ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1987

Seria: MECHANIKA z.86 Nr kol. 1012

XI OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA TEORII MASZYN I MECHANIZMÓW

11th POLISH CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES AND MECHANISMS

27—30. 04. 1987 ZAKOPANE

Н.С. ДАВИТАШВИЛИ

Кафедра Теории механизмов и машин
Грузинского политехнического института

СИНТЕЗ СФЕРИЧЕСКОГО ПЯТИЗВЕННОГО ШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА ПО ЗАДАННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЛЕМНИСКАТЫ

Резюме. В работе дается проектирование сферического пятизвенного шарнирного механизма с двумя степенями свободы для воспроизведения заданной траектории - сферической лемнискаты. Векторным методом выводятся уравнения траекторий сферической ленискаты и соединительной точки шатунов сферического пятизвенника. Методом точечного интерполирования найдены все искомые параметры сферического пятизвенного механизма. Полученные результаты позволяют с помощью спроектированного сферического пятизвенного механизма воспроизвести заданную сферическую лемнискату.

Синтез сферических пятизвенных механизмов с двумя степенями свободы представляет собой сложную задачу. При синтезе механизмов с двумя степенями свободы конструктор располагает шестью геометрическими параметрами. Кроме четырех линейных размеров, здесь должны быть приняты во внимание и начальные положения входных звеньев (фазовый угол) и передаточное отношение между входными звеньями с учетом направления их движения.

При проектировании сферических пятизвенных механизмов одной из важных и трудных задач является воспроизведение заданных сферических шатунных кривых. Решение такой задачи необходимо для осуществления различных технологических процессов, как например, обработки сферических поверхностей и др.

Вопросы анализа и синтеза сферических пятизвенных шарнирных механизмов с двумя степенями свободы с помощью методов аналитической геометрии на сфере решены в работах [1, 2, 3].

В последнее время профессором П.А. Лебедевым [4, 5] был развит векторный метод в кинематике и кинетостатике рычажных механизмов. Этот метод был применен также для решения задачи [6, 7].

В предлагаемой работе дается синтез сферического пятизвенного шарнирного механизма, соединительная точка шатунов которого будет описывать восьмеркообразную траекторию - сферическую лемнискату.

Для решения данной задачи сперва выведем уравнение сферической лемнискаты. Для этой цели выберем на сфере единичного радиуса две точки F и F_1 - фокусы лемнискаты (Рис. 1), определяемые ортами $\bar{f}$ и $\bar{f}_1$ - соответственно. Обозначим угол между этими ортами через 2α.

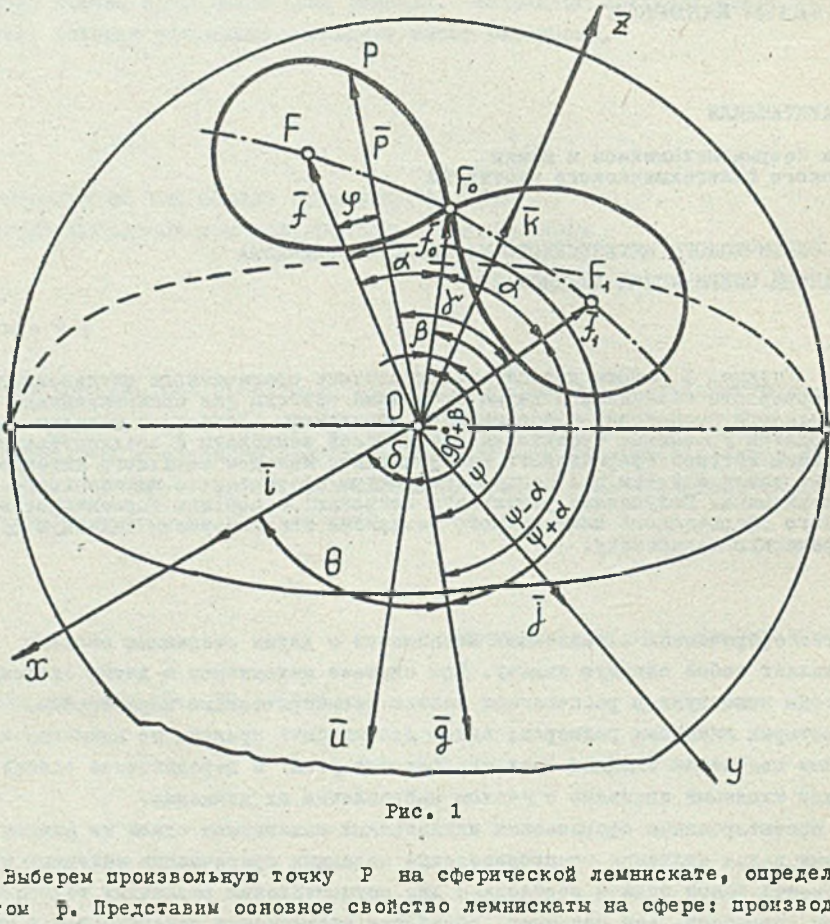

Рис. 1

Выберем произвольную точку P на сферической лемнискате, определяемую ортом $\bar{p}$. Представим основное свойство лемнискаты на сфере: произведение длин дуг $\varphi\gamma$, измеренных до точки P от обоих фокусов, есть величина постоянная, равная α^2:

$$\varphi \cdot \gamma = \alpha^2. \tag{1}$$

Поставив в соответствии углам φ и γ векторы $\bar{p} - \bar{f}$ и $\bar{p} - \bar{f}_1$ и углу α - вектор $\bar{f}-\bar{f}_0$, или $\bar{f}_1-\bar{f}_0$. При этом равенство (1) преобразуется к виду

$$|(\bar{p}-\bar{f})| \cdot |(\bar{p}-\bar{f}_1)| = (\bar{f}-\bar{f}_o)^2,$$

или

$$\sqrt{1 - \bar{p}.\bar{f} - \bar{p}.\bar{f}_1 + (\bar{p}.\bar{f})(\bar{p}.\bar{f}_1)} = 1 - \bar{f}.\bar{f}_o,$$

откуда

$$\bar{p}.\bar{f}_1 = \frac{1}{1-\bar{p}.\bar{f}}\left[2\bar{f}.\bar{f}_o - (\bar{f}.\bar{f}_o)^2 - \bar{p}.\bar{f}\right]. \tag{2}$$

Исходя из скалярных произведений $\bar{p}.\bar{f}$; $\bar{p}.\bar{f}_1$ и $\bar{f}.\bar{f}_1$, по формуле трех ортов [4, 5, 6, 7] определяем орт

$$\bar{p} = \frac{1}{1-(\bar{f}.\bar{f}_1)^2}\cdot\Big\{\bar{f}\left[\bar{p}.\bar{f} - (\bar{p}.\bar{f}_1)(\bar{f}.\bar{f}_1)\right] + \bar{f}_1\left[\bar{p}.\bar{f}_1 - (\bar{p}.\bar{f})(\bar{f}.\bar{f}_1)\right] +$$
$$\pm(\bar{f}\times\bar{f}_1)\sqrt{1-(\bar{p}.\bar{f})^2-(\bar{p}.\bar{f}_1)^2-(\bar{f}.\bar{f}_1)^2+2(\bar{p}.\bar{f})(\bar{p}.\bar{f}_1)(\bar{f}.\bar{f}_1)}\Big\}. \tag{3}$$

Подставим значения (2) в (3) с учетом равенств: $\bar{p}.\bar{f} = \cos\varphi$; $\bar{f}.\bar{f}_1 = \cos 2\alpha$ и $\bar{f}.\bar{f}_o = \cos\alpha$, получим:

$$\bar{p} = \frac{1}{\sin^2 2\alpha(1-\cos\varphi)}\Big\{\bar{f}\left[\cos\varphi/1-\cos\varphi)-\cos 2\alpha(2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi)\right] +$$
$$+\bar{f}_1\left[\cos\alpha(2-\cos\alpha)-\cos\varphi(1+\cos 2\alpha-\cos\varphi.\cos 2\alpha)\right] \pm (\bar{f}\times\bar{f}_1)\sqrt{\sin^2\varphi(1-\cos\varphi)^2 -}$$
$$\overline{-\left[2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi\right]^2 - \cos^2 2\alpha(1-\cos\varphi)^2+2\cos\varphi\cos 2\alpha(1-\cos\varphi)\left[2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi\right]}\Big\}. \tag{4}$$

Уравнение сферической лемнискаты (4) содержит скалярный параметр 2α и два орта $\bar{f}$ и $\bar{f}_1$ с общим началом в центре сферы. Каждый из них относительно некоторой выбранной декартовой прямоугольной системы координат с началом в центре сферы O определяется двумя скалярными параметрами - углами, составленными с двумя заданными прямыми (например, двумя осями координат). Это означает, что для решения задачи построения лемнискаты на заданном участке сферической поверхности достаточно выбрать орты $\bar{f}$ и $\bar{f}_1$, и угол α, после чего, задаваясь величинами φ, легко построить кривую по точкам согласно уравнению (4).

Для определения орт $\bar{f}_o$, $\bar{f}$ и $\bar{f}_1$ определяем положение лемнискаты на сфере с углами Θ, δ и β, где Θ - угол между ортом $\bar{g}$ и осью Ox. Орт $\bar{g}$ получаем путем пересечения плоскости через фокусы F и F_1, проходящей в центре сферы и плоскости xOy; δ - угол между ортом $\bar{u}$ и осью Ox. Орт $\bar{u}$ получаем путем пересечения плоскости проходящей через ось Oz и орт $\bar{f}_o$ и плоскости xOy. β - угол между ортом f_o и осью Oz (рис. 1).

По формуле трех ортов $\bar{u}$, $\bar{K}$, $\bar{f}_o$ (рис. 1) определим орт $\bar{f}_o$:

$$\bar{f}_o = \frac{1}{1-\cos^2\frac{\pi}{2}}\left\{\bar{u}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\cos\frac{\pi}{2}\cos\beta\right]+\bar{K}\left[\cos\beta-\cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\right]\pm\right.$$

$$\left.\pm(\bar{u}\times\bar{K})\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\cos^2\frac{\pi}{2}-\cos^2\beta+2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos\frac{\pi}{2}\cos\beta}\right\}, \quad (5)$$

где

$$\bar{u} = \bar{i}\cdot\cos\delta+\bar{j}\sin\delta$$

и

$$\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\cos^2\frac{\pi}{2}-\cos^2\beta+2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos\frac{\pi}{2}\cos\beta} = 0.$$

(5) примет вид

$$\bar{f}_o = -\bar{i}\sin\beta\cos\delta-\bar{j}\sin\delta\sin\beta+\bar{K}\cos\beta. \quad (6)$$

Следовательно,

$$f_{ox} = -\sin\beta\cos\delta; \quad f_{oy} = -\sin\delta\sin\beta; \quad f_{oz} = \cos\beta.$$

Для определения ортов $\bar{f}$ и $\bar{f}_1$ вычислим угол φ, образованный между ортами $\bar{f}_o$ и $\bar{g}$:

$$\cos\varphi = \bar{f}_o\cdot\bar{g} = f_{ox}\cos\Theta+f_{oy}\sin\Theta = -\sin\beta\cos(\delta-\Theta). \quad (7)$$

По формуле трех ортов $\bar{g}$, $\bar{f}_o$, $\bar{f}_1$ определим $\bar{f}_1$:

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{1-\cos^2\varphi}\left\{\bar{g}\left[\cos(\varphi-\alpha)-\cos\varphi\cos\alpha\right]+\bar{f}_o\left[\cos\alpha-\cos\varphi\cos(\varphi-\alpha)\right]\pm\right.$$

$$\left.\pm(\bar{g}\times\bar{f}_o)\sqrt{1-\cos^2(\varphi-\alpha)-\cos^2\varphi-\cos^2\alpha+2\cos(\varphi-\alpha)\cos\varphi\cos\alpha}\right\}, \quad (8)$$

где

$$\bar{g} = \bar{i}\cos\Theta+\bar{j}\sin\Theta \quad (9)$$

и

$$\bar{g}\times\bar{f}_o = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{K} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ f_{ox} & f_{oy} & f_{oz} \end{vmatrix} = \bar{i}f_{oz}\sin\theta - \bar{j}f_{oz}\cos\theta + \bar{K}(f_{oy}\cos\theta - f_{ox}\sin\theta). \tag{10}$$

В выражение (8) подставляем значение (6), (9) и (10). Имеем:

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sin^2\phi}\Big\{\bar{i}\Big[\cos\theta\text{-}\cos(\phi-\alpha) - \cos\theta\cos\phi\cos\alpha + f_{ox}\cos\alpha - f_{ox}\cos(\phi-\alpha)\,x\cos\phi$$

$$x \pm f_{oz}\sin\theta\sqrt{\sin^2(\phi-\alpha) - \cos^2\phi - \cos^2\alpha + 2\cos(\phi-\alpha)\cos\phi\cos\alpha}\Big] +$$

$$+ \bar{j}\Big[\sin\theta\cos(\phi-\alpha) - \sin\theta\cos\phi\cos\alpha + f_{oy}\cos\alpha - f_{oy}\cos\phi\cos(\phi-\alpha) \mp$$

$$\mp f_{oz}\cos\theta\sqrt{\sin^2(\phi-\alpha) - \cos^2\phi - \cos^2\alpha + 2\cos(\phi-\alpha)\cos\phi\cos\alpha}\Big] \pm$$

$$\pm \bar{K}\Big[(f_{oy}\cos\theta - f_{ox}\sin\theta)\sqrt{\sin^2(\phi-\alpha) - \cos^2\phi - \cos^2\alpha + 2\cos(\phi-\alpha)}$$

$$\overline{\cdot\cos\phi\cos\alpha} + f_{oz}(\cos\alpha - \cos(\phi-\alpha)\cos\phi)\Big]\Big\}. \tag{11}$$

Аналогично, по формуле трех ортов $\bar{g}$, $\bar{f}_o$, $\bar{f}$ определим $\bar{f}$:

$$\bar{f} = \frac{1}{1-\cos^2\phi}\Big\{\bar{g}\Big[\cos(\phi+\alpha) - \cos\phi\cos\alpha\Big] + \bar{f}_o\Big[\cos\alpha - \cos\phi\cos(\phi+\alpha)\Big] \pm$$

$$\pm (\bar{g}\times\bar{f}_o)\sqrt{1-\cos^2(\phi+\alpha) - \cos^2\phi - \cos^2\alpha + 2\cos(\phi+\alpha)\cos\phi\cos\alpha}\Big\}. \tag{12}$$

Подставив значения (6), (9) и (10) в выражение (12), получим

$$\bar{f} = \frac{1}{\sin^2\phi}\Big\{\bar{i}\Big[\cos\theta\text{-}\cos(\phi+\alpha) - \cos\theta\cos\phi\cos\alpha + f_{ox}\cos\alpha - f_{ox}\cos\phi\ \cdot$$

$$\cdot\cos(\phi+\alpha) \pm f_{oz}\sin\theta\sqrt{\sin^2(\phi+\alpha) - \cos^2\phi - \cos^2\alpha - 2\cos(\phi+\alpha)\cos\phi\cos\alpha}\Big] +$$

$$+ \bar{j}\Big[\sin\theta\cos(\phi+\alpha) - \sin\theta\cos\phi\cos\alpha + f_{oy}\cos\alpha - f_{oy}\cos\phi\cos(\phi+\alpha) \mp$$

$$\mp f_{oz}\cos\theta\sqrt{\sin^2(\phi+\alpha) - \cos^2\phi - \cos^2\alpha + 2\cos(\phi+\alpha)\cos\phi\cos\alpha}\Big] +$$

$$-\bar{K}\Big[\pm(f_{oy}\cos\Theta-f_{ox}\sin\Theta\sqrt{\sin^2(\psi+\alpha)-\cos^2\psi-\cos^2\alpha+2\cos(\psi+\alpha)\cos\psi\cos\alpha}+$$

$$+f_{oz}(\cos\alpha-\cos\psi\cos(\psi+\alpha))\Big]\Big\}. \qquad (13)$$

Подставив полученные значения $\bar{f}$ и $\bar{f}_1$ в (4) и учитывая значения

$$\bar{f}\times\bar{f}_1=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{K}\\ C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{14} & C_{15} & C_{16}\end{vmatrix}=\{\bar{i}(C_{12}C_{16}-C_{13}C_{15})-\bar{j}(C_{11}C_{16}-C_{13}C_{14})+\bar{K}(C_{11}C_{15}-C_{12}C_{14})\},$$

после упрощения получим:

$$\bar{p}=\frac{1}{\sin^2 2\alpha(1-\cos\varphi)}\,\bar{i}\Big\{C_{11}\big[\cos\varphi(1-\cos\varphi)-\cos2\alpha(2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi)\big]+$$

$$+C_{14}\big[\cos\alpha(2-\cos\alpha)-\cos\varphi(1-\cos2\alpha-\cos\varphi\cos2\alpha)\big]\pm(C_{12}C_{16}-C_{13}C_{15})C_{17}\Big\}+$$

$$+\frac{1}{\sin^2 2\alpha(1-\cos\varphi)}\,\bar{j}\Big\{C_{12}\big[\cos\varphi(1-\cos\varphi)-\cos2\alpha(2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi)\big]+$$

$$+C_{15}\big[\cos\alpha(2-\cos\alpha)-\cos\varphi(1-\cos2\alpha-\cos\varphi\cos2\alpha)\big]\mp(C_{11}C_{16}-C_{13}C_{14})C_{17}\Big\}+$$

$$+\frac{1}{\sin^2 2\alpha(1-\cos\varphi)}\,\bar{K}\Big\{C_{13}\big[\cos\varphi(1-\cos\varphi)-\cos2\alpha(2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi)\big]+$$

$$+C_{16}\big[\cos\alpha(2-\cos\alpha)-\cos\varphi(1-\cos2\alpha-\cos\varphi\cos2\alpha)\big]\pm(C_{11}C_{15}-C_{12}C_{14})C_{17}\Big\},$$

где

$$C_{11}=\frac{1}{\sin^2\psi}\Big[\cos\Theta-\cos(\psi+\alpha)-\cos\Theta\cos\psi\cos\alpha+f_{ox}\cos\alpha-f_{ox}\cos\psi\cos(\psi+\alpha)\pm$$

$$\pm f_{oz}\sin\Theta\sqrt{\sin^2(\psi+\alpha)-\cos^2\psi-\cos^2\alpha+2\cos(\psi+\alpha)\cos\psi\cos\alpha}\Big];$$

$$C_{12}=\frac{1}{\sin^2\psi}\Big[\sin\Theta\cos(\psi+\alpha)-\sin\Theta\cos\psi\cos\alpha+f_{oy}\cos\alpha-f_{oy}\cos\psi\cos(\psi+\alpha)\mp$$

$$\mp f_{oz}\cos\Theta\sqrt{\sin^2(\psi+\alpha)-\cos^2\psi-\cos^2\alpha+2\cos(\psi+\alpha)\cos\psi\cos\alpha}\Big];$$

$$C_{13} = \frac{1}{\sin^2\phi}\Big[\pm(f_{oy}\cos\theta - f_{ox}\sin\theta)\sqrt{\sin^2(\phi+\alpha) - \cos\phi - \cos^2\alpha + 2\cos(\phi+\alpha)\cos\phi\cos\alpha} + f_{oz}(\cos\alpha - \cos(\phi+\alpha)\cos\phi)\Big];$$

$$C_{14} = \frac{1}{\sin^2\phi}\Big[\cos\theta - \cos(\phi-\alpha) - \cos\theta\cos\phi\cos\alpha + f_{ox}\cos\alpha - f_{ox}\cos\phi\cos(\phi-\alpha) \pm f_{oz}\sin\theta\sqrt{\sin^2(\phi+\alpha) - \cos^2\phi - \cos^2\alpha + 2\cos(\phi+\alpha)\cos\phi\cos\alpha}\Big];$$

$$C_{15} = \frac{1}{\sin^2\phi}\Big[\sin\theta\cos(\phi-\alpha) - \sin\theta\cos\theta\cos\phi + f_{oy}\cos\alpha - f_{oy}\cos\phi\cos(\phi-\alpha) \mp f_{oz}\cos\theta\sqrt{\sin^2(\phi+\alpha) - \cos^2\phi - \cos^2\alpha + 2\cos(\phi+\alpha)\cos\phi\cos\alpha}\Big];$$

$$C_{16} = \frac{1}{\sin^2\phi}\Big[\pm(f_{oy}\cos\theta - f_{ox}\sin\theta)\sqrt{\sin^2(\phi+\alpha) - \cos^2\phi - \cos^2\alpha + 2\cos(\phi+\alpha)\cdot\cos\phi\cos\alpha} + f_{oz}(\cos\alpha - \cos(\phi-\alpha)\cos\phi)\Big];$$

$$C_{17} = \sqrt{\sin^2\varphi(1-\cos\varphi)^2 - \left[2\cos\alpha - \cos^2\alpha - \cos\varphi\right]^2 - \cos^2 2\alpha(1-\cos\varphi)^2 + 2\cos\varphi\cos 2\alpha(1-\cos\varphi)\left[2\cos\alpha - \cos^2\alpha - \cos\varphi\right]}.$$

Выражение(14) и есть уравнение траектории сферической лемнискаты.

Теперь выведем уравнение шатунной кривой, описываемой точкой C сферического пятизвенного шарнирного механизма АВСДЕ (Рис. 2).

Примем следующие обозначения: $OA = \bar{a}$, $OB = \bar{b}$, $OC = \bar{c}$, $OD = \bar{d}$, $OE = \bar{e}$ – орты векторов $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$, $\bar{R}_3$, $\bar{R}_4$ и $\bar{R}_5$ и $\bar{R}_1 = R\bar{a}$, $\bar{R}_2 = R\bar{b}$, $\bar{R}_3 = R\bar{c}$, $\bar{R}_4 = R\bar{d}$, $\bar{R}_5 = R\bar{e}$, где R – модуль всех векторов R_i $(i=1\div5)$ – радиус сферы и равен единице.

Для данного механизма звено АЕ является неподвижным (принято за стойку), поэтому орты $\bar{a}$ и $\bar{e}$ векторов $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_5$ следует считать постоянными и заданными..

Рассматриваемый сферический пятизвенник является механизмом с двумя степенями свободы, т.е. движения выходных звеньев АВ и ДЕ вполне определяется заданием ортов $\bar{b}$ и $\bar{d}$, являющихся функциями переменного параметра времени t.

Эти же орты можно определить с помощью углов φ_2 и φ_5, составленных касательными прямыми соотеветственно к дугам АЕ и АВ и АЕ и ДЕ, проведенных в точках А и Е. Имеем:

$$\bar{Б} = \bar{Б}(t) = \bar{Б}\left[\varphi_2(t)\right] = \bar{Б}\left[(\alpha_0+\alpha)(t)\right], \qquad (15)$$

$$\bar{d} = \bar{d}(t) = \bar{d}\left[\varphi_5(t)\right] = \bar{d}\left[(\beta_0+\beta)(t)\right]. \qquad (16)$$

Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ размеры звеньев АЕ, АВ, ВС, ДС и ДЕ соответственно.

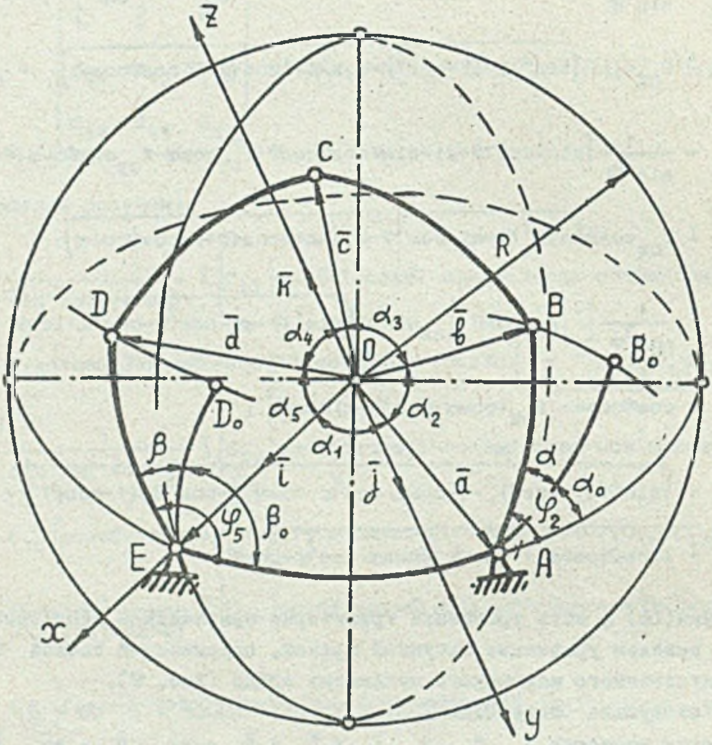

Рис. 2

Положения звеньев АЕ, АВ, ВС, ДС и ДЕ вполне определяются значениями постоянных ортов $\bar{a}$ и $\bar{e}$ и переменных ортов $\bar{Б}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$, из которых $\bar{Б}$ и $\bar{d}$ заданы.

Таким образом, задача о выводе уравнении траектории, описываемой соединительной точкой С шатунов сферического пятизвенника, вполне определена, если определен орт $\bar{c}$.

Для определения этого орта необходимо найти угол γ составленный ортами $\bar{Б}$ и $\bar{d}$. Имеем:

$$\bar{Б} \cdot \bar{d} = \cos\gamma. \qquad (17)$$

Определим орт $\bar{c}$ с помощью формулы трех ортов [4, 7]:

$$\bar{c} = \Big[(\cos\alpha_3-\cos\alpha_4\cos\gamma)\bar{b} + (\cos\alpha_4-\cos\alpha_4\cos\gamma)\bar{d} \pm$$

$$\pm (\bar{b}+\bar{d})\sqrt{1-\cos^2\alpha_3-\cos^2\alpha_4-\cos^2\gamma+2\cos\alpha_3\cos\alpha_4\cos\gamma}\Big]\sin^{-2}\gamma. \qquad (18)$$

Таким образом, с помощью (18) определяется орт $\bar{c}$ и с этим положение точки C, которая описывает сферическую траекторию.

Векторное решение представляется в символической форме. Для практических расчетов в числовой форме необхрдимо выбрать правую прямоугольную декартову систему координат Oxyz с началом в центре сферы O. Ось Ox направим через точку E. Ось OУ расположим в плоскости AOE перпендикулярно оси Ox. Ось Oz выбрана так, чтобы с двумя предидущими осями она составила правую тройку. По осям координат x,y и z направим соответственно орты $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$.

В выбранной системе координат представим заданные величины. Пусть орт $\bar{d}$ с осью OУ составляет угол $\cos\alpha_{Dy}$. По известным допускам углов, составленных ортом $\bar{d}$ с осями x и y и по условию ортогональности определим косинус угла, составленного ортом $\bar{d}$ с осью Oz:

$$\cos\alpha_{Dz} = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha_5-\cos^2\alpha_{Dy}}. \qquad (19)$$

Теперь определим косинусы углов, составленных ортом $\bar{b}$ с координатными осями. Для этого предварительно обозначим косинусы углов, составленных ортом $\bar{a}$ с осями x и y, соответственно через $\cos_{Ax}$ и $\cos_{Ay}$. Положение орта $\bar{b}$ относительно к осям Ox, Oy и Oz, соответственно, через $\cos_{Bx}$, $\cos_{By}$ и $\cos B_z$. По формуле трех ортов определим косинус угла, составленного ортом $\bar{b}$ с осью y, т.е. $\cos_{By}$. Имеем:

$$\bar{b} = \Big[(\cos\alpha_{Bz}-\cos\alpha_1\cos\alpha_2)\bar{i} + (\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\alpha_{Bx})\bar{a} \pm$$

$$\pm (\bar{i}\times\bar{a})\sqrt{1-\cos^2\alpha_{Bx}-\cos^2\alpha_1-\cos^2\alpha_2+2\cos\alpha_{Bx}\cos\alpha_1\cos\alpha_2}\Big]\sin^{-2}\alpha_1. \qquad (20)$$

Умножив скаларно (20) на $\bar{j}$ и $\bar{k}$ найдем:

$$\cos\alpha_{By} = \bar{b}\,.\,\bar{j} = \cos\alpha_{Ay}(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\alpha B_x)\sin^{-2}\alpha_1; \qquad (21)$$

$$\cos\alpha_{Bz} = \bar{b}\,.\,\bar{k} = \pm\cos\alpha_{Ay}\sqrt{1-\cos^2\alpha_{Bx}-\cos^2\alpha_1-\cos^2\alpha_2+ 2\cos\alpha_{Bx}\cos\alpha_1\cos\alpha_2}\,\sin^{-2}\alpha_1. \qquad (22)$$

Так как в выражение (20)

$$\bar{a} = \bar{i}\cos\alpha_{Ax} + \bar{j}\cos\alpha_{Ay};$$

$$\bar{i}\times\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{K} \\ 1 & 0 & 0 \\ \cos\alpha_{Ax} & \cos\alpha_{Ay} & 0 \end{vmatrix} = \bar{K}\cos\alpha_{Ay}. \tag{24}$$

Таким образом, имеем:

$$\bar{b} = \bar{i}\cos\alpha_{Bx} + \bar{j}\cos\alpha_{By} + \bar{K}\cos\alpha_{Bz}. \tag{25}$$

Аналогично

$$\bar{d} = \bar{i}\cos\alpha_5 + \bar{j}\cos\alpha_{Dy} \pm K\cos\alpha_{Dz}. \tag{26}$$

Для нахождения значений $\cos\alpha_{Ax}$ и $\cos\alpha_{Ay}$ определим орт $\bar{n}_1$, перпендикуляра к плоскости OAE:

$$\bar{n}_1 = \frac{\bar{e}\times\bar{a}}{\sin\alpha_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{K} \\ 1 & 0 & 0 \\ \cos\alpha_{Ax} & \cos\alpha_{Ay} & 0 \end{vmatrix}\frac{1}{\sin\alpha_1} = \bar{K}\cos\alpha_{Ay}\frac{1}{\sin\alpha_1}, \tag{27}$$

где $\bar{e} = \bar{i}$.

Так как угол φ_o, определяющий положение звена I, равен нулю (угол φ_o на рисунке не показан),

$$\cos\varphi_o = \bar{K}\cdot\bar{n}_1 = \frac{\cos\alpha_{Ay}}{\sin\alpha_1} \tag{28}$$

и

$$\cos\alpha_{Ay} = \sin\alpha_1. \tag{29}$$

Соответственно,

$$\cos\alpha_{Ax} = \cos\alpha_1. \tag{30}$$

Определим значения $\cos\alpha_{Bx}$, $\cos\alpha_{By}$ и $\cos\alpha_{Bz}$, для чего находим орт $\bar{n}_2$ перпендикуляра к плоскости OAB:

$$\bar{n}_2 = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{\sin\alpha_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos\alpha_{Ax} & \cos\alpha_{Ay} & 0 \\ \cos\alpha_{Bx} & \cos\alpha_{By} & \cos\alpha_{Bz} \end{vmatrix} \frac{1}{\sin\alpha_2} = \Big[\bar{i}\cos\alpha_{Ay}\cos\alpha_{Bz} -$$

$$- \bar{j}\cos\alpha_{Ax}\cos\alpha_{Bz} + \bar{k}(\cos\alpha_{Ax}\cos\alpha_{By} - \cos\alpha_{Ay}\cos\alpha_{Bx})\Big] \frac{1}{\sin\alpha_2}. \quad (31)$$

Очевидно:

$$\cos\varphi_2 = \bar{k} \cdot \bar{n}_2 = (\cos\alpha_{Ax}\cos\alpha_{By} - \cos\alpha_{Ay}\cos\alpha_{Bx}) \frac{1}{\sin\alpha_2}. \quad (32)$$

Так как

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \cos\alpha_2 = \cos\alpha_1\cos\alpha_{Bx} + \sin\alpha_1\cos\alpha_{By}, \quad (33)$$

определяя значение $\cos\alpha_{By}$ из выражений (29) и подставляя в (32), после преобразования получим:

$$\cos\alpha_{Bx} = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\varphi_2. \quad (34)$$

Аналогично

$$\cos\alpha_{By} = \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\varphi_2, \quad (35)$$

$$\cos\alpha_{Bz} = \pm\sin\alpha_2\sin\varphi_2. \quad (36)$$

Для вычисления значений $\cos\alpha_{Dz}$, $\cos\alpha_{Dy}$ и $\cos\alpha_{Dz}$ найдем орт $\bar{n}_3$ перпендикуляра к плоскости ОДЕ:

$$\bar{n}_3 = \frac{\bar{e} \times \bar{d}}{\sin\alpha_5} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \cos\alpha_5 & \cos\alpha_{Dy} & \pm\cos\alpha_{Dz} \end{vmatrix} \frac{1}{\sin\alpha_5} = (-\bar{j}\cos\alpha_{Dz} + \bar{k}\cos\alpha_{Dy}) \frac{1}{\sin\alpha_5}. \quad (37)$$

Очевидно:

$$\cos\varphi_5 = \bar{k} \cdot \bar{n}_3 = \frac{\cos\alpha_{Dy}}{\sin\alpha_5} \quad \text{и} \quad \cos\alpha_{Dy} = \sin\alpha_5\cos\varphi_5. \quad (38)$$

Из выражений 19 имеем:

$$\cos\alpha_{Dz} = \pm\sin\alpha_5\sin\varphi_5. \quad (39)$$

и

$$\cos\alpha_{Dx} = \cos\alpha_5. \tag{40}$$

В формулу трех ортов (18) из выражений (25) и (26) подставляем значения $\bar{b}$ и $\bar{d}$. Принимая во внимание, что

$$\bar{b}\times\bar{d} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos\alpha_{Bx} & \cos\alpha_{By} & \cos\alpha_{Bz} \\ \cos\alpha_{Dx} & \cos\alpha_{Dy} & \pm\cos\alpha_{Dz} \end{vmatrix} = \bar{i}(\pm\cos\alpha_{By}\cos\alpha_{Bz} - \cos\alpha_{Bz}\cos\alpha_{Dy}) -$$

$$- \bar{j}(\pm\cos\alpha_{Bx}\cos\alpha_{Dz} - \cos\alpha_{Bz}\cos\alpha_{Dx}) + \bar{k}(\cos\alpha_{Bx}\cos\alpha_{Dy} - \cos\alpha_{By}\cos\alpha_{Dx}), \tag{41}$$

после преобразований имеем:

$$\bar{c} = \Big[\bar{i}(A\cos\alpha_{Bx} + B\cos\alpha_5 \pm CF) + \bar{j}(A\cos\alpha_{By} + B\cos\alpha_{Dy} \mp DF) +$$

$$+ \bar{k}(A\cos\alpha_{Bz} \pm B\cos\alpha_{Dz} \pm EF)\Big]\sin^{-2}\gamma, \tag{42}$$

где

$$A = \cos\alpha_3 - \cos\alpha_4\cos\gamma;$$

$$B = \cos\alpha_4 - \cos\alpha_3\cos\gamma;$$

$$C = \pm\cos\alpha_{By}\cos\alpha_{Dz} - \cos\alpha_{Bz}\cos\alpha_{Dy};$$

$$D = \pm\cos\alpha_{Bx}\cos\alpha_{Dz} - \cos\alpha_{Bz}\cos\alpha_5;$$

$$E = \cos\alpha_{Bx}\cos\alpha_{Dy} - \cos\alpha_{By}\cos\alpha_5;$$

$$F = \sqrt{1 - \cos^2\alpha_3 - \cos^2\alpha_4 - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha_3\cos\alpha_4\cos\gamma};$$

$$\cos\gamma = \bar{b}\cdot\bar{d} = \cos\alpha_5\cos\alpha_{Bx} + \cos\alpha_{By}\cos\alpha_{Dy} \pm \cos\alpha_{Bz}\cos\alpha_{Dz}.$$

(42) и есть уравнение шатунной кривой, описываемой точкой C.

Если шатунная точка выходит за пределы дуги, соединяющей шарниры, то достаточно задать ее орт, составленный с ортом, ограничивающим звено, после чего можно применить формулу трех ортов.

Уравнение (42) шатунной кривой, описываемой точкой C, содержит пять центральных углов α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, углы α_0 и β_0, определяющие начальные положения входных звеньев и передаточное отношение $i_{52} = \frac{\beta}{\alpha}$ между входными звеньями. Это означает, что при использовании при синтезе механизма метода точечного интерполирования для воспроизведения заданной кривой можно задать три, четыре или пять точек на лемнискате.

При совместном рассмотрении уравнений (14) и (42) получится девять, двенадцать или пятнадцать уравнений с семью неизвестными, подлежащими определению.

Анализ уравнения сферической лемнискаты (14) и уравнения (42) шатунной кривой, описываемой точкой C, показывает, что орты $\bar{p}$ и $\bar{c}$ равны. Это будет лишь в том случае, если шатунная точка C сферического пятизвенника по поверхности сферы опишет траекторию, близкую к сферической лемнискате, для воспроизведения которой, как было отмечено выше, необходимо задать три, четыре или пять значений угла φ (рис. 1). Это означает, что будем иметь три, четыре или пять значений орта $\bar{p}$, т.е. три, четыре или пять точек на лемнискате.

Согласно равенству ортов $\bar{p}$ и $\bar{c}$, будут равны и члены за ортами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$. Имеем:

$$\frac{1}{\sin^2 2\alpha(1-\cos\varphi_i)}\Big\{C_{11}\left[\cos\varphi_i(1-\cos\varphi_i)-\cos 2\alpha(2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi_i)\right]$$

$$+C_{14}\left[\cos\alpha\cdot(2-\cos\alpha)-\cos\varphi_i(1+\cos 2\alpha-\cos\varphi_i\cos 2\alpha)\right]\pm$$

$$\pm(C_{12}C_{16}-C_{13}C_{15})\sqrt{\sin^2\varphi_i(1-\cos\varphi_i)^2-(2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi_i)^2-\cos^2 2\alpha(1-\cos\varphi_i)^2+}$$

$$\overline{+2\cos\varphi_i\cos 2\alpha(1-\cos\varphi_i)(2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi_i)}\Big\}=\frac{1}{\cos^2\gamma}(A\cos\alpha_{Bx}+B\cos\alpha_5\pm CF); \quad (43)$$

$$\frac{1}{\sin^2 2\alpha(1-\cos\varphi_i)}\Big\{C_{12}\left[\cos\varphi_i(1-\cos\varphi_o)-\cos 2\alpha(2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi_2)\right]+C_{15}\left[\cos\alpha(2-\cos\alpha)-\right.$$

$$\left.-\cos\varphi_i(1+\cos 2\alpha-\cos\varphi_i\cos 2\alpha)\right]\mp(C_{11}C_{16}-C_{13}C_{14})\sqrt{\sin^2\varphi_i(1-\cos\varphi_i)^2-}$$

$$\overline{-(2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi_i)^2-\cos^2 2\alpha(1-\cos\varphi_i)^2+2\cos\varphi_i\cos 2\alpha(1-\cos\varphi_i)(2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi_i)}\Big\}=$$

$$=\frac{1}{\sin^2\gamma}(A\cos\alpha_{By}+B\cos\alpha_{Dy}\mp DF); \quad (44)$$

$$\frac{1}{\sin^2 2\alpha(1-\cos\varphi_i)}\Big\{C_{13}\left[\cos\varphi_i(1-\cos\varphi_i)-\cos 2\alpha(2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi_i)\right]+C_{16}\left[\cos\alpha(2-\cos\alpha)-\right.$$

$$\left.-\cos\varphi_i(1+\cos 2\alpha-\cos\varphi_i\cos 2\alpha)\right]\pm(C_{11}C_{15}-C_{12}C_{14})\sqrt{\sin^2\varphi_i(1-\cos\varphi_i)^2-}$$

$$\left. \overline{-(2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi_i)^2-\cos^2 2\alpha(1-\cos\varphi)^2+2\cos\varphi_i\cos2\alpha(1-\cos\varphi_i)(2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\varphi_i)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2\gamma}(A\cos\alpha_{Bz} \pm B\cos\alpha_{Dz} \pm EF). \qquad (45)$$

где $i = 1 \div 5$.

Решением уравнений (43) - (45) определяются все параметры сферического пятизвенника, точка C выходных шатунов которого по поверхности сферы будет описывать заданную сферическую лемнискату.

Для практической реализации задачи были заданы характерные параметры сферической лемнискаты: угол между ортами $\bar{f}$ и $\bar{f}_1$ $2\alpha = 95^\circ$, угол образованный между ортом $\bar{u}$ и осью Ox $\delta = 50^\circ$, угол между ортом $\bar{g}$ и осью Ox $\theta = 70^\circ$, а угол между ортом $\bar{f}_o$ и осью Oz $\beta = 30^\circ$ так, что угол между ортами $\bar{u}$ и $\bar{f}_o$ составлял 120° (рис. 1).

Анализ уравнений (43), (44), (45), дающих возможность определить все искомых параметров сферического пятизвенного шарнирного механизма, точка выходных шатунов которого по поверхности сферы будет воспроизводить заданную сферическую лемнискату, показывает, что для их решения необходимо задать некоторые параметры. С этой целью подьзуемся свойством сферической лемнискаты. Суть этого свойства заключается в том, что она представляет симметричную кривую, а для воспроизведения указанных кривых необходимо брать: длины кривошипов и шатунов попарно одинакового размера, углы, определяющие начальные положения кривошипов, одинаковой величины и $\alpha_o = \beta_o$ 0. Таким образом будем иметь: $l_2 = l_5$; $l_3 = l_4$; $\alpha_o = \beta_o = 0$.

Соответственно, в уравнениях (43),(44), (45) неизвестными остаются параметры l_1, l_2, l_3, i_{52}, для решения которых по лемнискате были подобраны 2 значения угла φ.

Уравнения (43), (44),(45) были решены методом подстановки. Получены следующие результаты: $l_1 = l_3 = l_4 = 120°$; $l_2 = l_5 = 40°$; $\alpha_o = \beta_o = 0$; $i_{52} = -1$.

Таким образом, решена задача синтеза сферического пятизвенного шарнирного механизма с двумя степенями свободы. Точечный метод интерполирования дал возможность определить размеры звеньев сферического пятизвенника, соединительная точка шатунов которого по поверхности сферы, может воспроизвести заданную траекторию - сферическую лемнискату.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н.С. ДАВИТАШВИЛИ: Анализ пятизвенных сферических механизмов. "Сообщения" АН Грузинской ССР, 65, № 1, 1972, с. 113-117.

[2] Н.С. ДАВИТАШВИЛИ: Условия существования двух кривошипов в пятизвенном сферическом шарнирном механизме. "Сообщения" АН Грузинской ССР, 67, № 1, 1972, с. 133-137.

[3] Н.С. ДАВИТАШВИЛИ: Исследование пятизвенного сферического шарнирного механизма. Труды Грузинского политехнического института им. В.И. Ленина "Теория механизмов и машин", № 7 (264), 1983, с. 13-21.

[4] П.А. ЛЕБЕДЕВ: Векторные уравнения взаимозависимости кинематических параметров пространственных механизмов. "Машиноведение", М.: № 4, 1982, с. 54-58.

[5] П.А. ЛЕБЕДЕВ: Векторный метод определения сил взаимодействия элементов многозвенных пространственных подвижных систем. "Машиноведение", М.: № 6, 1982, с. 39-50.

[6] Н.С. ДАВИТАШВИЛИ: Векторный метод определения кинематических параметров сферических стержневых механизмов. Труды Грузинского политехнического института им. В.И. Ленина "Теория механизмов и машин" № 3(273), 1984, с. 5-8

[7] Н.С. ДАВИТАШВИЛИ: Векторный метод определения положений выходных звеньев сферического пятизвенного рычажного механизма с двумя степенями свободы. Труды Тбилисского государственного университета "Вопросы прикладной механики", Тбилиси, 1985, с. 69-76.

SYNTEZA KULISTEGO PIĘCIOOGNIWOWEGO MECHANIZMU PRZEGUBOWEGO
W OPARCIU O ZADANĄ KULISTĄ LEMNISKATĘ

S t r e s z c z e n i e

W pracy przedstawione zostało projektowanie kulistego pięcioogniwowego mechanizmu przegubowego z dwoma stopniami swobody do odtwarzania zadanej trajektorii - kulistej lemniskaty. Metodą wektorową wyprowadzone zostały równania trajektorii kulistej lemniskaty i punktu łączącego przegubów kulistego mechanizmu pięcioogniwowego. Za pomocą metody interpolacji punktowej znaleziono wszystkie poszukiwane parametry kulistego mechanizmu pięcioogniwowego. Otrzymane rezultaty pozwalają za pomocą zaprojektowanego kulistego mechanizmu pięcioogniwowego odtworzyć zadaną kulistą lemniskatę.

THE SYNTHESIS OF THE SPERICAL 5-JOINT-LINKAGE MECHANISM
ON THE BASIS OF A GIVEN SPHERICAL LEMNISCATE

S u m m a r y

In the paper the designing of the 5-joint-linkage mechanism with two degrees of latitude has been presenten to reconstruct the trajectory, spherical lemniscate. Due to the vectorial method the equations of the trajec-

tory of the spherical lemniscate and of the point linking the joints of the spherical 5-joint-linkage mechanism have been educed. By the means of point interpolation an the parameters of the spherical 5-joint-linkage mechanism have been found. The obtained results helped to reconstruct the spherical lemniscate by means of the designed 5-joint-linkage mechanism.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Józef Knapczyk

Wpłynęło do redakcji: 5.XI.1986 r.