne w strefie przyporu jednoparowego oblicza się natomiast ze wzoru:

$$Y_{st} = \frac{P_n}{b\ c} = \frac{Q\ d_{w1}}{c \cos \alpha_w}, \tag{11.3}$$

gdzie:

$Q = \frac{P_{st}}{b\ d_{w1}}$ - wskaźnik obciążenia kół, $\left[N/mm^2\right]$

c - sztywność jednej pary zębów,
d_{w1} - średnica toczna zębnika, [mm]
P_n - nominalna wartość siły międzyzębnej,
P_{st} - nominalna wartość siły obwodowej.

W praktycznych obliczeniach można wykorzystać przybliżony wzór

$$Y_{st} \cong 0{,}06\ Q\ d_{w1} \quad [\mu m] \tag{11.4}$$

11.2. Wykorzystanie numerycznej metody wyznaczania obciążeń dynamicznych w obliczeniach wytrzymałościowych zazębienia

Większość dotychczas stosowanych metod obliczeń wytrzymałościowych zazębienia opiera się na przyjęciu tej samej wartości obciążeń dynamicznych i niezmiennej na odcinku przyporu, zarówno w obliczeniach wytrzymałości na złamanie zębów, jak i na nacisk. Obliczenia wytrzymałości na złamanie zębów przeprowadza się na ogół dla innej fazy zazębienia, niż obliczenia na nacisk. Przykładowo, badania teoretyczne i eksperymentalne wykazują [L. 49, 58], że w przypadku dokładnego wykonania, największe naprężenia u podstawy zęba występują w zewnętrznym punkcie jednoparowego zazębienia, tj. w punkcie B_2, przedstawionym na rys. 5.10. Do obliczeń na nacisk wybiera się zwykle biegun zazębienia C - dla koła oraz dla zębnika - wewnętrzny punkt jednoparowego zazębienia B_1 (rys. 5.10), gdzie z powodu małego promienia krzywizn naprężenia kontaktowe są znaczne. Obliczenia na zatarcie przeprowadza się w przypadku zazębienia niemodyfikowanego zwykle dla wierzchołków zębów, gdzie występują najbardziej niekorzystne warunki pracy wskutek dużych poślizgów.

Biorąc pod uwagę, że obciążenie dynamiczne na odcinku przyporu nie jest wielkością stałą, celowe jest indywidualne rozpatrywanie zmian tego obciążenia i na tej podstawie obliczanie współczynnika obciążeń dynamicznych dla celów praktycznych. Jak wynika z obliczeń numerycznych, przedstawio-

nych w rozdziale 5, w przekładni pracującej w zakresie podkrytycznym na jedno zazębienie przypada kilka zmian obciążenia. Drgania kół mają złożony charakter, przy czym wskutek ich ruchu obrotowego zmienia się miejsce działania maksymalnej wartości siły. Występowanie tego zjawiska wskazuje na celowość wyznaczania w tym przypadku punktów krytycznych na odcinku przyporu, w których należy sprawdzać poszczególne warunki wytrzymałościowe.

W związku z tym można zaproponować nowy sposób obliczeń wytrzymałościowych zazębienia, który uwzględnia indywidualne wartości współczynnika obciążeń dynamicznych. Sposób ten opiera się na wyznaczeniu chwilowych zmian naprężeń w przekroju podstawy zęba i zmian nacisków na jego powierzchni oraz określeniu maksymalnych wartości naprężeń względnie nacisków w krytycznych punktach odcinka przyporu. Rozpatrywany sposób obliczeń wytrzymałościowych może być stosowany dla różnych kombinacji odchyłek technologicznych zazębienia. Dla ilustracji problemu, dalsze rozważania przeprowadzono na przykładzie kół zębatych wykonanych bezbłędnie lub z odchyłkami okresowymi.

11.2.1. Obliczanie wytrzymałości na złamanie zęba

Większość wzorów stosowanych do obliczeń naprężeń zginających w przekroju podstawy zęba zębnika lub koła, oznaczonych indeksem (1) lub (2), [L. 14, 42, 82, 85], można przedstawić w następujący sposób:

$$\sigma_{F1,2} = \frac{P_F}{m\,b} Y_{F1,2}\; Y_{S1,2}\; Y_{\varepsilon 1,2}\; Y_{\beta}, \qquad (11.5)$$

gdzie:

P_F – obciążenie obliczeniowe,

m – moduł,

b – szerokość kół,

$Y_{S1,2}$ – współczynnik działania karbu,

$Y_{\varepsilon 1,2}$ – współczynnik zależny od wskaźnika przyporu, uwzględniający położenie siły międzyzębnej w chwili wystąpienia maksymalnych naprężeń w przekroju podstawy zęba,

Y_{β} – współczynnik kąta linii zęba; dla zębów prostych przyjmuje wartość równą 1,

$Y_{Fi,2}$ – współczynnik kształtu, wyliczany dla przypadku działania siły międzyzębnej na wierzchołek zęba; wartość tego współczynnika zależy od metody obliczeń, liczby zębów i współczynnika przesunięcia zarysu.

Występujące we wzorze (11.5) obciążenie obliczeniowe P_F może być wyznaczone z zależności

$$P_F = P_{st} K_F K_d, \tag{11.6}$$

gdzie:

P_{st} - nominalna wartość siły obwodowej,

K_F - współczynnik uwzględniający wpływy na naprężenia w przekroju podstawy zęba: przeciążeń zewnętrznych, nierównomierności rozkładu obciążenia wzdłuż odcinka przyporu oraz nierównomierności wzdłuż linii zęba,

K_d - współczynnik obciążeń dynamicznych.

Uwzględniając zmiany obciążeń dynamicznych jednej pary zębów P_{sd}/P_{st} wzdłuż odcinka przyporu wzór (11.5) dla kół o zębach prostych może być przekształcony do postaci

$$\sigma_{F1,2} = K_F \frac{P_{st}}{m\,b} \left(\frac{P_{sd}}{P_{st}}\right)_{1,2} Y_{Fd1,2}\, Y_{S1,2}, \tag{11.7}$$

gdzie:

$Y_{Fd1,2}$ - chwilowe wartości współczynnika kształtu zależne od miejsca przyłożenia siły międzyzębnej na wysokości zębów obu kół, a tym samym od położenia punktu współpracy zębów na odcinku przyporu.

Do obliczeń wytrzymałościowych należy przyjąć maksymalną wartość naprężeń w przekroju podstawy zęba, występującą w tych punktach odcinka przyporu, w których wyrażenia $\left[P_{sd}/P_{st} \cdot Y_{Fd}\right]_{1,2}$ dla zębnika względnie koła osiągają wartości ekstremalne. Wobec tego współczynniki obciążeń dynamicznych obliczane ze względu na złamanie zębów $K_{dz1,2}$, równe liczbowo stosunkom naprężeń dynamicznych do statycznych, można wyznaczyć z następującej zależności:

$$K_{dz1,2} = \frac{\sigma_{F1,2}}{\sigma_{st1,2}} = \frac{\max\left(\frac{P_{sd}}{P_{st}} \cdot Y_{Fd}\right)_{1,2}}{Y_{F1,2}}. \tag{11.8}$$

Występujące w powyższym wzorze chwilowe wartości współczynnika kształtu Y_{Fd}, niezależnie od metody obliczeń, są funkcją następujących zmiennych

$$Y_{Fd} = f(z,\ x,\ \alpha_w,\ \frac{e_y}{m},\ \phi_y), \tag{11.9}$$

gdzie:

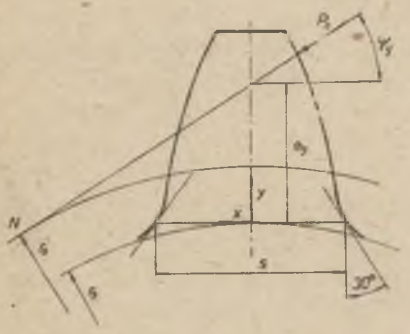
z - liczba zębów koła,

x - współczynnik przesunięcia zarysu,

α_w - kąt przyporu na średnicy tocznej,

m - moduł,

e_y, ψ_y - chwilowe wartości ramienia i kąta działania siły międzyzębnej, wyznaczone zgodnie z rysunkiem 11.1.



Rys. 11.1. Schemat obciążenia zęba

Według normy DIN 3990 [L.14] współczynnik kształtu oblicza się za pomocą wzoru

$$Y_{Fd} = \frac{6\,\frac{e_y}{m}\cos\psi_y}{\left(\frac{s}{m}\right)^2\cos\alpha_w}, \qquad (11.10)$$

w którym, oprócz poprzednio podanych oznaczeń, s/m oznacza względną grubość zęba w przekroju obliczeniowym, zależną od liczby zębów i współczynnika przesunięcia zarysu [L. 23]. Wprowadzając do obliczeń naprężeń chwilową wartość współczynnika Y_{Fd}, uwzględnia się rzeczywiste położenie siły międzyzębnej w chwili wystąpienia maksymalnych naprężeń w przekroju podstawy zęba. Przy takim sposobie obliczeń nie ma potrzeby wprowadzania współczynnika Y_ε, który w tradycyjnych metodach obliczeń spełnia w przybliżeniu podobną rolę. Można w ten sposób wykluczyć jedną z dyskusyjnych wielkości, która różnie była przyjmowana w obliczeniach.

11.2.2. Obliczenia wytrzymałości stykowej zazębienia

Obliczenia wytrzymałości stykowej zazębienia opierają się zwykle na wyznaczeniu naprężeń stykowych według Hertza, zgodnie ze wzorem [L. 42]

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{P_{nH}}{2\rho b}\,\frac{E}{\pi(1-\nu^2)}}, \qquad (11.11)$$

gdzie:

P_{nH} - obliczeniowa wartość siły międzyzębnej,

$\rho = \frac{\rho_1\,\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$ - zredukowany promień krzywizny ewolwent zmienny na odcinku przyporu,

$E = \frac{2\,E_1E_2}{E_1+E_2}$ - zredukowany współczynnik sprężystości wzdłużnej,

ν - liczba Poissona,

b - szerokość kół.

Zgodnie z [L. 42] stan naprężeń na powierzchni współpracujących zębów charakteryzuje średni nacisk obliczany wg Stribecka k, który jest związany z naprężeniami σ_H następującą zależnością

$$k = \frac{P_{nH}}{2\rho b} = \pi(1 - \nu^2)\frac{\sigma_H^2}{E}. \qquad (11.12)$$

Występujące we wzorach (11.11) i (11.12) obliczeniowe obciążenie P_{nH} dla kół o zębach prostych można wyznaczyć z następującej zależności

$$P_{nH} = \frac{P_{st}}{\cos\alpha_w} K_H K_d, \qquad (11.13)$$

w którym, oprócz uprzednio podanych oznaczeń, K_H oznacza współczynnik uwzględniający wpływy na naprężenia stykowe: przeciążeń zewnętrznych, nierównomierności rozkładu obciążeń wzdłuż odcinka przyporu oraz nierównomierności rozkładu wzdłuż linii zęba. Uwzględniając zmiany obciążeń dynamicznych jednej pary zębów P_{sd}/P_{st} wzdłuż odcinka przyporu, wzór (11.12) dla zębnika może być przekształcony do postaci

$$k_1 = \frac{K_H P_{st}}{\cos\alpha_w 2 b\rho}\frac{P_{sd}}{P_{st}} = \frac{K_H Q}{\cos\alpha_w}\max\left[\frac{d_{w1}}{2\rho}\frac{P_{sd}}{P_{st}}\right], \qquad (11.14)$$

gdzie:

d_{w1} - średnica toczna zębnika,

$Q = \frac{P_{st}}{b\, d_{w1}}$ - wskaźnik obciążenia kół.

Do obliczeń wytrzymałościowych zębnika należy przyjąć maksymalną wartość nacisku k_1, występującą w tym punkcie odcinka przyporu, gdzie wyrażenia $\left[d_{w1}/2\rho \cdot P_{sd}/P_{st}\right]$ osiągają wartość maksymalną.

Koło należy w tym przypadku potraktować oddzielnie. Ze względu na częstość występowania uszkodzeń powierzchni zębów koła w pobliżu średnicy tocznej, naprężenia stykowe wyznacza się w biegunie zazębienia C, gdzie promień krzywizny ewolwent jest zwykle duży. Na wytrzymałość stykową powierzchni zębów koła w tym punkcie wpływa nie tylko nominalny nacisk ale również takie czynniki, jak: oddziaływanie oleju zawartego między powierzchniami zębów, zmiana kierunku poślizgu i inne.

Z tego względu, średni nacisk dla koła wyznacza się w biegunie zazębienia C zgodnie ze wzorem

$$k_o = \frac{K_H Q}{\cos\alpha_w}\frac{d_{w1}}{2\rho_o}\left(\frac{P_{sd}}{P_{st}}\right)_o = y_o K_H Q_u \left(\frac{P_{sd}}{P_{st}}\right)_o, \qquad (11.15)$$

gdzie:

ρ_o - zredukowany promień krzywizny ewolwent obliczony w biegunie zazębienia C,

y_o - współczynnik zależny od kąta przyporu α_w [L. 42],

u - przełożenie pary kół,

$Q_u = Q \frac{u+1}{u}$ - zredukowany wskaźnik obciążenia,

$(\frac{P_{sd}}{P_{st}})_C$ - współczynnik obciążeń dynamicznych wyznaczony w bezpośrednim sąsiedztwie bieguna zazębienia C.

11.2.3. O b l i c z e n i a z a z ę b i e n i a n a z a t a r c i e

Większość znanych dotychczas metod obliczeń na zatarcie można interpretować w następujący sposób

$$Q \leq \frac{const}{v^{\gamma} d_{w1}^{\zeta}}, \qquad (11.16)$$

gdzie:

Q - wskaźnik obciążenia kół,

v - prędkość obwodowa kół,

d_{w1} - średnica toczna zębnika,

γ, ζ - wykładniki zależne od metody obliczeń.

Wykorzystując stosowaną w praktyce metodę obliczeń na zatarcie [L.42], po uwzględnieniu zmian obciążenia dynamicznego jednej pary zębów P_{sd}/P_{st} wzdłuż odcinka przyporu, powyższa nierówność może być przedstawiona w postaci

$$Q \leq \frac{C}{(v.d_{w1})^{2/3} \; M \; \frac{P_{sd}}{P_{st}}}, \qquad (11.17)$$

gdzie:

C - stała zależna między innymi od: własności materiałów kół, gatunku oleju, jego lepkości, chropowatości powierzchni zębów oraz czynników ruchowych, takich jak: przeciążenie zewnętrzne i nierównomierność rozkładu obciążenia wzdłuż linii zęba,

M - współczynnik uwzględniający geometryczne parametry zazębienia, tj. przełożenie kół u oraz położenie rozpatrywanego punktu na odcinku przyporu [L. 42].

Jak wynika z tej nierówności dozwolone obciążenie ze względu na zatarcie zmienia się na odcinku przyporu w zależności od wartości wyrażenia $M.P_{sd}/P_{st}$. Obliczenia zazębienia na zatarcie należy przeprowadzać w miejscu, gdzie wyrażenie to osiąga największą wartość.

11.2.4. U w a g i k o ń c o w e

Zaletą zaproponowanego w pracy sposobu obliczeń wytrzymałościowych zazębienia jest większa dokładność oszacowania maksymalnych naprężeń oraz związanych z tym współczynników pewności w porównaniu z tradycyjnymi me-

todami obliczeń, w których przyjmowano stałą wartość obciążenia dynamicznego na odcinku przyporu.

Sposób ten może być stosowany zarówno w przypadku kół zębatych wykonanych dokładnie względnie z odchyłkami okresowymi, jak i w przypadku kół obarczonych losowymi odchyłkami wykonania. Gdy koła wykazują odchyłki okresowe, to przy założeniu ustalonych warunków pracy przekładni, rozkłady obciążeń dynamicznych wzdłuż odcinka przyporu są identyczne dla kolejnych zazębień. Po ich rozpatrzeniu można określić położenie punktów krytycznych na odcinku przyporu i odpowiednio do tego wyznaczyć współczynniki obciążeń dynamicznych. Przykład takiego postępowania zilustrowano na rys. 11.2, na którym rozpatrywana jest para kół zębatych o liczbie zębów: $z_1 = 14$, $z_2 = 15$ i wskaźniku przyporu $\varepsilon_\alpha = 1{,}45$, wykazująca okresowe odchyłki zazębienia o wartości $f = -1$. Przekładnia ta pracuje przy prędkości ruchu $\omega/\omega_o = 0{,}53$.

Kolejne wykresy na tym rysunku przedstawiają zmiany wzdłuż odcinka przyporu następujących wielkości wyznaczonych analitycznie:

- stosunku chwilowego współczynnika kształtu Y_{Fd} do wartości tego współczynnika określonego dla wierzchołka zęba Y_F zębnika (1) i koła (2),
- stosunek promienia toczącego zębnika $d_{w1}/2$ do zredukowanego promienia krzywizny ewolwent ρ,
- współczynnika M,
- obciążeń dynamicznych jednej pary zębów P_{sd}/P_{st}.

Rozpatrując zmiany tych wielkości wzdłuż odcinka przyporu oraz analizując wzory (11.8), (11.14), (11.15) i (11.17) można wyznaczyć indywidualne wartości współczynników obciążeń dynamicznych, a mianowicie:

- w punkcie I, w którym rozpatruje się wytrzymałość na zginanie zębów koła, na nacisku zębów zębnika oraz na zatarcie,

$$K_{dz2} = \left(\frac{P_{sd}}{P_{st}}\right)_I \frac{Y_{Fd2}}{Y_{F2}} = 1{,}38 \cdot 0{,}96 \cong 1{,}32,$$

$$K_{dp1} = 1{,}38,$$

$$K_{dt} = 1{,}38,$$

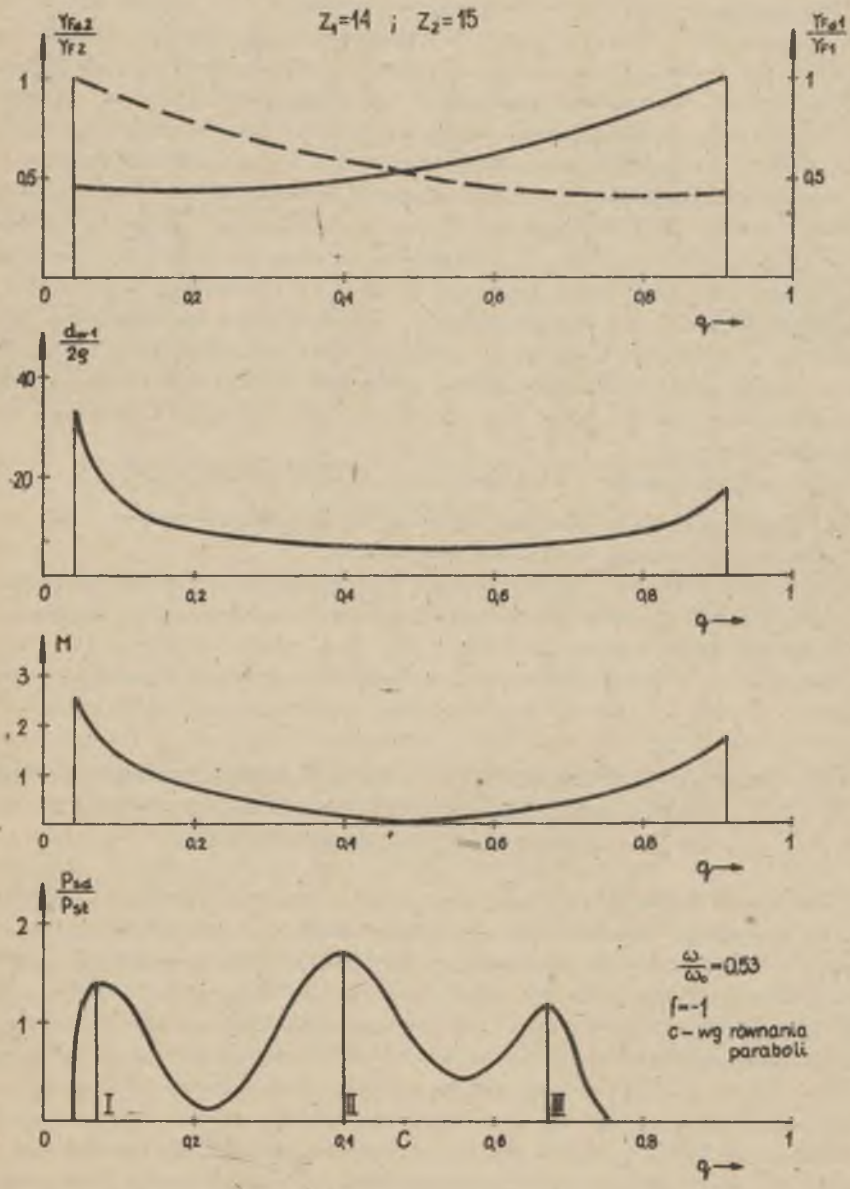
- w punkcie II, w którym wystarczy rozpatrzyć wyłącznie wytrzymałość na nacisku zębów koła,

$$K_{dp2} = 1{,}68,$$

- w punkcie III, w którym rozpatruje się tylko wytrzymałość na zginanie zębów zębnika,

$$K_{dz_1} = \left(\frac{P_{sd}}{P_{st}}\right)_{III} \frac{Y_{Fd1}}{Y_{F1}} = 1{,}19 \cdot 0{,}7 \cong 0{,}83.$$

Jak wynika z obliczeń, różnice pomiędzy poszczególnymi wartościami współczynnika obciążeń dynamicznych są istotne i wskazują na potrzebę indywidualnego ich traktowania, jak to jest proponowane w pracy.



I – $K_{d\varphi 1} = K_{dt} = 1{,}38$; $K_{dz2} = 1{,}38 \cdot 0{,}96 \cong 1{,}32$
II – $K_{d\varphi 2} = 1{,}68$
III – $K_{dz1} = 1{,}19 \cdot 0{,}7 \cong 0{,}83$.

Rys. 11.2. Schemat wyznaczania zróżnicowanych wartości współczynnika K_d w obliczeniach na złamanie, nacisk i zatarcie

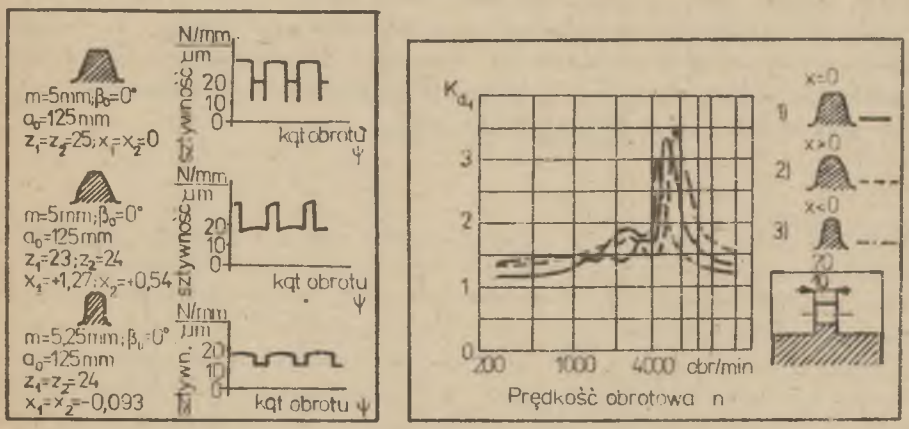
Gdy odchyłki zazębienia mają charakter losowy, to obrazy zmian obciążeń dynamicznych wzdłuż odcinka przyporu wykazują znaczne różnice dla kolejnych par zębów, tym niemniej powtarzają się po okresie, jaki upływa między kolejnymi przypadkami współpracy tej samej pary zębów. O wytrzymałości zazębienia decyduje wtedy wytrzymałość tej pary współpracujących zębów, której towarzyszą największe obciążenia dynamiczne. Rozpatrując zmiany obciążeń dynamicznych podczas przyporu określonej pary zębów, można podobnie, jak to było w przypadku odchyłek okresowych, obliczyć indywidualne wartości współczynnika K_d. Wartości te mogą posłużyć do wyznaczenia współczynników pewności w zakresie trwałej wytrzymałości zmęczeniowej. Prowadzenie obliczeń dla zakresu trwałej wytrzymałości zmęczeniowej jest uzasadnione w przypadku przekładni przemysłowych pracujących ciągle, w których liczba cykli zmian obciążenia zębów kół zwykle wielokrotnie przekracza graniczne liczby cykli przy zginaniu, jak i przy obliczeniach na naprężenia stykowe.

Celowe jest prowadzenie dalszych badań zmierzających do:

- ustalenia położenia punktów krytycznych na odcinku przyporu dla różnych kombinacji odchyłek wykonania zazębienia,
- uściślenie obliczeń współczynnika K_d w ujęciu statystycznym przy uwzględnieniu hipotezy akumulacji uszkodzeń, zastosowanej do wyznaczania trwałości kół zębatych,
- opracowania praktycznych wzorów przydatnych w obliczeniach inżynierskich.

11.3. Perspektywy wykorzystania numerycznej metody wyznaczania obciążeń dynamicznych do analizy wpływu korekcji zazębienia na własności dynamiczne przekładni

Własności dynamiczne przekładni w dużym stopniu zależą od charakterystyki sprężystej zazębienia, a w szczególności od przeciętnej jego sztywności oraz od stosunku maksymalnej wartości sztywności podczas przyporu dwuparowego do minimalnej w czasie współpracy jednej pary zębów. Wykazano to w rozdziale 5. Charakterystyka sprężysta jest z kolei uzależniona od cech geometrycznych zazębienia, w tym od liczby zębów kół, współczynników przesunięcia zarysu oraz w pewnym stopniu od wskaźnika obciążenia Q, ze względu na nieliniowy charakter zależności odkształceń powierzchni współpracujących zębów od obciążenia. Przykładowe zmiany sztywności dla zazębienia o różnych współczynnikach przesunięcia zarysu oraz odpowiadające im zależności współczynnika K_d od prędkości, wyznaczone teoretycznie za pomocą maszyny analogowej, przedstawiono na rys. 11.3 [L. 57] . Jak widać różnice pomiędzy poszczególnymi wykresami sztywności są znaczne, zarówno pod względem przeciętnej wartości, jak i stosunku wartości maksymalnej do minimalnej. Z tego powodu efekty dynamiczne, wyznaczone dla rozpatrywanych przypadków zmiany sztywności, wykazują również znaczne różnice.



Rys.11.3. Charakterystyki sprężyste zazębienia oraz odpowiadające im zależności współczynnika K_d od prędkości dla kół o różnych współczynnikach przesunięcia zarysu [L. 57]

Przedstawiona w pracy numeryczna metoda obliczeń dynamicznych przekładni umożliwia wprowadzenie do programu dowolnych zmian sztywności. Istnieje więc możliwość porównania pod względem dynamicznym kół o różnych wartościach współczynników przesunięcia zarysu. Pozwala to na przeprowadzenie optymalizacji współczynników przesunięcia zarysu z punktu widzenia także własności dynamicznych przekładni. Zakres optymalizacji może być rozszerzony, jeżeli oprócz porównania maksymalnych wartości obciążeń dynamicznych uzyskanych dla różnych rozwiązań rozpatrzy się indywidualnie zmiany tych obciążeń wzdłuż odcinka przyporu, biorąc pod uwagę wytrzymałość zazębienia. W tym przypadku odpowiednia analiza może być przeprowadzona w oparciu o przedstawiony w poprzednim rozdziale sposób obliczeń wytrzymałościowych zazębienia. W analizie tej celowe jest uwzględnienie wpływu doboru cech geometrycznych nie tylko na wartość i rozkład obciążeń dynamicznych, ale również na współczynniki obliczeniowe, od których zależą bezpośrednio maksymalne naprężenia lub współczynniki pewności. Wpływ korekcji zazębienia na wartość tych współczynników omówiono w pracach [L. 41,42].

Możliwość przeprowadzenia omawianej analizy dynamicznej i wytrzymałościowej wiąże się bezpośrednio z problemem wyznaczania sztywności zazębienia. Problem ten był podejmowany w pracach licznych autorów [L. 15,50,57, 62,63, 81]. Większość metod obliczeniowych w tym przypadku opiera się na modelach belkowych aproksymujących ząb, rozwiązywanych wg zasad wytrzymałości materiałów. W obliczeniach zwykle zakłada się belkę o kształcie parabolicznym, przy czym parabola przechodzi przez wybrane punkty zarysu zęba. Głębokość utwierdzenia modelu belkowego w wieńcu koła jest różnie przyjmowana przez poszczególnych autorów. Celowe jest przeprowadzenie w przy-

szłych pracach analizy wpływu korekcji zazębienia na sztywność zazębienia i własności dynamiczne przekładni, przy zastosowaniu jednego ze znanych sposobów analitycznego wyznaczania sztywności oraz przedstawionej w pracy numerycznej metody wyznaczania obciążeń dynamicznych. Prowadzenie tej analizy jest możliwe przy wykorzystaniu ETO.

12. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W pracy dokonano analizy wpływu najbardziej istotnych cech zazębienia na zjawiska dynamiczne w przekładni o zębach prostych. Analizę tę przeprowadzono w oparciu o wyniki rozwiązań równania opisującego względny ruch pary kół zębatych. W obliczeniach oparto się na dyskretnym modelu dynamicznym przekładni opracowanym wg koncepcji L. Müllera. Przydatność tego modelu do opisu zjawisk dynamicznych w kołach zębatych została potwierdzona w licznych pracach zarówno teoretycznych, jak i eksperymentalnych. Przyjęty sposób rozpatrywania zjawisk dynamicznych umożliwiał wyznaczenie rozkładu obciążeń dynamicznych na powierzchni zębów (wzdłuż odcinka przyporu) przy jednoczesnym uwzględnieniu losowych i okresowych odchyłek zazębienia o dowolnej charakterystyce sprężystej.

W pracy podano bezwymiarową postać równania względnego ruchu pary kół zębatych, z którego wynika bezpośrednio równanie określające współczynnik obciążeń dynamicznych. Przedstawiono także algorytm numerycznego rozwiązywania równania ruchu za pomocą programowalnych kalkulatorów względem maszyn cyfrowych. Przyjęcie bezwymiarowej postaci równania pozwoliło na znaczne uogólnienie uzyskanych wyników. Przykładowo, współczynnik obciążeń dynamicznych przy ustalonych pozostałych cechach konstrukcyjnych zazębienia uzależniony jest od względnej prędkości ruchu kół odniesionej do prędkości krytycznej oraz od charakteru i względnej wartości odchyłek wykonania w stosunku do ugięcia statycznego jednej pary zębów.

W pracy podjęto próbę usystematyzowania problemów wyznaczania stanu dynamicznego przekładni o zębach prostych. Uzyskane w pracy wyniki obliczeń numerycznych stanowią podstawę do sformułowania następujących wniosków dotyczących oceny wpływu różnych cech konstrukcyjnych i technologicznych zazębienia na zjawiska dynamiczne w przekładni:

1. Ze względu na nieliniowy charakter równania ruchu kół, wynikający głównie z obecności luzów w zazębieniu, w zakresie prędkości krytycznej obserwuje się zjawisko "przeskoku", charakterystyczne dla drgań nieliniowych. Przy małych wartościach współczynnika tłumienia (np. $\varphi = 0{,}05$), zjawisko to występuje również w zakresie podkrytycznym, w strefach lokalnych rezonansów parametrycznych. Ze wzrostem współczynnika tłumienia, oprócz oczywistego zmniejszenia wartości współczynnika obciążeń dynamicznych, następuje ograniczenie zakresu prędkości, w którym występuje zjawisko "przeskoku". Przy dużych wartościach współczynnika tłumienia, zjawisko to nie występuje (np. $\varphi = 0{,}167$).

2. Ograniczanie luzu międzyzębnego prowadzi do zmniejszenia zakresu prędkości, w którym występuje zjawisko "przeskoku" w obszarze głównego rezonansu, aż do zupełnego wyeliminowania tego zjawiska dla zazębienia bezluzowego. W zakresie podkrytycznym ograniczanie luzu nie wywołuje istotnych zmian wartości obciążeń dynamicznych.
3. W przekładniach ogólnego przeznaczenia wartości luzów międzyzębnych najczęściej znacznie przekraczają wartości sumy ugięć statycznych i odchyłek zazębienia. Z tego względu podczas pracy na ogół nie dochodzi do styku przeciwnych boków zębów, normalnie niepracujących. Biorąc to pod uwagę, w modelu matematycznym przekładni można założyć luz o wartości nieskończenie dużej, co wpływa na uproszczenie programów obliczeniowych.
4. Własności dynamiczne przekładni, jak również wytrzymałość zazębienia, zależą w dużym stopniu od jego charakterystyki sprężystej, a w szczególności od stosunku maksymalnej sztywności podczas przyporu dwuparowego do minimalnej jej wartości w strefie zazębienia jednoparowego. Z punktu widzenia stanu dynamicznego przekładni szczególnie niekorzystny jest przypadek koła wykonanego w postaci wieńca zębatego. Wtedy sztywność jednej pary zębów prawie nie zmienia się wzdłuż odcinka przyporu, a stosunek maksymalnej sztywności całkowitej do minimalnej wynosi około 2. W tym przypadku występują znaczne obciążenia dynamiczne na początku odcinka przyporu, co niekorzystnie wpływa na wytrzymałość na złamanie zębów koła i zatarcie.
5. W przekładni wykonanej bezbłędnie, pracującej w zakresie prędkości krytycznej, zmiana wartości wskaźnika zazębienia ε_α w granicach od 1,2 do 1,8 nie wpływa w sposób istotny na wartość współczynnika obciążeń dynamicznych. W przypadku gdy wskaźnik ε_α przekładni wykonanej dokładnie wynosi od 1,4 do 1,5, nie obserwuje się wyraźnego przyrostu współczynnika obciążeń dynamicznych w zakresie lokalnego rezonansu, w którym częstość zazębienia jest dwukrotnie mniejsza od częstości drgań własnych pary kół zębatych. Zjawisko to może być wykorzystane w praktyce przy doborze zakresów prędkości przekładni.
6. Z punktu widzenia stanu dynamicznego przekładni, bardziej korzystne są odchyłki okresowe o znaku dodatnim od odchyłek o znaku ujemnym, co potwierdzają także rezultaty badań analitycznych opisanych w [L. 42]. Z tego względu zaleca się wykonywać w praktyce produkcyjnej podziałki kół napędzających nieco większe od podziałek kół napędzanych. Na podstawie wyników obliczeń uzyskanych w niniejszej pracy można jednak stwierdzić, że różnice pomiędzy odpowiednimi wartościami współczynnika K_d wyznaczonymi dla okresowych odchyłek o tej samej wartości bezwzględnej, lecz o różnym znaku są duże, w przypadku gdy sztywność jednej pary zębów nie zmienia się wzdłuż odcinka przyporu (gdy koło wykonane jest w postaci wieńca zębatego), natomiast w przypadku zmiennej sztywności zębów (koła pełne) są znacznie mniejsze.

7. Z punktu widzenia obniżenia efektów dynamicznych modyfikacja po tzw. "długiej ewolwencie" jest bardziej korzystna od modyfikacji po tzw. "krótkiej ewolwencie", w przypadku przekładni o zębach silnie obciążonych, wykonanych dokładnie (3 lub 4 klasa dokładności wg PN) pracujących przy obciążeniu nominalnym lub przy niedociążeniu. Jest to zgodne z wynikami dotychczasowych prac teoretycznych i eksperymentalnych [L. 40, 44], a tym samym świadczy o poprawności przyjętej metody obliczeń. Efektywność modyfikacji zarysu zęba, przy założeniu dokładnego wykonania kół, zależy nie tylko od sposobu jej wykonania, ale również od obciążenia przekładni. Przy obciążeniu znacznie mniejszym od nominalnego (np. wynoszącym 50% wartości nominalnej), w przekładni wykonanej dokładnie o zębach modyfikowanych, w zakresie prędkości podkrytycznej występują większe wartości współczynnika obciążeń dynamicznych niż w przekładni o zębach niemodyfikowanych. Modyfikacja wywołuje w tym przypadku efekty dynamiczne podobne do tych, jakie występują w kołach zębatych obarczonych okresowymi odchyłkami zazębienia. Efektywność modyfikacji zarysu zęba zmniejsza się znacznie ze wzrostem losowych odchyłek zazębienia. W przekładniach o zębach słabo obciążonych, tj. wykonanych ze stali ulepszonych, ugięcia statyczne są mniejsze niż w przekładniach o zębach silnie obciążonych, a stąd wpływ odchyłek jest większy. W tym przypadku modyfikacja zarysu zęba nie prowadzi do istotnego obniżenia wartości współczynnika obciążeń dynamicznych, ale powoduje korzystne zmiany rozkładu obciążeń dynamicznych wzdłuż odcinka przyporu, co wpływa na zwiększenie wytrzymałości na złamanie i zatarcie zębów.
8. Niewielkie zużycie głów zębów, nie przekraczające 2 ugięć statycznych, spełnia podobną rolę, jak modyfikacja zarysu zęba, a więc prowadzi do zmniejszenia wartości współczynnika obciążeń dynamicznych w stosunku do przekładni o niezużytych zębach. Zjawisko to występuje również w rzeczywistej przekładni, gdzie wskutek zużycia głów zębów w procesie docierania się współpracujących powierzchni obserwuje się wyraźne zmniejszenie obciążeń dynamicznych.

Przedstawiona w pracy metoda numerycznego wyznaczania obciążeń dynamicznych może być wykorzystana w obliczeniach inżynierskich, przy zastosowaniu programowalnych kalkulatorów względnie maszyn cyfrowych. Wyniki obliczeń uzyskane w pracy mogą być wykorzystane w procesie projektowania przekładni do wyboru podstawowych cech konstrukcyjnych i technologicznych zazębienia, względnie mogą służyć do porównania różnych wariantów założeń projektowych z punktu widzenia własności dynamicznych przekładni.

W pracy zaproponowano nowy sposób obliczeń wytrzymałościowych zazębienia, oparty na numerycznej metodzie wyznaczania obciążeń dynamicznych. Sposób ten polega na określeniu zróżnicowanych wartości współczynnika obciążeń dynamicznych w obliczeniach wytrzymałości zazębienia na złamanie, naciski i zatarcia. Zaletą tego sposobu obliczeń jest większa dokładność oszacowania maksymalnych naprężeń oraz związanych z tym współczynników pewności w porównaniu z tradycyjnymi metodami obliczeń, w których przyjmowało

się zwykle jedną wartość współczynnika obciążeń dynamicznych we wszystkich przypadkach obliczeń.

PERSPEKTYWY DALSZYCH BADAŃ

Uzyskane wyniki wskazują na celowość kontynuowania prac nad doskonaleniem i wdrażaniem do praktyki przedstawionej metody wyznaczania obciążeń dynamicznych.

Prace te powinny obejmować następujące główne grupy problemów:

- prowadzenie badań analitycznych bardziej złożonych modeli dynamicznych przekładni zębatych otrzymanych przez rozbudowę podstawowego modelu L. Müllera; celowe jest uwzględnienie większej liczby stopni swobody i innych postaci drgań przekładni; ze względu na skomplikowaną postać opisu matematycznego tych modeli, ich ogólna analiza jest mało realna, nawet przy wykorzystaniu ETO, możliwe jest natomiast porównanie kilku wybranych rozwiązań,
- prowadzenie badań doświadczalnych zmierzających do poznania mechanizmu rozpraszania energii w różnych miejscach przekładni, ustalenia modelu tłumienia drgań i identyfikacji jego parametrów,
- prowadzenie badań analitycznych i doświadczalnych mających na celu określenie wpływu cech konstrukcyjnych kół zębatych, a w szczególności wpływu korekcji zębów na charakterystykę sprężystą zazębienia i własności dynamiczne przekładni,
- opracowanie praktycznych metod wyznaczania wytrzymałości zazębienia, przydatnych w obliczeniach inżynierskich, opartych o numeryczną metodę określania obciążeń dynamicznych i uwzględniających zróżnicowane wartości współczynnika obciążeń dynamicznych.

LITERATURA

[1] R.R. Allen: Multiport Models for the Kinematic and Dynamic Analysis of Gear Power Transmissions. Transactions of the ASME, 1979,Vol. 101, April, ss. 258-267.

[2] V.A. Arefiew: Eksperimientalnoje issledowanije diempfirujuszczej Sposobnosti Maslanogo Słoja w zubczatoj pieriedaczе. Maszinostrojenije, 1971, Nr 10, ss. 58-60.

[3] R.C. Azar, F.R.E. Crossley: An experimental investigation of impact phenomen in spur gear systems, 4-th World Congr. Theory Mach. and Meoh., Newcastle 1975, ss. 157-161.

[4] W. Bogusz, Z. Engel, J. Giergiel: Drgania i szumy. Skrypt AGH, Warszawa 1974.

[5] J.G. Bollinger: Ursachen und Auswirkungen dynamischer Zahnkräfte in Stirnradgetrieben, 1964, Nr 19, ss. 319-326.

[6] M. Bosch: Das dynamische Verhalten von Stirnradgetrieben unter besonderer Berücksichtigung der Verzahnungsgenauigkeit. Industrie Anzeiger, 1965, Nr 102, ss. 2469-2478, 1966, Nr 14, ss. 267-274.

[7] E. Buckingham: Dynamic loads on gear teeth. Machinery, 1958, Nr 10, ss. 117-121.

[8] J.D.C. Crisp, B. Rebbechi: On the elastokinematics of the involute gear pair. Trans. ASME, 1977, Nr 3, ss. 648-655.

[9] B.P. Demidowicz, I.A. Maron, E.Z. Szuwałowa: Metody numeryczne.Część II. PWN, Warszawa 1965.

[10] M. Dietrich: Modelowanie w konstrukcji maszyn. Referaty IX Sympozjum PKM, październik 1979, ss. 82-93.

[11] M. Dietrich i inni: Doświadczalne badania sił dynamicznych w kołach zębatych przy dużych prędkościach obwodowych. V Konferencja N-T "Przekładnie Zębate", 1972, Zeszyt 20, ss. 45-59.

[12] J. Dietrych i inni: Podstawy konstrukcji maszyn. Część I i III. WNT. Warszawa 1966.

[13] J. Dietrych: Projektowanie i konstruowanie. WNT, Warszawa 1974.

[14] DIN 3990: Tragfähigkeitsberechnung von Stirn - und Kegelrädern. Dezember 1970.

[15] G. Friedrich: Experimentelle untersuchung der inneren dynamischen Zusatzkräfte bei geradverzahnten Stirnrädern, Dissertation,Dresden 1970,

[16] St. Fronius, M. Linke: Untersuchungen zur Berechnung und Tragfähigkeitssteigerung von Zahnradgetrieben. Maschinenbautechnik, 1973. Nr 11, ss. 483-491.

[17] R. Gryboś: Drgania parametryczne jednostopniowej przekładni zębatej. Rozprawy Inżynierskie, 1971, ss. 63-81.

[18] C. Hayashi: Drgania nieliniowe w układach fizycznych. WNT, Warszawa 1968.

[19] W. Kalkert, M. Bosch: Untersuchungen der Flankentragfähigkeit von Stirnradgetrieben. Industrie Anzeiger, 1964, Nr 102, ss. 2193-2198.

[20] A. Krukowski: Optymalizacyjne badania konstrukcyjne przekładni zębatych. Dodatek do Biuletynu Nr 6 WAT, Warszawa 1980.

[21] A. Kubo, S. Sato, T. Aida: Einfluss des Sohmierverfahrens auf die dynamische Zahnfussbeanspruchung in Hochgeschwindigkeitsgetrieben.VDI-Z 1973, Nr 2, ss. 127-133.

[22] H. Linke: Untersuchungen zur Ermittlung dynamischer Zahnkräfte von einstufigen Stirnradgetrieben mit Geradverzahnung, Dissertation,Dresden 1970.

[23] I. Maier: Berechnung der Zahnbruchsehne s_f zwischen den Berührungspunkten der 30° - Tangenten. VDI-Z, 1962, Nr 6, ss. 277-286.

[24] I. Małecki: Poprawiony układ analogii elektromechanicznych i jego interpretacja fizyczna. Przegląd Elektrotechniczny, 1952, Zeszyt 1, ss. 1-7.

[25] M. Maksimiuk: Analiza dynamiczna stochastycznego dyskretnego modelu jednostopniowej przekładni zębatej. Praca doktorska, Warszawa 1974.

[26] M. Mielczarek: Możliwości wykorzystania systemowego modelu matematycznego do badania charakterystyk dynamicznych wielostopniowej przekładni zębatej. Archiwum Budowy Maszyn, 1975, Zeszyt 3, ss. 357-373.

[27] L. Müller: Siły dynamiczne w kołach zębatych. Przegląd Mechaniczny, 1960, Nr 14, ss. 408-411.

[28] L. Müller: Dynamika przekładni zębatych. Przegląd Mechaniczny, 1968, Nr 15, ss. 434-437.

[29] L. Müller, A. Wilk: Siły dynamiczne w kołach zębatych przy prędkościach rezonansowych. Przegląd Mechaniczny, 1971, Nr 2, ss. 38-40.

[30] L. Müller, A. Wilk: Pomiary sił dynamicznych w kołach zębatych. Pomiary, Automatyka, Kontrola, 1971, Nr 7, ss. 298-300.

[31] L. Müller: Problemy dynamiki przekładni zębatych. V Konferencja N-T "Przekładnie Zębate", 1972, Zeszyt 19.

[32] L. Müller: Przekładnie zębate - obliczenia wytrzymałościowe.WNT Warszawa 1970/2.

[33] L. Müller i inni: Wpływ błędów podziału na kinematykę zazębień.Przegląd Mechaniczny, 1973, Nr 7, ss. 245-247.

[34] L. Müller i inni: Wpływ mimośrodowości na obciążenia dynamiczne kół zębatych. Przegląd Mechaniczny, 1973, Nr 6, ss. 204-206.

[35] L. Müller: Nowy model dynamiczny przekładni walcowej o zębach prostych. Przegląd Mechaniczny, 1974, Nr 21, ss. 725-728.

[36] L. Müller: Nowy model dynamiczny przekładni zębatej. VI Konferencja N-T "Przekładnie Zębate", 1974, Zeszyt 22, ss. 79-86.

[37] L. Müller, J. Jonek: Wpływ niejednostajności podziału na efektywność modyfikacji zarysu zęba. Przegląd Mechaniczny, 1976, Nr 2, ss.41-44.

[38] L. Müller: Wpływ modyfikacji na zjawisko zatarcia kół zębatych.Przegląd Mechaniczny, 1976, Nr 6, ss. 189-191.

[39] L. Müller: Optymalizacja przekładni zębatych za pomocą ETO. Przegląd Mechaniczny, 1976, Nr 14, ss. 475-477.

[40] L. Müller: Dynamika szybkobieżnych przekładni zębatych. Przegląd Mechaniczny, 1978, Nr 22, ss. 16-19.

[41] L. Müller: Dobór współczynników korekcji zazębienia. Materiały Konferencji N-T "Przekładnie Zębate", Katowice 1978, Zeszyt 27. Pomoce Projektowe.

[42] L. Müller: Przekładnie zębate - projektowanie, WNT, Warszawa,1979.

[43] L. Müller: Wpływ sztywności łożysk na dynamikę kół zębatych. Referat przyjęty do druku w materiałach konferencji "Interdynamic" - Warszawa 1981.

[44] J.R. Myga: Wpływ zużycia zęba na wielkość sił dynamicznych.Praca doktorska - Gliwice 1976.

[45] W. Nadolski: Swobodne drgania skrętne niektórych przekładni zębatych N-stopniowych. Archiwum Budowy Maszyn, 1970, Nr 1, ss. 61-75.

[46] W. Nadolski: Siły występujące między zębami kół przekładni jednostopniowej o osiach równoległych. Rozprawy inżynierskie, 1971, Nr 3, ss. 451-465.

[47] W. Nadolski: Budowa modelu mechanicznego przekładni zębatej jednostopniowej o osiach równoległych w przypadku drgań giętno-skrętnych. Archiwum Budowy Maszyn, 1972, ss. 575-588; 1973, ss. 101-106, ss.315-331.

[48] W. Nadolski: Modelowanie dynamiczne przekładni zębatych jednostopniowych. Prace IPPT PAN, Warszawa 1972.

[49] G. Niemann: Maschinenelemente II, 1965, Berlin Springer-Verlag.

[50] G. Niemann: Drehwegfehler, Zahnfederhärte und Geräusch bei Stirnrädern. VDI-Z, 1970, Nr 4, ss. 205-214.

[51] K. Ochęduszko: Koła zębate, T. 3. Sprawdzanie, WNT, Warszawa 1972.

[52] H. Opitz, H. Faulstich: Zusammenhänge zwischen Einzelfehlern, Einflanken-Walzfehler und Tragbild evolventenverzahnter Stirnrader. Forschungsbericht des Landes RFN nr 2058, Koln und Opladen, 1969.

[53] H. Opitz: Dynamic behaviour of spur and helical gears. JSME 1967, Semi-International Symposium - Tokyo, ss. 322.

[54] J. Osiński: Analiza dynamiczna modelu przekładni zębatej o dwóch stopniach swobody, Referaty IX Sympozjum PKM - październik 1979, ss.69-74.

[55] Z. Osiński: Teoria drgań. PWN, Warszawa 1978.

[56] Z. Osiński: Tłumienie drgań mechanicznych. PWN, Warszawa 1979.

[57] J. Rademacher: Eingluss der Verzahnungsteifigkeit auf das Laufverhalten von Stirnradgetrieben. Industrie-Anzeiger, 1968, Nr 25, ss.31-36.

[58] H. Rettig: Zahnkräfte und Schwingungen in Stirnradgetrieben Konstruktion, 1965, Nr 2, ss. 41-53.

[59] H. Rettig: Schwingungen in Zahnradgetrieben. Versuchsergebnisse und Berechnungsansatz über dynamische Zahnkräfte, 4-th World Congr. Theory Mach. and Mechn. Newcastle, 1975, ss. 163-168.

[60] H. Rettig: Innere dynamische Zusatzkrafte bei Zahnradgetrieben. Antriebstechnik, 1977, Nr 11, ss. 655-663.

[61] W.N. Rudnicki: Issledovanije dinamiczeskich nagruzok na zubiach priamozubych kolies vnieszniego zacieplenia. Maszinostrojenije, 1977.

[62] J. Ryś: Analiza obciążeń statycznych i dynamicznych w walcowych przekładniach zębatych. Zeszyty Naukowe Nr 6, Kraków 1977, Mechanika.

[63] J. Ryś: Sztywność zębów prostych walcowych kół zębatych. Przegląd Mechaniczny, 1977, Nr 10, ss. 337-341.

[64] J. Ryś: Modelowanie zjawisk dynamicznych w przekładni zębatej. Przegląd Mechaniczny, 1978, Nr 11, ss. 12-16.

[65] J. Ryś: Obliczanie współczynników dynamicznych oraz częstości rezonansowych modelu przekładni zębatej o zębach prostych. Materiały IX Konferencji N-T "Przekładnie Zębate", Katowice 1980, ss.23-38.

[66] A. Seireg, D.R. Hauser: Evaluation of Dynamic Factors for Spur and Helicar Gears. Transactions of the ASME, 1970, Nr 5, ss.504-515.

[67] A. Skoć: Dynamika stożkowych kół zębatych. Praca doktorska, Gliwice 1975.

[68] J. Tara: Analiza dynamiki przekładni o zębach skośnych. Praca doktorska, Katowice 1979.

[69] C. Teper: Optymalizacja cech geometrycznych i konstrukcyjnych kół zębatych przekładni samochodowych za pomocą maszyn cyfrowych. Praca doktorska WAT, Warszawa 1973.

[70] T. Toshimi, T. Nobuo: Dynamic loads on spur gear teeth caused by teeth impact. Bulletin of JSME, 1973, Nr 96, ss. 1031-1037.

[71] M. Utagawa: Dynamic Loads on spur Gear Teeth. Bulletin od JSME,1968, Nr 4, ss. 397-403.

[72] E. Uli Tibau: Analiza wpływu błędów technologicznych na dynamikę przekładni. Praca doktorska, Gliwice 1975.

[73] A. Wilk: Pomiary nadwyżek dynamicznych w kołach zębatych przy prędkościach rezonansowych. Materiały IV Konferencji N-T "Przekładnie Zębate", Gliwice, 1970, ss. 77-88.

[74] A. Wilk: Określenie nadwyżek dynamicznych w kołach zębatych przy podharmonicznych częstotliwościach wymuszeń. Praca doktorska, Gliwice, 1970, promotor - prof. L. Muller.

[75] A. Wilk, J. Gardulski: Wpływ odchyłek wykonawczych na dynamikę przekładni zębatych. Materiały IX Konferencji N-T "Przekładnie Zębate", Katowice 1980, ss. 39-61.

[76] A. Wilk: Obliczenia wytrzymałościowe zazębienia z uwzględnieniem przebiegu obciążeń dynamicznych na odcinku przyporu. Materiały IX Konferencji N-T "Przekładnie Zębate", Katowice 1980, ss. 105-115.

[77] J. Wojnarowski: Metoda "Graf" wyznaczania obciążenia w złożonych przekładniach zębatych. Zeszyt Naukowy Instytutu Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Śląskiej, Gliwice 1973.

[78] J. Wojnarowski, A. Lidwin: The Application of Signal Flow Graphs for the Kinematic Analysis of Planetary Gear Trains. J. Mechanism and Machine Theory, Vol. 10, 1975, ss. 17-31.

[79] J. Wojnarowski: The Graph Method of Determining the Loads in Complex Gear Trains. J. Mechanism and Machine Theory, Vol. 11, 1976,ss. 103-121.

[80] J. Wojnarowski: Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych. Zeszyt Naukowy Instytutu PKM Politechniki Śląskiej i PTMTiS, Gliwice 1977, Nr 38.

[81] H.J. Yebra: Wpływ parametrów konstrukcyjnych na dynamikę przekładni. Praca doktorska, Gliwice 1975.

[82] I.T. Young: Gear rules and standards. Jribol. Int., 1977, Nr 5, ss. 257-265.

[83] V. Zeman: Nova metoda vypoctu dynamickeho zatizeni celich ozubenych prevodu s pruzne ulozenymi koly. Strojnicky Casopis, 1970, Nr 6, ss. 585-597.

[84] Sprawozdanie z pracy naukowo-badawczej pt. "Wykorzystanie sygnałów wibroakustycznych w diagnostyce przekładni zębatych". Instytut Transportu Samochodowego Politechniki Śląskiej. Katowice 1978 (MR.I. 24. 05.2).

[85] I projekt normy RWPG: Przekładnie zębate walcowe. Obliczenia nośności z wykorzystaniem PC 2204-69, Berlin Februar 1980.

WPŁYW PARAMETRÓW TECHNOLOGICZNYCH I KONSTRUKCYJNYCH
NA DYNAMIKĘ PRZEKŁADNI O ZĘBACH PROSTYCH

S t r e s z c z e n i e

W pracy przeprowadzono analizę wpływu istotnych cech zazębienia na zjawiska dynamiczne w przekładni o zębach prostych. Analizy tej dokonano w oparciu o wyniki rozwiązań równania opisującego względny ruch pary kół zębatych. Równanie rozwiązywano metodami numerycznymi, przy wykorzystaniu programowalnego kalkulatora oraz maszyny cyfrowej Odra 1204. W szczególności przeanalizowano wpływ następujących czynników:

- współczynnika tłumienia drgań,
- luzu międzyzębnego,
- charakterystyki sprężystej zazębienia,
- wskaźnika zazębienia,
- odchyłek kinematycznych zazębienia okresowych oraz losowych,
- modyfikacji zarysu zęba,
- odchyłek zarysu zęba wywołanych wskutek jego zużycia.

Teoretyczne wyniki pracy zostały zweryfikowane przez porównanie z rezultatami badań eksperymentalnych różnych autorów.

Zaproponowano nowy sposób obliczeń wytrzymałościowych zazębienia, oparty na numerycznej metodzie wyznaczania obciążeń dynamicznych. Sposób ten polega na określeniu zróżnicowanych wartości współczynnika obciążeń dynamicznych w obliczeniach wytrzymałościowych zazębienia na złamanie, naciski i zatarcie.

Przedstawiona w pracy metoda numerycznego wyznaczania obciążeń dynamicznych może być wykorzystana w obliczeniach inżynierskich, przy zastosowaniu programowalnych kalkulatorów względnie maszyn cyfrowych, natomiast uzyskane wyniki obliczeń mogą być przydatne w procesie projektowania przekładni.

ВЛИЯНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ И КОНСТРУКЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ НА ДИНАМИКУ ПРЯМОЗУБНОЙ ПЕРЕДАЧИ

Р е з ю м е

В работе представлен анализ влияния существенных свойств зубчатого зацепления на динамические явления в прямозубной передаче. Этот анализ произведен, исходя из результатов решений уравнения, описывающего относительное движение пары зубчатых колес. Уравнение решали численными методами, используя счетную программированную машину, а также вычислительную машину Одра 1204. Проанализировано, в особенности, влияние следующих факторов:

- степени успокоения колебаний,
- зазора в зубьях,
- упругой характеристики зубчатого зацепления,
- показателя зубчатого зацепления,
- кинематических, периодических, а также случайных отклонений зубчатого зацепления,
- модификации профиля зуба,
- отклонений профиля зуба в результате его износа.

Теоретические результаты работы проведены путем сопоставления с результатами экспериментальных исследований разных авторов.

Предложен новый способ расчетов на прочность зубчатого зацепления, базирующий на численном методе определения динамических нагрузках. Этот способ заключается в определении дифференцированных значений коэффициента динамических нагрузок в расчетах на прочность зубчатого зацепления на излом, нажимы и заедание.

Представлен в работе численный метод определения динамических нагрузок может быть использован в инженерских расчетах с применением счетных программированных машин или вычислительных машин, зато полученные результаты расчетов могут быть пригодны в процессе проектирования передач.

THE EFFECT OF TECHNOLOGICAL AND DESIGN PARAMETERS ON THE DYNAMICS OF A STRAIGHT GEAR TRANSMISSION

A b s t r a c t

The report analyses the effect of significant mesh features on the dynamics in the straight gear. The analysis is based on the solution of the equation that describes a relative motion of a toothed wheel pair. The equation has been solved numerically with the application of programmed calculator and the ODRA - 1204 computer. The effect of the following factors has been analysed:

- vibration damping coefficient,
- intergear clearance,
- elasticity performance of the mesh,
- kinematic periodic/random deviations of the mesh,
- tooth profile modification,
- gear profile deviations due to its wear,
- gear factor.

Theoretical results of the studies have been verified by comparing them with the results of experiments obtained by different authors. A new method for computing mesh strength has been suggested. It is based on numerical method of determining dynamic loads. The sense of the method lies in determining the differentiated values of the dynamic loads coefficient in computing the mesh resistance to fracture, stress and seizing.

The numeric method of determining dynamic loads presented in the paper can be used in engineering computations with the application of the programmed calculators or computers. Whereas the result obtained can be useful in designing the transmission.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P 3362/81/72

WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:

44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN — Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.