ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1987

Seria: MECHANIKA z. 86 Nr kol. 1012

XI OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA TEORII MASZYN I MECHANIZMÓW

11th POLISH CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES AND MECHANISMS

27—30. 04. 1987 ZAKOPANE

Л.Т. КАНДОВ, Н.Г. ЙОНЧЕВА, С.Х. ТОТЕВ

Высший горно-геологический институт
г. София - НРБ

ОБ ИНВАРИАНТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СЛОЖНЫХ ПЛОСКОСТНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Резюме. Инвариантность динамических уравнений движения плоскостных механизмов состоит в том, что все величины, которые участвуют в уравнениях числовые и не зависят от выбора системы координат. Преимущества инвариантных уравнений известны. Прежде всего они простые и позволяют установить влияние ряда исходных параметров на конечные результаты. В работе на примере показано применение метода. Результаты показаны графически.

Все величины, которые участвуют в уравнениях движения рассматриваемых плоскостных механизмов, бывают два вида: 1) функции, зависящие от положения механизма, которые выражаются реальными числами, независящими от выбора инерциальной системы координат; 2) величины, зависящие не только от положения механизма, но и от распределения его массы. Первый вид величин будем называть геометрически инвариантными и условно - переводными функциями, которые по существу совпадают с Асуровыми аналогами скоростей, ускорений и т.д. Второй вид величины будем называть динамическими инвариантными.

В начале работы мы даем некоторые факты из теории переводных функций, а потом покажем их применение при составлении динамических уравнений движения сложного плоскостного механизма. Несмотря на то, что механизм конкретен, можно на соответствующем примере сделать заключение о применении метода при наиболее общих плоскостных механизмах.

1. Переводной функцией является следующая числовая величина:

$$P_{abc} = \frac{\vec{\vartheta}.\ (\vec{a} \times \vec{b})}{\vec{\vartheta}.\ (\vec{b} \times \vec{c})} \qquad (1)$$

где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – три компланарные вектора, $\vec{\nu}$ – единичный вектор, перпендикулярный им. Очевидно, верхняя формула имеет смысл только, если $\vec{b}$ и $\vec{c}$ являются неколлинеарными векторами. Величины вида P_{abc} являются функциями трех векторов. Если векторы со своей стороны, являются функциями s обобщённых координат, $q_1,\dots,q_3$, то ясно, что и P_{abc} является функцией тех же координат. Функция вида P_{abc} используются при описании движения любого плоскостного n-угольника, стороны которого мы означим индексами $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_{2n}$. Будем полагать, что последние векторы при движении n-угольника будут изменяться как по величине, так и по направлению. При проведении вычислений будут использованы декартовые координаты этих векторов x_i, y_i, или их полярные координаты a_i и φ_i $(i=1,3,\dots,2n-1)$. Но в настоящей работе будет часто использован еще один вид координат:

$$q_i = \varphi_i - \varphi_{i0}, \quad q_{i+1} = \ln \frac{a_i}{a_{i0}}, \qquad (i=1,3,\dots,2n-1) \tag{2а,б}$$

где: φ_{i0} и a_{i0} – определенные начальные полярные координаты a_i, а $a_i = |\vec{a}_i|$. Сразу видно, что координаты q_i и q_{i+1} безразмерные и, что при определенном начальном положении (φ_{i0}, a_{i0}) они равны нулю.

Наряду с n-угольником, который образован векторами $\vec{a}_i$, рассмотрим еще один n-угольник, полученный векторами $\vec{a}_2, \vec{a}_4, \dots, \vec{a}_{2n}$, которые являются векторы $\vec{a}_i$, соответственно завертенные на 90° по направлению часовой стрелки. Будем говорить, что определенное множество векторов $\vec{a}_\alpha$ образуют контур, если ихсбор равен нулю. Так как из векторов $\vec{a}$ можно построить ориентированный n-угольник, то они являются контуром. Векторы $\vec{a}_{i+1}$ $(i+1=2,4,\dots,2n)$ также образуют контур, а и все множество векторов обоих n-угольников образует контур. И так будут в силе следующие три равенства:

$$\sum_{i=1}^{2n-1} \vec{a}_i = \vec{0}. \quad \sum_{i=2}^{2n} \vec{a}_{i+1} = \vec{0}. \quad \sum_{\alpha=1}^{2n} \vec{a}_\alpha = \vec{0}. \tag{3а,б,с}$$

Дальше будет рассмотрено все множество из 2n векторов, принадлежащих обоим контурам.

2. Следующие кинематические уравнения в силе:

$$\dot{q}_g = \sum_\tau \dot{q}_\tau P_{\tau kg}, \quad \dot{q}_x = \sum_\tau \dot{q}_\tau P_{\tau gk} \tag{4а,б}$$

τ пробегает значения с 1 по 2n пропуская при этом g и k.
Получение этих уравнений содержится в работах [1, 2]. Здесь отметим некоторые свойства последних уравнений и переводных функций, которые содержатся в них:

а) Упорядоченность индексов. Первый индекс любой переводной функции совпадает с индексом предшествующего множителя. Последний индекс переводных функций совпадает с индексом в левой стороне равенства. Средним индексом переводной функции всегда является тот, который относится к обобщенной скорости, которая не содержится в равенстве, Равенства типа (4б) получаются из (4а), причем везде заменяются g-k и k-g. Эти свойства позволяют безошибочно напосать большинство из кинематических уравнений при сложных механизмах. Они не теряются, а дополняются при многоконтурных механизмах и также способствуют их безошибочному написанию и их наглядности;

б) Переводные функции группируются по парам $P_{\tau kg}$ и $P_{\tau gk}$;

в) Когда векторы $\vec{a}_g$ и $\vec{a}_k$ коллинеарны все переводные функции в уравнениях являются недефинированными. Это качество зависит от кинематической схемы механизма и от выбора обобщенных координат q_τ;

г) Некоторые из переводных функций, которые участвуют в равенствах (4) абсолютно скалярные, а другие – псевдоскаларные. Напомним, что последние изменяют свой знак, когда изменяется направление, в котором измеряются углы φ. Это направление выбирается производьно, из-за чего бессмыслено образовать сумму из переводной функции, когда она скаляр, и из функции-псевдоскаляра. Также бессмысленным является и сравнивать переводную функцию-скаляр и переводную функцию-псевдоскаляр. Критерием определения скалярности или псеводскалярности одной функции является следующее: если первый и третий индекс в обозначении P_{abc} имеют одинаковую четность, то функция является абсолютным скаляром. В противоположном случае она – псевдоскаляр;

д) Величины q_α и $\dot{q}_\alpha$ также делятся на абсолютные скалары и псевдоскаляры в зависимости от того каким числом является α –четным или нечетным. Если α нечетное число, то $\dot{q}_\alpha$ имеет смысл угловой скорости и она является псевдоскаляром. То же относится и о q_α, которое является разликой двух углов. Координату q_α при α нечетном числе будем называть коротко угловой координатой. Если α четное число, то $\dot{q}_\alpha$ является абсолютным скаляром и будем называть его дилатационной (растяжимой) скоростью. В силе равенства:

$$\dot{q}_i = \dot{\varphi}_i, \quad (i=1,3,\ldots,2n-1), \qquad \dot{q}_{i+1} = \frac{\dot{a}_i}{a_i}, \quad (i=2,4,\ldots,2n). \quad (5а,б)$$

Недопустимость собирать и сравнивать скаляр и псевдоскаляр дает возможность проводит быструю и наглядную проверку всех кинематических уравнений, что напоминает проверку по размерности.

3. В силе следующие равенства:

$$\vec{a}_\tau + P_{\tau kg}\vec{a}_g + P_{\tau gk}\vec{a}_k = \vec{0}. \quad (6)$$

где τ пробегает все значения с 1 по 2n, пропуская при этом g и k. Они используются при синтезе плоскостных механизмов [3], так как могут служить вместе с равенствами (3) и (4) для определения незнакомых векторов, когда $\dot{\varphi}_i$ и $\dot{a}_i$ известны.

4. Для определения ускорений механизма используются следующие уравнения:

$$\ddot{q}_g = \sum_{\tau} \ddot{q}_{\tau} p_{\tau kg} + \sum_{\tau} \sum_{s} \dot{q}_{\tau} \dot{q}_s p_{\tau skg},$$

$$\ddot{q}_k = \sum_{\tau} \ddot{q}_{\tau} p_{\tau kg} + \sum_{\tau} \sum_{s} \dot{q}_{\tau} \dot{q}_s p_{\tau skg}, \tag{7а,б}$$

где:

$$p_{\tau skg} = \frac{\partial p_{\tau kg}}{\partial q_s}; \quad p_{\tau sgk} = \frac{\partial p_{\tau gk}}{\partial q_s}, \tag{8а,б}$$

s пробегает все значения с 1 по 2n, пропуская при этом g и k. Последние частные производные называются вторыми переводными функциями. Все они определяются по одной единственной формуле:

$$p_{abcd} = \frac{a_{ac;b} - a_{ca;b} - p_{acd}(a_{cd;b} - a_{dc;b})}{\vec{\vartheta}\cdot(\vec{a}_c \times \vec{a}_{\alpha})} \tag{9}$$

где:

$$a_{\varepsilon\gamma,\sigma} = \frac{\partial q_{\varepsilon}}{\partial q_{\sigma}} \vec{a}_{\varepsilon} \cdot \vec{a}_{\gamma} - \frac{\partial q_{\varepsilon+1}}{\partial q_{\sigma}} \vec{a}_{\varepsilon+1} \cdot \vec{a}_{\eta} \quad (\varepsilon \text{ - нечетно})$$

$$a_{\varepsilon\eta;\sigma} = \frac{\partial q_{\varepsilon-1}}{\partial q_{\sigma}} \vec{\vartheta}\cdot(\vec{a}_{\varepsilon-1} \times \vec{a}_{\eta}) + \frac{\partial q_{\varepsilon}}{\partial q_{\sigma}} \vec{\vartheta}\cdot(\vec{a}_{\varepsilon} \times \vec{a}_{\sigma}) \quad (\varepsilon \text{ - четно}) \tag{10,а,б,в,г}$$

$$\frac{\partial q_{\mu}}{\partial q_{\sigma}} = \delta_{\sigma\mu} + p_{\sigma cd}\delta_{\alpha\mu} - p_{\sigma dc}\delta_{c\mu}; \qquad \delta_{\vartheta\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{ако } \vartheta = \lambda \\ 0 & \text{ако } \vartheta \neq \lambda \end{cases}$$

О вторых переводных функциях относятся аналогические правила об упорядоченности индексов, также как и о первых. Это видно из равенства (7).

Вторая переводная функция p_{abcd} является абсолютным скаляром, если $a+b$ имеет четность в d и является псевдоскаляром в противоположном случае. Переводные функции p_{abc} и p_{abcd} являются геометрическими инвариантными в уравнениях движения. Они зависят только от конфигурации механизма и вычисляются в любом положении по формулам (1) и (9).

Для целей динамического исследования сложных плоскостных механизмов целесообразно мысленно разбивать их не по контурам, как в кинематике, а по открытым цепям. Составление выражений кинетической энергии и обобщенных силах открытых цепей сравнительно легко и формулы, которые получаются – симметричные. Но, чтобы получить выражения, отвечающие действительной кинетической энергии, следует использовать кинематические уравнения, при которых принята во внимание замкнутость всех контуров.

Пусть оначала рассмотрим открытую цепь, которая состоит только из звеньев с неизменяемой длиной сторон. Их мы пронумеруем нечетными номерами. На рис. 1 изображена такая цепь, которая состоит из $2n-1$ плоскостных тел, связанных простыми двухкратными шарнирами, которые означены индексами $A_0, A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}$. Движение цепи знакомое, если знакомо движение векторного контура $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_5, \dots, \vec{a}_{2n-1}$.

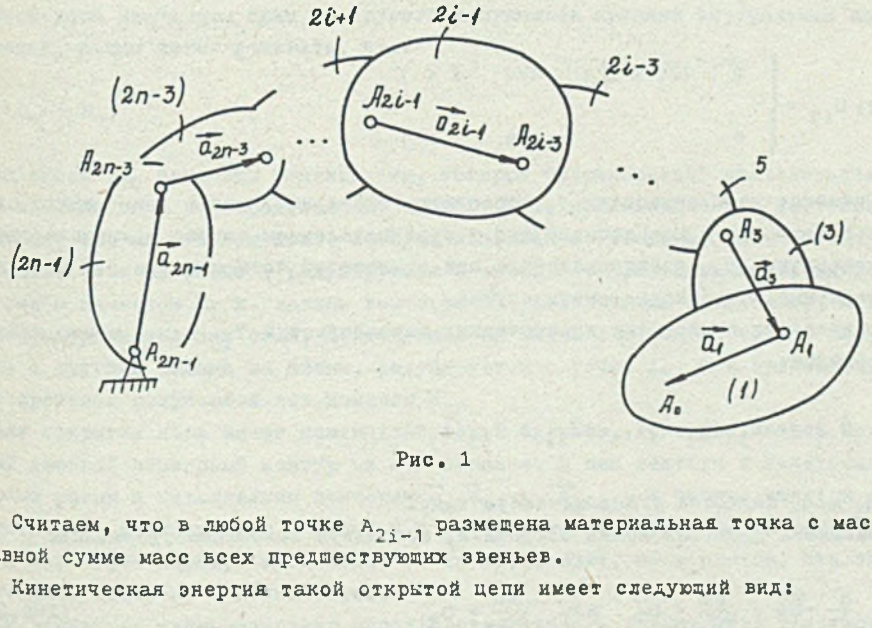


Рис. 1

Считаем, что в любой точке A_{2i-1} размещена материальная точка с массой, равной сумме масс всех предшествующих звеньев.

Кинетическая энергия такой открытой цепи имеет следующий вид:

$$T = \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{j=1}^{2n-1} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \tag{11}$$

где T_{ij} являются динамическими характеристиками, определяемыми по формулам:

$$T_{ij} = \begin{cases} \vec{s}_i \cdot \vec{a}_j & \text{ако} \quad i < j \\ \frac{1}{2} J_i & \text{ако} \quad i = j \\ 0 & \text{ако} \quad i > j \end{cases} \tag{12}$$

$\vec{S}_i$ и J_i означают статический и инертный моменты звена с номером i по отношению к шарниру A_i. Более точно они получаются по следующему правилу: образуются статический и инертный моменты звена 1 по отношению к шарниру A_1. В той же точке A_1 размещается масса m_1, которая равна массе звена 1. Потом составляются статический и инертный моменты звена 3 о точке A_3 и в ней размещается материальная точка с массой, равной сумме масс звеньев 1 и 3, т.е. m_1+m_3 и этот процесс продолжается дальше путем присоединения в начале любого вектора материальной точки с массой, равной сумме масс предидущих звеньев.

При дифференцировании характеристик T_{ij} по координатам q_i и q_j получаются формулы:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_i} = U_{ij}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = -U_{ij}, \tag{13,а,б}$$

где:

$$U_{ij} = \begin{cases} \vec{\varphi} \cdot (\vec{S}_i \times \vec{q}_i) & \text{ако } i < j \\ 0 & \text{ако } i \geqslant j \end{cases} \tag{14}$$

Динамические характеристики T_{ij} абсолютно скалярные, когда i и j имеют одинаковую четность и псевдоскалярные в противоположном случае. Динамические характеристики U_{ij} псевдоскалярные при одинаковой четности i и j и абсолютно скалярные в противоположном случае.

Производные по времени динамических характеристик T_{ij} и U_{ij} можно найти по формулам:

$$\dot{T}_{ij} = -U_{ij}(\dot{q}_j-\dot{q}_i), \quad \dot{U}_{ij} = T_{ij}(\dot{q}_j-\dot{q}_i) \tag{15}$$

где $\dot{q}_i$ и $\dot{q}_j$ являются угловыми скоростями.

Уравнения движения можно составить, используя известные уравнения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\tau} - \frac{\partial T}{\partial q_\tau} = Q_\tau \quad \text{или} \quad \frac{\partial W}{\partial \ddot{\varphi}_\tau} = Q_\tau. \tag{16а,б}$$

W – означает энергия ускорений. Ее тоже можно определить введенными динамическими характеристиками по формуле:

$$W = \sum_i \sum_j \left[(T_{ij}(\ddot{q}_i\ddot{q}_j + \dot{q}_i^2\dot{q}_j^2) + U_{ij}(\dot{q}_i^2\ddot{q}_j - \ddot{q}_i\dot{q}_j^2),\right. \tag{17}$$

где $\ddot{q}_i$ и $\ddot{q}_j$ – угловые ускорения.

Если использовать (16а) или (16б), то получаются следующие динамические уравнения:

$$\sum_{i=1}^{2n-1} (T_{\tau i} + T_{i\tau})\ddot{q}_i - \sum_{i=1}^{2n-1} (U_{\tau i} - U_{i\tau})\dot{q}_i^2 = Q_\tau. \tag{18}$$

Обобщенную силу Q_δ можно найти при помощи редукции всех сил, которые действуют на звена цепи, на 2n-1 пары, чьи моменты определяются по формуле:

$$\vec{M}_{2i-1} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha_{2i-1}} \vec{\vartheta} \cdot (\vec{\tau}_{2i-1,\alpha} \times \vec{R}_{2i-1,\alpha}), \tag{19}$$

где $\vec{R}_{2i-1,\alpha}$ является главным вектором всех сил, действующих на звена, предыдущие с номером 2i-1. Принимая во внимание, что вертение всех звеньев открытой цепи независимы одно от другого и применяя принцип виртуальных перемещений, можно легко доказать, что:

$$Q_\tau = M_\tau, \tag{20}$$

где индексом M_τ означены моменты сил, которые "переносятся" последовательно по звеньям цепи по определенному правилу. Это правило следует из теорем о редукции сил на твердом теле, которые известны из статики. Оно состоит в следующем: силы на звене 1 редуцируются о точке A_1. При редукции возникает пара сил с моментом M_1 и главным вектором $\vec{R}_1$, действующим в точке A_1, который рассматривается как сила, действующая на звене 3 в той же точке. Она, вместе с другими силами на звене, редуцируется о точке A_3. При продолжении этого процесса получаются все моменты M_τ.

Если открытая цепь имеет изменчивые длины звеньев, то составляется мысленный двойной векторный контур из 2n звеньев. В нем векторы с нечетными номерами равны и параллельны векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_{2\ -1}$, а четные векторы соответственно пендикулярны первым и с теми же величинами. "Перенесение" масс и сил через шарниры происходит по то же правилу, но с учетом, что звенья четными номерами – безмассовые.

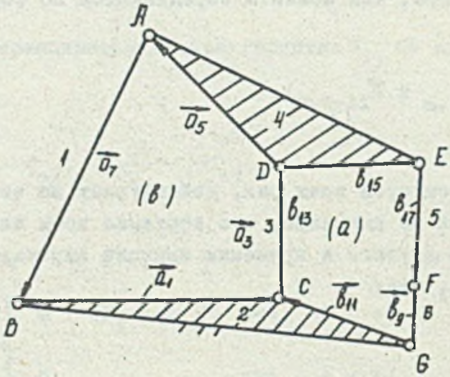
При замкнутых кинематических цепях следует учесть зависимости между скоростями звеньев $\dot{q}_i$ и $\dot{q}_j$. Точнее, две из звеньев с номерами g и k имеют скорости, которые зависят от скоростей остальных звеньев механизмов. Эти зависимости выражаются равенствами (4). Если используем выражение об энергии ускорений (17), то следует учитывать зависимость между угловыми ускорениями при помощи (7).

При замкнутых кинематических цепях обобщенные силы получаются из равенства:

$$Q_\tau = M_\tau + p_{\tau kg} M_g + p_{\tau gk} M_k, \qquad (21)$$

где моменты определяются по формуле (19).

Выведение всех формул о составлении динамических уравнений через переводные функции даны в [2, 4]. Здесь, в качестве примера, рассмотрим шестизвенного механизма третьего класса (рис. 2). Нашей целью будет являться составление уравнения движения, если на звено FG действует внешняя пара сил.



		x	y
1	$\overline{a_1} = \overline{BC}$	2	0
3	$\overline{a_3} - \overline{CD}$	0	1
5	$\overline{a_5} = \overline{DA}$	-1	1
7	$\overline{a_7} - \overline{AB}$	-1	-2

		x	y
1	$\overline{b_9} - \overline{FG}$	0	-0,1
3	$\overline{b_{11}} = \overline{GC}$	-1	0,1
5	$\overline{b_{13}} - \overline{CD}$	0	1
7	$\overline{b_{15}} - \overline{DE}$	1	0
9	$\overline{b_{17}} - \overline{EF}$	0	-1

Рис. 2

вление уравнения движения, если на звено FG действует внешняя пара сил. Кроме того будем полагать, что точка D совпадает с массовым центром звена ADE а точка E является центром тяжести звена EF. Начальное звено -FG. Оно может завертеться до угла 2п. При кинематическом исследовании системы она разделяется мысленно на два контура а -FGCDE и б - BCDA (рис. 3). Векторы контуров - 9 и пронумерованы нечетными номерами с 1 по 17. Они следующие:

$$\vec{b}_1 = \vec{BC}, \quad \vec{b}_3 = \vec{CD}, \quad \vec{b}_5 = \vec{DA}, \quad \vec{b}_7 = \vec{AB} \quad \text{- о контуре (b)}$$

$$\vec{a}_9 = \vec{FG}, \quad \vec{a}_{11} = \vec{GC}, \quad \vec{a}_{13} = \vec{CD}, \quad \vec{a}_{13} = \vec{DE}, \quad \vec{a}_{17} = \vec{EF} \quad \text{- о контуре (a)}$$

Кинетическая энергия находится при разделении механизма на три простые открытые цепи (рис. 3) после мысленного прекращения связей в точках A и F. При определении кинетической энергии (и массового центра ADE) необходимо учесть, что в E имеется точка с массой звенья EF.

Она имеет вид:

$$T = T_{33}\dot{q}_3^2 + T_{55}\dot{q}_5^2 + T_{77}\dot{q}_7^2 + T_{17,17}\dot{q}_{17}^2, \qquad (a)$$

где:

$$T_{33} = \frac{1}{2} J_3 + (m_5+m_{17})\overline{CD}^2; \quad T_{55} = \frac{1}{2} J_5 + m_{17}\overline{DE}^2, \tag{б}$$

$$T_{77} = \frac{1}{2} J_7; \quad T_{99} = \frac{1}{2} J_9; \quad T_{17,17} = \frac{1}{2} J_{17}.$$

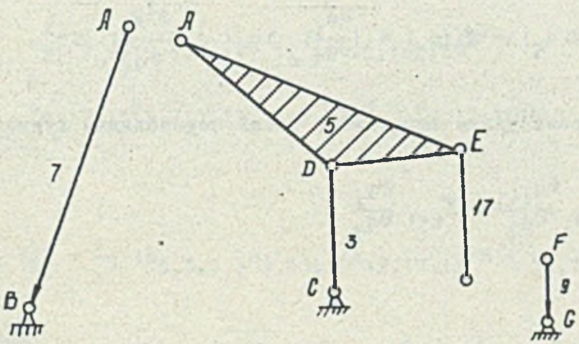


Рис. 3

Так как механизм имеет одну степень свободы, следует использовать кинематические уравнения связей между угловыми скоростями звеньев вида (4). Эти уравнения об обоих контурах (а) и (б) - следующие:

$$\dot{q}_3 = \dot{q}_9\, a_{9,17,15} b_{5,7,3}/R = \dot{q}_9 i_{9,3}$$

$$\dot{q}_5 = \dot{q}_9\, a_{9,17,15}/R = \dot{q}_9 i_{9,5} \tag{в}$$

$$\dot{q}_7 = \dot{q}_9\, a_{9,17,15} b_{5,3,7}/R = \dot{q}_9 i_{9,7}$$

$$\dot{q}_{17} = \dot{q}_9 (a_{9,15,17} + a_{9,17,15} b_{5,7,3} a_{13,15,17}/R) = \dot{q}_9 i_{9,17}$$

где:

$$R = 1 - b_{5,7,3}\, a_{13,17,15}.$$

После замещения в выражении о кинетической энергии получается:

$$T = J\dot{q}_9^2, \tag{г}$$

где J - приведенный инертный момент.

$$J = i_{9,3}^2 T_{33} + i_{9,5}^2 T_{55} + i_{9,7}^2 T_{77} + T_{99} + i_{9,17}^2 T_{1717}. \tag{д}$$

Он выражается переводными функциями и является инвариантной величиной. Отдельные одночлены, из которых составлен инертный момент, тоже инвариантны. Значения переводных функций об обоих контурах вычисляются при каждом положении механизма машины.

Положение любого звена определяется положением его вектора. Векторы звеньев выражаются координатой начального звена с использованием приближенных формул:

$$\vec{a}_i(q_2 + \Delta q_\tau) = \vec{a}_i(q_\tau) + \left(\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial q_\tau}\right)_o \Delta q_\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \vec{a}_i}{\partial q_\tau^2}\right)_o \Delta q_\tau^2,$$

где частные производные выражаются также переводными функциями:

$$\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial q_\tau} = \vec{a}_i \frac{\partial q_{i+1}}{\partial q_\tau} - \vec{a}_{i+1} \frac{\partial q_i}{\partial q_\tau}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{a}_i}{\partial q_\tau^2} = \vec{a}_i \frac{\partial^2 q_{i+1}}{\partial q_\tau^2} - \vec{a}_{i+1} \frac{\partial^2 q_i}{\partial q_\tau^2} + \vec{a}_i \left[\left(\frac{\partial q_{i+1}}{\partial q_\tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_\tau}\right)^2\right] - 2\vec{a}_{i+1} \frac{\partial q_i}{\partial q_\tau} \frac{\partial q_{i+1}}{\partial q_\tau}$$

Написанные здесь формулы относятся к общему случаю, когда векторы контура имеют изменяемую длину (звенья механизма имеют изменчивую длину). Из-за этого везде в верхних формулах следует принять, что $\frac{\partial q_{i+1}}{\partial q_\tau} = 0$. В противном случае, если механизм имеет неизменные направления звеньев, то векторы будут иметь изменчивые длины и постоянные направления. Тогда принимается, что $\frac{\partial q_i}{\partial q_\tau} = 0$.

Уравнение движения в рассмотренном примере имеет вид:

$$J\ddot{q}_9 + \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial q_9} \dot{q}_9^2 = Q_9$$

где:

$$\frac{\partial J}{\partial q_9} = 2\left(i_{9,3} \frac{\partial i_{9,3}}{\partial q_9} T_{33} + i_{9,5} \frac{\partial i_{9,5}}{\partial q_9} T_{55} + i_{9,7} \frac{\partial i_{9,7}}{\partial q_9} T_{77} + i_{9,17} \frac{\partial i_{9,17}}{\partial q_9} T_{1717}\right)$$

Частные производные в последнем выражении выражаются переводными функциями по следующим формулам:

$$\frac{\partial i_{9,3}}{\partial q_9} = a_{9,9,17,15} b_{5,7,3}/R + a_{9,17,15} b_{5,5,7,3} a_{9,17,15}/R + a_{9,17,15} b_{5,7,3} \cdot S$$

$$\frac{\partial i_{9,5}}{\partial q_9} = a_{9,9,17,15}/R + a_{9,17,15} \cdot S$$

$$\frac{\partial i_{9,7}}{\partial q_9} = a_{9,9,17,15}b_{5,3,7}/R + a_{9,17,15}b_{5,5,37}a_{9,17,15}/R^2 + a_{9,17,15}b_{5,3,7} \cdot S$$

$$\frac{\partial i_{9,17}}{\partial q_9} = a_{9,9,15,17} + a_{9,9,17,15}b_{5,7,3}a_{13,15,17}/R +$$
$$a_{9,17,15}b_{5,5,7,3}a_{9,17,15}a_{13,15,17}/R^2 +$$
$$a_{9,17,15}b_{5,7,3}a_{13,9,15,17}/R + a_{9,17,15}b_{5,7,3}a_{13,15,17} \cdot S$$

где:

$$S = \frac{\partial}{\partial q_9}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R^2}\left(b_{5,5,7,3}a_{9,17,15}a_{13,17,15}/R + b_{5,7,3}a_{13,19,17,15}\right).$$

Обобщенная сила:

$$Q_9 = M_9 \tag{c}$$

где M_9 является данным приводным моментом. На механизме не действуют другие активные силы.

С помощью составленных уравнений сделана программа. С применением программы получен закон движения звена 9, т.е. изменение координаты во времени. На рис. 4 показана диаграмма $M_9(q_9)$ при $\dot{q}_9 = cte$ и $\ddot{q}_9 = 0$.

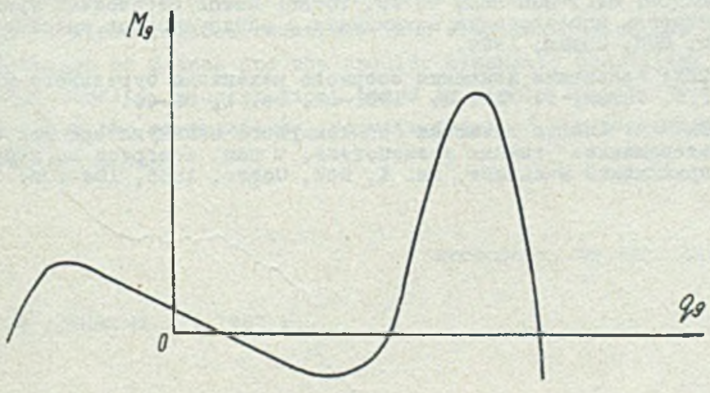


Рис. 4

Составленную програму можно использовать не только для рассматриваемого механизма, но и широкого круга плоскостных механизмов. Такие механизмы могут иметь изменчивую длину звеньев, со многими контурами, их привод может быть из гидроцилиндров и т.д. С помощью программы проводятся многократные исследования сложных механизмов в обогатительной технике (грохоты, конвейеры, дробилки), механизмов конструкций крепи, механизированных крепежных систем, горных манипуляторов, различных рабочих органов горных машин, каров и т.д. [5, 6, 7]. Программа имеет следующие особенности: 1. Не используются матричный метод, преобразование проекций или декарторые системы координат; 2. При определении положения механизма не используются тригонометрические функции; 3. Метод решения и программа позволяют быстро вникнуть в точность решения, раскрыть причину неточности и проследить ряд влияний кинематической схемы на конечные результаты. В соответствии с этим можно внести коррекции в кинематическую схему с учетом получения оптимального решения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л.Т. КАНДОВ: Аналитический метод исследования плоскостной замкнутой кинематической цепи. Сб. научных трудов по геологии и горному делу, ВГГИ, НИС, 1965, 463-478.

[2] Л.Т. КАНДОВ: Метод переводных функций и его применение при исследовании движения некоторых плоскостных механизмов. Докторская диссертация, ВГГИ, 1974.

[3] Л.Т. КАНДОВ: Об одном уравнении связи простой кинематической цепи. Механика машин, вып. 50, АН СССР, изд. "Наука", М., 1975, 75-81.

[4] Н.Г. ЙОНЧЕВА: Составление и интегрирование уравнений движения сложных плоскостных механизмов с использованием метода переводных функций. Кандидатская диссертация, ВГГИ, 1975.

[5] Л.Т. КАНДОВ, Н.Г. ЙОНЧЕВА, Сл.Хр. ТОТЕВ: Метод переводных функций при аналитическом исследовании механизмов и манипуляторов забойной механизации. МНП, София, 1984.

[6] Сл. ТОТЕВ: Уравнения движения опорного механизма бурильного молотка. Год. ВГГИ, София, т. XXVIII, 1981-82, св. 1, 39-44.

[7] Н.Г. ЙОНЧЕВА: Анализ движения безшарнирного манипулятора для многократно повторяющихся точных воздействий. V нац. конгресс по теоретической и прикладной механике, кн. 4, БАН, София, 1985, 104-108.

O INWARIANTNYM PRZEDSTAWIENIU DYNAMICZNYCH RÓWNAŃ RUCHU ZŁOŻONYCH MECHANIZMÓW PŁASKICH

S t r e s z c z e n i e

Inwariantowe równania ruchu były wcześniej otrzymane przez autorów dla najprostszych jednoobwodowych mechanizmów płaskich. W niniejszej pracy rozszerzony został krąg mechanizmów na wszystkie możliwe wieloobwodowe mechanizmy płaskie, dysponujące wieloma stopniami swobody. Inwariantowością charakteryzują się także współczynniki, zależne tylko od geometrii mechanizmów (nazywane transmitancją), a także wielkości, charakteryzujące rozłożenie mas i wreszcie określone rozwiązaniem równań kątowe wielkości kinematyczne (kątowe współrzędne, prędkość, przyspieszenia).

W pracy przedstawione zostały rezultaty obliczeń dla mechanizmów trzeciej klasy.

ON THE INVARIANT REPRESENTATION OF THE DYNAMIC EQUATIONS OF MOTION OF COMPLEX PLANAR MECHANISMS

S u m m a r y

The invariant equations of the motion are earlier developed by the authors for the most simple single-loop planar mechanisms. In this paper all multiloop planar mechanisms with many degrees of freedom are considered. Invariant are the coefficients depending only on the geometry of the mechanisms (called transfer functions) and also the quantities determining the distribution of masses and the angular kinematic quantities (angular coordinates, velocity, acceleration) found as a solution of the equations.

In the paper the computational results obtained for mechanisms of the third class are given.

Recenzent: Dr inż. Andrzej Nowak

Wpłynęło do redakcji 2.I.1987 r.