

P. 3347/85

**ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ**



40-LECIE
Politechniki Śląskiej

BERNARD BARON

**ANALIZA NUMERYCZNA RÓWNAŃ
CAŁKOWO-BRZEGOWYCH PÓL ELEKTBYCZNYCH
PEWNEJ KLASY MODELI OBLICZENIOWYCH**

ELEKTRYKA

**Z. 97
GLIWICE
1985**



P.3348/85

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 852

BERNARD BARON

**ANALIZA NUMERYCZNA RÓWNAŃ
CAŁKOWO-BRZEGOWYCH PÓL
ELEKTRYCZNYCH PEWNEJ KLASY
MODELI OBLICZENIOWYCH**

GLIWICE

1985

OPINIODAWCY

Prof. dr inż. Ryszard Sikora

Prof. dr inż. Maciej Krakowski

KOLEGIUM REDAKCYJNE

- REDAKTOR NACZELNY — Prof. dr hab. inż. Wiesław Gabzdyl
 REDAKTOR DZIAŁU — Doc. dr inż. Zofia Cichowska
 SEKRETARZ REDAKCJI — Mgr Elżbieta Stinzing
 CZŁONKOWIE KOLEGIUM — Prof. dr hab. inż. Adolf Maciejny
 — Prof. dr inż. Stanisław Malzacher
 — Prof. dr hab. inż. Bronisław Skinderowicz

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Mgr Roma Łoś

Wydano za zgodą
 Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072-4688

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
 ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 170+85 Ark. wyd. 11,7 Ark. druk. 10,0 Papier offset. kl. III. 70x100,70 g
 Oddano do druku 15.07.85 Podpis do druku 10.09.85 Druk ukończ. w paźdz. 1985
 Zam. 746/85 K-24 Cena zł 176,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
 wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

	Str.
1. WSTĘP	9
1.1. Metody obliczania pól elektrycznych	9
1.2. Zakres i cel pracy	15
2. SPROWADZENIE ZEWNĘTRZNEGO PROBLEMU DIRICHLETA DLA RÓWNANIA LAPLACE'A DO UKŁADÓW RÓWNAŃ CAŁKOWO-BRZEGOWYCH	17
2.1. Układy równań całkowo-brzegowych I rodzaju	17
2.2. Układy równań całkowo-brzegowych II rodzaju	25
2.2.1. Zastosowanie potencjału warstwy pojedynczej	25
2.2.2. Zastosowanie potencjału warstwy podwójnej	33
2.3. Układy równań całkowo-brzegowych I i II rodzaju	38
3. APROKSYMACJA POTENCJAŁU WARSTWY POJEDYNCZEJ I PODWÓJNEJ	42
3.1. Aproksymacja potencjału warstwy pojedynczej	44
3.1.1. Potencjał warstwy pojedynczej zadany na dowolnych powierzchniach	45
3.1.2. Potencjał warstwy pojedynczej zadanej na powierzchniach w postaci cienkich cylindrycznych walców	59
3.2. Aproksymacja pochodnej potencjału warstwy pojedynczej zadanej na dowolnych powierzchniach	67
3.3. Aproksymacja potencjału warstwy podwójnej zadanej na dowolnych powierzchniach	74
3.4. Aproksymacja potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej	81
3.4.1. Potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej zadanej na dowolnych konturach	81
3.4.2. Potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej zadanej na dowolnych okręgach	87
3.4.3. Aproksymacja potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej zadanej na okręgach za pomocą bazy funkcji ortogonalnych	93
3.5. Aproksymacja pochodnej potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej zadanej na okręgach	94
3.6. Aproksymacja potencjału logarytmicznego warstwy podwójnej zadanej na dowolnych konturach	95

	Str.
4. ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ CAŁKOWO-BRZEGOWYCH PIERWSZEGO I DRUGIEGO RODZAJU, RÓWNOWAŻNYCH ZAGADNIENIOM DIRICHLETA DLA RÓWNAŃ LAPLACE'A, METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH	98
4.1. Algebraizacja układu równań całkowo-brzegowych	98
4.1.1. Numeryczne rozwiązywanie układów równań całkowych I rodzaju (2.4) i (2.14)	99
4.1.2. Numeryczne rozwiązywanie układu równań całkowych II rodzaju (2.27), (2.54) i (2.58)	103
4.2. Zastosowanie metody kolejnych przybliżeń do rozwiązywania układu równań całkowych I rodzaju	108
4.2.1. Rozwiązywanie układu równań całkowych I rodzaju (2.14) metodą kolejnych przybliżeń - zagadnienie dwuwymiarowe	108
4.2.2. Rozwiązywanie układu równań całkowych I rodzaju (2.4) metodą kolejnych przybliżeń - zagadnienie trójwymiarowe	113
4.3. Zastosowanie metody kolejnych przybliżeń do rozwiązywania układu równań całkowych II rodzaju (2.27) i (2.43)	116
4.4. Algebraizacja układów równań całkowo-brzegowych I i II rodzaju (2.69) i (2.70)	119
5. OBLICZANIE ROZKŁADU WEKTORA NATĘŻENIA POLA ELEKTRYCZNEGO	122
5.1. Pole elektryczne quasi-statyczne sinusoidalnie zmienne w ujęciu trójwymiarowym	122
5.2. Pole elektryczne quasi-statyczne sinusoidalnie zmienne w ujęciu dwuwymiarowym	125
6. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ RÓWNAŃ CAŁKOWYCH DO OBLICZEŃ PÓL ELEKTRYCZNYCH W TECHNICIE WYSOKICH NAPIĘĆ	129
6.1. Zastosowanie metody elementów brzegowych do rozwiązania układu równań całkowo-brzegowych I rodzaju linii przesyłowej	129
6.1.1. Obliczenia testujące	129
6.1.2. Obliczenie pola dla modelu linii 400 kV i 750 kV metodą elementów brzegowych	132
6.2. Zastosowanie metody kolejnych przybliżeń do rozwiązania układu równań całkowych I rodzaju linii przesyłowej	136
6.2.1. Obliczenia testujące	138
6.2.2. Obliczenia natężenia pola na powierzchni przewodów linii jedнопроводowej o dwóch przewodach w wiązce	140
6.2.3. Obliczenia pola dla modelu linii 400 kV i 750 kV metodą kolejnych przybliżeń	141
7. UWAGI I WNIOSKI	146
LITERATURA	150

Str.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВСТУПЛЕНИЕ	
1.1. Методы расчёта электрических полей	
1.2. Широта и цель работы	
2. СВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИИ ЛАПЛАСА К СИСТЕМЕ ИНТЕГРО-КРАЕВЫХ УРАВНЕНИИ	
2.1. Система интегро-краевых уравнений I рода	
2.2. Система интегро-краевых уравнений II рода	
2.2.1. Применение потенциала простого слоя	
2.2.2. Применение потенциала двойного слоя	
2.3. Системы интегро-краевых уравнений I и II рода	
3. АППРОКСИМАЦИЯ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО И ДВОЙНОГО СЛОЯ	
3.1. Аппроксимация потенциала простого слоя	
3.1.1. Потенциал простого слоя заданный на произвольных поверхностях	
3.1.2. Потенциал простого слоя заданный на поверхностях в виде тонких цилиндрических оболочек	
3.2. Аппроксимация производной потенциала простого слоя заданного на произвольных поверхностях	
3.3. Аппроксимация потенциала двойного слоя заданного на произвольных поверхностях	
3.4. Аппроксимация логарифмического потенциала простого слоя	
3.4.1. Логарифмический потенциал простого слоя с произвольным контуром	
3.4.2. Логарифмический потенциал простого слоя заданный на произвольных окружностях	
3.4.3. Аппроксимация логарифмического потенциала простого слоя заданного на окружностях с применением базиса ортогональных функций	
3.5. Аппроксимация производной логарифмического потенциала простого слоя заданного на окружностях	
3.6. Аппроксимация логарифмического потенциала двойного слоя с произвольным контуром	
4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ИНТЕГРО-КРАЕВЫХ УРАВНЕНИИ I И II РОДА РАВНОСИЛЬНЫХ ЗАДАЧАМ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИИ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ КРАЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	
4.1. Алгебраизация системы интегро-краевых уравнений	

	Стр.
4.1.1. Численное решение системы интегро-краевых уравнений рода (2.4) и (2.14).....	99
4.1.2. Численное решение системы интегро-краевых уравнений рода (2.27), (2.54) и (2.58).....	103
4.2. Применение метода последовательных приближений для решения системы интегральных уравнений I рода	108
4.2.1. Решение системы интегральных уравнений I рода (2.14) методом последовательных приближений - двумерная проблема	108
4.2.2. Решение системы интегральных уравнений I рода (2.4) методом последовательных приближений - трёхмерная проблема	113
4.3. Применение метода последовательных приближений для решения системы интегральных уравнений II рода (2.27) и (2.43)	116
4.4. Алгебраизация системы интегро-краевых уравнений I и II рода (2.69) и (2.70)	122
5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ	122
5.1. Квази-статическое электрическое синусоидальное переменное поле для трёхмерного случая	122
5.2. Квази-статическое электрическое синусоидальное переменное поле для двумерного случая	125
6. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ НАПРЯЖЕНИЙ	129
6.1. Применение метода краевых элементов для решения системы интегральных уравнений I рода линий передач	129
6.1.1. Тестовые расчёты	129
6.1.2. Расчёт поля для модели линии 400 кв и 750 кв методом краевых элементов	132
6.2. Применение метода последовательных приближений для решения системы интегральных уравнений I рода линий передач	136
6.2.1. Тестовые расчёты	138
6.2.2. Расчёты напряжения поля на поверхности проводов однопроводной линии с двумя проводниками в связке	140
6.2.3. Расчёты поля для моделей линии 400 кв и 750 кв методом последовательных приближений	141
7. ЗАМЕЧАНИЯ И ВЫВОДЫ	146
ЛИТЕРАТУРА	150

	Page
CONTENTS	
1. INTRODUCTION	9
1.1. The methods of electric fields calculation	9
1.2. The range and scope of the paper	15
2. BRINGING DIRICHLET'S EXTERNAL PROBLEM FOR LAPLACE'S EQUATION TO INTEGRAL-BOUNDED EQUATIONS	17
2.1. Systems of integral-bounded equations of first kind	17
2.2. Systems of integral-bounded equations of second kind	25
2.2.1. The application of a single layer potential	25
2.2.2. The application of a double layer potential	33
2.3. The systems of integral-bounded equations of first and second kind	38
3. THE APPROXIMATION OF A SINGLE AND DOUBLE LAYER POTENTIAL	42
3.1. The approximation of a single layer potential	44
3.1.1. The potential of a single layer on any surface	45
3.1.2. The potential of a single layer on surfaces in the form of thin cylinders	59
3.2. The approximation of derivative of a single layer potential on any surface	67
3.3. The approximation of a double layer potential on any surface	74
3.4. The approximation of a logarithmic potential of a single layer	81
3.4.1. The logarithmic potential of a single layer on random contours	81
3.4.2. The logarithmic potential of a single layer on random circles	87
3.4.3. The approximation of a logarithmic potential of a single layer on circles by means of orthogonal function base	93
3.5. The approximation of logarithmic potential derivative of a single layer on circles	95
3.6. The approximation of logarithmic potential of a double layer on random contours	95

	Page
4. THE SOLUTION OF INTEGRAL BOUNDED EQUATIONS SYSTEMS OF FIRST AND SECOND KIND, EQUAL TO DIRICHLET'S PROBLEMS FOR LAPLACE'S EQUATION BY MEANS OF BOUNDARY ELEMENTS	98
4.1. Reducing integral bounded equations to algebraic equations	98
4.1.1. Numerical solution of integral equation systems of first kind (2.4) and (2.14)	99
4.1.2. Numerical solution of integral equation systems of second kind (2.27), (2.54) and (2.58)	103
4.2. The application of subsequent approximations method to solving integral equation systems of first kind	108
4.2.1. The solution of integral equation system (2.14) by means of subsequent approximation - a two-dimensional problem	108
4.2.2. The solution of integral equation system of first kind (2.14) by means of subsequent approximations - a three-dimensional problem	113
4.3. The application of subsequent approximation method to solving integral equation systems of second kind (2.27) and (2.43)	116
4.4. Reducing integral bounded equation systems of first and second kind to algebraic equations (2.69) and (2.70)	119
5. THE CALCULATION OF THE DISTRIBUTION OF ELECTRIC FIELD STRENGTH VECTOR	122
5.1. The quasi-static electric field sinusoidally changeable in a three-dimensional approach	122
5.2. The quasi-static electric field, sinusoidally changeable in the two-dimensional approach	125
6. EXAMPLES OF INTEGRAL EQUATION APPLICATIONS TO THE CALCULATION OF ELECTRIC FIELDS ON HIGH VOLTAGE TECHNOLOGY	129
6.1. The application of boundary elements method to solving integral bounded equation systems of first kind of transmission lines	129
6.1.1. Testing calculations	129
6.1.2. Field calculation for the model of 400 kV and 750 kV lines, using boundary elements method	132
6.2. The application of subsequent approximation method to solving integral equation system of first kind of a transmission line	136
6.2.1. Testing calculations	138
6.2.2. Field strength calculation on the surface of one-conductor line consisting of two conductors on phase	140
6.2.3. Field calculations for a model of 400 kV and 750 kV by means of subsequent approximations method	141
7. CONCLUSIONS	146
REFERENCES	150

1. WSTĘP

1.1. Metody obliczania pól elektrycznych

Konieczność przesyłania coraz to większej ilości energii elektrycznej przy wzrastających wymaganiach ekonomicznych prowadzi do podniesienia mocy i napięć znamienowych wysokonapięciowych urządzeń elektroenergetycznych. Ponadto rozwój licznych urządzeń elektrofizycznych prowadzi także do wzrostu ich napięć roboczych i mocy jednostkowych. Powoduje to podniesienia wymagań odnośnie do niezawodności i innych techniczno-ekonomicznych parametrów tych urządzeń. Dla spełnienia tych wymagań niezbędna jest znajomość wytrzymałości elektrycznej izolacji urządzeń wysokiego napięcia w różnych warunkach pracy. Dla materiałów elektrotechnicznych stosowanych do konstrukcji wysokonapięciowych izolacji dostatecznie dobrze znana są dopuszczalne natężenia pola elektrycznego, odpowiadające różnym postaciom oddziaływań napięciowych. Określenie jednak warunków pracy izolacji wymaga, między innymi, znajomości rozkładu natężenia pola elektrycznego, a w szczególności lokalizacji wartości maksymalnych tych natężeń pola otrzymanych na drodze odpowiednich obliczeń. Wprowadzenie maszyn cyfrowych do praktyki inżynierskiej spowodowało szybki rozwój przybliżonych metod obliczania pól elektrycznych z dostateczną dokładnością. Pozwalają one, przy zadanych wytrzymałościach dielektrycznych, określić niezbędną charakterystyki izolacji elektrycznej.

Obliczanie pól elektrycznych jest również użyteczne przy rozwiązywaniu problemów ochrony odgromowej, przy wymierowaniu długich izolacyjnych odstępów powietrznych, przy projektowaniu takich elektrofizycznych urządzeń jak: przyspieszacz elektronów, mikroskop elektronowy itp.

Wiele zadań techniki wysokich napięć może być rozwiązanych na bazie rozwiązań pola elektrycznego w środowisku stanowiącym układ dielektryków izotropowych i jednorodnych.

Spośród tych zadań należy przede wszystkim wymienić optymalizację konstrukcji urządzeń wysokiego napięcia z izolacją gazową (np. rozdzielnie zamknięte z izolacją SF₆) ze względu na dopuszczalną natężenie pola dane eksperymentalnie, nie powodując tym samym powstania wyładowań niezupełnych w normalnych warunkach pracy urządzenia. Problem ten pojawia się również przy projektowaniu napowietrznych linii przesyłkowych, np. przy wyborze parametrów przewodów wiązkowych [5].

Obliczanie pola elektrycznego pozwala również na optymalizację konstrukcji izolacyjnego zawieszenia przewodów napowietrznych linii ultrawy-

sokich napięć. Przy dużej liczbie izolatorów w łańcuchu zniekształcenie pola między przewodami roboczymi linii a słupem jest małe. Dlatego też rozkład potencjału wzdłuż łańcuchów izolatorów praktycznie rzecz biorąc wystarczy obliczać przyjmując model pozbawiony łańcuchów izolatorów, a posiadający przewody robocze linii usytuowane w pobliżu słupa. Podejście takie można również zastosować do poszukiwania rozkładu potencjału wzdłuż łańcucha izolatorów z tworzyw syntetycznych.

Projektowanie izolatorów przepustowych zwijanych z pojemnościowym sterowaniem pola elektrycznego wymaga również obliczeń rozkładu tego pola.

Określenie napięć przeskoku dla różnych odstępów izolacyjnych spotykanych w urządzeniach elektrycznych wymaga uwzględnienia oddziaływań napięciowych poszczególnych faz i może być wyznaczone tylko za pomocą analizy pola elektrycznego [63].

Wybór gabarytów izolacji wewnętrznej urządzeń wysokiego napięcia wykonanej z materiałów stałych i płynnych wymaga badania objętościowych rozkładów pola elektrycznego wewnątrz tych izolacji [62]. Obliczenie objętościowych rozkładów natężenia pola elektrycznego stosuje się również przy doborze izolacji olejowej z przegrodami (np. w transformatorach).

Ważną rolę odgrywa obliczenie pól elektrycznych przy określeniu napięć początkowych w przestrzeni międzyelektrodowej z dielektrykiem gazowym (np. [95]). W przypadku stosowania dielektryka w postaci mieszaniny gazów do obliczenia napięć początkowych nie można stosować znanych formuł [95], lecz należy je uzupełnić wyrażeniem wymagającym znajomości rozkładu pola elektrycznego w gazie. Kształtowanie rozkładu pól elektrycznych osiąga się między innymi przez stosowanie specjalnych ekranów, którym zadaje się potencjał pośredni. Odpowiedni dobór potencjałów tych ekranów powoduje na ogół wzrost wytrzymałości dielektrycznej odstępów izolacyjnych, co pozwala zmniejszyć gabaryty urządzeń elektrycznych [63].

Wpływ przewodów ekranujących znajdujących się bezpośrednio pod linią przesyłową oraz wpływ ekranów bocznych na rozkład pola elektrycznego przy powierzchni ziemi badano między innymi w pracy [18].

Znajomość rozkładu pola jest również istotna przy wyborze kondensatorów boczniujących przerwy wysokonapięciowych wyłączników, kiedy znajdują się one w stanie wyłączonym.

Obliczenie pól elektrycznych może być także wykorzystane przy rozwiązywaniu zadań ochrony odgromowej [116]. Zagadnienie rozwoju wyładowań z samolotu wpadającego w chmurę burzową rozpatrzono w pracy [23], natomiast w pracy [63] poruszono zagadnienie orientacji pioruna przy wyładowaniach w wysokie obiekty. Obliczenie pola przeprowadzone w podanych przykładowo pracach posiadają jeden ogólny aspekt, a mianowicie oblicze się je albo przy danym natężeniu polu chmury burzowej, albo zakłada się znany rozkład ładunków w kanale wyładowania wstępnego. W takim przypadku mówi się, że obliczenia pola prowadzi się przy danym polu zewnętrznym.

Projektowanie i konstrukcja napowietrznych linii przesyłowych oraz napowietrznych stacji bardzo wysokich napięć wymaga uwzględnienia ich biologicznego oddziaływania na personel obsługi, a także na osoby, które mogą okresowo znajdować się w pobliżu linii przesyłowych. Zadania zabezpieczenia środowiska przed szkodliwymi działaniami silnych pól elektrycznych znajduje szerokie zainteresowanie zarówno za granicą, jak i w kraju. W kraju zadanie to jest określone w ustawie z 31 stycznia 1980r. o ochronie i kształtowaniu środowiska (Dz. Ustaw nr 3 1980) oraz w szczegółowym rozporządzeniu wykonawczym do tej ustawy z dnia 5 listopada 1980 r. (Dz. Ustaw nr 25 1980).

Wyniki obliczeń rozkładu pola elektrycznego pod liniami przesyłowymi można znaleźć w licznych pracach (np. [39, 40, 84, 20, 16]). Z krajowych publikacji dotyczących tej problematyki należy wymienić pracę [64]. Również autor niniejszej pracy opracował algorytm [18] pozwalający na obliczanie rozkładu pola elektrycznego pod liniami przesyłowymi z uwzględnieniem jego polaryzacji eliptycznej. Ponadto w monografii [18] rozwiązał kilka oryginalnych zadań syntezy rozkładu pola elektrycznego pod liniami przesyłowymi w pewnym zbiorze dopuszczalnych konfiguracji prowadzenia przewodów linii.

Zestaw podanych przykładów zadań techniki wysokich napięć, dla rozwiązania których niezbędne są obliczenia pól elektrycznych, można rozszerzyć, niemniej jednak z podanych przykładów wynika, że obliczenie pola w środowisku obszarami jednorodnymi pozwala rozwiązać szeroki krąg zadań technicznych. Należy również zauważyć, że rozwiązanie pól odgrywa w podanych przykładach różną rolę. W jednych stanowi ostatni etap. Jest tak np. przy wyborze i optymalizacji konstrukcji wysokonapięciowych ze względu na dopuszczalne natężenia pola. Dla innych obliczanie pola stanowi etap pośredni, jak np. obliczanie napięć początkowych ze względu na warunek wyładowań samodzielnego w gazie.

W podanych przykładach obliczeniowych pola elektrycznego istotną rolę odgrywa wybór odpowiedniego modelu obliczeniowego, który z jednej strony powinien dostatecznie dokładnie opisywać geometrię rozpatrywanego układu przewodników i dielektryków, z drugiej zaś w jego konstrukcji niezbędne są odpowiednie uproszczenia, bez których niemożliwe są obliczenia. Z podanych przykładowo zadań dotyczących obliczeń pól elektrycznych można wyróżnić następujące grupy modeli obliczeniowych:

- przewodniki objętościowe,
- przewodniki lub ich układy, stanowiące cienkie cylindryczne przewody,
- przewodniki w postaci cienkich niezamkniętych powierzchni przewodzących,
- układy przewodników i dielektryków jednorodnych, izotropowych o różnych przenikalnościach elektrycznych.

Ogólnie rzecz biorąc, mogą wystać zadania, których modele obliczeniowe stanowią różne kombinacje wcześniej wymienionych modeli.

Do rozwiązywania zadań pola elektrycznego muszą być podane warunki brzegowe. W zadaniach techniki wysokich napięć najczęściej zadane są potencjały przewodników. W niektórych zadaniach warunki brzegowe sprowadzają się do tego, że znane są całkowite ładunki poszczególnych przewodników. Jeżeli obliczenie pola elektrycznego prowadzi się w obecności dielektryków, to uwzględnia się warunek brzegowy na ich powierzchniach w postaci ciągłości potencjału elektrycznego i składowej normalnej wektora indukcji elektrycznej. Tak więc, obliczanie pól elektrycznych w zadaniach techniki wysokich napięć prowadzi się przy danych potencjałach przewodników lub ich całkowitych ładunkach w polu zewnętrznym lub bez niego z uwzględnieniem ciągłości potencjału oraz składowej normalnej wektora indukcji elektrycznej na powierzchniach rozdziału dielektryków. Podane warunki brzegowe mogą być stosowane w różnych kombinacjach.

Wprowadzenie maszyn cyfrowych do praktyki inżynierskiej spowodowało szybki rozwój przybliżonych metod rozwiązywania różnych zadań techniki wysokich napięć. W ostatnich latach rozwijano równoległe cztery metody obliczania pól elektrycznych, sprowadzające się do obliczania dużych układów równań algebraicznych, a mianowicie:

- metoda elementów skończonych MES,
- metoda symulacji ładunków MSŁ,
- metoda równań całkowych MRC,
- metoda elementów brzegowych MEB.

Metoda elementów skończonych MES pozwoliła na rozwiązanie wielu zagadnień technicznych (np. [104, 138]). Zastosowanie metody elementów skończonych do rozwiązywania równania Laplace'a w obszarze z warunkami brzegowymi Dirichleta sprowadza się do minimalizacji funkcjonału:

$$I = \int_V \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_3} \right)^2 \right] dv. \quad (1.1)$$

Najczęściej metoda ta jest stosowana w zagadnieniach płaskich lub osiowo-symetrycznych (np. [9]). W takim przypadku badany obszar dzieli się na trójkąty, co pozwala sprowadzić problem minimalizacji funkcjonału (1.1) do takiego doboru wartości potencjałów V_1 w poszczególnych węzłach siatki rozpatrywanego obszaru v , aby

$$\frac{\partial I}{\partial V_1} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (1.2)$$

Układ równań (1.2) po uwzględnieniu warunków brzegowych sprowadza się do algebraicznego układu równań:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} V_j = b_i. \quad (1.3)$$

którego rozwiązaniem są przybliżone potencjały w poszczególnych punktach triangulacji obszaru. Ze względu na duży wymiar układu równań (1.3) do jego rozwiązania można stosować metody iteracyjne (np. [9]). W celu skrócenia czasu obliczeń i zmniejszenia zajmowania pamięci maszyny cyfrowej wykorzystuje się również fakt, że macierz współczynników $[a_{ij}]$ jest macierzą wstęgową lub rzadką [36]. Metoda elementów skończonych stosowana jest najczęściej do badania pola elektrycznego w obszarach ograniczonych (np. [105, 138], natomiast w przypadku obszarów nieograniczonych może być stosowana z innymi metodami [88, 111].

Idea metody symulacji ładunków MSŁ [26, 60, 110, 112] polega na tym, że warunek ekwipotencjalności powierzchni przewodników zapisuje się w postaci algebraicznego układu równań:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_{ij} q_i = V_j. \quad (1.4)$$

który jest równoważny istnieniu wewnątrz powierzchni przewodnika N ładunków elektrycznych q_i , generujących w N punktach powierzchni potencjały V_j . Po rozwiązaniu układu równań (1.4) ze względu na ładunki q_i można obliczyć potencjał i natężenie pola w dowolnym punkcie na zewnątrz przewodników. W zależności od symetrii całego zagadnienia lub poszczególnych jego elementów stosuje się ładunki symulujące ekwipotencjalność powierzchni przewodników w postaci ładunków punktowych, ładunków rozłożonych na odcinku prostej lub na okręgu [60, 112, 126, 129]. Istotnym zagadnieniem przy rozwiązywaniu pola MSŁ jest wybór liczby i postaci ładunków generujących pole, a także ich położenie, co ma wpływ na dokładność obliczeń. Obecnie MSŁ jest szczególnie przydatna przy rozwiązywaniu problemów trójwymiarowego pola elektrycznego bez symetrii (np. [8, 15, 39, 110, 112]). Jest ona często efektywniejsza niż metoda siatek czy MES przy rozwiązywaniu zagadnień pola elektrycznego w obszarach nieograniczonych.

W ostatnich latach rozwinęła się również metoda kombinowana obliczeń pól elektrostatycznych, będąca połączeniem MES i MSŁ, a tym samym posiadająca zalety obydwu metod [88, 111]. W przypadku rozpatrywania układu przewodników i elektryków pełny opis problemu sprowadza się do układu równań algebraicznych na ładunki symulujące ekwipotencjalność powierzchni przewodzących, układu równań na potencjały w węzłach siatki obszaru dielektryka elementy skończone oraz układu równań na granicy obszarów ES i St. Rozwiązanie tak złożonego układu równań algebraicznych jest kłopotliwe ze względu na złe uwarunkowanie jego macierzy, dlatego też do jego rozwiązania proponuje się metody iteracyjne [36, 76, 88, 111]. Metoda kombinowana w podanej postaci jest szczególnie przydatna do analizy pól elektrycznych z ładunkami przestrzennymi lub z elementami pól przewodzącymi.

Scharakteryzowane wyżej metody lub ich kombinacje pozwoliły między innymi na rozwiązanie takich problemów, jak pole linii przesyłowych (np. [8, 18, 42, 84]), pole linii przesyłowej w pobliżu słupa [107], pole przepustu izolatorowego [10, 88] czy pole skomplikowanej głowicy kabla [12].

Do obliczania pól elektromagnetycznych, szczególnie w obszarach nieograniczonych, korzystnie jest stosować metodę równań całkowych MRC (np. [67, 104, 138]). Równania całkowe I i II rodzaju można rozwiązywać metodami przybliżonymi analizy funkcjonalnej [11, 37, 86, 130]. W takim jednak przypadku należałoby określić układ funkcji ortogonalnych. Ponieważ proces poszukiwania takich funkcji jest problemem samym w sobie, metody takie tracą uniwersalność. W zagadnieniach elektrostatyki metoda równań całkowych MRC polega na zastosowaniu potencjału objętościowego, potencjału warstwy pojedynczej i jego pochodnej lub potencjału warstwy podwójnej i wprowadzeniu zagadnień Dirichleta, Neumanna lub ich kombinacji dla równań Laplace'a i Poissona, do układu równań całkowych I i II rodzaju (np. [50, 91, 92, 125, 136]). Metoda równań całkowych pozwala ponadto rozwiązać zadania, w których zadane są całkowite ładunki na przewodnikach [79, 80], jak również w przypadku, gdy powierzchnie przewodzące stanowią cienkie niezamknięte warstwy [43, 125]. Równania całkowe I rodzaju, ogólnie rzecz biorąc, należą do równań źle uwarunkowanych i do ich rozwiązania opracowano specjalne metody regularyzacji (np. [32, 52, 71, 119, 122]). W pracy [3] zastosowano np. algorytm iteracyjny Krianiewa [71] do obliczenia pola dwóch płaskich eksipatencyjnych taśm. Należy jednak podkreślić, że z punktu widzenia obliczeń numerycznych problem poszukiwania optymalnych algorytmów regularyzacji dla przybliżonego rozwiązywania równań operatorowych I rodzaju [53] jest bardzo trudny i ponadto jest możliwy tylko na EMC z dostatecznie dużą pojemnością pamięci.

O wiele prostszym procesem regularyzacji równań całkowych I rodzaju występujących w elektrotechnice jest sprowadzenie ich do równań całkowych II rodzaju (np. [6, 45, 79, 124]).

Jedną z efektywnych metod numerycznych rozwiązywania brzegowych równań całkowych I i II rodzaju jest metoda elementów brzegowych MEB [29]. Metoda ta jest przede wszystkim korzystna ze względu na to, że wynikające z niej oprogramowania nie wymagają dużych maszyn cyfrowych. MEB stosuje się do rozwiązania zagadnień teorii sprężystości, przewodnictwa cieplnego (np. [24]), jak również do obliczania niestacjonarnych pól elektromagnetycznych (np. [68]).

W Instytucie Elektrotechniki w Warszawie opracowano algorytm metody elementów brzegowych dla obliczania dwuwymiarowych, niestacjonarnych pól elektromagnetycznych [69], którego programy obliczeniowe mają w obecnej postaci charakter studyjny.

Również do przybliżonego rozwiązywania równań całkowych występujących w elektrostatyce o operatorach typu potencjał warstwy pojedynczej lub podwójnej najlepsze rezultaty osiąga się stosując metodę elementów brze-

wych [29, 56, 61, 115]. Zgodnie z tą metodą dokonuje się podziału brzegu na elementy (odcinki bądź krzywe) wyższego rzędu dla zagadnień dwuwymiarowych oraz liniowe lub wyższego rzędu formy trójkątne, bądź prostokątne dla zagadnień trójwymiarowych przyjmując na każdym z nich znaną aproksymację rozwiązania oraz zadane wartości brzegowe. Najlepsze rezultaty osiąga się stosując do aproksymacji rozwiązania funkcje sklejjane [36]. Ze względu bowiem na słabą osobliwość jąder operacji całkowych typu potencjały warstwy pojedynczej lub podwójnej do ich dyskretyzacji stosowanie formuł kwadratury [76] daje duże błędy obliczeniowe [61, 115]. Zastosowanie funkcji sklejjanych zerowego stopnia do algebraizacji równań całkowych I rodzaju pozwoliło na rozwiązanie pola elektrycznego dla układów płaskich i osiowo-symetrycznych (np. [3, 56, 61, 115]).

1.2. Zakres i cel pracy

Głównym celem pracy jest konstrukcja algorytmów do obliczania pól elektrycznych dla dowolnych układów przestrzennych i płaskich przewodników i dielektryków doskonałych z zastosowaniem metody równań całkowych i elementów brzegowych, prowadząca do wielkich układów równań liniowych dyskretyzujących odpowiednie układy równań całkowych I lub II rodzaju, w których wszystkie współczynniki występujące przy zmiennych węzłowych są wyrażalne przez kombinacje funkcji standardowych lub zbieżne szeregu funkcyjnego ze względu na współrzędne punktów triangulacji powierzchni lub konturów przewodników i dielektryków. Ponadto postawiono sobie za cel opracowanie algorytmów do obliczania pól elektrycznych na bazie równań całkowo-brzegowych I i II rodzaju z zastosowaniem metody kolejnych przybliżeń w algebraizowanej postaci, w których elementy macierzy dyskretyzujących odpowiednie operatory całkowe są również wyrażalne przez kombinacje funkcji standardowych lub zbieżne szeregu funkcyjnego ze względu na współrzędne punktów triangulacji powierzchni, lub konturów przewodników i dielektryków.

W tak skonstruowanych algorytmach eliminuje się wielotysięczne odwołania do procedury całkowania numerycznego niezbędne do wyznaczenia współczynników układów równań algebraicznych dyskretyzujących odpowiednie układy równań całkowo-brzegowych I lub II rodzaju i rozwiązuje się globalnie problem numeryczny związany ze słabą osobliwością jąder operatorów całkowych, osiągając równocześnie dużą dokładność w generacji współczynników układu równań algebraicznych, co jest szczególnie istotne przy rozwiązywaniu układów równań całkowo-brzegowych I rodzaju.

Mając na uwadze zastosowania przede wszystkim w technice wysokich napięć, konstrukcja algorytmów obliczeniowych pola elektrycznego przeprowadzona będzie dla następujących modeli obliczeniowych: przewodniki objętościowe, przewodniki lub ich układy stanowiące cienkie cylindryczne przewody, przewodniki w postaci cienkich niezamkniętych powierzchni przewo-

dzących oraz układy przewodników i dielektryków jednorodnych izotropowych o różnych przenikalnościach elektrycznych. Konstrukcja algorytmów obliczeniowych pola elektrycznego dla podanych modeli dokonana będzie przy danych potencjałach przewodników lub ich całkowitych ładunkach w polu zewnętrznym, lub bez niego z uwzględnieniem ciągłości potencjału oraz składowej normalnej wektora indukcji elektrycznej na granicy rozdziału dielektryków. Tak określone warunki brzegowe mogą wystąpić w różnych kombinacjach.

Punktem wyjścia w konstrukcji tych algorytmów obliczeniowych pola elektrycznego dla określonych modeli będą układy równań całkowo-brzegowych I i II rodzaju wynikające z teorii potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej [49, 50, 73, 91, 92, 124, 136] podane w rozdziale drugim pracy.

Mając na uwadze realizację głównego celu pracy, w rozdziale trzecim wykazane będzie, że operatory całkowe typu potencjał warstwy pojedynczej i jego pochodne oraz potencjał warstwy podwójnej można aproksymować kombinacjami funkcji standardowych lub za pomocą zbieżnych szeregów funkcyjnych tzw. funkcje kształtu ze względu na współrzędne punktu X , niezależnie od jego położenia. Tak rozwiązane zagadnienia aproksymacji rozpatrywanych operatorów całkowych pozwolą na dyskretyzację w rozdziale czwartym wszystkich równań całkowych sformułowanych w pracy, a tym samym na realizację jej głównego celu. Ponadto otrzymanie gotowych wyrażeń aproksymujących potencjał elektryczny dla dowolnych położań punktu X pozwala na badanie rozkładów natężenia pola elektrycznego bez wielotysięcznych odwołań do procedury całkowania numerycznego (rozdział 5).

Na zakończenie pracy podane będą przykłady obliczania pola elektrycznego dla dwuwymiarowego modelu linii przesyłowej 400 kV i 750 kV.

2. SPROWADZENIE ZEWNĘTRZNEGO PROBLEMU DIRICHLETA DLA RÓWNIANIA LAPLACE'A DO UKŁADÓW RÓWNAŃ CAŁKOWO-BRZEGOWYCH

W obliczeniach pól elektrycznych dla różnych zadań techniki wysokich napięć szczególnie istotna jest konstrukcja odpowiedniego modelu obliczeniowego, który powinien dostatecznie dokładnie opisywać geometrię rozpatrywanego układu przewodników. Z drugiej zaś strony przy konstrukcji różnych modeli obliczeniowych niezbędne są pewne uproszczenia, bez których niemożliwe są obliczenia.

Modele obliczeniowe stosowane w technice wysokich napięć stanowią przewodniki różnych form. W niniejszej pracy rozpatrywane będą przewodniki w następujących grupach:

- przewodniki objętościowe,
- przewodniki lub ich układy, stanowiące cienkie cylindryczne przewody,
- przewodniki w postaci cienkich niezamkniętych powierzchni przewodzących.

Ogólnie rzecz biorąc, mogą wystąpić zadania, których modele obliczeniowe stanowią różne kombinacje wymienionych modeli.

Przy rozwiązywaniu pola elektrycznego muszą być podane warunki graniczne. W zadaniach techniki wysokich napięć obliczenia pól elektrycznych prowadzi się przy zadanych potencjałach przewodów lub ich całkowitych ładunkach z uwzględnieniem pola zewnętrznego, lub bez niego. Podane warunki graniczne mogą występować w różnych kombinacjach.

Obecnie dużo uwagi zwraca się na rozwiązywanie pól elektrycznych quasi-statycznych metodą równań całkowych. Szerokie zastosowanie tej metody podyktowane jest wieloma zaletami, z których główna polega na możliwości obliczenia pola w nieograniczonej przestrzeni. Do innych zalet należy również zaliczyć możliwość konstruowania najbardziej prostych i ogólnych programów, pozwalających obliczyć pole elektryczne przy dowolnych kształtach powierzchni granicznych rozdziału ośrodków, jak również możliwość otrzymania rozwiązań zagadnień polowych w przejrzystej zwartej formie, tj. w postaci potencjałów [73, 91, 92].

2.1. Układy równań całkowo-brzegowych pierwszego rodzaju

Do obliczenia pól elektrycznych generowanych przez naładowane przewodniki bardzo często wykorzystuje się równania całkowe pierwszego rodzaju [56, 61], co zapewne podyktowane jest bezpośrednim stosowaniem potencjałów warstwy pojedynczej ładunków.

Mając na uwadze zastosowania w technice wysokich napięć, zakłada się, że modele obliczeniowe stanowią przewodniki różnych form, tj. przewodniki objętościowe, przewodniki lub ich układy stanowiące cienkie cylindryczne przewody, przewodniki w postaci cienkich niezamkniętych powierzchni. Niech w przestrzeni Euklidesa R^3 mającej cechy próżni zadane są powierzchnie tych przewodników S^k ($k = 1, 2, \dots, N_p$) będące klasy C_0^1 . Poszukuje się funkcji $V(x)$ spełniającej w obszarze zewnętrznym względem przewodników równania Laplace'a:

$$\Delta V(x) = 0 \quad (2.1)$$

z warunkiem brzegowym

$$V(x) = V^k = \text{const} \quad \text{dla } x \in S^k \quad (k = 1, 2, \dots, N_p) \quad (2.2)$$

oraz zmierzającej do zera, gdy punkt x oddala się do nieskończoności [73]. Potencjały V^k poszczególnych przewodów, ogólnie rzecz biorąc, należą do zbioru liczb zespolonych, co zapewnia uwzględnienie pól sinusoidalnie zmiennych. Rozwiązania poszukuje się w postaci potencjału warstwy pojedynczej [73]:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{S^k} \frac{\sigma^k(y) dS_y}{|XY|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{G(y) dS_y}{|XY|} \quad (2.3)$$

gdzie:

$$S = S^1 \cup S^2 \cup \dots \cup S^{N_p},$$

$$G(y) = \sigma^k(y) \quad (k = 1, 2, \dots, N_p),$$

$$|XY| = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

dS_y - miara powierzchni S ze względu na współrzędne punktu Y .

W rozpatrywanym przypadku należy tak określić funkcję gęstości ładunków $\sigma^k(y)$ na powierzchniach $S = S^1 \cup S^2 \cup \dots \cup S^{N_p}$, aby potencjał $V(x)$ spełniał warunki brzegowe (2.2), a na to potrzeba, by spełniony był następujący układ równań całkowych pierwszego rodzaju:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{S^k} \frac{\sigma^k(y) dS_y}{|XY|} = 2\epsilon_0 V^1; \quad (x \in S^1), \quad (1 = 1, 2, \dots, N_p) \quad (2.4)$$

Znajomość rozkładu gęstości powierzchniowej ładunków, które by zapewniały stałość potencjałów na powierzchniach S^k , pozwala zgodnie ze wzorem (2.3) otrzymać rozwiązanie równania (2.1) z warunkami brzegowymi (2.2).

Przyjmując dla operacji całkowej typu potencjału warstwy pojedynczej oznaczenie:

$$V^0 G = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \int_S \frac{\sigma^k(y) dS_y}{|XY|} = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{G(y)}{XY} dS_y \quad (2.5)$$

można układ równań całkowych (2.3) przedstawić w postaci:

$$V^0 G = W, \quad (2.6)$$

gdzie $W = 2\epsilon_0 V^1$ dla $x \in S^1$ ($1 = 1, 2, \dots, N_p$).

Zewnętrzny problem Dirichleta dla trójwymiarowego równania Laplace'a został więc sprowadzony do rozwiązania równania pierwszego rodzaju (2.6).

Dwuwymiarowy model pola elektrycznego można stosować w przypadku rozpatrywania układów przewodów prowadzonych równolegle względem siebie oraz przy założeniu, że odległości między przewodami są dostatecznie małe w porównaniu z ich długością. W ostatnich latach model ten był często stosowany przy analizie i syntezie pola elektrycznego linii przesyłowych w warstwie przy powierzchni ziemi. Między innymi posługiwano się nim w pracach [8, 18, 41, 64, 84].

Z praktycznego punktu widzenia zewnętrzny problem Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a ma bardzo duże zastosowanie. Poszukiwanie rozwiązania tego problemu będzie prowadzone w postaci potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej.

Niech na płaszczyźnie R^2 dany jest układ D_1 ($1 = 1, 2, \dots, N$) rozłącznych obszarów ograniczonych jednospójnych, których brzegi \mathcal{C}^1 są krzywymi zamkniętymi klasy C_0^1 . Poszukuje się rozwiązanie $V(x)$ zewnętrznego zagadnienia Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a:

$$\Delta V(x) = 0 \quad \text{dla } x \in R^2 - \bigcup_{i=1}^N \bar{D}_i \quad (2.7)$$

z warunkami brzegowymi

$$V(x) = V^1 \quad \text{dla } x \in \mathcal{C}^1 \quad (1 = 1, 2, \dots, N) \quad (2.8)$$

znikającego w nieskończoności w postaci potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej:

$$v(x) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^k} \sigma^k(\gamma) \ln \left[\frac{1}{|XY|} \right] dl_\gamma = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{\epsilon} \sigma(\gamma) \ln \left[\frac{1}{|XY|} \right] dl_\gamma \quad (2.9)$$

gdzie:

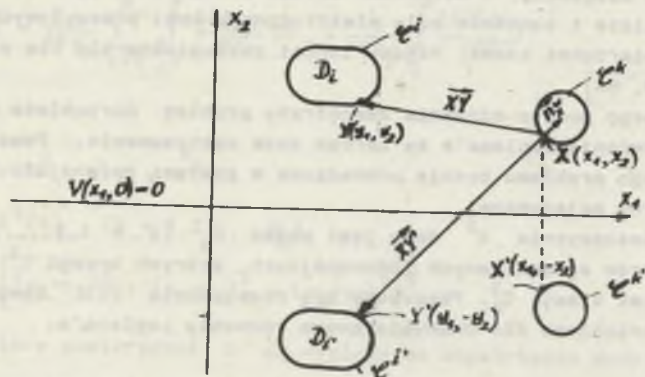
$$\epsilon = \epsilon^1 \cup \epsilon^2 \cup \dots \cup \epsilon^{N_p},$$

$$|XY| = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

dl_γ - miara konturu ϵ ze względu na współrzędne punktu γ .
Aby jednak potencjał określony wzorem (2.9) zniknął w nieskończoności, potrzeba i wystarcza, aby

$$\int_{\epsilon} \sigma(x) dl_x = \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^k} \sigma^k(x) dl_x = 0 \quad (2.10)$$

Mając na uwadze zastosowania dwuwymiarowego modelu pola elektrycznego do badania pola linii trójfazowych, zechcą się dalej, że rozłączne obszary D_1 znajdują się w półpłaszczyźnie $x_2 = 0$ (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Odbicie zwierciadlane obszarów D_1 w osi x_1
Fig. 2.1. Mirror image of the D_1 regions in the axis x_1

Warunki brzegowe (2.8) pozostają bez zmian, natomiast dla $x_2 = 0$ przyjmuje się potencjał $v(x_1, x_2)$ równy zeru

$$v(x_1, 0) = 0. \quad (2.11)$$

Rozwiązanie tak postawionego zagadnienia Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a można otrzymać stosując metodę obrazów elektrycznych wzglę-

dem prostej $x_2 = 0$ [117]. Polega ona na uwzględnieniu warunku brzegowego (2.11) przez wprowadzenie układu D_1 , obszarów ($i = 1, 2, \dots, N$) będących odbiciem zwierciadlanym obszarów D_1 ($i = 1, 2, \dots, N$) względem osi x_1 , na których funkcje $\sigma^i(\gamma)$ wynoszą:

$$\sigma^i(\gamma) = -\sigma^i(\gamma); \quad \gamma = \gamma(y_1, y_2); \quad \gamma' = \gamma'(y_1, -y_2) \quad (2.12)$$

W takim przypadku rozwiązanie zewnętrznego zagadnienia Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a w półpłaszczyźnie $x_2 \geq 0$ z dodatkowym warunkiem brzegowym (2.11) dołączonym do warunków brzegowych (2.8) można poszukiwać w postaci:

$$v(x) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{\epsilon} \sigma(\gamma) \ln \frac{|XY|}{|XY'|} dl_\gamma = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^k} \sigma^k(y_1, y_2) \ln \frac{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2}}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} dl_\gamma \quad (2.13)$$

łatwo zauważyć, że w przypadku gdy punkt X zmierza do nieskończoności, to funkcja $v(x)$ zmierza do zera. W rozpatrywanym przypadku należy tak określić funkcję $\sigma(\gamma)$ na brzegu $\epsilon = \epsilon^1 \cup \epsilon^2 \cup \dots \cup \epsilon^{N_p}$, aby potencjał $v(x)$ spełniał warunki brzegowe (2.8) i (2.11), a na to potrzeba, by spełniony był następujący układ równań całkowych pierwszego rodzaju:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\epsilon^k} \sigma^k(y_1, y_2) \ln \frac{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2}}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} dl_\gamma = 2\epsilon_0 v^2; \quad x(x_1, x_2) \in \epsilon^2 \quad (i = 1, 2, \dots, N_p) \quad (2.14)$$

Znajomość rozkładu gęstości powierzchniowej ładunków zapewniających stałość potencjałów na konturach ϵ^k pozwala, zgodnie ze wzorem (2.13), na rozwiązanie równania (2.7) z warunkami brzegowymi (2.8).

Przyjmując dla operacji całkowej typu potencjału logarytmicznego oznaczenie:

$$\mathcal{V}_L \sigma = \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon} \sigma(\gamma) \ln \frac{|XY|}{|XY'|} dl_\gamma = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^k} \sigma^k(\gamma) \ln \frac{|XY|}{|XY'|} dl_\gamma. \quad (2.15)$$

można układ równań całkowych (2.14) przedstawić w zwartej postaci operatorowej:

$$\mathcal{V}_L \phi = w, \quad (2.16)$$

gdzie $w = 2\epsilon_0 v^1$ dla $x \in \epsilon^1$ ($1 = 1, 2, \dots, N$).

Problem zewnętrzny Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a jest równoważny rozwiązaniu równania (2.16) z operacją liniową określoną wzorem (2.15).

Jak łatwo zauważyć, operatory \mathcal{V} i \mathcal{V}_L (wzory (2.5) i (2.15)) są operatorami liniowymi i do badania równań (2.6) i (2.16) można zastosować teorię Banacha z analizy funkcjonalnej [4]. W zagadnieniach elektrostatyki dziedziną i przeciwdziedziną operatorów \mathcal{V} i \mathcal{V}_L są przestrzenie funkcji rzeczywistych współrzędnych punktu x , np. przestrzeń funkcji ciągłych C , całkownych L_1 i całkownych z kwadratem L_2 odpowiednio na powierzchni S i konturze ϵ . Jeżeli jednak rozpatrywać pole elektryczne quasi-statyczne sinusoidalnie zmienne, wówczas należałoby dziedzinę i przeciwdziedzinę operatorów \mathcal{V} i \mathcal{V}_L rozpatrywać w przestrzeniach zespolonych funkcji punktu na powierzchni S i konturze ϵ , np. w przestrzeni funkcji całkownych z modułem L_1 lub z kwadratem modułu L_2 . Jak wiadomo, z analizy funkcjonalnej rozpatrywane przestrzenie C , L_1 , L_2 są przestrzeniami Banacha [4].

Jądra operatorów całkowych (2.5) i (2.15) mają słabą osobliwość w przypadku, gdy punkty X i Y pokrywają się. Jeżeli jednak operatory \mathcal{V} i \mathcal{V}_L są określone w przestrzeni funkcji ϕ całkownych z modułem ($\phi \in L_1$), to jak wiadomo z teorii potencjału [73], operatory te przyjmują wartości z przestrzeni funkcji ciągłych C^* odpowiednio na powierzchniach S i konturach ϵ .

Można wykazać [70], że operacje \mathcal{V} i \mathcal{V}_L są ograniczone z C^* w C^* , a jako takie są ciągłe:

$$\|\mathcal{V}\phi\|_{C^*(S)} \leq \|\mathcal{V}\|_{C^*(S) \rightarrow C^*(S)} \|\phi\|_{C^*(S)}, \quad (2.17)$$

$$\|\mathcal{V}_L\phi\|_{C^*(\epsilon)} \leq \|\mathcal{V}_L\|_{C^*(\epsilon) \rightarrow C^*(\epsilon)} \|\phi\|_{C^*(\epsilon)}, \quad (2.18)$$

gdzie normy operacji \mathcal{V} i \mathcal{V}_L (wzory (2.5) i (2.15)) wyrażają się wzorami:

$$\|\mathcal{V}\|_{C^*(S) \rightarrow C^*(S)} = \sup \left\{ \|\mathcal{V}\phi\|_{C^*(S)} : \|\phi\| = 1 \right\} = \max_{X \in S} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{S_k} \frac{dS_Y}{|XY|} \right], \quad (2.19)$$

$$\|\mathcal{V}_L\|_{C^*(\epsilon) \rightarrow C^*(\epsilon)} = \sup \left\{ \|\mathcal{V}_L\phi\|_{C^*(\epsilon)} : \|\phi\| = 1 \right\} = \max_{X \in \epsilon} \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\epsilon_k} \ln \frac{|XY'|}{|XY|} dl_Y \right]. \quad (2.20)$$

Można również wykazać [70], że operacje \mathcal{V} i \mathcal{V}_L są ograniczone z L_1^* w L_1^* . Teoria równań operatorowych (2.6) i (2.16) jak również metody ich przybliżonego rozwiązania podane są najogólniej w przestrzeniach L_2^* . Dlatego też należy zbadać zachowanie się operacji \mathcal{V} i \mathcal{V}_L wziętych jako operacje z L_2^* w L_2^* . W tym przypadku pomocne w oszacowaniu norm operacji \mathcal{V} i \mathcal{V}_L staje się twierdzenie Riesz o interpolacji [70]. Stwierdza ono, że jeżeli liniowe operacje \mathcal{V} i \mathcal{V}_L są równocześnie operacjami ograniczonymi z C^* w C^* oraz z L_1^* w L_1^* , co ma miejsce w rozpatrywanym przypadku, to są również operacjami ograniczonymi z L_2^* w L_2^* .

Operacja \mathcal{V} zdefiniowana wzorem (2.5) jako potencjał warstwy pojedynczej rozpostartej na powierzchniach S^k ($k = 1, 2, \dots, N_p$) ma taką własność [73], że jeżeli jest on równy zeru w każdym punkcie tych powierzchni, to funkcja $\phi(Y) = \phi^k(Y)$ dla $Y \in S^k$ ($k = 1, 2, \dots, N$), znika w każdym punkcie tych powierzchni, a więc

$$\mathcal{V}\phi = 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \phi = 0. \quad (2.21)$$

Jak wiadomo [4], warunek (2.21) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby operacja liniowa \mathcal{V} była iniekcją.

Z warunku (2.21) odwracalności operatora \mathcal{V} wynika jednoznaczność rozwiązania równania (2.6). Istotnie, gdyby założyć, że istnieje drugie rozwiązanie ϕ_1 , to zachodzi:

$$\mathcal{V}(\phi - \phi_1) = 0 \quad (2.22)$$

i na mocy warunku (2.21) prawie wszędzie $\phi = \phi_1$.

Analogiczne własności posiada operacja \mathcal{V}_L zdefiniowana wzorem (2.15). W teorii równań całkowych pierwszego rodzaju wykazuje się, że dowolnie małe odchylenie względem normy L_2^* wyrazu wolnego w w równaniu (2.6) może prowadzić do skończonego błędu w rozwiązaniu ϕ równania (2.6). Oznacza to utratę stabilności rozwiązania ϕ przy małym odchyleniu prawej strony równania (2.6) (por. [122]). W związku z utratą stabilności rozwiązania układ równań całkowych (2.4) należy do źle uwarunkowanych.

Oznacza to, że operator całkowy \mathcal{V} typu potencjału warstwy pojedynczej jest operatorem ograniczonym z L_2^* w L_2^* , posiada operator odwrotny \mathcal{V}^{-1} , który nie jest ograniczony, co jest równoważne niestabilności rozwiązania równania (2.6).

Jeżeli jednak wiadomo, że zachodzi jednoznaczność rozwiązania (2.6) i że ono istnieje w określonym zbiorze funkcji, to zagadnienie jest sformułowane poprawnie w sensie Tichonowa [119]. Stabilność rozwiązania układu równań całkowych I rodzaju może być osiągnięta metodą regularyzacji [120]. Cyfrowy algorytm wyboru parametru w metodzie regularyzacji można znaleźć w pracach [52, 71], natomiast konstrukcję asymptotycznych optymalnych algorytmów rozwiązania równań I rodzaju podano w pracy [53]. W [87] pokazano, że stosowanie tej metody do równań z dokładnie zadaną prawą stroną zapewnia przy zmniejszaniu elementów podziału powierzchni dowolnie mały błąd rozwiązania. Należy jednak podkreślić, że realizacja tej metody jest możliwa na EMC z dostatecznie dużą objętością pamięci.

Stabilne rozwiązanie układu równań (2.6) można by otrzymać wprowadzając aproksymację nieznanej funkcji gęstości ładunków $\sigma^k(x)$ nie na elementach powierzchni S_1^k , lecz na całych powierzchniach S^k .

Przy odpowiednim wyborze takich funkcji stanowiących bazę ortonormalną w $L_2^*(S)$ zadanie nie będzie źle uwarunkowane. Przykład konstrukcji takiego układu ortonormalnego funkcji można znaleźć w pracy [74]. Do aproksymacji funkcji $\sigma^k(\gamma)$ można wziąć układ ortonormalny funkcji własnych jądra układu równań (2.6) [86]. Należy jednak zauważyć, że sam proces konstrukcji aproksymujących funkcji jest nieformalny i przedstawia problem sam w sobie, dlatego też taka metoda rozwiązywania traci uniwersalność.

Zastosowanie równań całkowych I rodzaju do rozwiązywania zewnętrznego zagadnienia Dirichleta pokazano w pracy [61]. Problem stabilności rozwiązań równań całkowych I rodzaju dla zadań elektrostatyki omówiono w [35]. W pracy tej zastosowano metodę samoregularyzacji [43], unikając w ten sposób wprowadzenia operatorów regularyzujących. Do rozwiązania układu równań całkowych I rodzaju (2.4) można również zastosować metodę prostej algebraizacji. Rozwiązanie otrzymanego w ten sposób algebraicznego układu równań nie zawsze prowadzi do dużych błędów [63]. Dla usunięcia złego uwarunkowania algebraicznego układu równań należy zapewnić dostatecznie dużą dokładność obliczeń jego współczynników. Im większa jest bowiem ilość równań w rozpatrywanym układzie (tj. zmiennych węzłowych), tym większy staje się współczynnik jego warunkowań. W celu więc zwiększenia dokładności rozwiązania nie można się ograniczyć przy obliczaniu współczynników układu równań do stosowania metod kwadratury, lecz należy zastosować do aproksymacji nieznanej funkcji gęstości ładunków funkcje sklejjane możliwie dużego stopnia [36]. Z drugiej jednak strony im większy jest stopień funkcji sklejjanych, tym większy jest czas obliczeń współczynników równań.

Stabilne rozwiązanie układu równań (2.6) można również otrzymać przystosowując do jego rozwiązania metodę kolejnych przybliżeń [47]. W zastosowaniach obliczeniowych proces kolejnych przybliżeń należy algebraizować, co osiąga się poprzez dyskretyzację operatora występującego w układzie równań (2.4).

2.2. Układy równań całkowo-brzegowych drugiego rodzaju

Proces sprowadzenia układu równań całkowych pierwszego rodzaju (2.4) do układu równań całkowych II rodzaju nazywa się w literaturze przedmiotu procesem regularyzacji. Stosuje się go wówczas, kiedy występują trudności numeryczne związane ze złym uwarunkowaniem układu równań całkowych I rodzaju.

W przypadku gdy powierzchnie przewodników S^k są zamknięte, można to wykonać wykorzystując własności graniczne pochodnej normalnej do tych powierzchni (np. [73, 136]). Jeżeli natomiast powierzchnie przewodzące nie są powierzchniami zamkniętymi, to problem rozwiązania układu (2.4) można również rozwiązać sprowadzając go do układu równań całkowych II rodzaju. Dla przypadku pojedynczej powierzchni przewodzącej dokonano w pracy [125] procesu regularyzacji przybliżonej, polegającej na sprowadzeniu odpowiedniego równania I rodzaju do równania II rodzaju o ciągłym i dowolnie różniczkowalnym jądrze. Tego typu proces regularyzacji jest analogiczny z procesem samoregularyzacji, przedstawionym w pracy [43]. Okazuje się również możliwe w przypadku pojedynczej powierzchni przewodzącej sprowadzić dokładnie równanie I rodzaju do równania II rodzaju, tj. zastosować dokładną regularyzację [45].

W niniejszej pracy pokazane będzie, że regularyzacja przybliżona i dokładna może być również z powodzeniem stosowana do układu równań I rodzaju (2.4) odpowiadającego problemowi Dirichleta dla równania Laplace'a dla układu N_{p2} niezamkniętych powierzchni przewodzących. Powierzchnie przewodników posiadają czasami krawędzie lub punkty ostrzowe na S^k , w otoczeniu których gęstości ładunków wzrastają nieograniczenie [54]. Może to ujemnie wpłynąć na dokładność cyfrowych metod rozwiązywania równań (2.6) i (2.16), gdyż, jak wiadomo, dokładność ta jest tym większa, im większa jest "gładkość" poszukiwanego rozwiązania dokładnego. Aby uniknąć trudności tych, należy do rozwiązania pola zastosować potencjał warstwy podwójnej [73]. W pierwszej jednak kolejności rozpatrywane będzie zastosowanie potencjału warstwy pojedynczej w procesie regularyzacji.

2.2.1. Zastosowanie potencjału warstwy pojedynczej

Niech spełnione są założenia poczynione w pkt. 2.1 oraz niech ponadto powierzchnie danych przewodników S^k są powierzchniami zamkniętymi klasy C^1 . Sformułowany w punkcie 2.1 problem Dirichleta dla trójwymiarowego równania Laplace'a sprowadza się do układu równań całkowych I rodzaju (2.4) z niewiadomymi funkcjami gęstości ładunków $\sigma^k(x)$.

Z teorii potencjału wiadomo [73], że warunek stałości potencjału na powierzchniach zamkniętych S^k jest równoważny zerowaniu się składowej normalnej wektora natężenia pola elektrycznego wziętej od strony wewnętrznej powierzchni.

$$\epsilon_{nw}^k(x) = \lim_{\substack{x' \rightarrow x \in S^k \\ x' \in D^k}} \frac{\partial V(x)}{\partial n_x^w} \quad (2.23)$$

gdzie pochodna w kierunku wektora normalnego \bar{n}_x^w zorientowanego do wnętrza obszaru D^k jest wzięta w przypadku granicznym, gdy punkt $x \rightarrow S^k$ od strony wewnętrznej obszaru D^k .

Zgodnie z teorią granicznych wartości pochodnej potencjału warstwy pojedynczej (2.3) [136] w kierunku wektora normalnego \bar{n}_x^w do powierzchni S^k skierowanego do wnętrza obszaru D^k w zależności od tego czy punkt $x \rightarrow S^k$ od strony wewnętrznej czy zewnętrznej otrzymuje się następujące granice:

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \in S^1 \\ x' \in D^1}} 2\epsilon_0 \frac{dV(x')}{dn_{x'}^w} = -G^1(x) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S^k} G^k(\gamma) \frac{d}{dn_x^w} \left(\frac{1}{|XY|} \right) dS_\gamma \quad (2.24)$$

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \in S^1 \\ x' \in R^3 - \bar{D}^1}} 2\epsilon_0 \frac{dV(x')}{dn_{x'}^w} = G^1(x) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{S^k} G^k(\gamma) \frac{d}{dn_x^w} \left(\frac{1}{|XY|} \right) dS_\gamma \quad (2.25)$$

Uwzględniając warunek (2.23) w granicy (2.24), otrzymuje się następujący układ jednorodnych równań całkowych II rodzaju z niewiadomymi funkcjami gęstości ładunków:

$$G^1(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S^k} G^k(\gamma) \frac{d}{dn_x^w} \left(\frac{1}{|XY|} \right) dS_\gamma = 0, \quad (x \in S^1) \quad (1 = 1, 2, \dots, N_{p1}) \quad (2.26)$$

Sposób rozwiązywania jednorodnego układu równań całkowych (2.26), zwanych równaniami Robina [125], zależy od postawionego zadania [73]. W rozpatrywanym przypadku zadane są potencjały v^k na poszczególnych przewodnikach o powierzchniach S^k , więc nieznanne funkcje gęstości ładunków $G^k(x)$ równocześnie spełniają układy (2.4) i (2.26). Równania te można przekształcić w niejednorodny układ równań całkowych II rodzaju [79]. W tym celu każde z równań (2.26) dodajemy stronami do odpowiedniego równania układu (2.4) wyrażonego przez wymiarowy współczynnik α_1 ($\alpha_1 > 0$). Otrzymuje się wówczas:

$$G^1(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S^k} G^k(\gamma) \left[\frac{d}{dn_x^w} \left(\frac{1}{|XY|} \right) - \frac{\alpha_1}{|XY|} \right] dS_\gamma = S\epsilon_0 \alpha_1 v^1 \quad (x \in S^1) \\ (1 = 1, 2, \dots, N_{p1}), \quad (2.27)$$

gdzie

$$\frac{d}{dn_x^w} \left(\frac{1}{|XY|} \right) = \frac{\cos(\overline{XY}, \bar{n}_x^w)}{|XY|^2} \quad (2.28)$$

Przyjmując dla operacji całkowej występującej w układzie równań (2.27) następujące oznaczenie:

$$\mathcal{W}G = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S^k} G^k(\gamma) \left[\frac{d}{dn_x^w} \left(\frac{1}{|XY|} \right) - \frac{\alpha_1}{|XY|} \right] dS_\gamma = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_S G(\gamma) \left[\frac{d}{dn_x^w} \left(\frac{1}{|XY|} \right) - \frac{\alpha(x)}{|XY|} \right] dS_\gamma \quad (2.29)$$

$$\alpha(x) = \alpha_1 \quad \text{dla } x \in S^1$$

układ (2.27) można zapisać w postaci:

$$G - \lambda \mathcal{W}G = w,$$

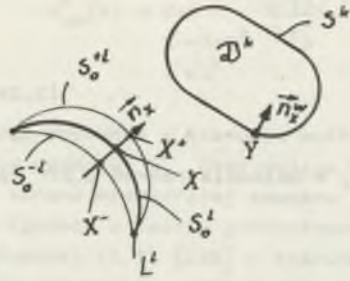
gdzie:

$$\left. \begin{aligned} G(x) &= G^1(x) \\ w(x) &= 2\epsilon_0 \alpha_1 v^1 \end{aligned} \right\} \text{ dla } x \in S^1; \quad \lambda = 1. \quad (2.30)$$

Postawiony więc zewnętrzny problem Dirichleta dla układu przewodników objętościowych został sprowadzony do równania Fredholma II rodzaju (2.30), gdzie operator \mathcal{W} wyraża się wzorem (2.29). Łatwo zauważyć, że operator \mathcal{W} jest operatorem liniowym posiadającym słabą osobliwość w przypadku, gdy punkty x i y pokrywają się. Można wykazać [70], że operator ten jest ograniczony z $L_2^{\#}(S)$ w $L_2^{\#}(S)$, a parametr $\lambda = 1$ w równaniu (2.30) nie jest liczbą charakterystyczną operacji (2.29). Na mocy więc pierwszego twierdzenia Fredholma [136] równanie (2.30), tzn. układ równań (2.27) posiada jednoznaczne rozwiązanie przy dowolnej, nie tylko stałej jak w (2.30), prawej stronie.

Dobór parametrów $\alpha_1 > 0$ jest obojętny z punktu widzenia istnienia rozwiązania, jednak nie jest on obojętny na rozkład liczb charakterystycznych λ_1 operacji (2.29), co ma istotne znaczenie na zbieżność metody kolejnych przybliżeń przy rozwiązywaniu układu (2.27) [86].

Jeżeli rozpatrywany jest układ przewodników, z których N_{p1} posiada powierzchnie zamknięte S^k ($k = 1, 2, \dots, N_{p1}$), natomiast N_{p2} jest niezamkniętych S_0^l ($l = 1, 2, \dots, N_{p2}$), to wcześniej podany proces regulacji nie może być zastosowany do tych ostatnich. W odniesieniu bowiem do powierz-



Rys. 2.2. Zamknięte i niezamknięte powierzchnie przewodzące

Fig. 2.2. Closed and open conducting surfaces

czni niezamkniętych nie można stosować przejścia granicznego (2.24). Nie oznacza to jednak, że tego rodzaju proces regularyzacji, polegający na sprowadzeniu układu równań całkowych I rodzaju (2.4) do układu równań całkowych II rodzaju, jest niemożliwy. Tego typu proces regularyzacji przybliżonej dla jednego równania całkowego I rodzaju odpowiadającego pojedynczej niezamkniętej powierzchni przewodzącej zastosowano w pracy [125].

W niniejszej pracy pokazane będzie, że można go zastosować w przypadku występowania układu N_{p2} powierzchni przewodzących zamkniętych oraz N_{p1} powierzchni niezamkniętych (rys. 2.2). Podobnie jak w punkcie 2.1 rozwiązanie problemu zewnętrznego Dirichleta dla równania Laplace'a poszukuje się w postaci potencjału warstwy pojedynczej:

$$v(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_{p2}} \int_{S_k} \frac{\sigma_0^k(y)}{|xy|} dS_y + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S_k} \frac{\sigma_0^k(y)}{|xy|} dS_y. \quad (2.31)$$

Dla określenia gęstości $\sigma_0^k(y)$ ($1 = 1, 2, \dots, N_{p2}$) można stosować tylko jeden warunek brzegowy, a mianowicie stałość potencjału na przewodzących powierzchniach niezamkniętych S_0^1

$$v(x) \Big|_{x \in S_0^1} = v_0^1 \quad (1 = 1, 2, \dots, N_{p2}), \quad (2.32)$$

z którego wynika następujący układ równań całkowych Fredholma I rodzaju:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p2}} \int_{S_k} \frac{\sigma_0^k(y)}{|xy|} dS_y + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S_k} \frac{\sigma_0^k(y)}{|xy|} dS_y = 2\epsilon_0 v_0^1 \quad (x \in S_0^1) \quad (1 = 1, 2, \dots, N_{p2}) \quad (2.33)$$

Z każdą powierzchnią niezamkniętą S_0^1 o konturze L^1 (rys. 2.2) związane są dwie powierzchnie S_0^{+1} i S_0^{-1} mające z S_0 wspólny kontur L^1 . Niech normalna do powierzchni S_0^1 w punkcie X przecina powierzchnię S_0^{+1} i S_0^{-1} w punkcie X^+ i X^- i powierzchnie S_0^{+1} i S_0^{-1} wybrane są tak, że dla każdego punktu $x \in S_0^1$ zachodzi równość $xx^+ = xx^- = h^1(x)$.

Zgodnie z własnością pola elektrycznego przy przejściu przez powierzchnię naładowaną S_0^1 zachodzi:

$$\frac{\sigma_0^1(x)}{\epsilon_0} = E_{n_x^+}(x) - E_{n_x^-}(x) = \frac{dv(x)}{dn_x^+} - \frac{dv(x)}{dn_x^-}; \quad (x \in S_0^1). \quad (2.34)$$

Pochodne potencjału $v(x)$ w kierunku wektora normalnego \bar{n}_x do powierzchni S_0^1 od strony powierzchni S_0^{+1} i S_0^{-1} można przybliżyć następująco:

$$\frac{dv(x)}{dn_x^+} \Big|_{x \in S_0^1} \approx \frac{v(x^+) - v(x)}{h^1(x)}; \quad \frac{dv(x)}{dn_x^-} \approx \frac{v(x) - v(x^-)}{h^1(x)} \quad (x \in S_0^1) \quad (2.35)$$

Uwzględniając wzory przybliżone (2.35) w równaniu (2.34), otrzymuje się:

$$\frac{\sigma_0^1(x)}{\epsilon_0} \approx \frac{1}{h^1(x)} [2v(x) - v(x^-) - v(x^+)]; \quad (x \in S_0^1) \quad (2.36)$$

Ponieważ na powierzchni S_0^1 zachodzi warunek (2.32), a potencjały $v(x^-)$ i $v(x^+)$ wyrażają się wzorem (2.31), układ równań (2.36) sprowadza się do następującego układu równań całkowych Fredholma II rodzaju:

$$\sigma_0^1(x) h^1(x) + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_{p2}} \int_{S_k} \sigma_0^k(y) \left[\frac{1}{|x^+y|} + \frac{1}{|x^-y|} \right] dS_y + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S_k} \sigma_0^k(y) \left[\frac{1}{|x^+y|} + \frac{1}{|x^-y|} \right] dS_y = 2\epsilon_0 v_0^1. \quad (2.37)$$

Dokładność przybliżenia układu równań całkowych I rodzaju (2.33) układem równań całkowych II rodzaju (2.37) zależy od dokładności przybliżenia (2.35) pochodnych normalnych potencjału, które zależą od jego zachowania się na odcinku x^+x^- . Ponieważ na brzegu L^1 powierzchni S_0^1 gęstości ładunków $\sigma_0^1(x)$ wzrastają nieograniczenie, dlatego dla podwyższenia dokładności rozwiązania układu (2.37) należy zmniejszać parametr regularyzacji $h^1(x)$ przy zbliżeniu się punktu x do brzegu L^1 powierzchni S_0^1 . Zapewnia się to takim wyborem powierzchni S_0^{+1} i S_0^{-1} , ażeby na swym brzegu pokrywały się z brzegiem powierzchni S_0 .

W wyprowadzonym układzie równań całkowych II rodzaju (2.37) w przeciwieństwie do układu (2.33) jądra

$$\frac{1}{|x^+y|} + \frac{1}{|x^-y|} = \frac{1}{|\bar{x}y - h^1(x) \bar{n}_x^w|} + \frac{1}{|\bar{x}y + h^1(x) \bar{n}_x^w|} \quad (2.38)$$

nie posiadają osobliwości i są dowolną ilość razy różniczkowalne.

Układ równań całkowych (2.37) oprócz niewiadomych funkcji gęstości $G_0^1(x)$ określonych na niezamkniętych powierzchniach przewodzących S_0^1 zawiera również niewiadome funkcje gęstości określone na zamkniętych powierzchniach przewodzących S^k ($k = 1, 2, \dots, N_{p1}$). Na przewodzących powierzchniach zamkniętych S^k potencjał $V(x)$ określony wzorem (2.31) spełnia równocześnie dwa warunki, a mianowicie:

$$V(x) \Big|_{x \in S^1} = v^1 \quad (1 = 1, 2, \dots, N_{p1}) \quad (2.39)$$

oraz (2.23). Postępując więc analogicznie jak na początku punktu, otrzymuje się następujący układ równań Fredholma II rodzaju:

$$G_0^1(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S^k} G^k(y) \left[\frac{d}{dn_x^w} \left(\frac{1}{|xy|} \right) - \frac{\alpha_1}{|xy|} \right] dS_y -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p2}} \int_{S_0^k} G_0^k(y) \left[\frac{d}{dn_x^w} \left(\frac{1}{|xy|} \right) - \frac{\alpha_1}{|xy|} \right] dS_y = 2\epsilon_0 v^1 \quad (x \in S^1)$$

$$(1 = 1, 2, \dots, N_{p1}), \quad (2.40)$$

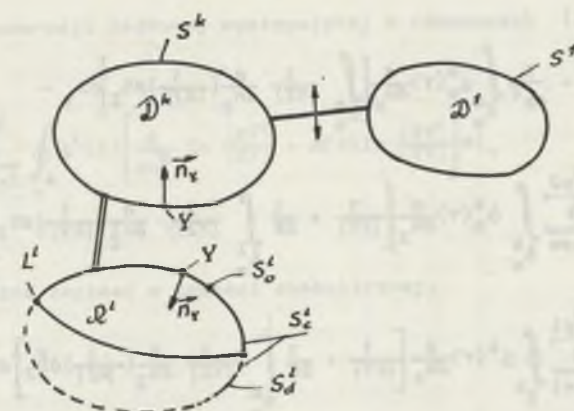
gdzie $\alpha_1 > 0$ dowolna stała dodatnia.

Układy równań całkowych II rodzaju (2.37) i (2.40) stanowią razem układ $N_{p1} + N_{p2} = N_p$ równań o takiej samej ilości niewiadomych funkcji gęstości $G_0^1(x)$ ($1 = 1, 2, \dots, N_{p2}$), $G^k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, N_{p1}$). O ile proces przejścia z układu równań całkowych I rodzaju (2.4) do układu równań całkowych II rodzaju (2.40) jest dokładny, o tyle konstrukcja układu równań (2.37) jest przybliżona. Dlatego też, ogólnie rzecz biorąc, przejście od układu równań całkowych I rodzaju (2.4) do układu równań całkowych II rodzaju (2.37) i (2.40) stanowi regularyzację przybliżoną.

Możliwe jest dokonanie dokładnego przekształcenia układu równań całkowych I rodzaju (2.4) w przypadku występowania N_{p2} niezamkniętych powierzchni przewodzących S_0^1 ($1 = 1, 2, \dots, N_{p2}$) w układ równań całkowych II rodzaju.

W przypadku występowania pojedynczej powierzchni przewodzącej przejście to dokonano w pracy [15]. W niniejszej pracy podane będzie uogólnienie tej metody na układ N_{p2} niezamkniętych powierzchni przewodzących S_0^1 .

Niech powierzchnie S_0^1 ($1 = 1, 2, \dots, N_{p2}$) stanowią dopełnienie należących powierzchni przewodzących S_0^1 tak, ażeby razem stanowiły gładką



Rys. 2.3. Zamknięte i niezamknięte powierzchnie przewodzące wraz z dopełnieniem

Fig. 2.3. Closed and open conducting surfaces together with the complement

zamkniętą powierzchnię S_0^1 stanowiącą brzeg obszaru Ω^1 ($1 = 1, 2, \dots, N_{p2}$) (rys. 2.3). Oprócz tego rozpatrywany układ zawiera przewodniki objętościowe D^k o powierzchni zamkniętej S^k ($k = 1, 2, \dots, N_{p1}$).

Stosując wzory Greena [73] wewnątrz i na zewnątrz obszarów Ω^1 oraz dokonując pewnego przejścia granicznego polegającego na nieograniczonym zbliżaniu powierzchni S_d^1 do powierzchni S_0^1 , po serii przekształceń układ równań całkowych I rodzaju (2.4) odpowiadający N_{p1} zamkniętym powierzchniom przewodzącym S^k i N_{p2} otwartym powierzchniom przewodzącym S_0^1 można dokładnie przekształcić w następujący układ równań całkowych II rodzaju:

$$G_0^1(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S^k} G^k(y) \left[\frac{d}{dn_x^w} \left(\frac{1}{|xy|} \right) - \frac{\alpha_1}{|xy|} \right] dS_y -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p2}} \int_{S_0^k} G_0^k(y) \left[\frac{d}{dn_x^w} \left(\frac{1}{|xy|} \right) - \frac{\alpha_1}{|xy|} \right] dS_y = 2\epsilon_0 v^1,$$

$$(x \in S^1) \quad (1 = 1, 2, \dots, N_{p1}) \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \sigma_0^m(x) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{S_0^m} \sigma_0^m(\gamma) \frac{d}{dn_x} \left[\int_{S_0^m} \frac{1}{|YZ|} \frac{d}{dn_z} \left(\frac{1}{|XZ|} \right) dS_Z \right] dS_Y - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m}^{N_{p2}} \int_{S_0^k} \sigma_0^k(\gamma) \frac{d}{dn_x} \left[\frac{1}{|XY|} + \frac{1}{2\pi} \int_{S_0^1} \frac{1}{|YZ|} \frac{d}{dn_z} \left(\frac{1}{|XZ|} \right) dS_Z \right] dS_Y - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S_k} \sigma^k(\gamma) \frac{d}{dn_x} \left[\frac{1}{|XY|} + \frac{1}{2\pi} \int_{S_0^m} \frac{1}{|YZ|} \frac{d}{dn_z} \left(\frac{1}{|XZ|} \right) dS_Z \right] dS_Y = \\ &= \frac{\epsilon_0 v_0^1}{\pi} \oint_{L_1} \frac{[(\vec{XY}) \times \vec{n}_x] \cdot d\vec{l}_Y}{|\vec{XY}|^3} \quad (x \in S_0^m) \quad (m = 1, 2, \dots, N_{p2}) \quad (2.42) \end{aligned}$$

Można zauważyć, że jądro i prawa strona dokładnie regularyzującego układu równań (2.42) są bardziej złożone niż w przybliżeniu regularyzującym układzie (2.37). Poza tym prawa strona układu (2.42) ma osobliwość na brzegu powierzchni S_0^m . W przypadku szczególnym, kiedy zadana jest tylko jedna niezamknięta powierzchnia przewodząca, to układ równań całkowych (2.42) przechodzi w jedno równanie całkowe II rodzaju o konstrukcji jądra identycznej jak w pracy [125]. Podobnie jak układ równań całkowych I rodzaju (2.4) odpowiadający problemowi Dirichleta dla trójwymiarowego równania Laplace'a, również układ równań (2.14) odpowiadający problemowi Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a da się sprowadzić do układu równań całkowych II rodzaju. Zakładając, że kontury \mathcal{C}^k przewodników są krzywymi zamkniętymi klasy C^1 (rys. 2.1) zgodnie z teorią granicznych wartości pochodnej potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej [73] układ równań (2.14) przekształca się w następujący układ równań II rodzaju:

$$\begin{aligned} \sigma^l(x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_k \sigma^k(\gamma) \left[\frac{d}{dn_x} \ln \frac{|XY'|}{|XY|} - \alpha_1 \ln \frac{|XY'|}{|XY|} \right] d\vec{l}_Y = 2\epsilon_0 \alpha_1 v^2 \\ (l &= 1, 2, \dots, N_p) \quad (x \in \mathcal{C}^l), \quad (2.43) \end{aligned}$$

gdzie $\alpha_1 > 0$

$$\frac{d}{dn_x} \ln \frac{|XY'|}{|XY|} = \frac{\cos(\vec{XY}, \vec{n}_x)}{|\vec{XY}|} - \frac{\cos(\vec{XY}', \vec{n}_x^w)}{|\vec{XY}'|} \quad (2.44)$$

Przyjmując dla operacji całkowej występującej w równaniach (2.43) oznaczenie

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_L \sigma &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_k \sigma^k(\gamma) \left[\frac{d}{dn_x} \ln \frac{|XY'|}{|XY|} - \alpha(x) \ln \frac{|XY'|}{|XY|} \right] d\vec{l}_Y \\ \alpha(x) &= \alpha_1 \quad \text{dla } x \in \mathcal{C}^1 \quad (2.45) \end{aligned}$$

układ (2.43) można zapisać w postaci symbolicznej:

$$\sigma - \mathcal{W}_L \sigma = w, \quad (2.46)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sigma^l(x) \quad \text{dla } x \in \mathcal{C}^l, \\ w(x) &= 2\epsilon_0 \alpha_1 v^1 \quad \text{dla } x \in \mathcal{C}^1, \\ \alpha &= 1. \end{aligned}$$

Postawiony w punkcie 2.1 zewnętrzny problem Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a został więc sprowadzony do równania Fredholma II rodzaju (2.46), gdzie operator \mathcal{W}_L określony jest wzorem (2.45).

Łatwo zauważyć, że operator całkowy (2.45) jest operatorem liniowym posiadającym słabą osobliwość w przypadku, gdy punkty X i Y pokrywają się. Można wykazać, że operator \mathcal{W}_L jest operatorem ograniczonym z L_2^* w L_2 . Dowodzi się również, że wszystkie liczby charakterystyczne λ_1 operacji \mathcal{W}_L (2.45) są rzeczywiste oraz $\lambda_1 \neq 1$. Ponieważ $\lambda_1 = 1$ nie jest liczbą charakterystyczną operacji \mathcal{W}_L , więc na mocy I twierdzenia Fredholma równanie (2.46), a więc układ równań (2.43), posiada jednoznaczne rozwiązanie przy dowolnej (nie tylko stałej jak w (2.43)) prawej stronie.

Należy jednak podkreślić, że dooof parametrów $\alpha_k > 0$ nie jest obojętny na rozkład liczb charakterystycznych λ_1 operacji \mathcal{W}_L , co ma istotne znaczenie na zbieżność metody kolejnych przybliżeń układu równań (2.43) [70].

2.2.2. Zastosowanie potencjału warstwy podwójnej

Powierzchnie przewodników posiadają czasami krawędzie lub punkty ostrzowe na S^k , w otoczeniu których gęstości ładunków wzrastają nieograniczenie [54]. Może to ujemnie wpłynąć na dokładność cyfrowych metod rozwiązywania równań (2.4) i (2.27) [62]. Abyby trudności tych uniknąć, należy do rozwiązania pola zastosować potencjał warstwy podwójnej [73].

Oslabiając nieco założenia poczynione w punkcie 2.1 odnośnie do powierzchni S^k , zakłada się, że składają się one ze skończonej sumy po-

wierzchni wypukłych klasy C^1 (ewentualnie części płaszczyzn, których brzegi są łukami klasy C^1). W teorii potencjału wykazuje się [73], że potencjał warstwy podwójnej rozpostartej na powierzchni zamkniętej S^k zdefiniowany wzorem:

$$w^k(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S^k} \tau^k(\gamma) \frac{d}{dn_\gamma} \left(\frac{1}{|XY|} \right) dS_\gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S^k} \tau^k(\gamma) \frac{\cos(\vec{YX}, \vec{n}_\gamma)}{|XY|^2} dS_\gamma \quad (2.47)$$

jest w każdym punkcie $x_0 \in S^k$, w którym funkcje $\tau^k(x)$ jest funkcją ciągłą, funkcją ciągłą punktu x . Ponadto graniczne wartości potencjału warstwy podwójnej $w_w^k(x)$ i $w_z^k(x)$ przy zmierzaniu punktu x do S^k odpowiednio z wnętrza i z zewnątrz nie pokrywają się i wyrażają się następująco [73]:

$$w_w^k(x) = \lim_{\substack{x' \rightarrow x \in S^k \\ x' \in D^k}} w^k(x') = \frac{4\pi - \alpha^k(x)}{4\pi\epsilon_0} \tau^k(x) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S^k} \tau^k(\gamma) \frac{\cos(\vec{YX}, \vec{n}_\gamma)}{|XY|^2} dS_\gamma, \quad (2.48)$$

$$w_z^k(x) = \lim_{\substack{x' \rightarrow x \in S^k \\ x' \in R^3 \setminus D^k}} w^k(x') = -\frac{\alpha^k(x)}{4\pi\epsilon_0} \tau^k(x) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S^k} \tau^k(\gamma) \frac{\cos(\vec{YX}, \vec{n}_\gamma)}{|XY|^2} dS_\gamma, \quad (2.49)$$

gdzie:

$$\alpha^k(x) = \begin{cases} 2\pi - & \text{jeżeli w punkcie } x \text{ istnieje płaszczyzna styczna do powierzchni } S^k; \\ \alpha_1^k & - \text{ w przypadku ogólnym kąta bryłowego powierzchni } S^k \text{ w punkcie } P_1^k \in S^k. \end{cases}$$

Ze wzorów (2.48) i (2.49) wynika, że potencjał warstwy podwójnej przy przejściu przez warstwę podwójną doznaje skoku. W zastosowaniach tego potencjału należy również wziąć pod uwagę fakt wynikający z prawa Gaussa, że strumień wektora natężenia takiego pola przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy zeru. Jest więc rzeczą oczywistą, że za pomocą tylko potencjału warstwy podwójnej nie można dokonać konstrukcji rozwiązania problemu zewnętrznego Dirichleta dla trójwymiarowego równania Laplace'a.

Dla uniknięcia sprzeczności z twierdzeniem Gaussa można potencjał warstwy podwójnej uzupełnić potencjałem fikcyjnego ładunku punktowego q_k umieszczonego w punkcie γ^k , tj. wewnątrz powierzchni zamkniętej S^k (np. [73, 130]). W świetle powyższego rozumowania prototyp rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta dla trójwymiarowego równania Laplace'a sformułowany w pkt. 2.1 przyjmie postać:

$$v(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S^k} \tau^k(\gamma) \frac{\cos(\vec{YX}, \vec{n}_\gamma)}{|XY|^2} dS_\gamma + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \frac{q_k}{|XY^k|} \quad (2.51)$$

Gęstości $\tau^k(\gamma)$ należy dobrać tak, ażeby graniczne wartości potencjału (2.51) z zewnętrznej strony każdej powierzchni S^1 przewodnika pokrywały się z potencjałem v^1 tego przewodnika, co odpowiada warunkowi brzegowemu (2.2). Wówczas zgodnie z teorią o jednoznaczności rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta pole otrzymane przez wprowadzenie warstwy podwójnej i fikcyjnych źródeł będzie poza przewodnikiem D^k pokrywało się z rzeczywistym polem, natomiast wewnątrz obwarów D^k będzie różne od pola zerowego, a tym samym traci sens fizyczny. Stosując przejście graniczne (2.49) dla potencjału (2.51) od strony zewnętrznej powierzchni S^1 , otrzymuje się następujący układ równań całkowych II rodzaju ze względu na gęstości $\tau^k(\gamma)$:

$$\frac{\alpha^1(x)}{2\pi} \tau^1(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S^k} \tau^k(\gamma) \frac{\cos(\vec{YX}, \vec{n}_\gamma)}{|XY|^2} dS_\gamma + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \frac{q_k}{|XY^k|} = 2\epsilon_0 v^1, \quad (2.52)$$

gdzie $\alpha^1(x)$ określone jest wzorem (2.50). Jeżeli powierzchnie S^1 są klasy C^1 , to $\frac{\alpha^1(x)}{2\pi} = 1$ dla $x \in S^1$.

Bezpośrednie rozwiązanie układu równań (2.52) jest niemożliwe, gdyż ładunki q_1 i potencjały v^1 przewodników nie są nigdy dane równocześnie, a ponadto układ równań (2.52) ma niejednoznaczne rozwiązanie, gdyż odpowiadający mu układ równań jednorodnych posiada niezerowe rozwiązanie (por. [136]) $\tau^1(\gamma) = \tau^1 = \text{const}$, gdzie stałe τ^1 są dowolne). Do rozwiązania układu (2.52) będzie zastosowany sposób podany w pracy [125]. W przypadku zadanych potencjałów v^1 na powierzchniach S^1 nieznanne ładunki całkowite q_1 poszczególnych przewodników wyraża się wzorem [79]:

$$q_1 = a_1 \oint_{S^1} \tau^1(\gamma) dS_\gamma, \quad (2.53)$$

gdzie:

a_1 - współczynnik uwzględniający wymiary obydwu stron równania (2.53). Można np. przyjąć

$$a_k = \frac{1}{d_k},$$

gdzie:

d_k - diameter obwaru D^k .

Podstawiając wzór (2.53) do układu równań (2.52), otrzymuje się:

$$\frac{\alpha^1(x)}{2\pi} \tau^1(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S_k} \tau^k(\gamma) \left[\frac{\cos(\vec{\gamma X}, \vec{n}_\gamma)}{|XY|^2} - \frac{a_k}{|XY^k|} \right] dS_\gamma = 2\epsilon_0 v^1 \quad (2.54)$$

($x \in S^1$) ($1 = 1, 2, \dots, N_{p1}$).

Jeżeli powierzchnie S^1 są klasy C^1 , to na mocy równości (2.50) układ równań (2.54) przyjmie postać (por. [79]):

$$\tau^1(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S_k} \tau^k(\gamma) \left[\frac{\cos(\vec{\gamma X}, \vec{n}_\gamma)}{|XY|^2} - \frac{a_k}{|XY^k|} \right] dS_\gamma = 2\epsilon_0 v^1. \quad (2.55)$$

Z powyższego równania wynika, że stosowanie potencjału warstwy podwójnej pozwala również na sprowadzenie zewnętrznego problemu Dirichleta dla trójwymiarowego równania Laplace'a do problemu rozwiązania układu równań całkowych Fredholma II rodzaju. Operacja całkowa występująca w układzie równań (2.55) jest operacją liniową posiadającą słabą osobliwość. Można wykazać [70], że jest ona również operacją ograniczoną z $L_2^*(S)$ w $L_2^*(S)$ ($S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S^N$).

Problem istnienia i jednoznaczności rozwiązań pojedynczego równania typu (2.55) ($N_{p1} = 1$) podano w pracy [136]. Dowód ten łatwo uogólnić na układ równań (2.55) ($N_{p1} > 1$).

Do rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a można również zastosować potencjał logarytmiczny warstwy podwójnej. Jest to szczególnie wskazane, jeżeli kontury przewodów ϵ^k posiadają punkty ostrzowe. W takim przypadku dokładność cyfrowych metod rozwiązania układu równań całkowych (2.14) i (2.43) jest tym większa, im większa jest "gładkość" poszukiwanego rozwiązania dokładnego. Trudności te nie pojawią się, jeżeli do rozwiązania pola w przypadku dwuwymiarowym zastosować potencjał logarytmiczny warstwy podwójnej [91, 92, 136].

W zastosowaniach potencjału logarytmicznego warstwy podwójnej należy wziąć pod uwagę fakt wynikający z twierdzenia Gaussa, że strumień wektora natężenia takiego pola przez dowolny kontur zamknięty jest równy zeru. Jest więc rzeczą oczywistą, że za pomocą tylko potencjału warstwy podwójnej nie można dokonać konstrukcji rozwiązania problemu Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a. W celu uniknięcia sprzeczności z twierdzeniem Gaussa można potencjał logarytmiczny warstwy podwójnej uzupełnić potencjałami logarytmicznymi fikcyjnego ładunku punktowego q_k umieszczonych wewnątrz konturów ϵ^k (np. [73, 136]).

Wracając do zewnętrznego problemu Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a sformułowanego w punkcie 2.1 z warunkami brzegowymi (2.8) i

(2.11), dla półpłaszczyzny $x_2 \geq 0$, (rys. 2.1) osłabia się założenie odnośnie do konturów ϵ^k , przyjmując, że składają się one ze skończonej sumy łuków wypukłych klasy C^1 ewentualnie odcinków.

W związku z tym prototyp rozwiązania przyjmuje się w postaci:

$$v(x) = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^k} \tau^k(\gamma) \left[\frac{\cos(\vec{\gamma X}, \vec{n}_\gamma)}{|XY|} - \frac{\cos(\vec{\gamma' X}, \vec{n}_{\gamma'})}{|XY'|} \right] dl_\gamma + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_p} q_k \ln \frac{|XY^k|}{|XY^k|}. \quad (2.56)$$

Łatwo zauważyć, że jeżeli punkt X leży na osi x_1 , tj. $x_2 = 0$, to potencjał (2.56) zeruje się, a więc spełnia warunek (2.11). Gęstości $\tau^k(\gamma)$ należy dobrać tak, ażeby graniczne wartości potencjału (2.56) z zewnętrznej strony każdego konturu ϵ^1 przewodnika pokrywały się z potencjałem v^1 przewodnika, co odpowiada warunkowi (2.8). Wtedy zgodnie z teorią jednoznaczności rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta pole otrzymane przez wprowadzenie fikcyjnych źródeł będzie poza przewodnikiem D_k pokrywało się z rzeczywistym polem, natomiast wewnątrz obszarów D_k będzie różne od pola zerowego, a tym samym traci sens fizyczny.

Biorąc graniczne wartości potencjału (2.56) od strony zewnętrznej oraz zakładając, że ładunek fikcyjny

$$q_k = a_k \oint_{\epsilon^k} \tau^k(\gamma) dl_\gamma \quad (2.57)$$

otrzymuje się następujący układ równań całkowych II rodzaju:

$$\frac{\beta^1(x)}{\pi} \tau^1(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^k} \tau^k(\gamma) \left[\frac{\cos(\vec{\gamma X}, \vec{n}_\gamma)}{|XY|} - \frac{\cos(\vec{\gamma' X}, \vec{n}_{\gamma'})}{|XY'|} - a_k \ln \frac{|XY^k|}{|XY^k|} \right] dl_\gamma = 2\epsilon_0 v^1 \quad (1 = 1, 2, \dots, N_p) \quad (x \in \epsilon^1), \quad (2.58)$$

gdzie:

$$a_k = \begin{cases} \pi & \text{- współczynnik uwzględniający wymiary obydwu stron równości (2.57), np. } a_k = \frac{1}{d_k}, \text{ } d_k \text{ - diameter obszaru } D_k, \\ \beta_1^k & \text{- jeżeli w punkcie } X \text{ istnieje styczne do } \epsilon^1, \\ \beta_1^k & \text{- w przypadku ogólnym, gdzie } \beta_1^k \text{ - kąt konturu } \epsilon^k \text{ w punkcie } P_1^k \in \epsilon^k. \end{cases} \quad (2.59)$$

Jeżeli kontury ϱ^1 są klasy C^1 , to układ równań (2.58) przyjmie postać:

$$\tau^1(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\varrho^k} \tau^k(\gamma) \left[\frac{\cos(\overrightarrow{YX}, \overrightarrow{n_\gamma})}{|XY|} - \frac{\cos(\overrightarrow{Y'X}, \overrightarrow{n_\gamma})}{|XY'|} - a_k \ln \frac{|XY^k|}{|XY^k|} \right] d\Gamma_\gamma = 2\epsilon_0 V^1, \quad (2.60)$$

Zastosowanie potencjału logarytmicznego warstwy podwójnej pozwoliło również na sprowadzenie zewnętrznego problemu Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a do problemu rozwiązania układu równań całkowych Fredholma II rodzaju. Przyjmując dla operacji całkowej w układzie równań (2.60) następujące oznaczenie:

$$\mathcal{U}_\tau = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\varrho^k} \tau^k(\gamma) \left[\frac{\cos(\overrightarrow{YX}, \overrightarrow{n_\gamma})}{|XY|} - \frac{\cos(\overrightarrow{Y'X}, \overrightarrow{n_\gamma})}{|XY'|} - a_k \ln \frac{|XY^k|}{|XY^k|} \right] d\Gamma_\gamma \quad (2.61)$$

układ równań (2.60) można przepisać w postaci symbolicznej:

$$\tau - \lambda \mathcal{U}_\tau = w, \quad (2.62)$$

gdzie:

$$\tau(x) = \tau^1(x) \quad \text{dla } x \in \varrho^1,$$

$$w(x) = 2\epsilon_0 V^1 \quad \text{dla } x \in \varrho^1,$$

$$\lambda = 1.$$

Łatwo zauważyć, że operator całkowy (2.61) jest operatorem liniowym posiadającym słabą osobliwość. Można wykazać, że jest on również operatorem ograniczonym z $L^2_\epsilon(\varrho)$ w $L^2_\epsilon(\varrho)$ [70]. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania całkowego (2.60) dla pojedynczego przewodu $N_p = 1$ wykazano w pracy (np. [136]). Dowód ten łatwo uogólnić na układ równań (2.60) ($N_p > 1$).

2.3. Układy równań całkowo-brzegowych pierwszego i drugiego rodzaju

Przenikalność elektryczna środowiska, w którym występuje pole elektryczne, może zmieniać się dowolnie. Z praktycznego punktu widzenia najczęściej występuje przypadek, kiedy jest ona obszarami stała. Model taki nie uwzględnia tylko zagadnień w ośrodkach nieliniowych i anizotropowych.

Niech w przestrzeni Euklidesa R^3 typu próżniowego zadane są doskonałe dielektryki, tj. o przenikalności ϵ i konduktywności $\gamma = 0$ ograniczone powierzchnią Γ^1 ($l = 1, 2, \dots, N_d$) oraz przewodzące ciała D^k o powierzchni S^k ($k = 1, 2, \dots, N_p$) posiadające potencjały V^k . W rozpatrywanym przypadku dopuszcza się również istnienie niezamkniętych powierzchni

przewodzących S^k . Powierzchnie S^k i Γ^1 mogą być dowolnie usytuowane względem siebie. Zakłada się ponadto, że w rozpatrywanym obszarze źródłem pola są tylko ładunki zgromadzone na powierzchniach przewodzących S^k .

Potencjał elektryczny $V(x)$ w całej przestrzeni spełnia równanie Laplace'a z warunkami ciągłości na powierzchni Γ^1 dielektryków [117]

$$\lim_{x' \rightarrow x \in \Gamma^1} V(x') = \lim_{x' \rightarrow x \in \Gamma^1} V(x) \\ x' \in R^3 - \Omega^1 \quad x' \in \Omega^1$$

$$\lim_{x' \rightarrow x \in \Gamma^1} \epsilon_1 \frac{dV}{dn_{x'}} = \lim_{x' \rightarrow x \in \Gamma^1} \epsilon_0 \frac{dV}{dn_{x'}} \quad (l = 1, 2, \dots, N_d), \quad (2.64)$$

a ponadto spełnia warunki brzegowe:

$$V(x) = V^k \quad \text{dla } x \in S^k \quad (k = 1, 2, \dots, N_p), \quad (2.65)$$

przy czym, jeżeli punkt x oddala się do nieskończoności, to potencjał $V(x)$ zmierza do zera.

Jak wiadomo, w równowadze elektrostatycznej ewentualnie quasi-ostatycznej układu naładowanych przewodników doskonałych, ładunki swobodne koncentrują się tylko na ich powierzchniach i do ich opisu można posługiwać się funkcją gęstości ładunków $G^k(\gamma)$. W przypadku rozpatrywania dielektryków doskonałych, tj. posiadających zerowe gęstości ładunków swobodnych oraz proporcjonalność wektora polaryzacji i natężenia pola, można uwzględnić ich wpływ na pole poprzez pewne rozkłady fikcyjnych ładunków [117]. Ponieważ dla doskonałych dielektryków wektor polaryzacji spełnia równanie $\text{div } \vec{P} = 0$, więc w takim przypadku wpływ tych dielektryków na pole może być uwzględniony poprzez fikcyjne ładunki o gęstościach powierzchniowych $\mathcal{K}^1(x)$ określonych na powierzchniach Γ^1 dielektryków [97, 117]. Uwzględnienie ładunków fikcyjnych o gęstości $\mathcal{K}^1(x)$ pozwala usunąć ciała Ω^1 przy równoczesnym spełnieniu warunków (2.63) i (2.64), co znacznie upraszcza problem, gdyż w całej przestrzeni środowisko ma jednakowe własności. Zgodnie z zasadą superpozycji, rozwiązanie mieszanego zagadnienia brzegowego dla równania Laplace'a poszukuje się w postaci:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{S^k} \frac{G^k(\gamma)}{|XY|} dS_\gamma + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=1}^{N_d} \int_{\Gamma^1} \frac{\mathcal{K}^1(\gamma)}{|XY|} dS_\gamma. \quad (2.66)$$

Zgodnie z teorią o ograniczonych wartościach pochodnej normalnej potencjału warstwy pojedynczej [136] (wzory (2.24) i (2.25)) otrzymuje się:

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \in \Gamma^1 \\ x' \in \Omega^1}} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dn_{x'}} \int_{\Gamma^1} \frac{\mathcal{K}^1(\gamma)}{|x'\gamma|} dS_\gamma = -\mathcal{K}^1(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^1} \mathcal{K}^1(\gamma) \frac{\cos(\overline{x\gamma}, \overline{n_x})}{|xy|^2} dS_\gamma, \quad (2.67)$$

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \in \Gamma^1 \\ x' \in R^3 - \Omega^1}} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dn_{x'}} \int_{\Gamma^1} \frac{\mathcal{K}^1(\gamma)}{|x'\gamma|} dS_\gamma = \mathcal{K}^1(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^1} \mathcal{K}^1(\gamma) \frac{\cos(\overline{x\gamma}, \overline{n_x})}{|xy|^2} dS_\gamma. \quad (2.68)$$

Uwzględniając przejścia graniczne (2.67) i (2.68) z warunku (2.64) oraz (2.65) otrzymuje się (por. np. [125]) następujący układ równań całkowych:

$$\mathcal{K}^1(x) - \lambda \frac{\beta_1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_d} \oint_{\Gamma^k} \mathcal{K}^k(\gamma) \frac{\cos(\overline{x\gamma}, \overline{n_x})}{|xy|^2} dS_\gamma = \lambda \frac{\beta_1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{S^k} G^k(\gamma) \frac{\cos(\overline{x\gamma}, \overline{n_x})}{|xy|^2} dS_\gamma \quad (2.69)$$

($x \in \Gamma^1$) ($1 = 1, 2, \dots, N_d$)

$$\lambda_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_0}; \quad 0 < \lambda_1 < 1; \quad \beta_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda}; \quad \lambda = \max \lambda_1; \quad \epsilon_1 > \epsilon_0 \quad (2.70)$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{S^k} \frac{G^k(\gamma)}{|xy|} dS_\gamma + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_d} \oint_{\Gamma^k} \frac{\mathcal{K}^k(\gamma)}{|xy|} dS_\gamma = 2\epsilon_0 V^1 \quad (x \in S^1)$$

$$(1 = 1, 2, \dots, N_p) \quad (2.71)$$

Pierwszy układ (2.69) stanowią równania całkowe II rodzaju, natomiast układ (2.71) jest układem równań całkowych I rodzaju.

Odnosząc do operacji całkowej wyetępowującą po lewej stronie układu (2.69)

$$\pi_{\mathcal{K}} = \frac{\beta(x)}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_d} \int_{\Gamma^k} \mathcal{K}^k(\gamma) \frac{\cos(\overline{x\gamma}, \overline{n_x})}{|xy|^2} dS_\gamma, \quad (2.72)$$

gdzie:

$$\beta(x) = \beta^1 \quad \text{dla } x \in \Gamma^1$$

zachodzi twierdzenie [125], z którego wynika, że wszystkie jej liczby charakterystyczne są rzeczywiste i nie leżą w przedziale $(-1, 1)$. Ponadto $\lambda = -1$ nie jest liczbą charakterystyczną, natomiast $\lambda = 1$ jest liczbą charakterystyczną.

Ponieważ przy $\epsilon_1 > \epsilon_0$ parametr $0 < \lambda < 1$ (wzory (2.70)), na mocy więc pierwszego twierdzenia Fredholma układ równań (2.69) posiada jednoznaczne

rozwiązanie przy dowolnych prawych stronach, tj. dla dowolnych funkcji $G^k(x)$. Rozwiązując więc układ równań całkowych (2.69) ze względu na gęstości ładunków fikcyjnych $\mathcal{K}^1(\gamma)$ i podstawiając je do układu (2.71) otrzymuje się układ równań całkowych I rodzaju ze względu na gęstości ładunku $G^k(x)$, przy rozwiązywaniu którego mogą już wystąpić znane trudności. Trudności tych można uniknąć, jeżeli odnośnie do układu równań I rodzaju (2.71) zastosować metody regularyzacji podana w pkt. 2.2.1.

3. APROKSYMACJA POTENCJAŁU WARSTWY POJEDYNCZEJ I PODWÓJNEJ

Konstrukcja układów równań całkowych, sformułowanych w rozdziale 2 jako równoważne problemy Dirichleta dla równania Laplace'a, bazuje na operatorach całkowych typu: potencjał warstwy pojedynczej i jego pochodne, potencjał warstwy podwójnej, w przypadku gdy rozwiązywane są zagadnienia trójwymiarowe (równania (2.4), (2.27), (2.69), (2.71), (2.55)) oraz potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej i jego pochodne, potencjał logarytmiczny warstwy podwójnej, gdy rozwiązywane są zagadnienia dwuwymiarowe (równania (2.14), (2.43), (2.60)). Przybliżone rozwiązania tych układów równań całkowych wymagają określenia operacji przybliżonych do operacji podanych wyżej tak, ażeby normy tych operacji w L_2 różniły się możliwie mało.

Konstrukcja operatorów bliskich wymaga stosowania odpowiednich funkcji aproksymujących gęstości warstwy pojedynczej $\sigma^k(\gamma)$ i gęstości warstwy podwójnej $\tau^k(\gamma)$ zadanych na powierzchniach S^k . Przykład konstrukcji takiego układu dla powierzchni zamkniętej podano w pracy [74]. W zastosowaniu do rozpatrywanego układu przewodników objętościowych o powierzchni S^k wewnątrz każdego z nich umieszcza się gładką zamkniętą powierzchnię S_1^k nie mającą z S^k punktów wspólnych. Niech x_m^k ($m = 1, 2, \dots$) - punkty na S_1^k wzajemnie gęsto ją pokrywające, natomiast

$$\omega_m^k(\gamma) = \frac{1}{|x_m^k \gamma|} \quad \text{dla } \gamma \in S^k \quad (3.1)$$

można wykazać [74], że układ funkcji $\left\{ \omega_m^k(\gamma) \right\}_{m=1,2,\dots}$ jest liniowo niezależny i zupełny w przestrzeni $L_2^*(S)$ ($S = S^1 \cup S^2 \cup \dots \cup S^{N_p}$). Układ funkcji $\left\{ \omega_m^k(\gamma) \right\}$ można zamienić na układ ortonormalny $\left\{ \xi_m^k(\gamma) \right\}$, stosując proces ortogonalizacji Schmidta [136]:

$$\xi_1^k(\gamma) = \frac{\omega_1^k(\gamma)}{\|\omega_1^k(\gamma)\|_{L_2^*(S^k)}}$$

$$\xi_1^k(\gamma) = \frac{\omega_1^k(\gamma) - \sum_{j=1}^{i-1} \left[\int_{S^k} \omega_1^k(\gamma) \xi_j^k(\gamma) dS_\gamma \right] \xi_j^k(\gamma)}{\left\| \omega_1^k(\gamma) - \sum_{j=1}^{i-1} \left[\int_{S^k} \omega_1^k(\gamma) \xi_j^k(\gamma) dS_\gamma \right] \xi_j^k(\gamma) \right\|_{L_2^*(S^k)}} \quad (3.2)$$

dla $i > 1$

gdzie

$$\int_{S^k} \xi_i^k(\gamma) \xi_j^k(\gamma) dS_\gamma = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ 1 & \text{dla } i = j \end{cases} \quad (3.3)$$

Na mocy wzorów (3.2) otrzymuje się:

$$\xi_1^k(\gamma) = \sum_{j=1}^i F_{j1}^k \omega_j^k(\gamma), \quad (3.4)$$

gdzie współczynniki F_{j1}^k oblicza się ze wzoru rekurencyjnego (3.2). Ortonormalny układ funkcji $\left\{ \xi_1^k(\gamma) \right\}$ jest oczywiście liniowo niezależny i zupełny w $L_2^*(S)$. Jeżeli więc $\sigma^k(\gamma)$ ($k = 1, 2, \dots, N_p$) jest dowolną funkcją z $L_2^*(S)$, to norma $\left\| \sigma^k(\gamma) - \sum_{i=1}^n f_{i1}^k \xi_1^k(\gamma) \right\|_{L_2^*(S)}$ przyjmuje najmniejszą wartość, jeżeli współczynniki f_{i1}^k są współczynnikami Fouriera funkcji $\sigma^k(\gamma)$ względem układu ortonormalnego $\left\{ \xi_1^k(\gamma) \right\}$ [70]. Przybliżając więc funkcję gęstości ładunków $\sigma^k(\gamma)$ pierwszymi n wyrazami szeregu Fouriera

$$\sigma_n^k(\gamma) = \sum_{i=1}^n f_{i1}^k \xi_1^k(\gamma) \quad (3.5)$$

otrzymuje się najlepsze przybliżenie względem normy w $L_2^*(S)$.

Aproksymację funkcji gęstości warstwy pojedynczej $\sigma^k(\gamma)$ można również prowadzić względem układu ortonormalnego $\left\{ \varphi_1^k(\gamma) \right\}$ funkcji własnych [136] jądra operacji całkowej (2.5), będących rozwiązaniem następującego układu równań całkowych jednorodnych:

$$\varphi_1^k(x) - \frac{\lambda_1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{S^i} \frac{\varphi_1^i(\gamma)}{|x\gamma|} dS_\gamma = 0, \quad (3.6)$$

gdzie:

λ_1 - liczby charakterystyczne operacji (2.5),
tj. w postaci:

$$G_n^k(\gamma) = \sum_{i=1}^n f_{i\gamma_1}^k(\gamma) \quad (3.7)$$

Należy zauważyć, że sam proces wyboru funkcji najlepiej aproksymujących np. $\{S_1^k(\gamma)\}$ lub $\{\eta_1^k(\gamma)\}$ jest problemem samym w sobie i ze względu na jego złożoność tego typu aproksymacja (3.5) lub (3.7) traci uniwersalność.

Do aproksymacji potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej zastosowane będą aproksymacje odpowiednich gęstości warstwy pojedynczej i podwójnej funkcje sklepane.

Stosowanie w konstrukcji algorytmów obliczeniowych funkcji sklepanych jest ostatnio często stosowane. W pracach [60, 63] zastosowano je do aproksymacji potencjału generowanego przez naładowany przewodnik osiowo-symetryczny. W niniejszym rozdziale pracy postawiono sobie za cel opracowania ogólnych algorytmów aproksymacji potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej zadanych na dowolnych powierzchniach oraz potencjałów logarytmicznych warstwy pojedynczej i podwójnej zadanych na dowolnych konturach.

3.1. Aproksymacja potencjału warstwy pojedynczej

W pierwszej kolejności poszukiwany będzie operator bliski dla operatora (2.5) typu potencjał warstwy pojedynczej, którego konstrukcja polega na podziale każdej powierzchni S^k na elementy powierzchni $\{S_1^k\}$ i na wyborze na każdym z nich odpowiedniej funkcji aproksymującej funkcję gęstości ładunków. Wykonując następnie całkowania po każdym elemencie S_1^k i sumując otrzymane wyniki, otrzymuje się operację przybliżoną \mathcal{V}_p^1 w postaci:

$$\mathcal{V}_p^1 \phi = \sum_{l=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_1} A_1^1(x) G_1^2. \quad (3.8)$$

gdzie:

G_1^k - gęstości ładunków w punktach γ_1^1 podziału powierzchni S^1 ,

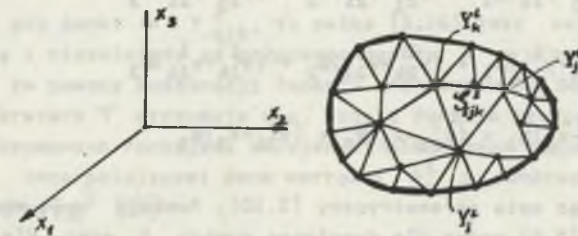
$A_1^1(x)$ - funkcja kształtu zależna od podziału powierzchni S^1 na elementy i od stopnia funkcji aproksymujących na tym elemencie.

Jeżeli powierzchnie S^1 są zadane w postaci parametrycznej i wynik całkowania po elementach da się przedstawić w postaci kombinacji funkcji standardowych, to tzw. funkcje kształtu $A_1^1(x)$ dadzą się przedstawić w postaci gotowych wzorów. Otrzymanie gotowych wzorów dla funkcji kształtu $A_1^k(x)$ jest tym trudniejsze, im większy jest stopień funkcji aproksymują-

cych gęstość ładunku na poszczególnych elementach powierzchni. W takim przypadku należałoby stosować całkowanie numeryczne. Jeżeli jednak punkt x leży na elemencie, po którym przeprowadza się całkowanie, to ze względu na słabą osobliwość jądra operacji (2.5) jest ono utrudnione. Ponieważ funkcje $A_1^1(x)$ dla $x \in S^1$ posiadają duże znaczenie ze względu na dokładność przybliżenia operatora \mathcal{T} , należy je więc wyznaczyć możliwie najdokładniej metodami analitycznymi. Funkcje kształtu $A_1^1(x)$ dla powierzchni osiowo-symetrycznych można znaleźć w pracach [60, 63]. Jeżeli powierzchnie S^1 nie są zadane parametrycznie, lecz w postaci ciągu punktów γ_1^k ($i = 1, 2, \dots, N_k$) ($k = 1, 2, \dots, N_p$), to w konstrukcji operacji bliskiej dla operacji (2.5) należy dokonać również aproksymacji powierzchni.

3.1.1. Potencjał warstwy pojedynczej zedany na dowolnych powierzchniach

Punktem wyjścia dla aproksymacji potencjału warstwy pojedynczej jest określenie dla zadanych punktów $\gamma_1^1 \in S^1$ ($i = 1, 2, \dots, N_1$) ($i = 1, 2, \dots, N_p$) poszczególnych powierzchni S^1 przewodów, funkcji aproksymujących ich kształt. Najprostszą aproksymacją powierzchni S^1 jest dana w postaci układu trójkątów \mathcal{E}_{ijk}^1 stanowiących sieć triangulacyjną utworzoną przez punkty $\gamma_1^1 \in S^1$, zwane punktami triangulacyjnymi (rys. 3.1a).



Rys. 3.1a. Triangulacja powierzchni S^1
Fig. 3.1a. Triangulation of the surface S^1

W ten sposób zbiór punktów $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ powierzchni S^1 został przybliżony zbiorem punktów:

$$\mathcal{E}^1 = \bigcup_{\{ijk\} \in N^1} \mathcal{E}_{ijk}^1, \quad (3.9)$$

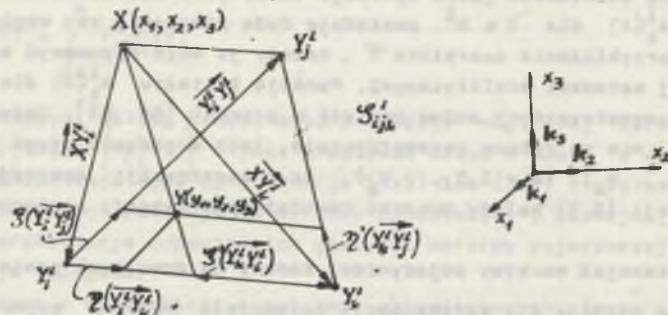
gdzie:

N^1 - zbiór wszystkich trójkątów triangulacji powierzchni S^1 punktami γ_1^1 ;

$$\mathcal{E}_{ijk}^1 = \left\{ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) : \gamma_1 = \gamma_{11}^1 + (\gamma_{1j}^1 - \gamma_{1k}^1)\xi + (\gamma_{1k}^1 - \gamma_{11}^1)\eta \right\};$$

$$y_2 = y_{21}^1 + (y_{2j}^1 - y_{21}^1)\xi + (y_{2k}^1 - y_{21}^1)\eta; \quad y_3 = y_{31}^1 + (y_{3j}^1 - y_{31}^1)\xi + (y_{3k}^1 - y_{31}^1)\eta;$$

$$0 \leq \xi \leq 1; \quad 0 \leq \eta \leq 1 - \xi \quad (3.10)$$



Rys. 3.1b. Trójkąt \$e_{ijk}^1\$ dowolnie uytuowany w przestrzeni trójwymiarowej
Fig. 3.1b. Trengle freely situated in the three-dimensional space

Przyjmując oznaczenie z ryc. 3.1b

$$\overrightarrow{Y_i^1 Y_j^1} = (y_{1j}^1 - y_{1i}^1)k_1 + (y_{2j}^1 - y_{2i}^1)k_2 + (y_{3j}^1 - y_{3i}^1)k_3$$

$$\overrightarrow{Y_i^1 Y_k^1} = (y_{1k}^1 - y_{1i}^1)k_1 + (y_{2k}^1 - y_{2i}^1)k_2 + (y_{3k}^1 - y_{3i}^1)k_3 \quad (3.11)$$

$$\overrightarrow{XY_i^1} = (y_{11}^1 - x_1)k_1 + (y_{21}^1 - x_2)k_2 + (y_{31}^1 - x_3)k_3$$

oraz uwzględniając opis parametryczny (3.10), funkcję \$\frac{1}{|XY_i^1|}\$ występującą w jądrze operacji (2.5) można dla dowolnego punktu \$X\$ oraz dla \$Y \in e_{ijk}^1\$ wyrazić następująco:

$$\frac{1}{|XY_i^1|} \Big|_{Y \in e_{ijk}^1} = \frac{1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}} =$$

$$= \frac{1}{|(\overrightarrow{Y_i^1 Y_j^1})\xi + (\overrightarrow{Y_i^1 Y_k^1})\eta + XY_i^1|} \quad (3.12)$$

Przyjmując parametryczny opis (3.10) każdego trójkąta \$e_{ijk}^1\$ jego miarę powierzchni wyraża się wzorem:

$$dS_{ijk} = |(\overrightarrow{Y_i^1 Y_j^1}) \times (\overrightarrow{Y_i^1 Y_k^1})| d\xi d\eta \quad (3.13)$$

Funkcję gęstości ładunków \$G^1(Y)\$ (\$1 = 1, 2, \dots, N_p\$), na które działa operator \$\mathcal{V}\$ (2.5), można aproksymować na każdym z trójkątów \$e_{ijk}^1\$ danej triangulacji funkcjami sklejonymi dowolnego stopnia. Jeżeli funkcja gęstości ładunków jest aproksymowana na każdym z trójkątów wartością stałą

$$G^1(Y) \Big|_{Y \in e_{ijk}^1} = G_{ijk}^1 = \text{const}, \quad (3.14)$$

to zgodnie ze wzoremi (3.10), (3.12) i (3.13) operator (2.5) typu potencjału warstwy pojedynczej można przybliżyć następująco:

$$\mathcal{V}\phi = \mathcal{V}_p \phi = \sum_{l=1}^{N_p} \sum_{\{ijk\} \in \mathcal{N}^1} F_{ijk}^1(x) G_{ijk}^1. \quad (3.15)$$

gdzie

$$F_{ijk}^1(x) = \frac{1}{2\pi} |(\overrightarrow{Y_i^1 Y_j^1}) \times (\overrightarrow{Y_i^1 Y_k^1})| \int_0^{1-\xi} \int_0^\xi \frac{d\xi d\eta}{|(\overrightarrow{Y_i^1 Y_j^1})\xi + (\overrightarrow{Y_i^1 Y_k^1})\eta + XY_i^1|} \quad (3.16)$$

W przypadku gdy punkt \$x \in e_{ijk}^1\$, to całka (3.16) jest całką niewłaściwą, lecz zbieżną i niezależnie od położenia punktu \$x\$ w przestrzeni \$R^3\$ da się wyrazić za pomocą kombinacji funkcji standardowych. Dokładniejsze przybliżenie operatora \$\mathcal{V}\$ otrzymuje się, jeżeli funkcja gęstości ładunków \$G^k(Y)\$ będzie aproksymowana funkcjami sklejonymi pierwszego stopnia dwóch zmiennych \$(\xi, \eta)\$ interpolującymi dane wartości \$G_{ijk}^1\$ w punktach triangulacji \$Y_i^1\$ powierzchni \$S^1\$ [36]

$$G_{ijk}^1(Y) = \begin{cases} G_{i1}^1 + (G_{j1}^1 - G_{i1}^1)\xi + (G_{k1}^1 - G_{i1}^1)\eta; & Y \in e_{ijk}^1, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1 - \xi \\ 0; & Y \notin e_{ijk}^1 \end{cases} \quad (3.17)$$

gdzie \$G_{i1}^1 = G^1(Y_i^1)\$ - gęstość ładunku w punkcie triangulacji \$Y_i^1\$ powierzchni \$S^1\$, zwana zmienną węzłową.

Podstawiając wyrażenie (3.10), (3.12) i (3.17) do wzoru (2.5) otrzymuje się następujące przybliżenie operatora typu potencjału warstwy pojedynczej:

$$v^1 \in \mathcal{N}_p^1 = \sum_{l=1}^{N_p} \sum_{\{ijk\} \in \mathcal{N}^1} v_{ijk}^1(x), \quad (3.18)$$

gdzie

$$v_{ijk}^1(x) = A_{ijk}^1(x) \delta_i^1 + B_{jik}^1(x) \delta_j^1 + C_{kij}^1(x) \delta_k^1 \quad (3.19)$$

$$A_{ijk}^1(x) = \frac{1}{2\pi} \left| \overrightarrow{(v_1^1 v_j^1)} \times \overrightarrow{(v_1^1 v_k^1)} \right| \int_0^{1-\xi} \int_0^1 \frac{(1-\xi-\eta) d\eta d\xi}{\left| \overrightarrow{(v_1^1 v_j^1)} \xi + \overrightarrow{(v_1^1 v_k^1)} \eta + x \overrightarrow{v_1^1} \right|} \quad (3.20)$$

$$B_{jik}^1(x) = \frac{1}{2\pi} \left| \overrightarrow{(v_1^1 v_j^1)} \times \overrightarrow{(v_1^1 v_k^1)} \right| \int_0^{1-\xi} \int_0^1 \frac{\xi d\eta d\xi}{\left| \overrightarrow{(v_1^1 v_j^1)} \xi + \overrightarrow{(v_1^1 v_k^1)} \eta + x \overrightarrow{v_1^1} \right|} \quad (3.21)$$

$$C_{kij}^1(x) = \frac{1}{2\pi} \left| \overrightarrow{(v_1^1 v_j^1)} \times \overrightarrow{(v_1^1 v_k^1)} \right| \int_0^{1-\xi} \int_0^1 \frac{\eta d\eta d\xi}{\left| \overrightarrow{(v_1^1 v_j^1)} \xi + \overrightarrow{(v_1^1 v_k^1)} \eta + x \overrightarrow{v_1^1} \right|} \quad (3.22)$$

Można zauważyć, że całka (3.20) nie ulegnie zmianie, jeżeli parametry ξ i η zamienimy miejscami, a to oznacza, że

$$A_{ijk}^1(x) = A_{ikj}^1(x).$$

W dalszej kolejności wykazana będzie, że struktura całek (3.20) (3.21) i (3.22) jest identyczna, a różnią się one tylko permutacją wskaźników.

W tym celu należy wziąć pod uwagę nowe współrzędne parametryczne trójkąta $e_{ijk}^1(\xi', \eta')$, których początek jest zlokalizowany tym razem w punkcie v_k^1 (rys. 3.1b).

$$e_{ijk}^1 = \left\{ (v_1 \cdot v_2 \cdot v_3); \quad v_1 = v_{1k}^1 + (v_{1i}^1 - v_{1k}^1) \xi' + (v_{1j}^1 - v_{1k}^1) \eta'; \right.$$

$$v_2 = v_{2k}^1 + (v_{2i}^1 - v_{2k}^1) \xi' + (v_{2j}^1 - v_{2k}^1) \eta' \quad (3.23)$$

$$v_3 = v_{3k}^1 + (v_{3i}^1 - v_{3k}^1) \xi' + (v_{3j}^1 - v_{3k}^1) \eta'; \quad 0 \leq \xi' \leq 1; \quad 0 \leq \eta' \leq 1 - \xi'$$

Przyjmując tym razem opis parametryczny (3.23), otrzymuje się:

$$\frac{1}{|XY|} \left| v e_{ijk}^1 = \frac{1}{\left| \overrightarrow{(v_k^1 v_j^1)} \eta' + \overrightarrow{(v_k^1 v_i^1)} \xi' + x \overrightarrow{v_k^1} \right|} \quad (3.24)$$

$$dS_Y = \left| \overrightarrow{(v_k^1 v_j^1)} \times \overrightarrow{(v_k^1 v_i^1)} \right| d\xi' d\eta' \quad (3.25)$$

$$e_{ijk}^1(v) = \begin{cases} \delta_k^1 + (\delta_i^1 - \delta_k^1) \xi' + (\delta_j^1 - \delta_k^1) \eta'; & v \in e_{ijk}^1; \quad 0 \leq \xi' \leq 1; \quad 0 \leq \eta' \leq 1 - \xi' \\ 0 & ; \quad v \notin e_{ijk}^1 \end{cases} \quad (3.26)$$

Przy tych samych zmiennych węzłowych $\delta_i^1, \delta_j^1, \delta_k^1$ oraz takiej samej interpolacji liniowej funkcji gęstości ładunków wzory (3.17) i (3.26), funkcja (3.19) w nowym układzie współrzędnych parametrycznych (ξ', η') będzie miała identyczną postać, przy czym tym razem te same funkcje kształtu $A_{ijk}^1(x), B_{jik}^1(x), C_{kij}^1(x)$ będą miały inne wyrażenia:

$$A_{ijk}^1(x) = \frac{1}{2\pi} \left| \overrightarrow{(v_k^1 v_j^1)} \times \overrightarrow{(v_k^1 v_i^1)} \right| \int_0^{1-\xi'} \int_0^1 \frac{\xi' d\eta' d\xi'}{\left| \overrightarrow{(v_k^1 v_j^1)} \eta' + \overrightarrow{(v_k^1 v_i^1)} \xi' + x \overrightarrow{v_k^1} \right|} \quad (3.27)$$

$$B_{jik}^1(x) = \frac{1}{2\pi} \left| \overrightarrow{(v_k^1 v_j^1)} \times \overrightarrow{(v_k^1 v_i^1)} \right| \int_0^{1-\xi'} \int_0^1 \frac{\eta' d\eta' d\xi'}{\left| \overrightarrow{(v_k^1 v_j^1)} \eta' + \overrightarrow{(v_k^1 v_i^1)} \xi' + x \overrightarrow{v_k^1} \right|} \quad (3.28)$$

$$C_{kij}^1(x) = \frac{1}{2\pi} \left| \overrightarrow{(v_k^1 v_j^1)} \times \overrightarrow{(v_k^1 v_i^1)} \right| \int_0^{1-\xi'} \int_0^1 \frac{(1-\xi'-\eta') d\eta' d\xi'}{\left| \overrightarrow{(v_k^1 v_j^1)} \eta' + \overrightarrow{(v_k^1 v_i^1)} \xi' + x \overrightarrow{v_k^1} \right|} \quad (3.29)$$

Porównując wzory (3.27) i (3.21) oraz uwzględniając z geometrii trójkąta w przestrzeni R^3 , że

$$\left| \overrightarrow{(v_k^1 v_j^1)} \times \overrightarrow{(v_k^1 v_i^1)} \right| = \left| \overrightarrow{(v_i^1 v_k^1)} \times \overrightarrow{(v_i^1 v_j^1)} \right| \quad (3.30)$$

otrzymuje się

$$B_{jik}^1(x) = A_{kij}^1(x) \quad (3.31)$$

Wykonując analogiczne operacje w przypadku, gdy parametryczny układ współrzędnych (ξ', η') trójkąta e_{ijk}^1 ma zlokalizowany początek w punkcie v_j^1 , można wykazać, że

$$C_{kij}^1(x) = A_{kij}^1(x) \quad (3.32)$$

Uwzględniając tożsamości (3.31) i (3.32) we wzorze (3.19), otrzymuje się:

$$v_{ijk}^1(x) = A_{1jk}^1(x)G_1^1 + A_{jki}^1(x)G_j^1 + A_{kij}^1(x)G_k^1 \quad (3.33)$$

Biorąc więc wzór (3.33) i podstawiając go do wzoru (3.18), można stwierdzić, że w celu określenia operacji przybliżonej do operacji potencjalna warstwa pojedynczej wystarczy w sposób ogólny określić funkcje $A_{ijk}^1(x)$, wykonując podwójne całkowanie we wzorze (3.27) lub (3.20), natomiast funkcje $A_{jki}^1(x)$ i $A_{kij}^1(x)$ otrzymuje się przez odpowiednią permutację wskaźników $\{ijk\}$ dotyczących danego trójkąta \mathcal{E}_{ijk}^1 w funkcji $A_{ijk}^1(x)$. Jeżeli następnie zmienić we wzorze (3.18) kolejność sumowania, po numeracji trójkątów $\{i,j,k\} \in \mathcal{N}_1^1$ na sumowanie po numeracji punktów γ_i^1 ($i = 1, 2, \dots, N_1$) triangulacji powierzchni \mathcal{E}^1 ($l = 1, 2, \dots, N_p$), to otrzymuje się:

$$\mathcal{V}G \in \mathcal{V}_{p_1}G = \sum_{l=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_1} A_i^1(x)G_i^1, \quad (3.34)$$

gdzie:

$$A_i^1(x) = \sum_{\{ijk\} \in \mathcal{N}_1^1} A_{ijk}^1(x) \quad (3.35)$$

\mathcal{N}_1^1 - zbiór trójkątów $\{i,j,k\}^1$ mających wspólny wierzchołek γ_i^1 . Wyznaczenie funkcji $A_{ijk}^1(x)$ współrzędnych punktu $X(x_1, x_2, x_3)$ dowolnie usytuowanego w przestrzeni trójwymiarowej R^3 przy dowolnym położeniu trójkąta \mathcal{E}_{ijk}^1 można dokonać wykonując podwójne całkowanie we wzorze (3.20) lub (3.27), łatwiej tego dokonać we wzorze (3.37).

W tym celu należy w pierwszej kolejności zbadać zachowanie się mianownika funkcji podcałkowej w całce (3.27)

$$\begin{aligned} |(\overline{v_k^1 v_j^1})\eta + (\overline{v_k^1 v_i^1})\xi + \overline{xy_k^1}| &= \sqrt{|\overline{v_k^1 v_j^1}|^2 \eta^2 + 2(\overline{v_k^1 v_j^1}) \cdot (\overline{v_k^1 v_i^1})\xi + \overline{xy_k^1}} \\ &+ \sqrt{|\overline{v_k^1 v_i^1}|^2 \xi^2 + 2(\overline{v_k^1 v_i^1}) \cdot \overline{xy_k^1}} \eta + \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ponieważ w całce (3.27) najpierw całkuje się ze względu na zmienną η , w związku z tym należy zbadać zachowanie się trójkątanu kwadratowego pod

pierwiastkiem (3.36) ze względu na tę zmienną. Po przekształceniach wektorowych [77] wyróżnik tego trójkątanu wynosi:

$$\begin{aligned} \Delta_{ijk}^1(\xi, \eta) &= 4 \left[(\overline{v_k^1 v_j^1}) \cdot \left[(\overline{v_k^1 v_i^1})\xi + \overline{xy_k^1} \right] \right]^2 - 4 \left| \overline{v_k^1 v_j^1} \right|^2 \left| (\overline{v_k^1 v_i^1})\xi + \overline{xy_k^1} \right|^2 - \\ &= -4 \left| (\overline{v_k^1 v_j^1}) \times \left[(\overline{v_k^1 v_i^1})\xi + \overline{xy_k^1} \right] \right|^2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ze wzoru (3.37) wynika, że jeżeli punkt $X \notin \mathcal{E}_{ijk}^1$

$$\mathcal{E}_{ijk}^1 = \left\{ X(x_1, x_2, x_3); \overline{xy_k^1} = \alpha(\overline{v_k^1 v_i^1}) + \beta(\overline{v_k^1 v_j^1}) \right\}, \quad (3.38)$$

gdzie

α, β - dowolne liczby rzeczywiste,
tj. nie leży w płaszczyźnie położenia trójkąta \mathcal{E}_{ijk}^1 , to dla dowolnego

$$\xi \in [0, 1], \quad \Delta_{ijk}^1(\xi, \eta) < 0$$

Wykonując w tym przypadku w całce (3.27) całkowanie ze względu na zmienną η , otrzymuje się [46]:

$$A_{ijk}^1(x) = \mathcal{J}(\overline{v_k^1 v_j^1}, \overline{v_j^1 v_i^1}, \overline{xy_k^1}) - \mathcal{J}(\overline{v_k^1 v_j^1}, \overline{v_k^1 v_i^1}, \overline{xy_k^1}), \quad (3.39)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\overline{v_k^1 v_j^1}, \overline{v_k^1 v_i^1}, \overline{xy_k^1}) &= \frac{1}{2\pi} \frac{|(\overline{xy_k^1}) \times (\overline{v_k^1 v_i^1})|}{v_k^1 v_j^1} \int_0^1 \xi \ln \left| (\overline{v_k^1 v_j^1}) \cdot (\overline{v_k^1 v_i^1})\xi + \overline{xy_k^1} \right| d\xi \\ &+ (\overline{v_k^1 v_j^1}) \cdot (\overline{xy_k^1}) + \left| \overline{v_k^1 v_j^1} \right| \left| (\overline{v_k^1 v_i^1})\xi + \overline{xy_k^1} \right| d\xi \end{aligned} \quad (3.40)$$

Całkę (3.40) można natomiast sprowadzić do całki elementarnej, stosując całkowanie przez części oraz tzw. podstawianie Eulera [46]

$$\left| \overline{v_k^1 v_j^1} \right| \left| (\overline{v_k^1 v_i^1})\xi + \overline{xy_k^1} \right| = t - \left| \overline{v_k^1 v_j^1} \right| \left| \overline{v_k^1 v_i^1} \right| \xi \quad (3.41)$$

Otrzymuje się wówczas:

$$\mathcal{J}(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_i^1}, \overline{x y_k^1}) = \frac{1}{4\pi} \frac{|\overline{y_k^1 y_j^1} \times \overline{y_k^1 y_i^1}|}{|\overline{y_k^1 y_j^1}|} \ln \left| \frac{(\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{x y_k^1}) + |\overline{y_k^1 y_j^1}| |\overline{x y_k^1}|}{(\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{x y_k^1}) - |\overline{y_k^1 y_j^1}| |\overline{x y_k^1}|} \right| - \mathcal{J}_1(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_i^1}, \overline{x y_k^1}). \quad (3.40a)$$

gdzie

$$\mathcal{J}_1(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_i^1}, \overline{x y_k^1}) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\overline{y_k^1 y_j^1} \times \overline{y_k^1 y_i^1}|}{|\overline{y_k^1 y_j^1}|} \int_{t_1}^2 \frac{(t^2 - d_0)^2 (b_2 t^2 + b_1 t + b_0) dt}{(c_1 t + c_0)^3 (a_2 t^2 + a_1 t + a_0)} \quad (3.42)$$

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= |\overline{y_k^1 y_j^1}| |\overline{x y_k^1}| \\ t_2 &= |\overline{y_k^1 y_j^1}| (|\overline{y_k^1 y_i^1}| + |\overline{x y_k^1}|) \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= [(\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_i^1}) + |\overline{y_k^1 y_j^1}| |\overline{y_k^1 y_i^1}|] |\overline{y_k^1 y_i^1}| \\ b_1 &= 2 |\overline{y_k^1 y_j^1}| [(\overline{y_k^1 y_i^1}) \cdot (\overline{x y_k^1})] [(\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_i^1}) + |\overline{y_k^1 y_j^1}| |\overline{y_k^1 y_i^1}|] \\ b_0 &= |\overline{y_k^1 y_j^1}|^2 |\overline{x y_k^1}|^2 |\overline{y_k^1 y_i^1}| [(\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_i^1}) + |\overline{y_k^1 y_j^1}| |\overline{y_k^1 y_i^1}|] - \\ &\quad - 2 |\overline{y_k^1 y_j^1}|^3 |(\overline{y_k^1 y_i^1}) \cdot (\overline{x y_k^1})|^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= (\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_i^1}) + |\overline{y_k^1 y_j^1}| |\overline{y_k^1 y_i^1}| \\ a_1 &= 2 |\overline{y_k^1 y_j^1}| |\overline{y_k^1 y_i^1}| [(\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{x y_k^1})] + 2 |\overline{y_k^1 y_j^1}|^2 [(\overline{y_k^1 y_i^1}) \cdot (\overline{x y_k^1})] \\ a_0 &= |\overline{y_k^1 y_j^1}|^2 |\overline{x y_k^1}|^2 [|\overline{y_k^1 y_i^1}| |\overline{y_k^1 y_j^1}| - (\overline{y_k^1 y_i^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_j^1})] + \\ &\quad + 2 |\overline{y_k^1 y_j^1}|^2 [(\overline{y_k^1 y_i^1}) \cdot (\overline{x y_k^1})] [(\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{x y_k^1})] \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= |\overline{y_k^1 y_j^1}| \\ c_0 &= |\overline{y_k^1 y_j^1}| [(\overline{y_k^1 y_i^1}) \cdot (\overline{x y_k^1})] \\ d_0 &= |\overline{y_k^1 y_j^1}|^2 |\overline{x y_k^1}|^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Jak łatwo zauważyć, całkę (3.42) można obliczyć rozwijając funkcję podcałkową na ułamki proste. Aby to jednak uczynić, należy zbadać znak wyróżnika trójmianu kwadratowego $a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ występującego w mianowniku wyrażenia podcałkowego. Po żmudnych przekształceniach wektorowych można wykazać, że

$$\Delta_{ijk}^1(x) = a_1^2 - 4a_2 a_0 = -4 |\overline{y_k^1 y_j^1}|^2 \left\{ (\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot [(\overline{y_k^1 y_i^1}) \times (\overline{x y_k^1})] \right\} \quad (3.47)$$

Ze wzoru (3.47) wynika więc, że jeżeli punkt X nie leży w płaszczyźnie π_{ijk}^1 (wzór (3.38)), położenia trójkąta π_{ijk}^1 , a tym samym trójka wektorów $\overline{y_k^1 y_j^1}$, $\overline{y_k^1 y_i^1}$, $\overline{x y_k^1}$ nie leży w jednej płaszczyźnie, to wyróżnik $\Delta_{ijk}^1 < 0$. Wówczas rozwinięcie funkcji podcałką (3.42) na ułamki proste ma postać:

$$\frac{(t^2 - d_0)^2 (b_2 t^2 + b_1 t + b_0)}{(c_1 t + c_0)^3 (a_2 t^2 + a_1 t + a_0)} = \frac{\alpha_1 t + \alpha_2}{c_1 t + c_0} + \frac{\alpha_3}{(c_1 t + d_0)^2} + \frac{\alpha_4}{(c_1 t + c_0)^3} + \frac{\alpha_5}{(c_1 t + c_0)^3} + \frac{\alpha_6 t + \alpha_7}{a_2 t^2 + a_1 t + a_0}, \quad (3.48)$$

gdzie stałe $\alpha_1 = \alpha_1(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_i^1}, \overline{x y_k^1})$, ..., $\alpha_7 = \alpha_7(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_i^1}, \overline{x y_k^1})$ są rozwiązaniem następującego układu równań:

$$\begin{aligned} (c_1^3 a_2) \alpha_1 &= b_2 \\ (c_1^3 a_1 + 3c_1^2 c_0 a_2) \alpha_1 + (c_1^3 a_2) \alpha_2 &= b_1 \\ (c_1^3 a_0 + 3c_1^2 c_0 a_1 + 3c_1 c_0^2 a_2) \alpha_1 + (c_1^2 a_1 + 3c_1 c_0 a_2) \alpha_2 + (c_1^2 a_2) \alpha_3 + \\ + (c_1^3) \alpha_6 &= b_0 - 2b_2 d_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (3c_1c_0^2a_0 + c_0^3a_1)\alpha_1 + (3c_1^2c_0a_0 + 3c_1c_0^2a_1 + c_0^3a_2)\alpha_2 + \\
 & + (c_1^2a_0 + 2c_1c_0a_1 + c_0^2a_2)\alpha_3 + (c_1a_1 + c_0a_2)\alpha_4 + (a_2)\alpha_5 + \\
 & + (3c_1c_0^2)\alpha_6 + (3c_1^2c_0)\alpha_7 = b_2d_0^2 - 2b_0d_0 \\
 \\
 & (3c_1^2c_0a_0 + 3c_1c_0^2a_1 + c_0^3a_2)\alpha_1 + (c_1^3a_0 + 3c_1c_0a_1 + 3c_1c_0^2a_2)\alpha_2 + \\
 & + (c_1^2a_1 + 2c_1c_0a_2)\alpha_3 + (c_1a_2)\alpha_4 + (3c_1^2c_0)\alpha_6 + (c_1^3)\alpha_7 = -2b_1d_0 \\
 \\
 & (c_0^3a_0)\alpha_1 + 3c_1c_0^2a_0 + c_0^3a_1)\alpha_2 + (2c_1c_0a_0 + c_0^2a_1)\alpha_3 + \\
 & + (c_1a_0 + c_0a_1)\alpha_4 + (a_1)\alpha_5 + (c_0^3)\alpha_6 + (3c_1c_0^2)\alpha_7 = b_1d_0^2 \\
 \\
 & (c_0^3a_0)\alpha_2 + (c_0^2a_0)\alpha_3 + (c_0a_0)\alpha_4 + (a_0)\alpha_5 + (c_0^3)\alpha_7 = b_0d_0^2 \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Jak wynika ze wzorów (3.47) i (3.45), trójkąt kwadratowy $a_2t^2 + a_1t + a_0$ jest wszędzie dodatni, gdy $x \notin \pi_{1jk}^1$ (wzór (3.38)). Również wielomian stopnia pierwszego $c_1t + c_0$ w przedziale całkowania całki (3.42) jest dodatni. Uwzględniając rozwinięcie (3.48), całka (3.42) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
 \int_1(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_l^1}, \overline{xy_k^1}) &= \frac{|(\overline{y_k^1 y_l^1}) \times (\overline{y_k^1 y_j^1})|}{16\pi |y_k^1 y_j^1|^3} \left[\frac{1}{2} \alpha_1(t_2^2 - t_1^2) + \alpha_2(t_2 - t_1) + \right. \\
 \frac{\alpha_3}{c_1} \ln \frac{|c_1 t_2 + c_0|}{|c_1 t_1 + c_0|} &+ \frac{\alpha_4}{c_1} \left(\frac{1}{c_1 t_2 + c_0} - \frac{1}{c_1 t_1 + c_0} \right) - \frac{\alpha_5}{2c_1} \left[\frac{1}{(c_1 t_2 + c_0)^2} - \frac{1}{(c_1 t_1 + c_0)^2} \right] \\
 + \frac{\alpha_6}{2a_2} \ln \frac{|a_2 t_2^2 + a_1 t_2 + a_0|}{|a_2 t_1^2 + a_1 t_1 + a_0|} &+ \frac{2\alpha_7 - \alpha_6 \frac{a_1}{a_2}}{\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2a_2 t_2 + a_1}{\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}} - \right. \\
 \left. - \operatorname{arctg} \frac{2a_2 t_1 + a_1}{\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}} \right] &\quad (3.50)
 \end{aligned}$$

gdzie t_1, t_2 określone są wzorami (3.43),

a_2, a_1, a_0 określone są wzorami (3.45),

c_1, c_0 określone wzorami (3.46),

natomiast $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$ są rozwiązaniem liniowego układu algebraicznego (3.49). Można zauważyć, że jeżeli punkt x leży na półprostej

$$\mathfrak{d}_{ki}^1 = \left\{ x(x_1, x_2, x_3) : \overline{xy_k^1} = -\beta(\overline{y_k^1 y_l^1}), \beta = \frac{|\overline{xy_k^1}|}{|\overline{y_k^1 y_l^1}|} > 1 \right\}, \quad (3.51)$$

to nie można stosować podstawienie Eulera (3.41) do rozwiązania całki (3.40). Całkę tę można rozwiązać bezpośrednio, całkując przez części.

Zachodzi:

$$\begin{aligned}
 \int(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_l^1}, \overline{xy_k^1}) &= \frac{|(\overline{y_k^1 y_l^1}) \times (\overline{y_k^1 y_j^1})|}{2\pi |y_k^1 y_j^1|} \int_0^1 \xi \ln \left(\frac{|\overline{xy_k^1}|}{|\overline{y_k^1 y_l^1}|} - \xi \right) \left| \overline{y_k^1 y_j^1} \right| \left| \overline{y_k^1 y_l^1} \right| - \\
 - (\overline{y_k^1 y_j^1}) \circ (\overline{y_k^1 y_l^1}) \Big| d\xi &= \frac{|(\overline{y_k^1 y_l^1}) \times (\overline{y_k^1 y_j^1})|}{2\pi |y_k^1 y_j^1|} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{|\overline{y_k^1 y_j^1}|}{|\overline{y_k^1 y_l^1}|} \right| - (\overline{y_k^1 y_j^1}) \circ (\overline{y_k^1 y_l^1}) \right] - \\
 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{|\overline{xy_k^1}|}{|\overline{y_k^1 y_l^1}|} &+ \frac{1}{2} \frac{|\overline{xy_k^1}|^2}{|\overline{y_k^1 y_l^1}|} \ln \frac{|\overline{xy_k^1}|}{|\overline{y_k^1 y_l^1}|} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\overline{xy_k^1}|}{|\overline{y_k^1 y_l^1}|} \right) \ln \left(\frac{|\overline{xy_k^1}|}{|\overline{y_k^1 y_l^1}|} - 1 \right) \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

Jeżeli punkt x leży na płaszczyźnie $\pi_{1jk}^1 - \mathfrak{d}_{ki}^1 - \mathfrak{e}_{1jk}^1$ z wyłączonej półprostej \mathfrak{d}_{ki}^1 oraz trójkątem \mathfrak{e}_{1jk}^1 , to można stosować wzór (3.50), wykonując w nim następujące przejście graniczne związane z zerowaniem się wyróżnika $\Delta_{1jk}^1(x) = 0$ (wzór (3.47)).

$$\begin{aligned}
 \lim_{(4a_0 a_2 - a_1^2) \rightarrow 0} \frac{2\alpha_7 - \alpha_6 \frac{a_1}{a_2}}{\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}} &\left[\operatorname{arctg} \frac{2a_2 t_2 + a_1}{\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2a_2 t_1 + a_1}{\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}} \right] = \\
 = (\alpha_7 - \alpha_6 \frac{a_1}{2a_2}) &\left(\frac{1}{a_2 t_1 + \frac{a_1}{2}} - \frac{1}{a_2 t_2 + \frac{a_1}{2}} \right) \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

Uwzględniając ponadto

$$\ln \frac{|a_2 t_2^2 + a_1 t_2 + a_0|}{|a_2 t_1^2 + a_1 t_1 + a_0|} = 2 \ln \frac{|a_2 t_2 + \frac{a_1}{2}|}{|a_2 t_1 + \frac{a_1}{2}|}, \quad (3.54)$$

wzór (3.50) przyjme postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_1^1}, \overline{xy_k^1}) \Big|_{x \in \pi_{ijk}^1 - \alpha_{ki}^1 - \epsilon_{ijk}^1} &= \frac{|(\overline{y_k^1 y_1^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_j^1})|}{16\pi |\overline{y_k^1 y_j^1}|^3} \left[\frac{1}{2} \alpha_1 (t_2^2 - t_1^2) + \right. \\ &+ \alpha_2 (t_2 - t_1) + \frac{\alpha_3}{c_1} \ln \frac{|c_1 t_2 + c_0|}{|c_1 t_1 + c_0|} - \frac{\alpha_4}{c_1} \left(\frac{1}{c_1 t_2 + c_0} - \frac{1}{c_1 t_1 + c_0} \right) - \\ &- \frac{\alpha_5}{2c_1} \left[\frac{1}{(c_1 t_2 + c_0)^2} - \frac{1}{(c_1 t_1 + c_0)^2} \right] + \frac{\alpha_6}{a_2} \ln \frac{|a_2 t_2 + \frac{a_1}{2}|}{|a_2 t_1 + \frac{a_1}{2}|} + \\ &\left. + (\alpha_7 - \alpha_6 \frac{a_1}{2a_2}) \left(\frac{1}{a_2 t_1 + \frac{a_1}{2}} - \frac{1}{a_2 t_2 + \frac{a_1}{2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

gdzie t_1, t_2, a_2, a_0, a_1 wyrażają się wzorami (3.43) i (3.45) dla $x \in \pi_{ijk}^1 - \alpha_{ki}^1 - \epsilon_{ijk}^1$, natomiast $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$ są rozwiązaniem liniowego układu równań (3.49) o współczynnikach wziętych również w punktach $x \in \pi_{ijk}^1 - \alpha_{ki}^1 - \epsilon_{ijk}^1$.

Pozostał jeszcze do przedyskutowania przypadek, gdy punkt x leży w trójkącie ϵ_{ijk}^1 , wówczas całka (3.40) jest całką niewłaściwą z funkcji nieograniczonej. Z ogólnej teorii potencjału wynika, że całka ta jest zbieżna [73], istnieje tylko problem jej obliczenia. W dalszych rozważaniach potrzebne będą wartości tych całek w punktach y_1^1, y_j^1, y_k^1 , tj. w punktach wierzchołkowych trójkąta ϵ_{ijk}^1 .

Jeżeli punkt $x = y_1^1$, wówczas całka (3.40) przyjme postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_1^1}, \overline{xy_k^1}) &= \frac{|(\overline{y_k^1 y_1^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_j^1})|}{2\pi |\overline{y_k^1 y_j^1}|} \int_0^1 \xi \ln \left| (1-\xi) \left[|\overline{y_k^1 y_j^1}| \left| \overline{y_k^1 y_1^1} \right| - \right. \right. \\ &\left. \left. - (\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_1^1}) \right] \right| d\xi \end{aligned} \quad (3.56)$$

Całkę niewłaściwą (3.56) łatwo obliczyć, stosując całkowanie przez części:

$$\mathcal{J}_1(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_1^1}, \overline{xy_k^1}) \Big|_{x=y_1^1} = \frac{|(\overline{y_k^1 y_1^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_j^1})|}{2\pi |\overline{y_k^1 y_j^1}|} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \overline{y_k^1 y_j^1} \right| \left| \overline{y_k^1 y_1^1} \right| - \right.$$

$$\left. - (\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_1^1}) \right] - \frac{3}{4} \quad (3.57)$$

Jeżeli punkt $x = y_k^1$, wówczas całka (3.40) ma postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_1^1}, \overline{xy_k^1}) \Big|_{x=y_k^1} &= \frac{|(\overline{y_k^1 y_1^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_j^1})|}{2\pi |\overline{y_k^1 y_j^1}|} \int_0^1 \xi \ln \left[\left| \overline{y_k^1 y_j^1} \right| \left| \overline{y_k^1 y_1^1} \right| + \right. \\ &\left. + (\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_1^1}) \right] d\xi \end{aligned} \quad (3.58)$$

Całkę niewłaściwą (3.58) można również obliczyć stosując całkowanie przez części:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_1^1}, \overline{xy_k^1}) \Big|_{x=y_k^1} &= \frac{|(\overline{y_k^1 y_1^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_j^1})|}{2\pi |\overline{y_k^1 y_j^1}|} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \overline{y_k^1 y_j^1} \right| \left| \overline{y_k^1 y_1^1} \right| + \right. \\ &\left. + (\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_1^1}) \right] - \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Jeżeli natomiast punkt $x = y_j^1$, wówczas całka (3.40) przyjme postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_1^1}, \overline{xy_k^1}) \Big|_{x=y_j^1} &= \frac{|(\overline{y_k^1 y_1^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_j^1})|}{2\pi |\overline{y_k^1 y_j^1}|} \int_0^1 \xi \ln \left| (\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot \right. \\ &\left. \left[(\overline{y_k^1 y_1^1}) \xi + \overline{y_j^1 y_k^1} \right] + \left| \overline{y_k^1 y_j^1} \right| \left[\xi (\overline{y_k^1 y_1^1}) + \overline{y_j^1 y_k^1} \right] \right| d\xi \end{aligned} \quad (3.60)$$

Do obliczenia całki niewłaściwej (3.60) można również zastosować całkowanie przez części. Otrzymuje się wówczas:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_1^1}, \overline{xy_k^1}) \Big|_{x=y_j^1} &= \frac{|(\overline{y_k^1 y_1^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_j^1})|}{4\pi |\overline{y_k^1 y_j^1}|} \ln \left| \overline{y_k^1 y_j^1} \right| \left| \overline{y_j^1 y_1^1} \right| + (\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot \\ &\cdot (\overline{y_j^1 y_1^1}) \left. - \mathcal{J}_1(\overline{y_k^1 y_j^1}, \overline{y_k^1 y_1^1}, \overline{xy_k^1}) \right. \end{aligned} \quad (3.61)$$

gdzie całka J_1 wzięta w punkcie $x = Y_j^1$ wyraża się wzorem (3.42) i do jej obliczenia można stosować rozwinięcie wyrażenia pod znakiem całki na ułamki proste (3.48). Można jednak zauważyć, że stałe α_6 i α_7 występujące w rozwinięciu (3.48) są w przypadku $x = Y_j^1$ równe zeru.

Istotnie, biorąc pod uwagę, że

$$(a_2 t^2 + a_1 t + a_0) \Big|_{x=Y_j^1} = \left[\left| \overline{Y_{k'j}^1 Y_j^1} \right| \left| \overline{Y_{k'1}^1 Y_j^1} \right| + \overline{(Y_{k'j}^1 Y_j^1)} \cdot \overline{(Y_{k'1}^1 Y_j^1)} \right] (t - \left| \overline{Y_{k'j}^1 Y_j^1} \right|)^2 \quad (3.62)$$

$$(t^2 - d_0)^2 \Big|_{x=Y_j^1} = (t - \left| \overline{Y_{k'j}^1 Y_j^1} \right|)^2 (t + \left| \overline{Y_{k'j}^1 Y_j^1} \right|)^2 \quad (3.63)$$

wyrażenie pod znakiem całki (3.42) można uprościć do postaci:

$$\frac{(t^2 - d_0)^2 (b_2 t^2 + b_1 t + b_0)}{(c_1 t + c_0)^3 (a_2 t^2 + a_1 t + a_0)} = \frac{(t + \left| \overline{Y_{k'1}^1 Y_j^1} \right|)^2 (b_2 t^2 + b_1 t + b_0)}{(c_1 t + c_0)^3} \quad (3.64)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= \left| \overline{Y_{k'1}^1 Y_j^1} \right|; & b_1 &= -2 \left| \overline{Y_{k'j}^1 Y_j^1} \right| \left[\overline{(Y_{k'j}^1 Y_j^1)} \cdot \overline{(Y_{k'1}^1 Y_j^1)} \right] \\ b_0 &= \left| \overline{Y_{k'j}^1 Y_j^1} \right|^3 \left[2 \overline{(Y_{k'j}^1 Y_j^1)} \cdot \overline{(Y_{k'1}^1 Y_j^1)} - \left| \overline{Y_{k'j}^1 Y_j^1} \right| \left| \overline{Y_{k'1}^1 Y_j^1} \right| \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

Oznacza to, że w rozwinięciu (3.48) nie występuje człon $\frac{\alpha_6 t + \alpha_7}{a_2 t^2 + a_1 t + a_0}$, co jest równoznaczne z zerowaniem się stałych α_6 i α_7 . Pozostałe stałe $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ można obliczyć z układu równań (3.49), podstawiając we wzorach na jego współczynniki (3.43) za $x = Y_j^1$. Rozwiązując układ równań (3.49) dla $x = Y_j^1$, otrzymuje się ponadto $\alpha_6 = \alpha_7 = 0$.

Całka (3.40) jako funkcja współrzędnych punktu $x(x_1, x_2, x_3)$ została zbadana dla dowolnego położenia zewnętrznego tego punktu w odniesieniu do trójkąta e_{ijk}^1 jak również w wierzchołkach tego trójkąta. Wzory wyprowadzone do obliczenia całki (3.40) $J(Y_{k'j}^1, Y_{k'1}^1, X_{k'}^1)$ jako funkcji współrzędnych punktu $x(x_1, x_2, x_3)$ można również stosować do obliczenia całki $J(Y_{k'j}^1, Y_{j'1}^1, X_{j'}^1)$, zmieniając w nich wektor $\overline{XY_k^1}$ na $\overline{XY_j^1}$ oraz $\overline{Y_{k'1}^1}$ na $\overline{Y_{j'1}^1}$. W ten sposób zgodnie ze wzorem (3.60) otrzymuje się ogólne wzory na funkcje (3.27) $A_{ijk}^1(x)$ współrzędnych punktu x , które na mocy wzorów (3.34) i (3.35) pozwolą przybliżyć operacją ∇^2 typu potencjału warstwy pojedynczej jako funkcję liniową zmiennych węzłowych ϕ_i^1 gęstości ładunków

w punktach triangulacji Y_i^1 powierzchni S^1 ($i = 1, 2, \dots, N_p$) ($i = 1, 2, \dots, N_1$).

3.1.2. Potencjał warstwy pojedynczej zadanej na powierzchniach w postaci cienkich cylindrycznych walców

Sposób aproksymacji operatora typu potencjał warstwy pojedynczej podany w punkcie 3.1.1 można zastosować w zasadzie dla dowolnych powierzchni klasy C. Jedyne ograniczenie wynikające z możliwości obliczeniowych EMC podyktowane jest dopuszczalną liczbą punktów triangulacji powierzchni, a tym samym liczbą zmiennych węzłowych.

Jeżeli powierzchnie zadane są w postaci długich i cienkich cylindrycznych walców, to aproksymacja potencjału warstwy pojedynczej z zastosowaniem trójkątów triangulacji powierzchni (wzory (3.9) i (3.10)) prowadziłaby do bardzo dużej ilości zmiennych węzłowych. W takim przypadku należałoby zastosować bardziej oszczędne metody aproksymacji operacji (2.5).

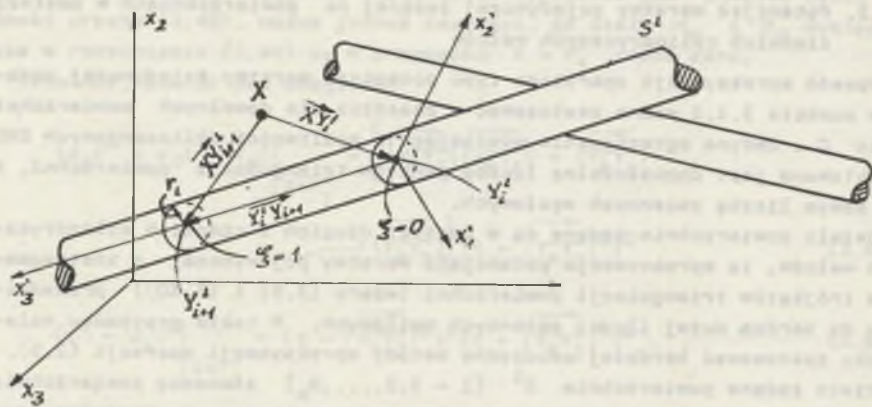
Niech zadane powierzchnie S^1 ($i = 1, 2, \dots, N_w$) stanowią powierzchnię przewodów walcowych o promieniu r_1 dowolnie usytuowanych względem siebie w przestrzeni R^3 . Najbardziej naturalną aproksymacją takich powierzchni można przeprowadzić za pomocą powierzchni bocznych walców e_{i+1}^1 o długości $\left| \overline{Y_{i+1}^1 Y_i^1} \right|$ i promieniu r_1 przy $r_1 / \left| \overline{Y_{i+1}^1 Y_i^1} \right| \ll 1$ (rys. 3.2).

Jeżeli zadane są funkcje zwiisu poszczególnych przewodów, to długości poszczególnych elementów walcowych należy dobrać w zależności od krzywizny przewodów oraz wzajemnego ich usytuowania. Opisu powierzchni bocznych elementów walcowych można dokonać wprowadzając dla każdego z nich parametryczny opis. W tym celu należy wprowadzić dla każdego elementu e_{i+1}^1 lokalny prostokątny układ współrzędnych x_1, x_2, x_3 o początku w punkcie Y_i^1 , tak aby oś x_3 pokrywała się z osią elementu walcowego e_{i+1}^1 , natomiast oś x_1 była np. równoległa do płaszczyzny $x_1 O x_2$ (rys. 3.2).

Wprowadzając następnie w układzie x_1, x_2, x_3 walcowy układ współrzędnych (ξ, φ) , to dowolny punkt $Y(y_1, y_2, y_3)$ leżący na powierzchni e_{i+1}^1 elementu walcowego można zapisać następująco:

$$\left. \begin{aligned} e_{i+1}^1 &= \left\{ Y(y_1, y_2, y_3) : \begin{aligned} y_1 &= Y_{i+1}^1 + (Y_{i+1,1+1}^1 - Y_{i+1,1}^1) \xi + r_1 \cos \eta_1^1 \cos \varphi + r_1 \sin \eta_1^1 \cos \beta_1^1 \sin \varphi; \\ y_2 &= Y_{i+1,2}^1 + (Y_{i+1,2+1}^1 - Y_{i+1,2}^1) \xi - r_1 \sin \eta_1^1 \cos \varphi + r_1 \cos \eta_1^1 \cos \beta_1^1 \sin \varphi; \\ y_3 &= Y_{i+1,3}^1 + (Y_{i+1,3+1}^1 - Y_{i+1,3}^1) \xi - r_1 \sin \beta_1^1 \sin \varphi; \\ 0 &\leq \xi < 1; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (3.66) \end{aligned}$$

gdzie η_1^1, β_1^1 tzw. kąty Eulera [64], tj. η_1^1 - kąt zawarty między osią x_1' a x_1 ; β_1^1 - kąt zawarty między osią x_3' a x_3 , przy czym trzeci kąt Eu-



Rys. 3.2. Podział przewodów na elementy walcowe \mathcal{C}_1^1
 Fig. 3.2. Partition of the conductors on the cylindrical elements

lera jest równy zero, co odpowiada położeniu osi x_1 w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny x_1 o x_2 .

Przy zadanych współrzędnych punktów $y_{1,1}^1$ i $y_{1+1,1}^1$ (rys. 3.2) cos i sin kątów Eulera można wyrazić następująco [64]:

$$\cos \varphi_1^1 = \frac{y_{2,1+1}^1 - y_{2,1}^1}{\sqrt{(y_{1,1+1}^1 - y_{1,1}^1)^2 + (y_{2,1+1}^1 - y_{2,1}^1)^2}} \quad (3.67)$$

$$\sin \varphi_1^1 = \frac{y_{1,1+1}^1 - y_{1,1}^1}{\sqrt{(y_{1,1+1}^1 - y_{1,1}^1)^2 + (y_{2,1+1}^1 - y_{2,1}^1)^2}}$$

$$\cos \theta_1^1 = \frac{y_{3,1+1}^1 - y_{3,1}^1}{|y_{1,1+1}^1|} \quad (3.68)$$

$$\sin \theta_1^1 = \frac{\sqrt{(y_{1,1+1}^1 - y_{1,1}^1)^2 + (y_{2,1+1}^1 - y_{2,1}^1)^2}}{|y_{1,1+1}^1|}$$

Przyjmując oznaczenie wektorów z rys. 3.2 (por. wzory (3.11)) oraz uwzględniając parametryczny opis (3.66), funkcję $\frac{1}{|XY|}$ występującą w jądrze operacji (2.5) można dla dowolnego punktu X oraz dla $Y \in \mathcal{C}_1^1$ wyrazić następująco:

$$\frac{1}{|XY|} \Big|_{Y \in \mathcal{C}_1^1} = \frac{1}{\sqrt{|XY_1^1 + \xi (y_{1,1+1}^1 - y_{1,1}^1)|^2 + r_1^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^1(\xi, X) \cos[\varphi - \varphi_1^1(x)]}} \quad (3.69)$$

gdzie:

$$k_1^1(\xi, X) = \frac{2r_1 |(XY_1^1) \times (y_{1,1+1}^1 - y_{1,1}^1)|}{|y_{1,1+1}^1| \left[|XY_1^1 + \xi (y_{1,1+1}^1 - y_{1,1}^1)|^2 + r_1^2 \right]} \quad (3.70)$$

$$\varphi_1^1(x) = \arctg \frac{[(XY_1^1) \times (y_{1,1+1}^1 - y_{1,1}^1)] \cdot [y_{1,1+1}^1 \times k_3]}{|y_{1,1+1}^1| \left[|XY_1^1 + \xi (y_{1,1+1}^1 - y_{1,1}^1)|^2 + r_1^2 \right]} \quad (3.71)$$

Można wykazać, że jeżeli punkt $X \notin \mathcal{C}_1^1$, to $0 < k_1^1(\xi, X) < 1$ dla dowolnego $\xi \in [0, 1]$. Jeżeli natomiast punkt $X \in \mathcal{C}_1^1$, to istnieje taki parametr $\xi = \xi_X \in [0, 1]$, dla którego $k_1^1(\xi, X) = 1$ i ogólnie

$$k_1^1(\xi, X) \Big|_{X \in \mathcal{C}_1^1} = \frac{2r_1^2}{|XY_1^1 + \xi (y_{1,1+1}^1 - y_{1,1}^1)|^2 + r_1^2} \leq 1 \quad \text{dla } \xi \in [0, 1] \quad (3.72)$$

Jeżeli $k_1^1(\xi, X) < 1$, to jądro (3.69) można przedstawić w postaci jednostajnie zbieżnego szeregu ze względu na zmienną φ :

$$\frac{1}{|XY|} \Big|_{X \in \mathcal{C}_1^1} = \frac{1}{\sqrt{|XY_1^1 + \xi (y_{1,1+1}^1 - y_{1,1}^1)|^2 + r_1^2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n-1)!!}{2^{4n} (n!)^2} [k_1^1(\xi, X)]^{2n} + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{(4n-1)!! (2n)}{2^{4n-1} (2n)!} [k_1^1(\xi, X)]^{2n} \cos 2j(\varphi - \varphi_1^1(x)) -$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{(4n+1)!! (2n+1)}{2^{4n+1} (2n+1)!} [k_1^1(\xi, X)]^{2n+1} \cos(2j+1)(\varphi - \varphi_1^1(x)) \right\} \quad (3.73)$$

Ze względu na rozwinięcie (3.73) jądra operacji (2.5) funkcje gęstości ładunków na poszczególnych elementach walcowych φ_1^1 wygodnie jest aproksymować pierwszymi N wyrazami szeregu trygonometrycznego:

$$\begin{aligned} \sigma^1(\gamma) \Big|_{\gamma \in \varphi_1^1} &= \sigma_{1,1,0}^1 + (\sigma_{1,1+1,0}^1 - \sigma_{1,1,0}^1) \xi + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sigma_{1,1,m}^1 + (\sigma_{1,1+1,m}^1 - \sigma_{1,1,m}^1) \xi \right] \cos m\varphi \\ &+ \sum_{m=1}^N \left[\sigma_{2,1,m}^1 + (\sigma_{2,1+1,m}^1 - \sigma_{2,1,m}^1) \xi \right] \sin m\varphi \end{aligned} \quad (3.74)$$

Uwzględniając parametryczny opis (3.66) elementu walcowego, miara powierzchni walca przyjmie postać:

$$dS_\gamma = r_1 \sqrt{\gamma_1^1 \gamma_{1+1}^1} d\varphi d\xi \quad (3.75)$$

Podstawiając wzory (3.70), (3.73), (3.74) i (3.75) do wzoru (2.5) na operację \mathcal{V} typu potencjału warstwy pojedynczej oraz wykonując w pierwszej kolejności całkowanie ze względu na zmienną φ typu:

$$\begin{aligned} \int_{-\Pi}^{\Pi} \cos j[\varphi - \varphi_1^1(x)] \cos m\varphi d\varphi &= \begin{cases} \cos j\varphi_1^1(x); & m = j \\ 0 & ; m \neq j \end{cases} \\ \int_{-\Pi}^{\Pi} \cos j[\varphi - \varphi_1^1(x)] \sin m\varphi d\varphi &= \begin{cases} \sin j\varphi_1^1(x); & m = j \\ 0 & ; m \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

otrzymuje się:

$$\mathcal{V}\sigma \approx \mathcal{V}\sigma = \sum_{l=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^2 \sum_{s=0}^N c_{k,i,s}^1(x) \sigma_{k,i,s}^1 \quad (3.76)$$

gdzie:

$$c_{k,i,s}^1(x) = \begin{cases} a_{k,1,s}^1(x) & \text{dla } i = 1 \\ a_{k,i,s}^1(x) & \text{dla } i = 2, 3, \dots, N_1 - 1 \\ b_{k,N_1,s}^1(x) & \text{dla } i = N_1 \\ 0 & \text{dla } (k=2) \quad i \quad (s=0) \end{cases} \quad (3.77)$$

$$a_{k,1,2j}^1(x) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{(4n-1)!! (2n)}{2^{4n} (2n)!} A_{k,2n,1,2j}^1(x); \quad (j = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}) \quad (k = 1, 2) \quad (3.78a)$$

$$a_{k,1,2j+1}^1(x) = - \sum_{n=j}^{\infty} \frac{(4n+1)!! (2n+1)}{4^{4n+2} (2n+1)!} A_{k,2n+1,1,2j+1}^1(x); \quad (j = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}) \quad (3.78b)$$

$$b_{k,i+1,2j}^1(x) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{(4n-1)!! (2n)}{2^{4n} (2n)!} B_{k,2n,i+1,2j}^1(x); \quad (j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}) \quad (k = 1, 2) \quad (3.79a)$$

$$b_{k,i+1,2j+1}^1(x) = - \sum_{n=j}^{\infty} \frac{(4n+1)!! (2n+1)}{2^{4n+2} (2n+1)!} B_{k,2n+1,i+1,2j+1}^1(x) \quad (3.79b)$$

$$A_{1,n,1,s}^1(x) = F_{n,1}^1(x) \cos s\varphi_1^1(x); \quad (3.80)$$

$$A_{2,n,1,s}^1(x) = F_{n,1}^1(x) \sin s\varphi_1^1(x)$$

$$F_{n,1}^1(x) = \frac{2^n (r_2)^{n+1} |(\overline{xy_1^1}) \times (\overline{y_1^1 y_{1+1}^1})|}{|\overline{y_1^1 y_{1+1}^1}|^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\xi d\xi}{\left[\overline{xy_{1+1}^1} + \overline{(y_{1+1}^1 y_1^1)} \right]^{2+r_1^2} n + \frac{1}{2}} \quad (3.81)$$

$$B_{1,n,i+1,s}^1(x) = G_{n,i+1}^1(x) \cos \varphi_1^1(x), \quad (3.82)$$

$$B_{2,n,i+1,s}^1(x) = G_{n,i+1}^1(x) \sin \varphi_1^1(x)$$

$$G_{n,i+1}^1(x) = \frac{2^n (r_1)^{n+1} |(\overline{xy}_1^1) \times (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})|^n}{|\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}|^{n-1}} \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\left[|\overline{xy}_1^1 + \xi (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})|^2 + r_1^2 \right]^{n + \frac{1}{2}}} \quad (3.83)$$

łatwo zauważyć, że całki (3.81) i (3.83) mają identyczne struktury, a różnią się tylko wskaźnikami; wystarczy bowiem w całce (3.81) zamienić punkt \overline{y}_1^1 z punktem \overline{y}_{i+1}^1 , ażeby otrzymać całkę (3.83). Wystarczy więc ograniczyć się do badania jednej z nich, np. (3.83). Przede wszystkim należy zauważyć, że można ją przedstawić w postaci sumy dwóch całek:

$$G_{n,i+1}^1(x) = \frac{2^n (r_1)^{n+1} |(\overline{xy}_1^1) \times (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})|^n}{|\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}|^{n+1}} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2 |\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}|^2 \xi^2 + 2(\overline{xy}_1^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}) \xi}{\left[|\overline{xy}_1^1 + \xi (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})|^2 + r_1^2 \right]^{n + \frac{1}{2}}} d\xi - \right. \\ \left. - (\overline{xy}_1^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}) \int_0^1 \frac{d\xi}{\left[|\overline{xy}_1^1 + \xi (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})|^2 + r_1^2 \right]^{n + \frac{1}{2}}} \right\} \quad (3.84)$$

z których pierwszą łatwo obliczyć stosując podstawienie:

$$z = |\overline{xy}_1^1 + \xi (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})|^2 + r_1^2, \quad (3.85)$$

natomiast drugą z nich można sprowadzić do całki z wielomianu poprzez tzw. podstawienie Abela [46]:

$$u = \frac{|\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}|^2 \xi + (\overline{xy}_1^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})}{\sqrt{|\overline{xy}_1^1 + \xi (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})|^2 + r_1^2}}. \quad (3.86)$$

Otrzymuje się:

$$G_{n,i+1}^1 = \frac{2^n (r_1)^{n+1} |(\overline{xy}_1^1) \times (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})|^n}{|\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}|^{n+1}} \left[\frac{1}{2n-1} \left[\frac{1}{(|\overline{xy}_1^1|^2 + r_1^2)^{n - \frac{1}{2}}} - \frac{1}{(|\overline{xy}_{i+1}^1|^2 + r_1^2)^{n - \frac{1}{2}}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(\overline{xy}_1^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})}{\left[r_1^2 |\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}|^2 + |(\overline{xy}_1^1) \times (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})|^2 \right]^n} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{\binom{n-1}{p}}{2^{p+1}} |\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}|^{2n-2p-2} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\left(\frac{(\overline{xy}_1^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})}{\sqrt{|\overline{xy}_1^1|^2 + r_1^2}} \right)^{2p+1} - \left(\frac{(\overline{xy}_{i+1}^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})}{\sqrt{|\overline{xy}_{i+1}^1|^2 + r_1^2}} \right)^{2p+1} \right] \right] \quad (3.87)$$

$$F_{n,i}^1(x) = \frac{2^n (r_1)^{n+1} |(\overline{xy}_1^1) \times (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})|^n}{|\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}|^{n+1}} \left[\frac{1}{2n-1} \left[\frac{1}{(|\overline{xy}_{i+1}^1|^2 + r_1^2)^{n - \frac{1}{2}}} - \frac{1}{(|\overline{xy}_1^1|^2 + r_1^2)^{n - \frac{1}{2}}} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{(|\overline{xy}_1^1|^2 + r_1^2)^{n - \frac{1}{2}}} + \frac{(\overline{xy}_{i+1}^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})}{\left[r_1^2 |\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}|^2 + |(\overline{xy}_1^1) \times (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})|^2 \right]^n} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{\binom{n-1}{p}}{2^{p+1}} \cdot \right. \\ \left. \cdot |\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}|^{2n-2p-2} \left[\left(\frac{(\overline{xy}_{i+1}^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})}{\sqrt{|\overline{xy}_{i+1}^1|^2 + r_1^2}} \right)^{2p+1} - \left(\frac{(\overline{xy}_1^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})}{\sqrt{|\overline{xy}_1^1|^2 + r_1^2}} \right)^{2p+1} \right] \right] \quad (3.88)$$

W przypadku gdy $n = 0$, całki (3.83) i (3.81) wynoszą:

$$G_{0,i+1}^1(x) = \frac{r_1}{|\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}|} \left[\sqrt{|\overline{xy}_{i+1}^1|^2 + r_1^2} - \sqrt{|\overline{xy}_1^1|^2 + r_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{(\overline{xy}_1^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1})}{|\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}|} \ln \frac{(\overline{xy}_1^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}) + |\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}| \sqrt{|\overline{xy}_1^1|^2 + r_1^2}}{(\overline{xy}_{i+1}^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}) + |\overline{y_1^1 y_{i+1}^1}| \sqrt{|\overline{xy}_{i+1}^1|^2 + r_1^2}} \right] \quad (3.89)$$

$$F_{0,1}^1(x) = \frac{r_1}{|y_1^1 y_{1+1}^1|} \left[\sqrt{|\overline{xy}_1^1|^2 + r_1^2} - \sqrt{|\overline{xy}_{1+1}^1|^2 + r_1^2} + \frac{(\overline{xy}_{1+1}^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{1+1}^1})}{|y_1^1 y_{1+1}^1|} \ln \frac{(\overline{xy}_{1+1}^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{1+1}^1}) + |y_1^1 y_{1+1}^1| \sqrt{|\overline{xy}_{1+1}^1|^2 + r_1^2}}{(\overline{xy}_1^1) \cdot (\overline{y_1^1 y_{1+1}^1}) + |y_1^1 y_{1+1}^1| \sqrt{|\overline{xy}_1^1|^2 + r_1^2}} \right] \quad (3.90)$$

Funkcje kształtu $c_{k,1,s}^1(x)$ (3.77) współrzędnych punktu $x(x_1, x_2, x_3)$ odpowiadające elementom walcowym e_1^1 (3.77) zostały wyznaczone przy założeniu, że punkt $x \notin e_1^1$ nie leży na powierzchni tego elementu. W takim przypadku funkcje te stanowią kombinację zbieżnych szeregów (3.78) (3.79), ..., (3.83) ze względu na współrzędne punktu x . Zbieżność tych szeregów wynika z jednostajnej zbieżności szeregu (3.73) dla $k(\xi, x) < 1$, co ma miejsce wówczas, gdy $x \notin e_1^1$. Wykazano będzie, że jeżeli punkt x leży na powierzchni elementu walcowego e_1^1 , to szeregi funkcyjne (3.78) i (3.79) są zbieżne. W tym celu wybrano przykładowo punkt x_1^1 leżący w środku powierzchni bocznej elementu e_1^1 , dla którego $|x_1^1 y_{1+1}^1|^2 = r_1^2 \frac{1}{4} |y_1^1 y_{1+1}^1|^2$, a w którym funkcje (3.87) i (3.88) przyjmują wartość:

$$F_{n,1}^1(x) = G_{n,1+1}^1(x_1^1) = r_1 \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{(n-1)!}{2^{p+1}} \frac{1}{\left(1 + 8 \left(\frac{r_1}{|y_1^1 y_{1+1}^1|}\right)^2\right)^{\frac{2p+1}{2}}}, \quad n > 1 \quad (3.91)$$

$$F_{0,1}^1(x_1^1) = G_{0,1+1}^1(x_1^1) = \frac{r_1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + 8 \left(\frac{r_1}{|y_1^1 y_{1+1}^1|}\right)^2} + 1}{\sqrt{1 + 8 \left(\frac{r_1}{|y_1^1 y_{1+1}^1|}\right)^2} - 1}, \quad n = 0 \quad (3.92)$$

Sumę (3.91) można oszacować następująco:

$$F_{n,1}^1(x_1^1) < r_1 \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{(n-1)!}{2^{p+1}} = r_1 \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}, \quad n > 1 \quad (3.93)$$

Na mocy wzorów (3.80) zachodzi:

$$|A_{k,2n,1,2j}^1(x)| \leq F_{2n,1}^1(x) \quad (3.94)$$

Biorąc przykładowo szereg (3.78a) oraz nierówności (3.93) i (3.94), wykazuje się jego następujące oszacowanie:

$$|a_{k,1,2j}^1(x_1^1)| \leq r_1 \sum_{n=j}^{\infty} \frac{(4n-1)!! (2n)!! (4n-2)!!}{2^{4n} (2n)! (4n-1)!!} = r_1 \sum_{n=j}^{\infty} \frac{(4n-2)!!}{2^{4n} (n-j)! (n+j)!} \quad (3.95)$$

Na mocy kryterium Raabego [46] można wykazać, że szereg

$$\sum_{n=j}^{\infty} a_n = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{(4n-2)!!}{2^{4n} (n-j)! (n+j)!} \quad (3.96)$$

jest zbieżny, gdyż

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left[\frac{16 \left[\frac{(n+1)^2 - 1}{16n^2 + 8n} - 1 \right]}{16n^2 + 8n} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2}.$$

Ze zbieżności szeregu (3.96) wynika zbieżność szeregu (3.78a). Podobnie można wykazać zbieżność pozostałych szeregów (3.78) i (3.79) w przypadku, gdy punkt x leży na powierzchni elementu walcowego e_1^1 . Ogólnie, można więc określić funkcje kształtu $c_{k,1,s}^1(x)$ (3.77) za pomocą kombinacji zbieżnych szeregów (3.78) i (3.79), które pozwalają, zgodnie ze wzorem (3.76), przybliżyć operacje (2.5) typu potencjału warstwy pojedynczej zadanej na dowolnym układzie przewodów jako funkcję liniową N zmiennych harmonicznych $G_{k,1,s}^1$ ($k = 1, 2$) ($s = 0, 1, \dots, N$) zadanych w przekrojach poprzecznych dzielących przewody na elementy walcowe e_i^1 ($i = 1, 2, \dots, N_p$) ($i = 1, 2, \dots, N_1$).

3.2. Aproksymacja pochodnej potencjału warstwy pojedynczej zadanej na dowolnych powierzchniach

Operacje całkowe występujące w układach równań całkowych II rodzaju (2.27) lub (2.37) i (2.40) składają się z operacji typu potencjału warstwy pojedynczej i jego pochodnych w kierunku normalnym. Z punktu widzenia obliczeń numerycznych rzeczą istotną jest dokonać ich aproksymacji. Aproksymację potencjału warstwy pojedynczej rozpatrywano w punkcie 3.1. W niniejszym punkcie rozpatrywana będzie aproksymacja pochodnej potencjału warstwy pojedynczej:

$$\nabla G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{p1}} \oint_{S_1} G^1(\gamma) \frac{d}{dn_x} \left(\frac{1}{|XY|} \right) dS_\gamma = \frac{1}{2X} \sum_{i=1}^{N_{p1}} \oint_{S_\gamma} G^1(\gamma) \frac{\cos[(\overline{XY}, \vec{n}_x)]}{|XY|^2} dS_\gamma. \quad (3.97)$$

Do aproksymacji dowolnych powierzchni S^1 zastosowana będzie metoda z pkt. 3.1.1, tj. triangulacja trójkątami e_{ijk}^1 (3.10) utworzonymi przez punkty triangulacyjne $v_i^1 \in S^1$. Do aproksymacji funkcji gęstości ładunków przyjęto funkcje stałe na każdym z trójkątów e_{ijk}^1 (3.14). Przyjmując dalej oznaczenie z rys. 3.1b dla każdego trójkąta e_{ijk}^1 triangulacji oraz uwzględniając wzory (3.11), ..., (3.14) jak również

$$\cos[(\vec{x}\vec{y}) \cdot \vec{n}_x] = \frac{[\xi(v_i^1 v_j^1) + \eta(v_i^1 v_k^1) + \overline{xv}_i^1] \cdot \vec{n}_x}{(v_i^1 v_j^1) + (v_i^1 v_k^1) + \overline{xv}_i^1} \quad (3.98)$$

operację W_0 (3.97) można przybliżyć następująco:

$$W_0 G \cong W_{p_0} G = \sum_{l=1}^{N_{p1}} \sum_{\{ijk\} \in N^1} G_{ijk}^1(x) G_{ijk}^1 \quad (3.99)$$

gdzie

$$G_{ijk}^1(x) = \frac{|(v_i^1 v_j^1) \times (v_i^1 v_k^1)|}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \frac{[\xi(v_i^1 v_j^1) + \eta(v_i^1 v_k^1) + \overline{xv}_i^1] \cdot \vec{n}_x}{|\xi(v_i^1 v_j^1) + \eta(v_i^1 v_k^1) + \overline{xv}_i^1|} d\xi d\eta \quad (3.100)$$

gdzie

N^1 - zbiór trójkątów triangulacji powierzchni S^1 .
Jeżeli punkt $x \in e_{ijk}^1$, to całka niewłaściwa (3.100) jest zbieżna [73] i niezależnie od położenia punktu x da się wyrazić za pomocą funkcji standardowych. Niech na początek punkt x nie leży na trójkącie e_{ijk}^1 , tj.

$$[\xi(v_i^1 v_j^1) + \eta(v_i^1 v_k^1) + \overline{xv}_i^1] \cdot \vec{n}_x \neq 0. \quad (3.101)$$

Wyrażenie pod znakiem całki (3.100) można wówczas przekształcić następująco:

$$\frac{[\xi(v_i^1 v_j^1) + \eta(v_i^1 v_k^1) + \overline{xv}_i^1] \cdot \vec{n}_x}{|\xi(v_i^1 v_j^1) + \eta(v_i^1 v_k^1) + \overline{xv}_i^1|^3} = \frac{(v_i^1 v_k^1) \cdot \vec{n}_x}{2|v_i^1 v_k^1|^2} \frac{2|v_i^1 v_k^1|^2 \eta + 2(v_i^1 v_k^1) \cdot ((v_i^1 v_j^1)\xi + \overline{xv}_i^1)}{[|v_i^1 v_k^1|^2 \eta^2 + 2(v_i^1 v_k^1) \cdot ((v_i^1 v_j^1)\xi + \overline{xv}_i^1) \eta + |\overline{xv}_i^1 + \xi(v_i^1 v_j^1)|^2]^2} +$$

$$\cdot \left[(\xi(v_i^1 v_j^1) + \overline{xv}_i^1) \cdot \vec{n}_x - \frac{[(v_i^1 v_k^1) \cdot \vec{n}_x] [2(v_i^1 v_k^1) \cdot (\xi(v_i^1 v_j^1) + \overline{xv}_i^1)]}{2|v_i^1 v_k^1|^2} \right] \cdot \frac{1}{[|v_i^1 v_k^1|^2 \eta^2 + 2(v_i^1 v_k^1) \cdot (\xi(v_i^1 v_j^1) + \overline{xv}_i^1) \eta + |\overline{xv}_i^1 + \xi(v_i^1 v_j^1)|^2]^{3/2}} \quad (3.102)$$

Uwzględniając w całce (3.100) przekształcenie (3.102) oraz całkując najpierw ze względu na zmienną η w przedziale od 0 do $1-\xi$, stosując dla drugiego wyrażenia wzoru (3.102) podstawienie Abela [46]:

$$t = \frac{2|v_i^1 v_k^1| \eta + 2(v_i^1 v_k^1) \cdot (\xi(v_i^1 v_j^1) + \overline{xv}_i^1)}{[|v_i^1 v_k^1|^2 \eta^2 + 2(v_i^1 v_k^1) \cdot (\xi(v_i^1 v_j^1) + \overline{xv}_i^1) \eta + |\overline{xv}_i^1 + \xi(v_i^1 v_j^1)|^2]^{1/2}} \quad (3.103)$$

natomiast od pierwszego wyrażenia wzoru (3.102) podstawienie [46]

$$u = [|v_i^1 v_k^1|^2 \eta^2 + 2(v_i^1 v_k^1) \cdot (\xi(v_i^1 v_j^1) + \overline{xv}_i^1) \eta + |\overline{xv}_i^1 + \xi(v_i^1 v_j^1)|^2]^{1/2} \quad (3.104)$$

otrzymuje się:

$$G_{ijk}^1(x) = \frac{|(v_i^1 v_j^1) \times (v_i^1 v_k^1)|}{2\pi} \int_0^1 \frac{(G_2 \xi^2 + G_1 \xi + G_0) d\xi}{(B_2 \xi^2 + B_1 \xi + B_0) \sqrt{A_2 \xi^2 + A_1 \xi + A_0}} + \int_0^1 \frac{(H_2 \xi^2 + H_1 \xi + H_0) d\xi}{(B_2 \xi^2 + B_1 \xi + B_0) \sqrt{D_2 \xi^2 + D_1 \xi + D_0}} \quad (3.105)$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_0 &= |\overline{xv}_i^1|^2; & A_1 &= 2(\overline{xv}_i^1) \cdot (v_i^1 v_j^1); & A_2 &= |v_i^1 v_j^1|^2 \\ D_0 &= |\overline{xv}_k^1|^2; & D_1 &= 2(\overline{xv}_k^1) \cdot (v_i^1 v_k^1); & D_2 &= |v_i^1 v_k^1|^2 \\ B_0 &= |(\overline{xv}_i^1) \cdot (v_i^1 v_k^1)|^2; & B_1 &= 2[(v_i^1 v_k^1) \times (\overline{xv}_i^1)] \cdot [(v_i^1 v_j^1) \times (v_i^1 v_k^1)]; \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned}
 B_2 &= |(\overline{y_1^1 y_j^1}) \times (\overline{y_1^1 y_k^1})|^2 \\
 G_0 &= [(\overline{x y_1^1}) \times \overline{n_x}] \cdot [(\overline{x y_1^1}) \times (\overline{y_1^1 y_k^1})] \\
 G_1 &= [(\overline{x y_1^1}) \times \overline{n_x}] \cdot [(\overline{y_1^1 y_j^1}) \times (\overline{y_1^1 y_k^1})] + [(\overline{x y_1^1}) \times (\overline{y_1^1 y_k^1})] \cdot [(\overline{y_1^1 y_j^1}) \times \overline{n_x}] \\
 G_2 &= [(\overline{y_1^1 y_j^1}) \times \overline{n_x}] \cdot [(\overline{y_1^1 y_j^1}) \times (\overline{y_1^1 y_k^1})] \quad (3.106) \\
 H_0 &= [(\overline{x y_k^1}) \times \overline{n_x}] \cdot [(\overline{y_1^1 y_k^1}) \times (\overline{x y_1^1})] \\
 H_1 &= [(\overline{x y_k^1}) \times \overline{n_x}] \cdot [(\overline{y_1^1 y_k^1}) \times (\overline{y_1^1 y_j^1})] + [(\overline{x y_1^1}) \times (\overline{y_1^1 y_k^1})] \cdot [(\overline{y_j^1 y_k^1}) \times \overline{n_x}] \\
 H_2 &= [(\overline{y_j^1 y_k^1}) \times \overline{n_x}] \cdot [(\overline{y_1^1 y_j^1}) \times (\overline{y_1^1 y_k^1})]
 \end{aligned}$$

Całki występujące we wzorze (3.105) można przekształcić na sumę dwóch całek:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{(G_2 \xi^2 + G_1 \xi + G_0) d\xi}{(B_2 \xi^2 + B_1 \xi + B_0) \sqrt{A_2 \xi^2 + A_1 \xi + A_0}} &= \frac{G_2}{B_2} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{A_2 \xi^2 + A_1 \xi + A_0}} + \\
 + \frac{1}{B_2 \sqrt{A_2}} \int_0^1 \frac{(G_1 - \frac{G_2}{B_2} B_1) \xi + G_0 - \frac{G_2}{B_2} B_0}{(\xi^2 + \frac{B_1}{B_2} \xi + \frac{B_0}{B_2}) \sqrt{\xi^2 + \frac{A_1}{A_2} \xi + \frac{A_0}{A_2}}} d\xi &\quad (3.107)
 \end{aligned}$$

Pierwsza z całek występująca po prawej stronie wzoru (3.107) jest całką elementarną, natomiast druga z nich po podstawieniu [46]:

$$\xi = \frac{\mu_1 t + \nu_1}{t + 1} \quad (3.108)$$

gdzie μ_1, ν_1 są rozwiązaniami równania kwadratowego:

$$(\frac{B_1}{B_2} - \frac{A_1}{A_2}) z^2 + 2(\frac{B_0}{B_2} - \frac{A_0}{A_2}) z + \frac{A_1 B_0}{A_2 B_2} - \frac{B_1 A_0}{B_2 A_2} = 0. \quad (3.109)$$

Sprawdza się do sumy dwóch całek

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{B_2 \sqrt{A_2}} \int_0^1 \frac{[(G_1 - \frac{G_2}{B_2} B_1) \xi + (G_0 - \frac{G_2}{B_2} B_0)] d\xi}{(\xi^2 + \frac{B_1}{B_2} \xi + \frac{B_0}{B_2}) \sqrt{\xi^2 + \frac{A_1}{A_2} \xi + \frac{A_0}{A_2}}} &= \\
 = \frac{1}{B_2 \sqrt{A_2}} \frac{1}{\mu_1^2 + \frac{B_1}{B_2} \mu_1 + \frac{B_0}{B_2}} \left\{ [(G_1 - \frac{G_2}{B_2} B_1) \nu_1 + \right. & \\
 + G_0 + \frac{G_2}{B_2} B_0] \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(t^2 + \alpha_1) \sqrt{\alpha_1 t^2 + \beta_1}} + & \\
 \left. + \frac{1}{\alpha_1} [(G_1 + \frac{G_2}{B_2} B_1) \mu_1 + G_0 - \frac{G_2}{B_2} B_0] \int_{t_1}^{t_2} \frac{\alpha_1 t dt}{(t^2 + \alpha_1) \sqrt{\alpha_1 t^2 + \beta_1}} \right\} &\quad (3.110)
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$t_1 = -\frac{\nu_1}{\mu_1}; \quad t_2 = \frac{\nu_1 - 1}{1 - \mu_1}; \quad \lambda_1 = \frac{\nu_1^2 + \frac{B_1}{B_2} \nu_1 + \frac{B_0}{B_2}}{\mu_1^2 + \frac{B_1}{B_2} \mu_1 + \frac{B_0}{B_2}};$$

$$\alpha_1 = \mu_1^2 + \frac{A_1}{A_2} \mu_1 + \frac{A_0}{A_2}; \quad \beta_1 = \nu_1^2 + \frac{A_1}{A_2} \nu_1 + \frac{A_0}{A_2}.$$

Pierwszą całkę występującą we wzorze (3.110) można sprowadzić do całki elementarnej przez podstawienie Abela [46]:

$$u = \frac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^2 + \beta}}.$$

natomiast w drugiej wystarczy w tym celu dokonać podstawienia:

$$v = \sqrt{\alpha t^2 + \beta}.$$

Wykazano więc, że całki występujące we wzorze (3.105) sprowadzają się do całek elementarnych. Po wykonaniu obliczeń otrzymuje się:

$$G_{ijk}^1(x) = \frac{|(Y_1^1 Y_1^1) \times (Y_1^1 Y_1^1)|}{2\pi} \left[\frac{G_2}{B_2} \frac{1}{\sqrt{A_2}} \ln \left| \frac{2A_2 + A_1 + 2\sqrt{A_2(A_2 + A_1 + A_0)}}{A_1 + 2\sqrt{A_2 A_0}} \right| + \right.$$

$$\left. \frac{2}{B_2} \frac{1}{\sqrt{D_2}} \ln \left| \frac{2D_2 + D_1 + 2\sqrt{D_2(D_2 + D_1 + D_0)}}{D_1 + 2\sqrt{D_2 D_0}} \right| + \frac{1}{\sqrt{A_2}} \frac{1}{B_2 \mu_1^2 + B_1 \mu_1 + B_0} \right.$$

$$\left. \left[\frac{(G_1 B_2 - B_1 G_2) \nu_1 + G_0 B_2 + B_0 G_2}{2 B_2 \sqrt{\alpha_1 \beta_1}} \ln \frac{(\nu_1 - 1) \sqrt{\alpha_1 \beta_1 - \beta_1} + \sqrt{\beta_1} [\alpha_1 (\nu_1 - 1)^2 + \beta_1 (1 - \mu_1)^2]}{(\nu_1 - 1) \sqrt{\alpha_1 \beta_1 - \beta_1} - \sqrt{\beta_1} [\alpha_1 (\nu_1 - 1)^2 + \beta_1 (1 - \mu_1)^2]} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\nu_1 \sqrt{\alpha_1 \beta_1 - \beta_1} - \sqrt{\beta_1} (\alpha_1 \nu_1^2 + \beta_1 \mu_1^2)}{\nu_1 \sqrt{\alpha_1 \beta_1 - \beta_1} + \sqrt{\beta_1} (\alpha_1 \nu_1^2 + \beta_1 \mu_1^2)} + \frac{(G_1 B_2 - B_1 G_2) \mu_1 + G_0 B_2 - B_0 G_2}{B_2 \sqrt{\alpha_1 \beta_1}} (\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_1 \nu_1^2 + \beta_1 \mu_1^2}}{\mu_1 \sqrt{\alpha_1 \beta_1 - \beta_1}} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_1 (\nu_1 - 1)^2 + \beta_1 (1 - \mu_1)^2}}{(1 - \mu_1) \sqrt{\alpha_1 \beta_1 - \beta_1}} \right) + \frac{1}{\sqrt{D_2}} \frac{1}{B_2 \mu_2^2 + B_1 \mu_2 + B_0} \left[\frac{(H_1 B_2 - B_1 H_2) \nu_2 + (H_0 B_2 - B_0 H_2)}{B_2 \sqrt{(\alpha_2 \beta_2 - \beta_2) \beta_2}} \right.$$

$$\left. \ln \frac{(\nu_2 - 1) \sqrt{\alpha_2 \beta_2 - \beta_2} + \sqrt{\beta_2} [\alpha_2 (\nu_2 - 1)^2 + \beta_2 (1 - \mu_2)^2]}{(\nu_2 - 1) \sqrt{\alpha_2 \beta_2 - \beta_2} - \sqrt{\beta_2} [\alpha_2 (\nu_2 - 1)^2 + \beta_2 (1 - \mu_2)^2]} \right] + \frac{(\nu_2 \sqrt{\alpha_2 \beta_2 - \beta_2} - \sqrt{\beta_2} (\alpha_2 \nu_2^2 + \beta_2 \mu_2^2))}{(\nu_2 - 1) \sqrt{\alpha_2 \beta_2 - \beta_2} + \sqrt{\beta_2} (\alpha_2 \nu_2^2 + \beta_2 \mu_2^2)}$$

$$+ \frac{(H_1 B_2 - B_1 H_2) \mu_2 + (H_0 B_2 - B_0 H_2)}{B_2 \sqrt{\alpha_2 \beta_2 - \beta_2}} (\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_2 (\nu_2 - 1)^2 + \beta_2 (\mu_2 - 1)^2}}{(1 - \mu_2) \sqrt{\alpha_2 \beta_2 - \beta_2}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_2 \nu_2^2 + \beta_2 \mu_2^2}}{\mu_2 \sqrt{\alpha_2 \beta_2 - \beta_2}}) \left. \right] \quad (3.111)$$

gdzie:

$$\nu_1 = \frac{1}{\frac{B_1}{B_2} - \frac{A_1}{A_2}} \left[\frac{A_0}{A_2} - \frac{B_0}{B_2} + \sqrt{\left(\frac{A_0}{A_2} - \frac{B_0}{B_2} \right)^2 - \left(\frac{B_1}{B_2} - \frac{A_1}{A_2} \right) \left(\frac{A_1 B_0}{A_2 B_2} - \frac{B_1 A_0}{A_2 B_2} \right)} \right]$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\frac{B_1}{B_2} - \frac{A_1}{A_2}} \left[\frac{A_0}{A_2} - \frac{B_0}{B_2} - \sqrt{\left(\frac{A_0}{A_2} - \frac{B_0}{B_2} \right)^2 - \left(\frac{B_1}{B_2} - \frac{A_1}{A_2} \right) \left(\frac{A_1 B_0}{A_2 B_2} - \frac{B_1 A_0}{A_2 B_2} \right)} \right]$$

$$\nu_2 = \frac{1}{\frac{B_1}{B_2} - \frac{D_1}{D_2}} \left[\frac{D_0}{D_2} - \frac{B_0}{B_2} + \sqrt{\left(\frac{D_0}{D_2} - \frac{B_0}{B_2} \right)^2 - \left(\frac{B_1}{B_2} - \frac{D_1}{D_2} \right) \left(\frac{D_1 B_0}{D_2 B_2} - \frac{B_1 D_0}{D_2 B_2} \right)} \right]$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\frac{B_1}{B_2} - \frac{D_1}{D_2}} \left[\frac{D_0}{D_2} - \frac{B_0}{B_2} - \sqrt{\left(\frac{D_0}{D_2} - \frac{B_0}{B_2} \right)^2 - \left(\frac{B_1}{B_2} - \frac{D_1}{D_2} \right) \left(\frac{D_1 B_0}{D_2 B_2} - \frac{B_1 D_0}{D_2 B_2} \right)} \right] \quad (3.112)$$

$$\nu_1 = \frac{B_2 \nu_1^2 + B_1 \nu_1 + B_0}{B_2 \mu_1^2 + B_1 \mu_1 + B_0}; \quad \nu_2 = \frac{B_2 \nu_2^2 + B_1 \nu_2 + B_0}{B_2 \mu_2^2 + B_1 \mu_2 + B_0}$$

$$\alpha_1 = \mu_1^2 + \frac{A_1}{A_2} \mu_1 + \frac{A_0}{A_2}; \quad \beta_1 = \nu_1^2 + \frac{A_1}{A_2} \nu_1 + \frac{A_0}{A_2}$$

$$\alpha_2 = \mu_2^2 + \frac{D_1}{D_2} \mu_2 + \frac{D_0}{D_2}; \quad \beta_2 = \nu_2^2 + \frac{D_1}{D_2} \nu_2 + \frac{D_0}{D_2}$$

natomiast współczynniki A_1, B_1, D_1, G_1, H_1 ($i = 0, 1, 2$) jako funkcje współrzędnych punktu x i współrzędnych triangulacji Y_1^i powierzchni S^1 oraz wektora \vec{n}_x normalnego do powierzchni S^k ($x \in S^k$) wyrażają się wzorami (3.106).

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy punkt x zmierza do punktu x leżącego na powierzchni trójkąta e_{ijk}^1 . Wówczas wykonując skomplikowane obliczenie przejścia granicznego we wzorze (3.111), otrzymuje się:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \in e_{ijk}^1} G_{ijk}^1(x) = -1. \quad (3.113)$$

Przejście graniczne (3.113) wynika z ogólnej własności zachowania się pochodnej potencjału warstwy pojedynczej (2.24). Istotnie, biorąc pod uwagę przybliżenie (3.99) pochodnej normalnej potencjału warstwy pojedynczej (3.97), otrzymuje się:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \in e_{ijk}^1} W_{p_0}^G = \lim_{x \rightarrow x_0 \in e_{ijk}^1} G_{ijk}^1(x) G_{ijk}^1 + \sum_{S=1}^{N_{p1}} \left\{ \begin{matrix} mnp \\ \{mnp\} \neq \{ijk\} \end{matrix} \right\} G_{mnp}^s(x_0) \delta_{mnp}^s. \quad (3.14)$$

Z drugiej strony stosując w ogólnym przejściu granicznym (2.25) aproksymację funkcji gęstości ładunków i powierzchni ich rozkładu, wprowadzoną na początku tego punktu 3.2 oraz uwzględniając fakt, że w dowolnie małym

otoczeniu $S_{x_0} \in \mathcal{E}_{ijk}^1$ punktu $x_0 \in \mathcal{E}_{ijk}^1$ licznik funkcji podcałkowej (3.100) jest równy zeru, tj.:

$$\left[\xi(x_1^1 y_1^1) + \eta(y_1^1 y_k^1) + x_0^1 y_1^1 \right] \cdot \vec{n}_x = 0 \quad \text{dla} \quad \xi \in \left(\xi_0 - \frac{\epsilon}{2}, \xi_0 + \frac{\epsilon}{2} \right) \\ \eta \in \left(\eta_0 - \frac{\epsilon}{2}, \eta_0 + \frac{\epsilon}{2} \right)$$

(parametry ξ_0, η_0 odpowiadają punktowi x_0), otrzymuje się:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \in \mathcal{E}_{ijk}^1} 2\epsilon_0 \frac{dV(x)}{dn_x} \approx -\sigma_{ijk}^1 + \sum_{s=1}^{N_{p1}} \sum_{\{mnp\} \in \mathcal{J}^s} G_{mnp}^s(x_0) \sigma_{mnp}^s \quad (3.115) \\ (s=1; \{mnp\} \neq \{ijk\})$$

Porównując więc wzory (3.114) i (3.115), otrzymuje się granicę (3.113). W ten sposób określono funkcje $G_{ijk}^1(x)$ (3.111) współrzędnych punktu x i ich zachowanie się przy zmierzaniu punktu x do powierzchni \mathcal{E}_{ijk}^1 (wzór (3.113)), które na mocy wzoru (3.99) pozwalają przybliżyć pochodną normalną potencjału warstwy pojedynczej jako funkcję liniową stałych ładunków σ_{ijk}^1 trójkątów triangulacji \mathcal{E}_{ijk}^1 powierzchni S^1 . Wcześniej podana aproksymacja pochodnej potencjału warstwy pojedynczej jest możliwie najprostsza, wymaga jednak dużej liczby elementów \mathcal{E}_{ijk}^1 . Wprowadzenie aproksymacji liniowej (wzór (3.17)), gdzie węzły leżą w narożach trójkątów \mathcal{E}_{ijk}^1 (wzór (3.10)), jest korzystniejsze ze względu na dokładność obliczeń, stwarza jednak dodatkowe problemy związane z aproksymacją pochodnej normalnej, która w narożach elementów jest nieokreślona.

3.3. Aproksymacja potencjału warstwy podwójnej zadanej na dowolnych powierzchniach

Operacje całkowe występujące w układach równań całkowych II rodzaju (3.55) składają się z operacji typu potencjału warstwy podwójnej. Mając na uwadze przybliżone metody rozwiązywania tego układu, należy dokonać aproksymacji potencjału warstwy podwójnej:

$$u_T = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{N_{p1}} \int_{S^1} \tau(\gamma) \frac{\cos(\vec{YX}, \vec{n}_\gamma)}{|XY|^2} dS_\gamma \quad (3.116)$$

Do aproksymacji dowolnych powierzchni S^1 zastosowana będzie metoda opisana w pkt. 3.1.1, tj. triangulacja trójkątami \mathcal{E}_{ijk}^1 (3.10) utworzonymi

przez punkty triangulacji $Y_1^1 \in S^1$. Do aproksymacji funkcji gęstości przyjęto funkcje stałe na każdym z trójkątów \mathcal{E}_{ijk}^1

$$\tau^1(\gamma) = \tau_{ijk}^1 = \text{const}; \quad \gamma \in \mathcal{E}_{ijk}^1; \quad (l = 1, 2, \dots, N_{p1}). \quad (3.117)$$

Przyjmując oznaczenia z rys. 3.1b dla każdego trójkąta \mathcal{E}_{ijk}^1 triangulacji oraz biorąc pod uwagę wzory (3.117), (3.11), (3.12) i (3.13) jak również uwzględniając, że

$$\vec{n}_\gamma = \frac{(\vec{y}_1^1 y_k^1) \times (\vec{y}_1^1 y_j^1)}{|(\vec{y}_1^1 y_k^1) \times (\vec{y}_1^1 y_j^1)|} = \text{const} \quad \text{dla} \quad \gamma \in \mathcal{E}_{ijk}^1 \quad (3.118)$$

$$\cos(\vec{YX}, \vec{n}_\gamma) = \frac{[(\vec{y}_1^1 y_j^1) \times (\vec{y}_1^1 y_k^1)] \cdot (\vec{XY}_1^1)}{|(\vec{y}_1^1 y_j^1) \times (\vec{y}_1^1 y_k^1)| \left| \xi(\vec{y}_1^1 y_j^1) + \eta(\vec{y}_1^1 y_k^1) + \vec{XY}_1^1 \right|}; \quad \gamma \in \mathcal{E}_{ijk}^1 \quad (3.119)$$

operację u (3.116) można przybliżyć następująco:

$$u_T = u_{p_0} \approx \sum_{l=1}^{N_{p1}} \sum_{\{ijk\} \in \mathcal{J}^l} L_{ijk}^1(x) \tau_{ijk}^1 \quad (3.120)$$

gdzie

$$L_{ijk}^1(x) = \frac{[(\vec{y}_1^1 y_j^1) \times (\vec{y}_1^1 y_k^1)] \cdot (\vec{XY}_1^1)}{2\pi} \int_0^{\xi} \int_0^{\eta} \frac{d\eta d\xi}{\left| \xi(\vec{y}_1^1 y_j^1) + \eta(\vec{y}_1^1 y_k^1) + \vec{XY}_1^1 \right|} \quad (3.121)$$

N^1 - zbiór trójkątów triangulacji powierzchni zamkniętej S^1 .

Jeżeli punkt x nie leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez trójkąt \mathcal{E}_{ijk}^1 , to

$$[(\vec{y}_1^1 y_j^1) \times (\vec{y}_1^1 y_k^1)] \cdot (\vec{XY}_1^1) \neq 0. \quad (3.122)$$

Jeżeli ponadto w szczególności $x \in \mathcal{E}_{ijk}^1$, to całka (3.121) nie ma osobliwości. Całkując najpierw w wyrażeniu (3.121), ze względu na zmienną η stosując podstawienie Abela [46] (3.103), otrzymuje się:

$$L_{ijk}^1(x) = \frac{1}{2\pi} \left[(\overline{y_1^1 y_j^1}) \times (\overline{y_1^1 y_k^1}) \cdot (\overline{xy_1^1}) \int_0^1 \frac{(G'_1 \xi + G'_0) d\xi}{(B_2 \xi^2 + B_1 \xi + B_0) \sqrt{A_2 \xi^2 + A_1 \xi + A_0}} + \int_0^1 \frac{(H'_1 \xi + H'_0) d\xi}{(B_2 \xi^2 + B_1 \xi + B_0) \sqrt{D_2 \xi^2 + D_1 \xi + D_0}} \right], \quad (3.123)$$

gdzie

$A_2, A_1, A_0, B_2, B_1, B_0, D_2, D_1, D_0$ wyrażają się wzorami (3.106), natomiast

$$G'_1 = -(\overline{y_1^1 y_k^1}) \cdot (\overline{y_1^1 y_j^1}); \quad G'_0 = -(\overline{y_1^1 y_k^1}) \cdot (\overline{xy_1^1}) \quad (3.124)$$

$$H'_1 = -(\overline{y_k^1 y_1^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_j^1}); \quad H'_0 = -(\overline{y_k^1 y_1^1}) \cdot (\overline{xy_k^1})$$

Do obliczenia całek (3.123) można zastosować sposób podany przy obliczaniu całek (3.105), co formalnie rzecz biorąc sprowadza się do zastąpienia we wzorze (3.111) wyrażenia $(\overline{y_1^1 y_j^1}) \times (\overline{y_1^1 y_k^1})$ wyrażeniem (3.122) oraz podstawienia $H_2 = 0, G_2 = 0$ przy równoczesnej zmianie współczynników G_1, G_0 i H_1, H_0 współczynnikami G'_1, G'_0 i H'_1, H'_0 wyrażonymi wzorami (3.124). Pozostałe współczynniki A_i, B_i, D_i ($i = 0, 1, 2$) pozostają bez zmian, tj. wyrażają się wzorami (3.106). W ten sposób można obliczyć funkcję $L_{ijk}^1(x)$ (3.121) współrzędnych punktu x odpowiadającą trójkątowi e_{ijk}^1 triangulacji powierzchni S^1 przy spełnieniu założenia (3.122).

Jeżeli punkt x nie leży w płaszczyźnie położenia trójkąta e_{ijk}^1 , lecz poza nią, to ze względu na iloczyn mieszany występujący przed całką (3.121) funkcja $L_{ijk}^1(x)$ przyjmuje wartość zerową.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy punkt x zmierza do wnętrza trójkąta e_{ijk}^1 od strony zewnętrznej powierzchni S^1 . Wykonując skomplikowane przejście graniczne, we wzorze (3.121) otrzymuje się:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \in e_{ijk}^1 \\ x \in \mathbb{R}^3 - \bar{D}^1}} L_{ijk}^1(x_0) = -1 \quad (3.125)$$

Przejście graniczne (3.125) wynika z ogólnej własności granicznej potencjału warstwy podwójnej (3.116). Istotnie, biorąc pod uwagę przejście graniczne (2.49) w przybliżeniu (3.120) potencjału warstwy podwójnej (3.116), otrzymuje się:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \in e_{ijk}^1 \\ x \in \mathbb{R}^3 - \bar{D}^1}} u_{p_0} \tau = -\tau_{ijk}^1 + \sum_{s=1}^{N_{p1}} \sum_{\{npr\} \in J^s} L_{npr}^1(x_0) \tau_{npr}^1 \quad (3.126)$$

($s=1 \wedge \{npr\} \neq \{ijk\}$)

Z przejścia granicznego (3.126) wynika (3.125). W ten sposób określono funkcje $L_{ijk}^1(x)$ (3.121) współrzędnych punktu x i ich zachowanie się przy zmierzaniu punktu x do powierzchni e_{ijk}^1 , które zgodnie ze wzorem (3.120) pozwalają przybliżyć potencjał warstwy podwójnej jako funkcję liniową stałych gęstości τ_{ijk}^1 poszczególnych trójkątów e_{ijk}^1 triangulacji powierzchni $S = \bigcup_{i=1}^{N_{p1}} S^1$.

Dokładniejsze przybliżenie operatora (3.116) typu potencjału warstwy podwójnej otrzymuje się, jeżeli funkcja gęstości warstwy podwójnej $\tau^1(\gamma)$ będzie aproksymowana funkcjami sklejonymi pierwszego stopnia dwóch zmiennych (ξ, η) (3.23), których początek dla trójkąta jest np. zlokalizowany w punkcie y_k^1 (rys. 3.1b). Interpolując dane wartości τ_k^1 w punktach triangulacji y_1^1 powierzchni S^1 otrzymuje się (por. wzór (3.26)):

$$\tau^1(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{k} + (\tau_1^1 - \tau_k^1)\xi + (\tau_j^1 - \tau_k^1)\eta; & \gamma \in e_{ijk}^1; \quad 0 < \xi < 1; \quad 0 < \eta < 1 - \xi \\ 0 & ; \quad \gamma \notin e_{ijk}^1; \end{cases} \quad (3.127)$$

gdzie

$$\tau_1^1 = \tau^1(y_1^1) - \text{gęstość warstwy podwójnej w punkcie triangulacji } y_1^1 \text{ powierzchni } S^1.$$

Jeżeli początek lokalnego układu współrzędnych ξ, η jest zlokalizowany w punkcie y_k^1 (rys. 3.1b), to:

$$|\overline{xy}| = \left| \xi (\overline{y_k^1 y_1^1}) + \eta (\overline{y_k^1 y_j^1}) + \overline{xy_k^1} \right|; \quad \gamma \in e_{ijk}^1 \quad (3.128)$$

$$\overline{n_\gamma} \frac{(\overline{y_k^1 y_1^1}) \times (\overline{y_k^1 y_j^1})}{|(\overline{y_k^1 y_j^1}) \times (\overline{y_k^1 y_1^1})|} = \text{const} \quad \text{dla } \gamma \in e_{ijk}^1 \quad (3.129)$$

$$\cos(\overline{yx}, \overline{n_\gamma}) = \frac{[(\overline{y_k^1 y_1^1}) \times (\overline{y_k^1 y_j^1})] \cdot (\overline{xy_k^1})}{|(\overline{y_k^1 y_j^1}) \times (\overline{y_k^1 y_1^1})| \left| \xi (\overline{y_k^1 y_1^1}) + \eta (\overline{y_k^1 y_j^1}) + \overline{xy_k^1} \right|}; \quad \gamma \in e_{ijk}^1 \quad (3.130)$$

Uwzględniając wzory (3.127), (3.128), (3.129), (3.130) oraz (3.13), operację (3.116) można przybliżyć następująco:

$$u_{\tau} \approx u_{p_1} \tau = \sum_{l=1}^{N_{p_1}} \sum_{\{ijk\} \in \mathcal{J}^1} u_{ijk}^1(x), \quad (3.131)$$

gdzie:

$$u_{ijk}^1(x) = R_{ijk}^1(x) \tau_i^1 + S_{ijk}^1(x) \tau_j^1 + T_{ijk}^1(x) \tau_k^1 \quad (3.132)$$

$$R_{ijk}^1(x) = \frac{1}{2\pi} \left[(\overline{y_k^1 y_j^1}) \times (\overline{y_k^1 y_i^1}) \right] \cdot (\overline{xy_k^1}) \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \frac{\xi d\eta d\xi}{|\xi(\overline{y_k^1 y_i^1}) + \eta(\overline{y_k^1 y_j^1}) + x\overline{y_k^1}|^3} \quad (3.133)$$

$$S_{ijk}^1(x) = \frac{1}{2\pi} \left[(\overline{y_k^1 y_j^1}) \times (\overline{y_k^1 y_i^1}) \right] \cdot (\overline{xy_k^1}) \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \frac{\eta d\eta d\xi}{|\xi(\overline{y_k^1 y_i^1}) + \eta(\overline{y_k^1 y_j^1}) + x\overline{y_k^1}|^3} \quad (3.134)$$

$$T_{kij}^1(x) = \frac{1}{2\pi} \left[(\overline{y_k^1 y_j^1}) \times (\overline{y_k^1 y_i^1}) \right] \cdot (\overline{xy_k^1}) \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \frac{(1-\xi-\eta) d\eta d\xi}{|\xi(\overline{y_k^1 y_i^1}) + \eta(\overline{y_k^1 y_j^1}) + x\overline{y_k^1}|^3} \quad (3.135)$$

Przeprowadzając podobne rozumowanie jak w pkt. 3.1.1 odnośnie do funkcji $A_{ijk}^1(x)$, $B_{jik}^1(x)$, $C_{kij}^1(x)$, tj. wprowadzając kolejno początek układu współrzędnych (ξ, η) w punktach y_k^1 , y_i^1 , y_j^1 , można wykazać, że:

$$S_{jik}^1(x) = R_{jik}^1(x); \quad T_{kij}^1(x) = R_{kij}^1(x) \quad (3.136)$$

Uwzględniając równości (3.227) we wzorze (3.132), otrzymuje się:

$$u_{ijk}^1(x) = R_{ijk}^1(x) \tau_i^1 + R_{jik}^1(x) \tau_j^1 + R_{kij}^1(x) \tau_k^1. \quad (3.137)$$

Uwzględniając z kolei wyrażenie (3.137) we wzorze (3.131), można stwierdzić, że w celu przybliżenia operacji typu potencjału warstwy podwójnej wystarczy w sposób ogólny określić funkcja $R_{ijk}^1(x)$ wykonując podwójne całkowanie we wzorze (3.133), natomiast funkcje $R_{jik}^1(x)$, $R_{kij}^1(x)$ otrzymuje się przez odpowiednią permutację wskaźników i, j, k dotyczących trójkąta \mathcal{E}_{ijk}^1 w funkcji $R_{ijk}^1(x)$. Zmieniając następnie we wzorze (3.131) sumowania po trójkątach $\{ijk\} \in \mathcal{J}^1$ ($i = 1, 2, \dots, N_{p_1}$) na sumowania po punktach triangulacji powierzchni y_i^1 ($i = 1, 2, \dots, N_1$) ($i = 1, 2, \dots, N_{p_1}$) otrzymuje się:

$$u_{\tau} \approx u_{p_1} \tau = \sum_{l=1}^{N_{p_1}} \sum_{i=1}^{N_1} R_i^1(x) \tau_i^1, \quad (3.138)$$

gdzie

$$R_i^1(x) = \sum_{\{ijk\} \in \mathcal{J}_i^1} R_{ijk}^1(x) \quad (3.139)$$

\mathcal{J}_i^1 - zbiór trójkątów $\{ijk\}$ mających wspólny wierzchołek y_i^1 . Wyznaczenie funkcji $R_{ijk}^1(x)$ współrzędnych dowolnego punktu x w przestrzeni R^3 przy dowolnym usytuowaniu trójkąta \mathcal{E}_{ijk}^1 można dokonać wykonując podwójne całkowanie we wzorze (3.132). Całkując najpierw ze względu na zmienną η w przedziale $[0, 1-\xi]$ uwzględniając podstawienie Abela

$$\tau = \frac{2|\overline{y_k^1 y_i^1}|^2 + 2(\overline{y_k^1 y_i^1}) \cdot [\xi(\overline{y_k^1 y_i^1}) + x\overline{y_k^1}]}{|\xi(\overline{y_k^1 y_i^1}) + \eta(\overline{y_k^1 y_j^1}) + x\overline{y_k^1}|}, \quad (3.140)$$

otrzymuje się:

$$R_{ijk}^1(x) = \frac{1}{2\pi} (\overline{xy_k^1}) \cdot \left[(\overline{y_k^1 y_j^1}) \times (\overline{y_k^1 y_i^1}) \right] \left[\int_0^1 \frac{(G_2'' \xi^2 + G_1'' \xi + G_0'') d\xi}{(B_2'' \xi^2 + B_1'' \xi + B_0'') \sqrt{A_2'' \xi^2 + A_1'' \xi + A_0''}} + \int_0^1 \frac{(H_2'' \xi^2 + H_1'' \xi + H_0'') d\xi}{(B_2'' \xi^2 + B_1'' \xi + B_0'') \sqrt{D_2'' \xi^2 + D_1'' \xi + D_0''}} \right] \quad (3.141)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} A_0'' &= |\overline{xy_k^1}|^2; & A_1'' &= 2(\overline{y_k^1 y_i^1}) \cdot (\overline{xy_k^1}); & A_2'' &= |\overline{y_k^1 y_i^1}|^2 \\ D_0'' &= |\overline{xy_j^1}|^2; & D_1'' &= 2(\overline{y_j^1 y_i^1}) \cdot (\overline{xy_j^1}); & D_2'' &= |\overline{y_j^1 y_i^1}|^2 \\ B_0'' &= |(\overline{y_k^1 y_j^1}) \times (\overline{xy_k^1})|^2; & B_1'' &= 2[(\overline{y_k^1 y_j^1}) \times (\overline{y_k^1 y_i^1})] \cdot [(\overline{y_k^1 y_j^1}) \times (\overline{xy_k^1})] \\ B_2'' &= |(\overline{y_k^1 y_j^1}) \times (\overline{y_k^1 y_i^1})|^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.142)$$

$$\left. \begin{aligned} G_0'' = 0; \quad G_1'' = (\overline{y_j^1 y_k^1}) \cdot (\overline{x y_j^1}); \quad G_2'' = (\overline{y_j^1 y_k^1}) \cdot (\overline{y_k^1 y_1^1}) \\ H_0'' = 0; \quad H_1'' = (\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{x y_j^1}); \quad H_2'' = (\overline{y_k^1 y_j^1}) \cdot (\overline{y_j^1 y_1^1}) \end{aligned} \right\} \quad (3.142)$$

Do obliczenia całek (3.141) można zastosować sposób podany przy obliczaniu całek (3.105), co formalnie rzecz biorąc sprowadza się do zastąpienia we wzorze (3.111) wyrażenia $|\overline{(y_j^1 y_k^1)} \times \overline{(y_k^1 y_1^1)}|$ wyrażeniem $(\overline{x y_k^1}) \cdot [(\overline{y_k^1 y_j^1}) \times (\overline{y_k^1 y_1^1})]$ oraz zamianę występujących tam współczynników (3.106) odpowiednimi współczynnikami (3.142).

Jeżeli punkt leży na zewnątrz trójkąta e_{ijk}^1 w płaszczyźnie x_{ijk}^1 jego położenia ($x \in \pi_{ijk}^1 - e_{ijk}^1$) (wzory (3.10) i (3.38)), to ze względu na zerowanie się iloczynu mieszanego występującego przed całkami (3.141) zachodzi:

$$R_{ijk}^1(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \pi_{ijk}^1 - e_{ijk}^1 \quad (3.143)$$

W ten sposób otrzymuje się ogólny wzór na funkcję $R_{ijk}^1(x)$ współrzędnych punktu x , które na mocy wzorów (3.138) i (3.139) pozwalają przybliżyć potencjał warstwy podwójnej U_s^1 (3.116) w przypadku, gdy punkt x nie leży na powierzchniach S^1 ($i = 1, 2, \dots, N_{p1}$).

Jeżeli natomiast punkt x zmierza do powierzchni S^1 od strony zewnętrznej, to zachowanie się operatora przybliżonego U_{p1}^1 (3.138) można określić biorąc pod uwagę ogólną własność graniczną (2.49) potencjału warstwy podwójnej. W dalszych zastosowaniach potrzebna będzie graniczna wartość operatora przybliżonego U_{p1}^1 (3.138) w punktach triangulacji Y_1^1 powierzchni S^1 ($i = 1, 2, \dots, N_{p1}$). Otrzymuje się wówczas:

$$\lim_{x \rightarrow Y_1^1} U_{p1}^1 x = -\frac{\alpha_1^1}{2\pi} \tau_1^1 + \sum_{k=1}^{N_{p1}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_k} R_j^k(y_1^1) \tau_j^k \quad (3.144)$$

gdzie:

$$\alpha_1^1 - \text{kąt bryłowy powierzchni } e^1 = U e_{ijk}^1 \\ \{ijk\} \in N^1$$

w punkcie triangulacji powierzchni S^1 .

Oznacza to, że graniczna wartość funkcji (3.139) przy $x \rightarrow Y_1^1$ wynosi:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow Y_1^1 \\ Y_1^1 \in S^1}} R_1^1(x) = -\frac{\alpha_1^1}{2\pi} \quad (3.145)$$

W szczególnym przypadku, gdy wszystkie trójkąty zbioru N_1^1 mające wspólny wierzchołek Y_1^1 leżą w jednej płaszczyźnie, to

$$\lim_{x \rightarrow Y_1^1} R_1^1(x) = -1, \quad (3.146)$$

3.4. Aproksymacja potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej

Centralnym zagadnieniem w przybliżonym rozwiązywaniu układu równań całkowych I rodzaju (2.14) jest aproksymacja potencjału logarytmicznego (2.15). W aproksymacji tej należy przede wszystkim dokonać podziału konturów e^k na elementy e_i^k i dla każdego z nich wybrać odpowiednią funkcję aproksymującą $G_1^k(x)$. Wykonując następnie całkowanie po każdym z elementów e_i^k i sumując uzyskane wyniki, otrzymujemy operację przybliżoną operacji (2.15). Jeżeli kontury e^k są zadane w postaci parametrycznej i wynik całkowania po e^k da się przedstawić w postaci kombinacji funkcji standardowych, to tzw. funkcje kształtu można przedstawić w postaci gotowych wzorów. Otrzymanie gotowych wzorów jest tym trudniejsze, im większy jest stopień funkcji aproksymujących. W takich przypadkach należałoby stosować całkowanie numeryczne. Jeżeli jednak punkt $x \in e_i^k$, to całka po elemencie e_i^k jest całką niewłaściwą i jej numeryczne obliczenie jest utrudnione. Ponieważ jednak całki te decydują o dokładności aproksymowanego operatora \mathcal{V}_L , należy je wyznaczyć możliwie najdokładniej metodami analitycznymi.

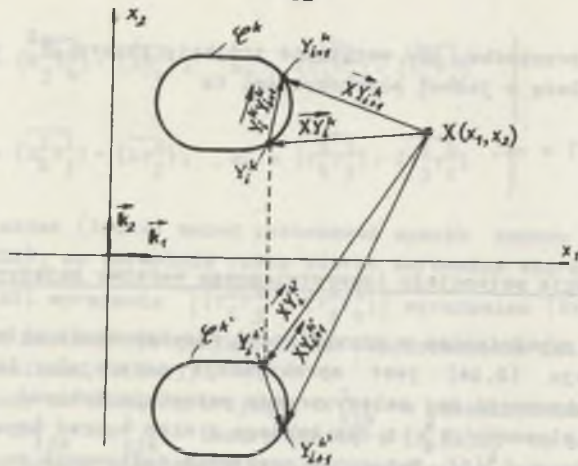
Jeżeli kontury przewodów e^k nie są zadane analitycznie, lecz w postaci ciągu punktów Y_1^k ($i = 1, 2, \dots, N_k$) ($k = 1, 2, \dots, N_p$), to w konstrukcji operacji bliższej dla operacji (2.9) należy również dokonać aproksymacji konturów.

Formalnie rzecz biorąc, całkowanie po elementach e_i^k można dokonać jakiegokolwiek metodą kwadratury [76]. Jednakże przy całkowaniu na dużych odcinkach metody te dają duże błędy. Są one uwarunkowane słabą osobliwością jądra operacji typu potencjału logarytmicznego \mathcal{V}_L , która maleje dostatecznie szybko przy oddaleniu się od rozpatrywanego punktu.

Zwiększenie dokładności aproksymacji potencjału (2.15) może być osiągnięte przez zastosowanie tzw. funkcji sklejenych do aproksymacji funkcji gęstości ładunków $G_1^k(x)$ na elementach podziału konturów e^k [36].

3.4.1. Potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej zadanej na dowolnych konturach

Punktem wyjścia dla dyskretyzacji potencjału logarytmicznego jest określenie dla zadanych punktów $Y_1^k \in e^k$ ($i = 1, 2, \dots, N_k$) poszczególnych konturów e^k przewodów, funkcji aproksymujących kształt tych konturów. Najprostszą aproksymacją danego konturu e^k polega na zastąpieniu go krzy-



Rys. 3.3. Oznaczenie wektorów wodzących
Fig. 3.3. Designation of the vectors

wę łamaną składającą się z odcinków łączących sąsiednie punkty y_1^k podziału konturu e^k . W ten sposób zbiór punktów (y_1, y_2) konturu e^k został zastąpiony zbiorem punktów (rys. 3.3):

$$e^k = \bigcup_{i=1}^{N_k} e_{1,1}^k \quad (3.147)$$

gdzie:

$$e_{1,1}^k = \left\{ (y_1, y_2): \begin{aligned} y_1 &= y_{1,1}^k + (y_{1,1+1}^k - y_{1,1}^k)\xi; \\ y_2 &= y_{2,1}^k + (y_{2,1+1}^k - y_{2,1}^k)\xi; \quad 0 < \xi < 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.148)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N_p).$$

Tak przedstawione funkcje sklejane pierwszego stopnia (3.148) interpolujące współrzędne $y_{1,1}^k, y_{2,1}^k$ punktów $y_1^k \in e_{1,1}^k$ ($i = 1, 2, \dots, N_k$) ($k = 1, 2, \dots, N_p$) są dane jednoznacznie [36].

W celu lepszego przybliżenia operatora \mathcal{V}_L (wzór (2.15)) można zastosować do interpolacji konturów e^k funkcje sklejane wyższych stopni. Dla funkcji sklejanych stopnia drugiego zbiór punktów konturu e^k zastępuje się zbiorem punktów:

$$e_2^k = \bigcup_{i=1}^{N_k} e_{2,1}^k \quad (3.149)$$

gdzie:

$$e_{2,1}^k = \left\{ (y_1, y_2): \begin{aligned} y_1 &= (z_{1,1+1}^k - y_{1,1+1}^k + y_{1,1}^k)\xi + z_{1,1}^k\xi + y_{1,1}^k; \\ y_2 &= (z_{2,1+1}^k - y_{2,1+1}^k + y_{2,1}^k)\xi + z_{2,1}^k\xi + y_{2,1}^k; \quad 0 < \xi < 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.150)$$

natomiast współczynniki $z_{1,1}^k, z_{2,1}^k$ spełniają następujące układy liniowe dwuprzekształtnikowe równań:

$$z_{1,1+1}^k + z_{1,1}^k = 2(y_{1,1+1}^k - y_{1,1}^k) \quad (3.151)$$

$$z_{2,1+1}^k + z_{2,1}^k = 2(y_{2,1+1}^k - y_{2,1}^k) \quad (3.152)$$

o takiej samej ilości niewiadomych. Jeżeli krzywa e^k jest krzywą zamkniętą, to układy równań (3.151) i (3.152) posiadają jednoznaczne rozwiązania. Konstrukcja elementów (3.150) zapewnia ciągłość pierwszych pochodnych $\partial y_1 / \partial \xi, \partial y_2 / \partial \xi$ wzdłuż krzywej e_2^k (wzór (3.149)) interpolującej zadane punkty y_1^k na konturze e^k i jako taka jest jednoznaczna.

Funkcję gęstości ładunków, na którą działa operator \mathcal{V}_L (2.15), można również aproksymować wzdłuż interpolowanych konturów funkcjami sklejanyymi dowolnego stopnia. Pozwoli to na otrzymanie operatora przybliżonego dla operatora \mathcal{V}_L (3.15).

W przypadku interpolacji konturów e^k w postaci (3.147) funkcje gęstości ładunków będą aproksymowane funkcją sklejane stopnia pierwszego interpolującą dane wartości σ_1^k w punktach podziału y_1^k konturu e^k . Podobnie jak we wzorze (3.148) w zapisie funkcji interpolującej zastosowany będzie parametr ξ , tj.

$$\sigma_1^k(y_1, y_2) = \begin{cases} \sigma_1^k + (\sigma_{1+1}^k - \sigma_1^k)\xi & \text{dla } (y_1, y_2) \in e_{1,1}^k \quad 0 \leq \xi \leq 1, \\ 0 & \text{dla } (y_1, y_2) \notin e_{1,1}^k \end{cases} \quad (3.153)$$

gdzie:

$$\sigma_1^k = \sigma^k(y_1^k) - \text{gęstość ładunku w punkcie podziału } y_1^k \text{ konturu } e^k, \text{ zwana zmienną węzłową.}$$

Uwzględniając podstawienie (3.148) na współrzędne y_1, y_2 występujące w jądrze operacji (2.15) oraz zgodnie z oznaczeniami podanymi na rys. 3.3, otrzymuje się:

$$\ln \frac{|x\bar{y}'|}{|\bar{x}y|} = \frac{1}{2} \ln \frac{|\bar{y}_{1,1+1}^k|^2 \xi^2 + 2[(x\bar{y}_1^k) \cdot (\bar{y}_{1,1+1}^k)]\xi + |\bar{x}\bar{y}_1^k|^2}{|\bar{y}_{1,1+1}^k|^2 \xi^2 + 2[(x\bar{y}_1^k) \cdot (\bar{y}_{1,1+1}^k)]\xi + |\bar{x}\bar{y}_1^k|^2} \quad (3.154)$$

dla $y \in e_{1,1}^k$

gdzie:

$$\overline{xy}_1^k = (y_{1,1}^k - x_1)k_1 + (y_{2,1}^k - x_2)k_2 \quad (3.155a)$$

$$\overline{xy}_1^{k'} = (y_{1,1}^k - x_1)k_1 - (y_{2,1}^k + x_2)k_2 \quad (3.155b)$$

$$\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}} = (y_{1,1+1}^k - y_{1,1}^k)k_1 + (y_{2,1+1}^k - y_{2,1}^k)k_2 \quad (3.155c)$$

$$\overline{y_{1,1+1}^{k,yk'}} = (y_{1,1+1}^k - y_{1,1}^k)k_1 - (y_{2,1+1}^k - y_{2,1}^k)k_2 \quad (3.155d)$$

Dla przyjętej interpolacji (3.147) konturów e^k i aproksymacji funkcji gęstości ładunków (3.153) oraz zgodnie ze wzorem (3.154) operacja Ψ_L określona wzorem (2.15) przyjmie postać przybliżoną:

$$\Psi_{Lp} \sigma = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} \int_0^1 \frac{1}{2} |\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}| \left[\sigma_1^k + (\sigma_{1+1}^k - \sigma_1^k) \xi \right] \ln \frac{|\overline{y_{1,1+1}^{k,yk'}}|^2 \xi^2 + 2[(\overline{xy}_1^k) \cdot (\overline{y_{1,1+1}^{k,yk'}})] \xi + |\overline{xy}_1^k|^2}{|\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}|^2 \xi^2 + 2[(\overline{xy}_1^k) \cdot (\overline{y_{1,1+1}^{k,yk'}})] \xi + |\overline{xy}_1^k|^2} d\xi \quad (3.156)$$

Zastępując logarytm ilorazu w całce (3.156) różnicę logarytmów, można dyskutować tę całkę jako funkcji współrzędnych punktu x ograniczyć do następującej całki:

$$w_1^k(x) = \frac{1}{2\pi} |\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}| \int_0^1 \left[\sigma_1^k + (\sigma_{1+1}^k - \sigma_1^k) \xi \right] \ln \frac{1}{|\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}|^2 \xi^2 + 2[(\overline{xy}_1^k) \cdot (\overline{y_{1,1+1}^{k,yk'}})] \xi + |\overline{xy}_1^k|^2} d\xi \quad (3.157)$$

Jeżeli punkt $x \notin e_{1,1}^k$, to wyrażenie pod znakiem logarytmu dla $\xi \in [0,1]$ jest większe od zera i całkę (3.157) można obliczyć stosując całkowanie przez części. Po żmudnych obliczeniach otrzymuje się:

$$w_1^k(x) = a_1^k(x) \sigma_1^k + b_{1+1}^k(x) \sigma_{1+1}^k \quad \text{dla } x \notin e_{1,1}^k \quad (3.158)$$

gdzie:

$$a_1^k(x) = \frac{1}{\pi} |\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}| \left\{ -\frac{1}{2} \ln |\overline{xy}_1^k| + \frac{1}{4} \left(3 + \frac{2(\overline{xy}_1^k) \cdot (\overline{y_{1,1+1}^{k,yk'}})}{|\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}|^2} \right) + \left(\frac{|\overline{xy}_{1+1}^k|^2}{2|\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}|^2} - \frac{|(\overline{xy}_1^k) \cdot (\overline{y_{1,1+1}^{k,yk'}})|^2}{|\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}|^4} \right) \ln \frac{|\overline{xy}_1^k|}{|\overline{xy}_{1+1}^k|} - \frac{|(\overline{xy}_1^k) \cdot (\overline{y_{1,1+1}^{k,yk'}})| [(\overline{xy}_{1+1}^k) \cdot (\overline{y_{1,1+1}^{k,yk'}})]}{|\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}|^4} \operatorname{arctg} \frac{|(\overline{xy}_1^k) \cdot (\overline{xy}_{1+1}^k)|}{(\overline{xy}_1^k) \cdot (\overline{xy}_{1+1}^k)} \right\} \quad (3.159)$$

$$b_{1+1}^k(x) = \frac{1}{\pi} |\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}| \left\{ -\frac{1}{2} \ln |\overline{xy}_{1+1}^k| + \frac{1}{4} \left(3 - \frac{2(\overline{xy}_{1+1}^k) \cdot (\overline{y_{1,1+1}^{k,yk'}})}{|\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}|^2} \right) + \left(\frac{|\overline{xy}_1^k|^2}{2|\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}|^2} - \frac{|(\overline{xy}_1^k) \cdot (\overline{y_{1,1+1}^{k,yk'}})|^2}{|\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}|^4} \right) \ln \frac{|\overline{xy}_{1+1}^k|}{|\overline{xy}_1^k|} - \frac{|(\overline{xy}_1^k) \cdot (\overline{y_{1,1+1}^{k,yk'}})| [(\overline{xy}_1^k) \cdot (\overline{y_{1,1+1}^{k,yk'}})]}{|\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}|^4} \operatorname{arctg} \frac{|(\overline{xy}_1^k) \cdot (\overline{xy}_{1+1}^k)|}{(\overline{xy}_1^k) \cdot (\overline{xy}_{1+1}^k)} \right\} \quad (3.160)$$

Jeżeli punkt x leży na elemencie $e_{1,1}^k$, to obliczenie całki (3.157) znacznie się upraszcza, należy jednak zauważyć, że staje się ona całką niewłaściwą, gdyż dla $\xi \in [0,1]$ wyrażenie występujące pod logarytmem przyjmuje dla pewnego ξ wartość zerową. Zbieżność tej całki wynika z ogólnego twierdzenia [73] dotyczącego potencjału logarytmicznego.

W dalszych zastosowaniach potrzebna będą wartości całki (3.157) dla punktów $x = y_{1,1+1}^k$, tj. leżących na końcach elementu $e_{1,1}^k$. Zachodzi

$$w_1^k(y_1^k) = -\frac{1}{\pi} |\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}| \int_0^1 \left[\sigma_1^k + (\sigma_{1+1}^k - \sigma_1^k) \xi \right] \ln \left[|\overline{y_{1,1+1}^{k,yk}}| \xi \right] d\xi \quad (3.161)$$

Całka niewłaściwa (3.161) jest zbieżna i wynosi:

$$w_1^k(y_1^k) = a_1^k(y_1^k) \sigma_1^k + b_{1+1}^k(y_1^k) \sigma_{1+1}^k \quad (3.162)$$

gdzie

$$a_1^k(\gamma_1^k) = \frac{1}{\pi} |\overline{\gamma_1^k \gamma_{1+1}^k}| \left(-\frac{1}{2} \ln |\overline{\gamma_1^k \gamma_{1+1}^k}| + \frac{3}{4} \right) \quad (3.163)$$

$$b_{1+1}^k(\gamma_1^k) = \frac{1}{\pi} |\overline{\gamma_1^k \gamma_{1+1}^k}| \left(-\frac{1}{2} \ln |\overline{\gamma_1^k \gamma_{1+1}^k}| + \frac{1}{4} \right) \quad (3.164)$$

Dla $x = \gamma_{1+1}^k$ całka (3.157) przyjmuje postać:

$$w_1^k(\gamma_{1+1}^k) = -\frac{1}{\pi} |\overline{\gamma_1^k \gamma_{1+1}^k}| \int_0^1 \left[G_1^k + (G_{1+1}^k - G_1^k) \xi \right] \ln \left[|\overline{\gamma_1^k \gamma_{1+1}^k}| (1-\xi) \right] d\xi \quad (3.165)$$

Całka niewłaściwa (3.165) jest również zbieżna i po jej obliczeniu otrzymuje się:

$$w_1^k(\gamma_{1+1}^k) = a_{1+1}^k(\gamma_{1+1}^k) G_1^k + b_{1+1}^k(\gamma_{1+1}^k) G_{1+1}^k, \quad (3.166)$$

gdzie

$$a_1^k(\gamma_{1+1}^k) = \frac{1}{\pi} |\overline{\gamma_1^k \gamma_{1+1}^k}| \left(-\frac{1}{2} \ln |\overline{\gamma_1^k \gamma_{1+1}^k}| + \frac{1}{4} \right) \quad (3.167)$$

$$b_{1+1}^k(\gamma_{1+1}^k) = \frac{1}{\pi} |\overline{\gamma_1^k \gamma_{1+1}^k}| \left(-\frac{1}{2} \ln |\overline{\gamma_1^k \gamma_{1+1}^k}| + \frac{3}{4} \right). \quad (3.168)$$

Druga całka występująca we wzorze (3.156)

$$w_1^k(x) = \frac{1}{2\pi} |\overline{\gamma_1^k \gamma_{1+1}^k}| \int_0^1 \left[G_1^k + (G_{1+1}^k - G_1^k) \xi \right] \ln \frac{1}{|\overline{\gamma_1^k \gamma_{1+1}^k}| \xi^2 + 2 \left[(x \overline{\gamma_1^k}) (\overline{\gamma_1^k \gamma_{1+1}^k}) \right] \xi + |\overline{x \gamma_1^k}|^2} d\xi \quad (3.169)$$

dla x leżącego w półpłaszczyźnie $x_2 \geq 0$ nie na osiowości i wyraża się analogicznym wzorem:

$$w_1^k(x) = a_1^k(x) G_1^k + b_{1+1}^k(x) G_{1+1}^k.$$

gdzie funkcje $a_1^k(x)$, $b_{1+1}^k(x)$ wyrażają się wzorami (3.159), (3.160), w których należy zastąpić wektory (3.155a) i (3.155c) odpowiednimi wektorami (3.155b) i (3.155d), co formalnie rzecz biorąc odpowiada zamianie wskaźnika k na k' .

Uwzględniając wynik całkowania (3.157) i (3.169), we wzorze (3.156) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{Lp} \mathcal{G} &= \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} \left[a_i^k(x) - a_i^{k'}(x) \right] G_i^k + \\ &+ \left[b_{i+1}^k(x) - b_{i+1}^{k'}(x) \right] G_{i+1}^k = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} c_i^k(x) G_i^k, \end{aligned} \quad (3.170)$$

gdzie

$$c_i^k(x) = a_i^k(x) - a_i^{k'}(x) + b_{i+1}^k(x) - b_{i+1}^{k'}(x). \quad (3.171)$$

Jeżeli kontury \mathcal{C}^k są krzywymi otwartymi, to w punktach końcowych odpowiednio zachodzi:

$$c_1^k(x) = a_1^k(x),$$

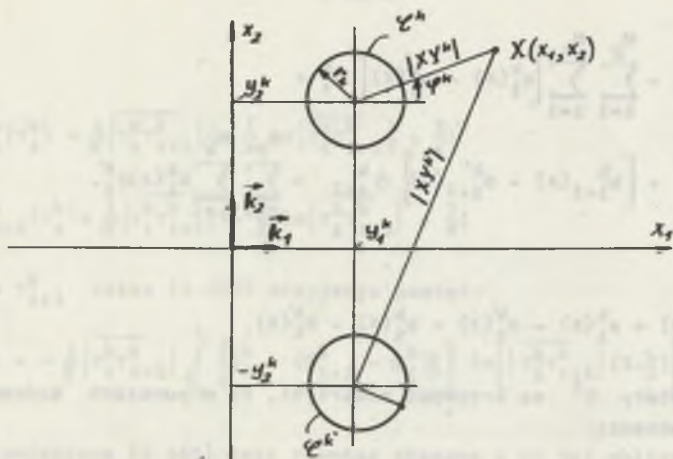
$$c_{N_k+1}^k(x) = b_{N_k+1}^k(x).$$

W ten sposób otrzymano ogólne wyrażenie (3.170) na operator przybliżony dla operatora typu potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej (2.15). Funkcje kształtu $c_i^k(x)$ dla tego przybliżenia wyrażają się poprzez funkcje \ln , \arctg o argumentach będących funkcją iloczynów wektorowych "x" oraz skalarnych "o" na odpowiednich wektorach (3.155). Ta ogólna procedura obliczania $\mathcal{V}_i \mathcal{G}$ sprowadza się tylko do podania współrzędnych punktów γ_1^k podziału konturów \mathcal{C}^k ($k = 1, 2, \dots, N_p$) oraz odpowiadających im zmierzonych węzłowych G_1^k będących gęstością ładunków w rozpatrywanych punktach, ażeby zgodnie ze wzorami (3.170), (3.171), (3.159) i (2.160) otrzymać potencjał logarytmiczny w dowolnym punkcie półpłaszczyzny $x_2 \geq 0$.

Jeżeli kontury \mathcal{C}^k przewodów są klasy C^1 , to do ich interpolacji można by zastosować funkcje sklepane stopnia drugiego (3.150). Jeżeli w takim przypadku zastosować do aproksymacji funkcji gęstości ładunków $G^k(x)$ również funkcje sklepane stopnia drugiego, to operator przybliżony (3.170) posiadałby funkcje kształtu $c_i^k(x)$ wyrażalne również za pomocą kombinacji funkcji elementarnych. Ze względu na złożoność tych funkcji nie podaje się ich w niniejszej pracy.

3.4.2. Potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej zadanej na dowolnych okręgach

Jeżeli kontury \mathcal{C}^k przewodów są dane w kształcie okręgów, to dyskretyzując potencjału logarytmicznego znacznie się upraszcza i poza tym można zwiększyć dokładność jego przybliżenia. Niech zadane są promienie r_k oraz ich środki o współrzędnych (γ_1^k, γ_2^k) ($k = 1, 2, \dots, N_p$), wówczas zbiór



Rys. 3.4. Odbicie zwierciadlane obszarów w postaci cylindrycznych walców punktów należących do łuku e_1^k łączącego punkty y_1^k, y_{1+1}^k zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rys. 3.4 wyraża się wzorem:

$$e_1^k = \left\{ (y_1, y_2) : y_1 = y_1^k + r_k \cos \varphi^k; y_2 = y_2^k + r_k \sin \varphi^k; \varphi_1^k \leq \varphi^k \leq \varphi_{1+1}^k \right\} \quad (3.172)$$

Nie istnieje w tym przypadku problem interpolacji konturów. Podobnie jak w punkcie 3.4.1, funkcje gęstości ładunków będzie się aproksymować funkcją sklejaną etopnia pierwszego interpolującą dane wartości G_1^k w punktach podziału y_1^k okręgu e^k , tj. w postaci:

$$G_1^k(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{G_{1+1}^k \varphi_{1+1}^k - G_1^k \varphi_1^k}{\varphi_{1+1}^k - \varphi_1^k} + \frac{G_{1+1}^k - G_1^k}{\varphi_{1+1}^k - \varphi_1^k} \varphi & \text{dla } (y_1, y_2) \in e_1^k \\ 0 & \text{dla } (y_1, y_2) \notin e_1^k \end{cases} \quad (3.173)$$

Uwzględniając podstawienie (3.172) na współrzędne y_1, y_2 występujące w jądrze operacji (2.15) oraz zgodnie z oznaczeniami podanymi na rys. 3.3, otrzymuje się [46]:

$$\ln \frac{|XY'|}{|XY|} = \ln \frac{|XY^k|}{|XY^k|} + \frac{1}{2} \ln \left| 1 - 2 \frac{r_k}{|XY^k|} \cos [\varphi^k + \alpha^k(x)] \right| + \left(\frac{r_k}{|XY^k|} \right)^2 \left| - \frac{1}{2} \ln \left| 1 - 2 \frac{r_k}{|XY^k|} \cos [\varphi^k - \alpha^k(x)] \right| + \left(\frac{r_k}{|XY^k|} \right)^2 \right|, \quad (3.174)$$

gdzie

$$|\overline{XY}^k| = \sqrt{(x_1 - y_1^k)^2 + (x_2 - y_2^k)^2}; \quad (3.175)$$

$$|\overline{XY}^k| = \sqrt{(x_1 - y_1^k)^2 + (x_2 + y_2^k)^2}$$

$$\cos \alpha^k(x) = \frac{x_1 - y_1^k}{|\overline{XY}^k|}; \quad \sin \alpha^k(x) = \frac{x_2 - y_2^k}{|\overline{XY}^k|} \quad (3.176)$$

$$\cos \alpha^k(x) = \frac{x_1 - y_1^k}{|\overline{XY}^k|}; \quad \sin \alpha^k(x) = \frac{x_2 + y_2^k}{|\overline{XY}^k|} \quad (3.177)$$

Można wykazać [46], że funkcje logarytmiczne występujące we wzorze (3.174) są rozwijalne w następujący szereg funkcyjny:

$$\ln |1 - 2 \zeta^k \cos \beta^k + (\zeta^k)^2| = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\zeta^k)^n \cos n \beta^k, \quad (3.178)$$

gdzie

$$\zeta^k(x) = \frac{r_k}{|\overline{XY}^k|}; \quad \beta^k(x) = \varphi^k - \alpha^k(x).$$

Jeżeli $x \notin e^k$, to $0 \leq \zeta^k \leq 1$, a więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\zeta^k)^n$ jest zbieżny, wobec czego z jego zbieżności wynika jednostajna zbieżność szeregu funkcyjnego (3.178) ze względu na β^k . Jeżeli $x \in e^k$, tj. $x_1 = y_1^k + r_k \cos \varphi^k$; $x_2 = y_2^k + r_k \sin \varphi^k$; $\zeta^k = 1$, wtedy równanie (3.178) przyjmuje postać [46]:

$$\ln 2 |1 - \cos \beta^k| = 2 \ln |2 \sin \frac{\varphi^k - \psi^k}{2}| = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n(\varphi^k - \psi^k); \quad \varphi^k \leq \psi^k \leq 2\pi + \varphi^k, \quad (3.179)$$

przy czym szereg (3.179) jest zbieżny poza punktami $\varphi^k = \psi^k$ i $\psi^k = \varphi^k + 2\pi$. Zgodnie ze wzorami (3.174) i (3.178) słabo osobliwe jądro operacji (2.15) można dla $y \in e^k$ przedstawić w postaci następującego szeregu ze względu na zmienną φ^k :

$$\ln \frac{|\overline{XY}'|}{|\overline{XY}^k|} \Big|_{\text{ve}^k} = \ln \frac{|\overline{XY}^{k'}|}{|\overline{XY}^k|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_k}{|\overline{XY}^k|} \right)^n \cos n[\varphi^k - \alpha^k(x)] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_k}{|\overline{XY}^k|} \right)^n \cos n[\varphi^k + \alpha^k(x)] \quad (3.180)$$

Jeżeli we wzorze (2.15) na operację typu potencjału logarytmicznego podstawić rozwinięcie (3.180) jego jądra oraz dokonać aproksymacji funkcji gęstości ładunków za pomocą funkcji sklepanych (3.173), otrzymuje się:

$$\mathcal{V}_L^p G = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} \int_{\varphi_i^k}^{\varphi_{i+1}^k} G_1^k(\gamma) \ln \frac{|\overline{XY}'|}{|\overline{XY}^k|} d\gamma, \quad (3.181)$$

gdzie

$$\frac{1}{\pi} \int_{\varphi_i^k}^{\varphi_{i+1}^k} G_1^k(\gamma) \ln \frac{|\overline{XY}'|}{|\overline{XY}^k|} d\gamma = a_1^k(x) G_1^k + b_{i+1}^k(x) G_{i+1}^k \quad (3.182)$$

$$a_1^k(x) = \frac{r_k}{\pi} \left[\frac{\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k}{2} \ln \frac{|\overline{XY}^{k'}|}{|\overline{XY}^k|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{r_k}{|\overline{XY}^k|} \right)^n \sin n(\varphi_i^k + \alpha^k(x)) - \left(\frac{r_k}{|\overline{XY}^k|} \right)^n \sin n(\varphi_i^k - \alpha^k(x)) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{r_k}{|\overline{XY}^k|} \right)^n \left[\cos n(\varphi_{i+1}^k + \alpha^k(x)) - \cos n(\varphi_i^k + \alpha^k(x)) \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{r_k}{|\overline{XY}^k|} \right)^n \left[\cos n(\varphi_{i+1}^k - \alpha^k(x)) - \cos n(\varphi_i^k - \alpha^k(x)) \right] \quad (3.183)$$

$$b_{i+1}^k(x) = \frac{r_k}{\pi} \left[\frac{\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k}{2} \ln \frac{|\overline{XY}^{k'}|}{|\overline{XY}^k|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{r_k}{|\overline{XY}^k|} \right)^n \sin n(\varphi_{i+1}^k - \alpha^k(x)) - \left(\frac{r_k}{|\overline{XY}^k|} \right)^n \sin n(\varphi_{i+1}^k + \alpha^k(x)) \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{r_k}{|\overline{XY}^k|} \right)^n \left[\cos n(\varphi_{i+1}^k - \alpha^k(x)) - \cos n(\varphi_i^k - \alpha^k(x)) \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{r_k}{|\overline{XY}^k|} \right)^n \left[\cos n(\varphi_{i+1}^k + \alpha^k(x)) - \cos n(\varphi_i^k + \alpha^k(x)) \right] \quad (3.184)$$

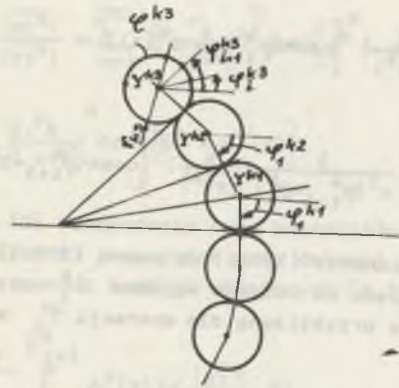
Podstawiając wynik całkowania (3.182) do wzoru (3.181) oraz porządkując tam sumę po "i" ze względu na zmienne węzłowe G_1^k otrzymuje się ostateczny wzór na operację przybliżoną dla operacji \mathcal{V}_L^p w postaci:

$$\mathcal{V}_{LP}^p G = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} c_1^k(x) G_1^k, \quad (3.185)$$

gdzie

$$c_1^k(x) = \frac{r_k}{\pi} \left\{ \frac{\varphi_{i+1}^k - \varphi_{i-1}^k}{2} \ln \frac{|\overline{XY}^{k'}|}{|\overline{XY}^k|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{r_k}{|\overline{XY}^k|} \right)^n \left[\frac{\cos n(\varphi_i^k - \alpha^k(x)) - \cos n(\varphi_{i+1}^k - \alpha^k(x))}{\varphi_i^k - \varphi_{i-1}^k} - \frac{\cos n(\varphi_{i+1}^k - \alpha^k(x)) - \cos n(\varphi_i^k - \alpha^k(x))}{\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{r_k}{|\overline{XY}^k|} \right)^n \left[\frac{\cos n(\varphi_i^k + \alpha^k(x)) - \cos n(\varphi_{i+1}^k + \alpha^k(x))}{\varphi_i^k - \varphi_{i-1}^k} + \frac{\cos n(\varphi_{i+1}^k + \alpha^k(x)) - \cos n(\varphi_i^k + \alpha^k(x))}{\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k} \right] \right\} \quad (3.186)$$

łatwo zauważyć, że tzw. funkcje kształtu $c_1^k(x)$ są dane przez jednostajnie zbieżne szeregi funkcyjne (3.186) niezależnie od położenia punktu X. W ten sposób otrzymano ogólną procedurę obliczenia potencjału logarytmicznego $\mathcal{V}_{LP}^p G$ zadanego na rozłączonych okręgach e^k , w której wystarczy podać współrzędne γ^k środków okręgów oraz ich kąty podziału φ_i^k wraz z odpowiadającymi im zmiennymi węzłowymi G_1^k , ażeby zgodnie ze wzorami (3.185) i (3.186) otrzymać potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej w dowolnym punkcie półpłaszczyzny $x_2 \geq 0$.



Rys. 3.5

Z praktycznego punktu widzenia ważny jest przypadek, gdy kontury zamknięte e^k składają się z łuków e^{kl} o promieniu r_{kl} i środkach w punktach $y^{kl}(y_1^{kl}, y_2^{kl})$ ($k = 1, 2, \dots, N_p$). Dzieliąc każdy z łuków e^{kl} na N_{kl} elementów punktami podziału y_1^{kl} , otrzymuje się (rys. 3.5):

$$e^{kl} = \left\{ (y_1, y_2) : y_1 = y_1^{kl} + r_{kl} \cos \varphi^{kl}; \quad y_2 = y_2^{kl} + r_{kl} \sin \varphi^{kl} \right. \\ \left. \varphi_1^{kl} \leq \varphi^{kl} \leq \varphi_{i+1}^{kl} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N_{kl}) \quad (3.187)$$

Aproksymując funkcję gęstości ładunków funkcją sklejaną stopnia pierwszego (3.173) interpolującą dane wartości G^{kl} w punktach y_1^{kl} łuków e^{kl} oraz uwzględniając fakt, że $G_i^{kl} = G_{N_{kl}, l-1}^{k, l-1} + 1$ w wyniku podobnych operacji otrzymuje się następującą postać przybliżonego operatora \mathcal{V}_L^p :

$$\mathcal{V}_{Lp}^p G = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{N_k} \sum_{i=1}^{N_{kl}} c_i^{kl}(x) G_i^{kl}, \quad (3.188)$$

gdzie

$$c_i^{kl}(x) = \begin{cases} a_i^{kl}(x) + b_i^{kl}(x) & \text{dla } i = 1, 2, \dots, N \\ a_i^{kl}(x) + b_{N_{kl}, l-1}^{k, l-1}(x) & \text{dla } i = 1 \end{cases} \quad (3.189)$$

przy czym funkcje $a_i^{kl}(x)$, $b_{i+1}^{kl}(x)$ wyrażają się wzorami (3.183) i (3.184), w których należy podstawić za współrzędne punktów y^k i $y^{k'}$ współrzędne

punktów y^{kl} $y^{k'l'}$, za promień r_k promień r_{kl} oraz za kąty podziału φ_1^k kąty φ_1^{kl} ($k = 1, 2, \dots, N_p$) ($l = 1, 2, \dots, N_k$) ($i = 1, 2, \dots, N_{kl}, N_{kl}+1$).

Dokładność przybliżenia operacji \mathcal{V}_1^p można by zwiększyć stosując dla funkcji gęstości ładunków funkcje sklepane stopnia wyższego niż jeden. Również wówczas można otrzymać funkcje kształtu $c_i^{kl}(x)$ w postaci jednostajnie zbieżnych szeregów funkcyjnych, których ze względu na bardziej złożoną postać nie podano w niniejszej pracy.

3.4.3. Aproksymacja potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej zadanej na okręgach za pomocą bazy funkcji ortogonalnych

Aproksymację operatora typu potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej można również przeprowadzić biorąc pod uwagę bazę funkcji ortogonalnych w $L_2(e)$, tj. w przestrzeni jego okraśloności. Jeżeli kontury e^k ($i = 1, 2, \dots, N_p$) są okręgami, to bazę w $L_2(e^k)$ jest układ zupełny

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \varphi^k, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \varphi^k, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2\varphi^k, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2\varphi^k, \dots \quad (k = 1, 2, \dots, N_p) \quad (3.190)$$

Uwzględniając rozwinięcie jądra operacji (2.15) ze względu na zmienną całkowania φ^k zgodnie ze wzorem (3.180), otrzymuje się:

$$w_{1n}^k(x) = \int_{e^k} \frac{1}{\pi} \ln \frac{|XY'|}{|XY|} \cos \varphi^k d\varphi^k = \frac{r_k}{n} \left[\left(\frac{r_k}{|XY^k|} \right)^n \cos n\alpha^k(x) - \left(\frac{r_k}{|XY^{k'}} \right)^n \cos n\alpha^{k'}(x) \right] \quad (3.191)$$

$$w_{2n}^k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{e^k} \left[\ln \frac{|XY'|}{|XY|} \Big|_{Y \in e^k} \sin n\varphi^k d\varphi^k - \frac{r_k}{n} \left[\left(\frac{r_k}{|XY^k|} \right)^n \sin n\alpha^k(x) + \left(\frac{r_k}{|XY^{k'}} \right)^n \sin n\alpha^{k'}(x) \right] \right] \quad (3.192)$$

$$w_0^k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{e^k} \left[\ln \frac{|XY'|}{|XY|} \Big|_{Y \in e^k} d\varphi^k - 2r_k \ln \frac{|XY^k|}{|XY^{k'}} \right] \quad (3.193)$$

Dowolną funkcję $G^k(y)$ z $L_2(e^k)$ można rozwinąć na szereg Fouriera względem układu (3.190):

$$G^k(y) \Big|_{Y \in e^k} = G_0^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left[G_{1,n}^k \cos n\varphi^k + G_{2,n}^k \sin n\varphi^k \right] \quad (3.194)$$

Podstawiając rozwinięcie (3.194) z dokładnością do N-tego elementu do wzoru (2.15) oraz uwzględniając wyniki całkowania (3.191), (3.192) i (3.193) otrzymuje się:

$$\varphi_{Lp}^k \sigma = \sum_{k=1}^{N_p} w_0^k(x) \sigma_0^k + \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{n=1}^N \left[w_{1,n}^k(x) \sigma_{1,n}^k + w_{2,n}^k(x) \sigma_{2,n}^k \right] \quad (3.195)$$

gdzie:

N - jest stopniem aproksymacji funkcji gęstości ładunków.
Wzór (3.195) stanowi ogólne wyrażenie pozwalające obliczyć potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej w dowolnym punkcie x przy danych współrzędnych punktów γ^k środków okręgów e^k i ich promieniach r_k oraz N pierwszych harmonicznych $\sigma_0^k, \sigma_{1,n}^k, \sigma_{2,n}^k$ rozwinięcie funkcji gęstości ładunków $\sigma^k(\gamma)$ na szereg Fouriera.

3.5. Aproksymacja pochodnej potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej zadanej na okręgach

Operacja całkowa występująca w układzie równań całkowych II rodzaju (2.43) składa się z operacji będącej potencjałem logarytmicznym warstwy pojedynczej i jej pochodnej w kierunku normalnym. Z punktu widzenia obliczeń numerycznych rzeczą istotną jest dokonać jej aproksymacji. Aproksymację potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej zadanej na okręgach dokonano w punkcie 3.3. W niniejszym punkcie rozpatrywana będzie aproksymacja pochodnej potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej:

$$\varphi_{Lo}^k \sigma = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{e^k} \frac{d}{dn_x} (\ln \frac{|XY|}{|XY^k|}) d\gamma, \quad (3.196)$$

gdzie wyrażenie pod znakiem całki wyraża się wzorem (2.44).

Stosując analogiczne metody jak przy aproksymacji operatora (2.15) wzory (3.172), (3.173), (3.180) oraz uwzględniając pochodną $\frac{d}{dn_x} (\ln \frac{|XY|}{|XY^k|})$ w kierunku wektora

$$\vec{n}_x = -\vec{k}_1 \cos \varphi - \vec{k}_2 \sin \varphi$$

zaczepionego w punkcie x , operację (3.196) można przybliżyć następująco:

$$\varphi_{Lo}^k \sigma = \varphi_{Lpo}^k \sigma = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} e_i^k(x, \varphi) \sigma_1^k. \quad (3.197)$$

gdzie

$$e_i^k(x, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{r_{i+1}^k - r_i^k}{2} \left[\left(\frac{r_k}{|XY^k|} \right) \cos(\varphi - \alpha^k(x)) - \left(\frac{r_k}{|XY^k|} \right) \cos(\varphi + \alpha^k(x)) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{r_k}{|XY^k|} \right)^{n+1} \left[\frac{\cos(n\varphi_{i+1}^k + \varphi - (n+1)\alpha^k(x)) - \cos(n\varphi_{i-1}^k + \varphi - (n+1)\alpha^k(x))}{\varphi_{i+1}^k - \varphi_{i-1}^k} - \frac{\cos(n\varphi_{i+1}^k + \varphi - (n+1)\alpha^k(x)) - \cos(n\varphi_i^k + \varphi - (n+1)\alpha^k(x))}{\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{r_k}{|XY^k|} \right)^{n+1} \frac{\cos(n\varphi_{i-1}^k + \varphi + (n+1)\alpha^k(x)) - \cos(n\varphi_{i-1}^k - \varphi + (n+1)\alpha^k(x))}{\varphi_{i-1}^k - \varphi_i^k} + \frac{\cos(n\varphi_{i+1}^k - \varphi + (n+1)\alpha^k(x)) - \cos(n\varphi_i^k - \varphi + (n+1)\alpha^k(x))}{\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k} \right] \quad (3.198)$$

Podobnie jak funkcje $c_1^k(x)$ dane wzorem (3.186) również funkcje $e_i^k(x, \varphi)$ dane wzorem (3.198) są określone przez jednostajnie zbieżny szereg niezależnie czy punkt x leży na konturach e^k czy na zewnątrz tych konturów.

3.6. Aproksymacja potencjału logarytmicznego warstwy podwójnej zadanej na dowolnych konturach

Operacja całkowa występująca w układzie równań całkowych II rodzaju (2.60) składa się z operacji będącej potencjałem logarytmicznym warstwy podwójnej:

$$\varphi_{Lo}^k \sigma = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{e^k} \frac{\sigma^k(\gamma) \cos(\vec{\gamma X}, \vec{n}_\gamma)}{|XY|} d\gamma. \quad (3.199)$$

Z punktu widzenia obliczeń numerycznych rzeczą istotną jest dokonać jej aproksymacji.

Analogicznie jak w punkcie 3.4.1 aproksymację konturów e^k przeprowadza się za pomocą krzywej łamanej (3.147) i (3.148) interpolującej współrzędne $(\gamma_{1,1}^k, \gamma_{2,1}^k)$ punktów $\gamma_1^k \in e^k$.

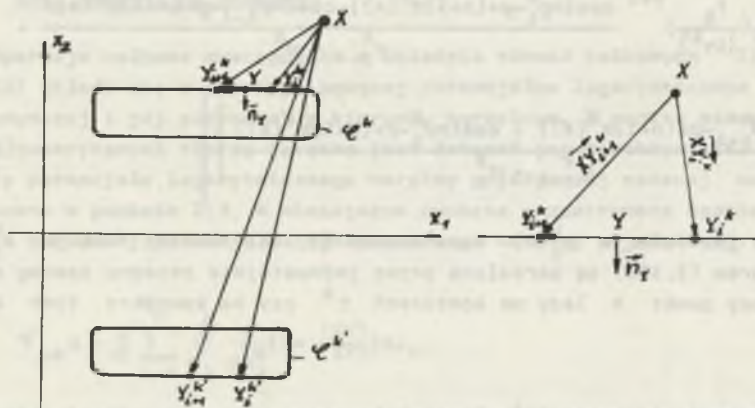
Funkcje gęstości warstwy podwójnej $\tau^k(\gamma)$ aproksymowane będą funkcję składaną stopnia pierwszego interpolującą dane wartości τ_1^k w punktach podziału $\gamma_1^k \in \mathcal{C}^k$.

$$\tau_1^k(\gamma) = \begin{cases} \tau_1^k + (\tau_{1+1}^k - \tau_1^k)\xi & \text{dla } \gamma \in \mathcal{C}_{1,1}^k; \quad 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 & \text{dla } \gamma \notin \mathcal{C}_{1,1}^k \end{cases} \quad (3.200)$$

gdzie

$\tau_1^k = \tau^k(\gamma_1^k)$ - gęstość warstwy podwójnej w punkcie podziału

γ_1^k konturu \mathcal{C}^k zwana zmienną węzłową.



Rys. 3.6

Uwzględniając podstawięcie (3.148) na współrzędne (γ_1, γ_2) występujące w jądrze operacji całkowej (3.199) oraz zgodnie z oznaczeniami podanymi na rys. 3.6 (patrz wzory (3.155a,c)) otrzymuje się:

$$\frac{\cos(\overline{YX}, \overline{n_Y})}{|\overline{XY}|} = \frac{|(\overline{XY}_1^k) \times (\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k)|}{\xi^2 |\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k|^2 + 2\xi (\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k) \cdot (\overline{XY}_1^k) + |\overline{XY}_1^k|^2} \quad (3.201)$$

Dla przyjętej interpolacji (3.149) konturów \mathcal{C}^k i aproksymacji funkcji warstwy podwójnej (3.200) oraz zgodnie ze wzorem (3.201) potencjał warstwy podwójnej (3.199) można przybliżyć następująco:

$$u_L \tau = u_{Lpo} \tau = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} w_1^k(x), \quad (3.202)$$

gdzie

$$w_1^k(x) = \left| (\overline{XY}_1^k) \times (\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k) \right| \int_0^1 \frac{[\tau_1^k + (\tau_{1+1}^k - \tau_1^k)\xi] d\xi}{\xi^2 |\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k|^2 + 2\xi (\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k) \cdot (\overline{XY}_1^k) + |\overline{XY}_1^k|^2} = \begin{cases} f_1^k(x) \tau_1^k + g_{1+1}^k(x) \tau_{1+1}^k & \text{dla } (\overline{XY}_1^k) \times (\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k) \neq 0 \\ 0 & \text{dla } (\overline{XY}_1^k) \times (\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k) = 0 \end{cases} \quad (3.203)$$

gdzie

$$f_1^k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{|(\overline{XY}_1^k) \times (\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k)|}{|\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k|^2} \left[\ln \frac{|\overline{XY}_1^k|}{|\overline{XY}_{1+1}^k|} - \frac{(\overline{XY}_{1+1}^k) \cdot (\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k)}{|(\overline{XY}_1^k) \times (\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k)|} \arccos \frac{(\overline{XY}_1^k) \cdot (\overline{XY}_{1+1}^k)}{|\overline{XY}_1^k| |\overline{XY}_{1+1}^k|} \right] \quad (3.204)$$

$$g_{1+1}^k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{(\overline{XY}_1^k) \cdot (\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k)}{|\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k|^2} \left[\ln \frac{|\overline{XY}_{1+1}^k|}{|\overline{XY}_1^k|} - \frac{(\overline{XY}_1^k) \cdot (\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k)}{|(\overline{XY}_1^k) \times (\overline{\gamma}_1^k \overline{\gamma}_{1+1}^k)|} \arccos \frac{(\overline{XY}_1^k) \cdot (\overline{XY}_{1+1}^k)}{|\overline{XY}_1^k| |\overline{XY}_{1+1}^k|} \right] \quad (3.205)$$

Zmieniając kolejność sumowania we wzorze (3.202) otrzymuje się:

$$u_{Lpo} \tau = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} [f_1^k(x) + g_1^k(x)] \tau_1^k = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} k(x) \tau_1^k \quad (3.206)$$

Wzór (3.206) przybliża potencjał logarytmiczny warstwy podwójnej (3.199) i można go zastosować do dyskretyzacji układu równań całkowych (2.58) lub (2.60).

4. ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ CAŁKOWO-BRZEGOWYCH PIERWSZEGO I DRUGIEGO RODZAJU, RÓWNOWAŻNYCH ZAGADNIENIOM DIRICHLETA DLA RÓWNIANIA LAPLACE'A, METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Do rozwiązania układu równań całkowych sformułowanych w rozdziale 2 można stosować przybliżone metody analizy funkcjonalnej, np. metodę Galerkiną [73]. W rozpatrywanym przypadku stosowanie ich wymagałoby wprowadzenia do aproksymacji nieznaną funkcji gęstości ładunków pewnego układu współrzędnych, tj. liniowo niezależnego i zupełnego układu funkcji zadanych na całej powierzchni przewodów. Przykład konstrukcji takiego układu współrzędnych podano w rozdziale 3. Innym rozwiązaniem byłoby zastosowanie jako układu współrzędnych układu ortonormalnego funkcji własnych jądra układu równań całkowych. Należy jednak podkreślić, że sam proces konstrukcji numerycznej układu współrzędnych dla dowolnie zadanych powierzchni przewodników jest problemem samym w sobie wymagającym bardzo dużego czasu obliczeniowego. Dlatego też stosowanie takich metod traci uniwersalność.

W niniejszym rozdziale rozpatrywane będą przybliżone metody rozwiązywania układów równań całkowych sformułowanych w rozdziale 2, bazujące na efektywnej metodzie elementów brzegowych.

W konstrukcji algorytmów obliczeniowych bazujących na tej metodzie centralną rolę odgrywa aproksymacja operatorów całkowych występujących w tych równaniach, dokonana w rozdziale 3 z zastosowaniem elementów brzegowych.

Taki proces aproksymacji tych operatorów pozwala na zastosowanie do numerycznego rozwiązania układów równań całkowych metody prostej algebrizacji [62], jak również metody kolejnych przybliżeń [47] w zalgebrizowanej postaci.

4.1. Algebrizacja układu równań całkowo-brzegowych

Zastosowanie metody elementów brzegowych pozwala na dyskretyzację układów równań całkowych sformułowanych w rozdziale 2. Stosując mianowicie aproksymację operatorów całkowych, występujących w tych równaniach, dokonaną w rozdziale 3 na bazie elementów brzegowych oraz zapisując te układy równań całkowych w tyłu punktach, ile jest zmiennych węzłowych ustalonych do aproksymacji tych operatorów, otrzymuje się algebraiczne układy równań będące przybliżeniem układu równań całkowych.

4.1.1. Numeryczne rozwiązywanie układu równań całkowych I rodzaju (2.4) i (2.14)

Wiadomo, że układy równań całkowych I rodzaju należą do zadań źle uwarunkowanych. Do rozwiązania tego typu równań opracowano specjalne metody regularyzacji [32, 52, 71, 120]. W pracy [3] pokazano, że stosowanie tej metody do równań całkowych I rodzaju z dokładnie zadaną prawą stroną zapewnia dowolnie mały błąd rozwiązania.

Problem konstrukcji optymalnych algorytmów przybliżonego rozwiązania równań operatorowych I rodzaju rozpatrywano w pracach np. [51, 53]. Przykłady zastosowań metod regularyzacji równań źle uwarunkowanych można znaleźć w [1].

Powyższe wskazania nie oznaczają jednak, że do rozwiązania układu równań całkowych I rodzaju (2.4) nie można zastosować prostych metod algebrizacji. Prostą algebrizację stosowano z powodzeniem w wielu zadaniach elektrostatyki, np. [61, 63, 115].

W przypadku ogólnym niech dany jest układ N_{p1} przewodników o dowolnych powierzchniach S^1 ($1 = 1, 2, \dots, N_{p1}$) i N_{p2} przewodów w postaci cienkich cylindrycznych walców o promieniach r_1 oraz potencjałach v^1 ($1 = 1, 2, \dots, N_{p1}, N_{p1} + 1, \dots, N_{p1} + N_{p2}$). Uwzględniając w układzie równań (2.4) przybliżenia odpowiednio (3.34) i (3.76) operatora typu potencjału warstwy pojedynczej zadanego na dowolnych powierzchniach przewodzących oraz przewodach walcowych, a następnie zapisując to równanie w tyłu punktach y_1^1 , ile jest niewiadomych zmiennych węzłowych ($1 = 1, 2, \dots, N_{p1}$) ($1 = 1, 2, \dots, N_1$) oraz tyłu punktach $y_{t,r}^m$ ($m = N_{p1} + 1, \dots, N_{p1} + N_{p2}$) ($r = 1, 2, \dots, 2N + 1$) ($t = 1, 2, \dots, N_m$), ile jest zmiennych niewiadomych harmonicznych gęstości ładunku $\sigma_{p,1,s}^1$ (3.74), otrzymuje się następujący układ $N_0 = \sum_{l=1}^{N_{p1}} N_l (2N+1) \sum_{l=N_{p1}+1}^{N_{p1}+N_{p2}} N_l$ równań algebraicznych o takiej samej ilości niewiadomych:

$$\sum_{l=1}^{N_{p1}} \sum_{i=1}^{N_1} A_i^1(y_j^k) \sigma_i^1 + \sum_{l=N_{p1}+1}^{N_{p1}+N_{p2}} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{p=1}^2 \sum_{s=0}^N c_{p,1,s}^1 (y_j^k) \sigma_{p,1,s}^1 = v^k 2 \epsilon_0.$$

$$(k = 1, 2, \dots, N_{p1}) \quad (j = 1, 2, \dots, N_k)$$

$$\sum_{l=N_{p1}+1}^{N_{p1}+N_{p2}} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{p=1}^2 \sum_{s=0}^N c_{p,1,s}^1 (y_{t,r}^m) \sigma_{p,1,s}^1 + \sum_{l=1}^{N_{p1}} \sum_{i=1}^{N_1} A_i^1(y_{t,r}^m) \sigma_i^1 = 2 \epsilon_0 v^m$$

$$(m = N_{p1} + 1, \dots, N_{p1} + N_{p2}) \quad (t = 1, 2, \dots, N_m) \quad (r = 1, 2, \dots, 2N + 1) \quad (4.1)$$

gdzie funkcje kształtu $A_1^1(x)$ oraz $c_{p,i,n}^1(x)$ są określone wzorami (3.35) i (3.77). O ile wybór punktów Y_j^k najwygodniej przyjąć w punktach triangulacji powierzchni S^k ($k = 1, 2, \dots, N_{p1}$), o tyle wybór punktów $Y_{t,r}^m \in \mathcal{E}_t^m$ łączących na powierzchniach elementów walcowych \mathcal{E}_t^m (3.66) jest w zasadzie dowolny. Aby w pełni wykorzystać możliwości obliczeniowe maszyny cyfrowej, wybór punktów $Y_{t,r}^m$ można by zoptymalizować. Optymalizacja ta polegałaby na tym, że każde następne podniesienie rzędu aproksymacji funkcji gęstości ładunku (wzór (3.74)) z N do $N+1$ pocięłoby za sobą wybór dodatkowych dwóch punktów na każdym elemencie \mathcal{E}_t^m , w którym odstępstwo lewej strony układu równań (2.4) od dokładnie zadanych prawych stron $2\epsilon_0 v^1$ jest maksymalne.

Tego typu postępowanie zapewnia pełne możliwości wykorzystania maszyny cyfrowej, lecz niewątpliwie wydłuży czas obliczeń. Innym rozwiązaniem jest wybór większej ilości punktów $Y_{t,r}^m$ niż zmiennych harmonicznych gęstości ładunków $\mathcal{G}_{p,i,n}^1$, co prowadzi do liniowego układu równań (3.207) nadokreślonego, którego pseudorozwiązania można np. znaleźć metodą bezpośrednią [76]. Niech \tilde{V}_1 jest macierzą kwadratową rzędu N_0 układu równań (4.1), natomiast $\tilde{\mathcal{G}}$ - wektor przybliżonego rozwiązania tego układu równań. Wówczas układ równań algebraicznych (4.1) jako wynik dyskretyzacji równania operatorowego (2.6) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\tilde{V}_1 \tilde{\mathcal{G}} = w \quad (4.2)$$

Błąd rozwiązania dyskretnego układu równań całkowych (2.4) wynika z tego, że macierz \tilde{V}_1 niedokładnie przybliża operator V (2.5), co związane jest ze stopniem przyjętej aproksymacji rozwiązania układu (2.4). W pracy [36] podano, że przy dokładnie zadanej prawej stronie układu równań (4.2), co ma miejsce w rozpatrywanym przypadku, błąd rozwiązania może być oceniony wg normy w następujący sposób:

$$\frac{\|\delta \tilde{\mathcal{G}}\|}{\|\tilde{\mathcal{G}}\|} \leq \kappa(\tilde{V}_1) \frac{\|\delta \tilde{V}_1\|}{\|\tilde{V}_1\|}, \quad (4.3)$$

gdzie

$$\kappa(\tilde{V}_1) = \|\tilde{V}_1\| \|\tilde{V}_1\|^{-1} - \text{wskaznik uwarunkowania macierzy } \tilde{V}_1$$

$$\text{względem normy (np. } \|\tilde{V}_1\| = \max_{1 \leq i \leq N_0} \sum_{j=1}^{N_0} |v_{ij}^1|$$

$$\frac{\|\delta \tilde{V}_1\|}{\|\tilde{V}_1\|} - \text{ błąd obliczenia elementów macierzy } \tilde{V}_1.$$

Duży wskaźnik uwarunkowania macierzy \tilde{V}_1 odnosi się do źle uwarunkowanych układów równań całkowych I rodzaju, tj. takich, w których małe odstępstwo zadanych prawych stron prowadzi do znacznych wariacji rozwiązania.

Jeżeli rośnie liczba N_0 niewiadomych układu (4.1), tj. zwiększa się liczbę punktów triangulacji dowolnych powierzchni przewodzących S^1 ($1 = 1, 2, \dots, N_{p1}$) elementów walcowych \mathcal{E}_1^1 przewodów S^1 ($1 = N_{p1}+1, \dots, N_{p1} + N_{p2}$), jak również zwiększa ilość harmonicznych w aproksymacji gęstości ładunków (3.74), to wskaźnik uwarunkowania $\kappa(\tilde{V}_1)$ będzie wzrastał, natomiast błąd obliczenia elementów macierzy \tilde{V}_1 będzie malał.

Wynika z tego, że dla ustalonego N_0 należy zapewnić dostatecznie dużą dokładność obliczenia elementów macierzy \tilde{V}_1 . Aby to osiągnąć, nie można się ograniczyć przy aproksymacji operatora całkowego do (2.5) zwykłych metod kwadratury [76]. Wystarczająco dokładne przybliżenie operatora V można osiągnąć stosując do aproksymacji funkcji gęstości ładunków tzw. funkcje sklepane [36]. W pracy [60] zastosowano je w przypadku, gdy operator V był zadany w przestrzeni funkcji określonych na powierzchniach o symetrii obrotowej, co łatwo sprowadza się do zagadnienia dwuwymiarowego. W niniejszej pracy zastosowano funkcje sklepane określone dla dowolnych powierzchni w przestrzeni R^3 , co pozwoliło otrzymać gotowe wzory (3.35) i (3.77) na obliczenie elementów macierzy \tilde{V}_1 układu równań (4.1). Ustalenie liczby zmiennych N_0 dla danego stopnia funkcji sklepanych, przy których otrzymuje się jeszcze stabilne rozwiązanie cyfrowe, jest możliwe tylko w wyniku przeprowadzenia dla danego układu przewodników eksperymentu cyfrowego na EMC.

W zadaniach techniki wysokich napięć rzeczą istotną jest ocenić dokładność obliczeń maksymalnych wartości natężeń na powierzchniach przewodników lub w pewnych obszarach. W tym celu należałoby ocenić dokładność obliczeń w poszczególnych punktach powierzchni, a nie tylko względem normy (4.3). Niech \tilde{V}_0 jest macierzą powstałą w wyniku algebraizacji układu równań całkowych (2.4) z zastosowaniem aproksymacji zerowego stopnia funkcjami stałymi na poszczególnych elementach powierzchni (3.14), natomiast \tilde{V}_1 jest macierzą układu (4.1) lub (4.2), tj. otrzymaną w wyniku zastosowania aproksymacji pierwszego stopnia (liniowej (3.17) i (3.74)). Jeżeli $\tilde{\mathcal{G}}_0$ jest rozwiązaniem algebraicznego układu równań

$$\tilde{V}_0 \tilde{\mathcal{G}}_0 = w, \quad (4.4)$$

to błąd tego rozwiązania można przedstawić w postaci [63]:

$$\delta \tilde{\mathcal{G}}_1 = \tilde{V}_0^{-1} (w - \tilde{V}_1 \tilde{\mathcal{G}}_0). \quad (4.5)$$

Wyrażenie (4.5) można zastosować nie tylko do oceny dokładności rozwiązania, lecz można wykorzystać do obliczenia następnego przybliżenia:

$$\tilde{\mathcal{G}}_1 = \tilde{\mathcal{G}}_0 - \delta \tilde{\mathcal{G}}_1. \quad (4.6)$$

Proces uściślenia rozwiązania można by kontynuować stosując coraz wyższe stopnia funkcji aproksymujących do obliczenia elementów macierzy \tilde{V} . Należy jednak pamiętać, że wybór coraz to bardziej złożonych formuł aproksymujących prowadzi do znacznego wzrostu operacji cyfrowych niezbędnych do obliczenia elementów macierzy \tilde{V} . Dlatego też w niniejszej pracy ograniczono się do stosowania w aproksymacji funkcji sklejanego pierwszego stopnia.

Analogicznie jak w przypadku trójwymiarowym (układ równań (2.4)) również w przypadku dwuwymiarowym dokonuje się algebraizacji układu równań całkowych I rodzaju (2.14). W rozpatrywanym przypadku polega ona na przybliżeniu operatora typu potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej dokonanego w punkcie 3.4 (wzory 3.170), (3.185), (3.188)), a następnie na zapisaniu układu równań (2.14) w tyłu punktach $X = Y_j^k$, ile jest zmiennych węzłowych. Najwygodniej jest wybrać te punkty Y_j^k , które posłużyły do przybliżenia operacji \tilde{V}_L (2.15). W ten sposób równanie całkowe przybliżone jest następującym układem równań liniowych:

$$\sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} c_i^k(Y_1^1) G_i^k = 2\epsilon_0 V^1 \quad (i = 1, 2, \dots, N_p) \quad (j = 1, 2, \dots, N_1) \quad (4.7)$$

Ogólnie rzecz biorąc, algebraizacja układu równań (2.14) może prowadzić do układu równań algebraicznych źle uwarunkowanych, dla których nieduże odchylenia elementów macierzy $c_i^k(Y_j^k)$ prowadzi do znacznych odchyżeń w elementach macierzy odwrotnej $[c_i^k(Y_j^k)^{-1}]$ [36, 75]. Paradoksalność sytuacji przy rozwiązywaniu układu (4.7) polega na tym, że im mniejsze elementy podziału e_i^k konturów e^k , tym większy może być błąd rozwiązania przy stosowaniu niedokładnych metod przybliżenia operatora \tilde{V}_L (2.15). Praktycznie rzecz biorąc, zmniejszanie elementów e_i^k konturów e^k do pewnej wielkości prowadzi do polepszenia dokładności. Przy dalszym zmniejszeniu elementów podziału konturów rozwiązanie zaczyna oscylować, tj. staje się niestabilne. Fakt ten uwiadamia się w utracie dokładności obliczeń. Dla usunięcia złego uwarunkowania układu równań (4.7) należy przyjąć dostatecznie grubą podział konturów, tj. liczba równań $N = \sum_{k=1}^{N_p} N_k$ nie może być zbyt duża, natomiast dostateczną dokładność rozwiązania należy zabezpieczyć przez dużą dokładność w obliczaniu współczynników $c_i^k(Y_j^1)$ tego układu.

Za względu na słabą osobliwość jądra układu równań całkowych (2.14) do obliczenia tych współczynników nie można przy obliczeniu operacji przybliżonych dla operacji \tilde{V}_L (2.15) stosować metod kwadratury [76]. Dlatego też do ich obliczenia należy stosować metodę przybliżenia operacji \tilde{V}_L opartą na zastosowaniu funkcji sklejanego (wzory 3.180), (3.185), (3.188)).

4.1.2. Numeryczne rozwiązywanie układów równań całkowych II rodzaju (2.4) i (2.14)

Zastosowanie metod analizy funkcjonalnej do bezpośredniego rozwiązania układu równań całkowych II rodzaju, np. metoda Galerkińa wymagałaby w rozpatrywanym przypadku wprowadzenia pewnego układu współrzędnych, tj. ortogonalnego i zupełnego układu funkcji zadanych na wszystkich powierzchniach przewodzących. Ze względu jednak na dowolność rozpatrywanego układu przewodników konstrukcja takich funkcji jest problemem numerycznym samym w sobie i dlatego tego typu metody tracą uniwersalność.

W punkcie 2.2.1 niniejszej pracy sformułowano układ równań całkowych II rodzaju (2.27), który jest równoważny zewnętrznemu problemowi Dirichleta dla trójwymiarowego równania Laplace'a, przy założeniu że powierzchnie przewodników są klasy C^1 . Do rozwiązania tego układu równań zastosowana będzie metoda elementów brzegowych. Odnośnie do rozpatrywanego układu równań (2.27) wymaga ona przybliżenia operatora całkowego (2.29) składającego się z dwóch członów, z których pierwszy stanowi potencjał warstwy pojedynczej przemnożony przez współczynnik α_1 , natomiast drugi jest jej pochodną w kierunku normalnym. Stosując więc odpowiednio aproksymację operatora typu potencjału warstwy pojedynczej (3.15) oraz jego pochodną w kierunku normalnym (3.99) w operatorze (2.29) otrzymuje się:

$$\tilde{W}G \approx \sum_{l=1}^{N_{p1}} \sum_{\{ijk\} \in \mathcal{M}^l} \left[G_{ijk}^1(x) - \alpha(x) F_{ijk}^1(x) \right] G_{ijk}^1 \quad (4.8)$$

gdzie

$$\alpha(x) = \alpha_m \quad \text{dla } x \in S^m \quad (m = 1, 2, \dots, N_{p1}),$$

natomiast funkcje $F_{ijk}^1(x)$, $G_{ijk}^1(x)$ współrzędnych punktu x określone są odpowiednio wzorami (3.16) i (3.100). Mając przybliżenie operatora (2.29) w postaci (4.8) do przybliżonego rozwiązania układu równań całkowych II rodzaju (2.27) można zastosować metodę kolokacji, polegającą na zapisaniu układu równań (2.29) z operatorem przybliżonym (4.8) w tyłu punktach, ile jest zmiennych niewiadomych stałych gęstości G_{ijk}^1 , tj. we wszystkich punktach $Y_{mnp}^s \in e_{mnp}^s$ należących kolejno do poszczególnych trójkątów e_{mnp}^s triangulacji powierzchni S^s ($s = 1, 2, \dots, N_{p1}$), $\{mnp\} \in \mathcal{M}^s$. Otrzymuje się wówczas następujący algebraiczny układ równań:

$$G_{mnp}^s = \sum_{l=1}^{N_{p1}} \sum_{\{ijk\} \in \mathcal{M}^l} \mathcal{H}_{ijk}^1(Y_{mnp}^s) G_{ijk}^1 = 2\epsilon_0 \alpha_s V^s \quad (s = 1, 2, \dots, N_{p1})$$

$$\{mnp\} \in \mathcal{M}^s, \quad (4.9)$$

gdzie

$$\mathcal{K}_{ijk}^1(\gamma) = \begin{cases} -\alpha_1 F_{ijk}^1(\gamma) & \text{dla } \gamma \in e_{ijk}^1, \\ G_{ijk}^1(\gamma) - \alpha(\gamma) F_{ijk}^1(\gamma) & \text{dla } \gamma \notin e_{ijk}^1. \end{cases} \quad (4.10)$$

w którym jest tyle niewiadomych stałych gęstości G_{ijk}^1 na poszczególnych trójkątach triangulacji e_{ijk}^1 powierzchni S^1 , ile jest równań. Przy rozwiązywaniu układu równań algebraicznych (4.9) nie występują już trudności związane ze złym uwarunkowaniem, jakie mogą wystąpić przy rozwiązywaniu układu równań algebraicznych odpowiadających układowi równań całkowych I rodzaju (2.4).

Powierzchnie przewodników posiadają czasem krawędzie lub punkty ostre, w otoczeniu których gęstości ładunków wzrastają nieograniczenie. Może to ujemnie wpłynąć na dokładność cyfrowych metod rozwiązywania układu równań całkowych (2.4), (2.27) i (2.54). W takim przypadku do rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta dla trójwymiarowego równania Laplace'a należy zastosować potencjał warstwy podwójnej [73]. Równoważny temu problemowi układ równań całkowych II rodzaju (2.54) podano w punkcie 2.2.2 tej pracy. Operacja całkowa występująca w układzie (2.54) składa się z dwóch członów, z których pierwszy stanowi potencjał warstwy podwójnej, dla którego można zastosować aproksymację (3.138). Do aproksymacji drugiego członu można zastosować funkcje sklepane pierwszego stopnia (3.127). Otrzymuje się wówczas:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{N_{p1}} \oint_{S^1} \tau^l(\gamma) \frac{a_1}{|\overline{XY}^1|} dS_\gamma \approx \sum_{l=1}^{N_{p1}} \sum_{i=1}^{N_1} a_1 \overline{R}_i^1(x) \tau_i^1. \quad (4.11)$$

gdzie

$$\overline{R}_i^1(x) = \sum_{\{ijk\} \in \mathcal{N}_i^1} \overline{R}_{ijk}^1(x) \quad (4.12)$$

\mathcal{N}_i^1 - zbiór trójkątów $\{ijk\}$ o wspólnym węźle γ_i^1

$$\overline{R}_{ijk}^1(x) = \frac{|(\overline{y_k^1 y_j^1}) \times (\overline{y_k^1 y_i^1})|}{12\pi |\overline{XY}^1|}, \quad \gamma^1 \in D^1 \quad (4.13)$$

Uwzględniając więc przybliżenia (3.138) i (4.11) operacja całkowa występująca w układzie równań całkowych (2.54) przyjmie następującą postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_i &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{N_{p1}} \oint_{S^1} \tau^l(\gamma) \left[\frac{\cos(\overline{\gamma X, n_\gamma})}{|\overline{XY}^1|^2} - \frac{a_1}{|\overline{XY}^1|} \right] dS_\gamma \\ &\approx \sum_{l=1}^{N_{p1}} \sum_{i=1}^{N_1} \left[\overline{R}_i^1(x) - a_1 \overline{R}_i^1(x) \right] \tau_i^1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Mając przybliżenia (4.14) operacji całkowej \mathcal{W}_i do przybliżonego rozwiązania układu równań całkowych (2.54) można zastosować metodę kollokacji polegającą w rozpatrywanym przypadku na zapisaniu tego układu równań całkowych we wszystkich punktach γ_i^1 triangulacji powierzchni S^1 . Uwzględniając ponadto przejście graniczne (3.144), gdy punkt X zmierza do punktu triangulacji $\gamma_i^1 \in S^1$, otrzymuje się wówczas następujący algebraiczny układ równań:

$$\frac{\alpha_i^1}{2\pi} \tau_i^1 - \sum_{s=1}^{N_{p1}} \sum_{p=1}^{N_s} \mathcal{D}_p^s(\gamma_i^1) \tau_p^s = 2\epsilon_0 V^1 \quad (i = 1, 2, \dots, N_{p1}) \quad (i = 1, 2, \dots, N_1), \quad (4.15)$$

gdzie

$$\mathcal{D}_p^s(\gamma_i^1) = \begin{cases} -a_1 \overline{R}_i^1(\gamma_i^1); & (s = 1) \wedge (p = i) \\ \overline{R}_p^s(\gamma_i^1) - a_1 \overline{R}_p^s(\gamma_i^1); & (p \neq i) \end{cases} \quad (4.16)$$

α_i^1 - kąt bryłowy powierzchni $e^1 = \bigcup_{\{ijk\} \in \mathcal{N}_i^1} e_{ijk}^1$

aproksymującej powierzchnię S^1 w punkcie triangulacji $\gamma_i^1 \in S^1$, w którym jest tyle niewiadomych stałych gęstości węzłowych τ_i^1 w poszczególnych punktach triangulacji γ_i^1 powierzchni S^1 , ile jest równań. Przy rozwiązywaniu układu równań algebraicznych (4.15) nie występują trudności związane ze złym uwarunkowaniem, jakie mogą wystąpić przy rozwiązywaniu równoważnego układu równań algebraicznych odpowiadających układowi równań całkowych I rodzaju (2.4).

Niemniej jednak parametry a_1 należałoby dobrać tak, ażeby współczynnik uwarunkowania układu równań (4.15) był możliwie najmniejszy.

W punkcie 2.2.2 tej pracy dokonano konstrukcji układu równań całkowych II rodzaju (2.58) będącego równoważnym zewnętrznemu problemowi Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a, przy założeniu że kontury e^k przewodów składają się ze skończonej sumy łuków wypukłych klasy C^1 ewentualnie odcinków. Do przybliżonego rozwiązania układu równań całkowych (2.58) zastosowana będzie również metoda elementów brzegowych.

Zgodnie z tą metodą należy dokonać aproksymacji operatora całkowitego \mathcal{U}_L (2.61) występującego w układzie równań całkowych (2.58) z zastosowaniem elementów brzegowych $e_{1,1}^k$ (3.148) oraz funkcji sklepanych stopnia pierwszego (3.153). Pierwsze dwa człony operatora \mathcal{U}_L (2.61) aproksymowano w ten sposób w punkcie 3.6 (wzory (3.106)), natomiast trzeci składnik tego operatora na każdym elemencie brzegowym $e_{1,1}^k$ można zgodnie ze wzorem (3.200) przybliżyć następująco:

$$\frac{1}{\pi} \oint_{e_1} \tau_1^k(\gamma) a_k \ln \frac{|x\gamma^k|}{|x\gamma^k|} d\gamma = u_1^k(x) \tau_1^k + v_{1+1}^k(x) \tau_{1+1}^k \quad (4.17)$$

$$u_1^k(x) = v_{1+1}^k(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\gamma_{1,1+1}^k} \frac{a_k}{2} \ln \frac{|x\gamma^k|}{|x\gamma^k|} \quad (4.18)$$

Uwzględniając wzory (3.206) oraz (4.17) operator \mathcal{U}_L (2.61) można przybliżyć następująco:

$$\mathcal{U}_L \tau = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} h_1^k(\gamma) \tau_i^k, \quad (4.19)$$

gdzie

$$h_1^k(x) = f_1^k(x) - f_1^{k'}(x) - g_1^k(x) - g_1^{k'}(x) - u_1^k(x) - v_1^k(x). \quad (4.20)$$

W przypadku gdy punkt x zmierza do konturu e_j^1 od strony zewnętrznej, to zgodnie z ogólną własnością graniczną potencjału warstwy podwójnej otrzymuje się następujące przejście graniczne dla operatora przybliżonego (4.19).

$$\lim_{x \rightarrow \gamma_j^1 \in e^1} \mathcal{U}_L \tau = - \frac{\beta^1(\gamma_j^1)}{\pi} + \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} \mathcal{F}_1^k(\gamma_j^1) \tau_i^k, \quad (4.21)$$

$x \in R^2 - \bar{D}_1$

gdzie

$$\mathcal{F}_1^k(\gamma_j^1) = \begin{cases} -f_1^{k'}(\gamma_j^1) - g_1^{k'}(\gamma_j^1) - u_1^k(\gamma_j^1) - v_1^k(\gamma_j^1) & \text{dla } (i=j) \wedge (k=1) \\ h_1^k(\gamma_j^1) & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Oznacza to, że granica wartości funkcji $f_j^1(x) + g_j^1(x)$ przy $x \rightarrow \gamma_j^1$ wynosi:

$$\lim_{\substack{x \in \gamma_j^1 \in e^1 \\ x \in R^2 - \bar{D}_1}} [f_j^1(x) + g_j^1(x)] = - \frac{\beta^1(\gamma_j^1)}{\pi}.$$

We wzorze (3.226) funkcje kształtu $f_1^k(x)$ i $g_1^k(x)$ określone są wzorami (3.204) i (3.205), natomiast funkcje $f_1^k(x)$ i $g_1^k(x)$ wyrażają się tymi samymi wzorami, przy czym występująca tam wektory (3.155a) i (3.155c) należy zastąpić wektorami (3.155b) i (3.155d), co formalnie rzecz biorąc odpowiada zamianie wskaźnika k na k' .

Biorąc w układzie równań (2.58) lub (2.60) przybliżenie (4.19) operatora (2.61), a następnie zapisując ten układ w tyłu punktach $x = \gamma_j^1$, ile jest zmiennych węzłowych i stosując przejście graniczne (4.21), otrzymuje się następujący układ równań algebraicznych:

$$\varphi^1(\gamma_j^1) \tau_j^1 - \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} \mathcal{F}_1^k(\gamma_j^1) \tau_i^k = 2\epsilon_0 v^1 \quad (1 = 1, 2, \dots, N_p) \quad (j = 1, 2, \dots, N_1)$$

$$\varphi^1(\gamma_j^1) = \frac{\beta^1(\gamma_j^1)}{\pi} \quad (4.22)$$

gdzie

$$\beta^1(\gamma_j^1) = \begin{cases} \pi & \text{jeżeli w punkcie } \gamma_j^1 \text{ istnieje styczna do } e^1, \\ \beta_j^1 & \text{- kąt konturu } e^1 \text{ w punkcie } \gamma_j^1. \end{cases}$$

Rozwiązanie algebraicznego układu równań (4.22) nie nastęrcza już takich problemów jak odpowiedni układ (4.7). Ponadto minimalizację współczynnika uwarunkowań macierzy układów (4.22), (2.168) można osiągnąć poprzez odpowiedni dobór współczynników a_k występujących w operatorze \mathcal{U}_L (2.61), co praktycznie ma wpływ na zwiększenie stabilności rozwiązania układu równań (4.22). Rozwiązanie algebraicznego układu równań (4.22) ze względu na zmienne węzłowe τ_i^k pozwala zgodnie ze wzorem (2.56) oraz z jego dyskretyzacją (4.19) otrzymać potencjał:

$$v(x) = - \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} h_1^k(x), \quad (4.23)$$

będący przybliżonym rozwiązaniem zewnętrznego problemu Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a.

4.2. Zastosowanie metody kolejnych przybliżeń do rozwiązywania układu równań całkowych I rodzaju

Zastosowania metod bezpośredniej algebraizacji układów równań całkowych w celu ich przybliżonego rozwiązania ograniczone są możliwością rozwiązywania wielkich układów równań algebraicznych otrzymanych w wyniku dyskretyzacji układów równań całkowych I rodzaju, np. (2.4) i (2.14) na maszynie cyfrowej.

Jak wykazane będzie dalej, możliwości cyfrowego rozwiązywania układu równań całkowych I rodzaju (2.4) i (2.14) zwiększają się (tj. można stosować gęstsze podziały brzegów obszarów), jeżeli przystosować do ich rozwiązywania koncepcję Fridmana [42] podaną dla jednego równania I rodzaju o niewiadomej funkcji zadanej na odcinku [ab], należącej do przestrzeni L_2 [ab].

4.2.1. Rozwiązywanie układu równań całkowych I rodzaju (2.14) metodą kolejnych przybliżeń - zagadnienie dwuwymiarowe

W pierwszej kolejności rozpatrywany będzie układ równań całkowych I rodzaju (2.14), który jest równoważny zewnętrznemu problemowi Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a.

Na wstępie należy zauważyć, że jądro układu równań całkowych I rodzaju (2.14) jest symetryczne i określone dodatnio. Do rozwiązania układu równań (2.14) można przystosować koncepcję Fridmana [47] podaną dla jednego równania o niewiadomej funkcji zadanej na odcinku [ab], należącej do L_2 [a, b].

Odnosnie do układu równań I rodzaju (2.14) można również wykazać, że jeżeli istnieje rozwiązanie tego układu, to ciąg funkcji $G_n^k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, N_p$) określony wzorem rekurencyjnym

$$G_n^k(x) = G_{n-1}^k(x) + \lambda \left[2\epsilon_0 v^k - \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^l} G_{n-1}^l(y) \ln \frac{|xy'|}{|xy|} dl_y \right] \quad (4.24)$$

$$x \in \epsilon^k \quad (k = 1, 2, \dots, N_p).$$

gdzie:

$$G_0^k(x) \in L_2^*(\epsilon^k). \quad (4.25a)$$

$$0 < \lambda < 2\lambda_1. \quad (4.25b)$$

a λ_1 jest najmniejszą liczbą charakterystyczną operacji T_L (2.15), jest zbieżny w przestrzeni $L_2^*(\epsilon)$ do rozwiązania układu równań (2.14). W tym celu należy wziąć pod uwagę następującą postać funkcji $G_n^k(x)$:

$$G_n^k(x) = G^k(x) + \tau_n^k(x). \quad (4.26)$$

Podstawiając wzór (4.26) do równania (4.24) oraz uwzględniając równanie (2.14) otrzymuje się:

$$\tau_n^k(x) = \tau_{n-1}^k(x) - \sum_{l=1}^{N_p} \frac{\lambda}{\pi} \oint_{\epsilon^l} \tau_{n-1}^l(x) \ln \frac{|xy'|}{|xy|} dl_y \quad (4.27)$$

Niech $\{\eta_1^k(x)\}$ będzie układem ortonormalnym funkcji własnych odpowiadających wartościom charakterystycznym λ_1 równania

$$\eta_1^k(x) - \frac{\lambda_1}{\pi} \sum_{l=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^l} \eta_1^l(y) \ln \frac{|xy'|}{|xy|} dl_y = 0 \quad (4.28)$$

Mnożąc równanie (4.27) przez funkcję własną $\eta_1^k(x)$ i całkując stronami po konturach $\epsilon = \cup_{k=1}^{N_p} \epsilon^k$ otrzymuje się:

$$\alpha_1^n = \alpha_1^{n-1} - \lambda \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^k} \oint_{\epsilon^l} \eta_1^k(x) \tau_{n-1}^l(y) \ln \frac{|xy'|}{|xy|} dl_y, \quad (4.29)$$

gdzie

$$\alpha_1^n = \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^k} \tau_n^k(x) \eta_1^k(x) dl_x. \quad (4.30)$$

Ponieważ jądro $\ln \frac{|xy'|}{|xy|}$ jest symetryczne, a $\eta_1^k(x)$ spełnia równanie (4.28) więc:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^k} \oint_{\epsilon^l} \eta_1^k(x) \tau_{n-1}^l(y) \ln \frac{|xy'|}{|xy|} dl_y = \sum_{l=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^l} \tau_{n-1}^l(y)$$

$$\left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^k} \eta_1^k(x) \ln \frac{|xx'|}{|yx|} dl_x \right] dl_y = \sum_{l=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^l} \tau_{n-1}^l(x) \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^k} \eta_1^k(y) \ln \frac{|xy'|}{|xy|} dl_y \right] dl_x =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1} \sum_{l=1}^{N_p} \oint_{\epsilon^l} \tau_{n-1}^l(x) \eta_1^l(x) dl_x = \frac{\alpha_1^{n-1}}{\lambda_1} \quad (4.31)$$

Podstawiając wynik przekształceń (4.31), w równaniu (4.29) otrzymuje się:

$$\alpha_1^n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \alpha_1^{n-1} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^n \alpha_1^0. \quad (4.32)$$

Na mocy zupełności układu ortonormalnego funkcji własnych $\{\eta_1^k(x)\}$ odpowiadających równaniu (4.28), tj. spełniających własności

$$\|\eta_1\|_{L_2^k(\mathcal{V})}^2 = \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\mathcal{V}} |\eta_1^k(x)|^2 d1_x = 1 \quad (4.33)$$

$$\sum_{k=1}^{N_p} \int_{\mathcal{V}} \eta_1^k(x) \eta_1^j(x) d1_x = 0 \quad \text{dla } i \neq j \quad (4.34)$$

funkcje $\tau_n^k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, N_p$) można rozwinąć na szereg Fouriera względem tego układu

$$\tau_n^k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^n \eta_j^k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, N_p) \quad (4.35)$$

Na mocy równości Parsevala [4]

$$\|\tau_n\|_{L_2^k(\mathcal{V})}^2 = \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\mathcal{V}} |\tau_n^k(x)|^2 d1_x = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^n|^2 \quad (4.36)$$

Dla $n = 0$ zgodnie z definicją (4.26) szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^0|^2 = \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\mathcal{V}} |g_0^k(x) - g^k(x)|^2 d1_x \quad (4.37)$$

jest zbieżny, gdyż z założenia istnieje całka po prawej stronie równości (4.37). Uwzględniając relację (4.32), szereg (4.36) można zapisać w postaci:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^n|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{2n} |\alpha_i^0|^2 \quad (4.38)$$

Ponieważ szereg $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^0|^2$ jest zbieżny, a liczby $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2 < 1$ tworzą ciąg monotoniczny i ograniczony ($i = k, k+1, \dots$), więc na mocy kryterium Abela [46] szereg $\sum_{i=k}^{\infty} |\alpha_i^n|^2$ jest zbieżny.

Zatem dla dowolnie małej dodatniej wartości $\varepsilon > 0$ można dobrać takie $k > K(\varepsilon)$, niezależnie od n , że

$$\sum_{i=k}^{\infty} |\alpha_i^n|^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.39)$$

Ponadto dla tego samego $\varepsilon > 0$ i ustalonego k można dobrać takie $n > N(\varepsilon)$, że suma pierwszych $k - 1$ wyrazów szeregu (4.38) spełnia oszacowanie:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{2n} |\alpha_i^0|^2 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.40)$$

gdź przy końcowym $i = k - 1$ zachodzi $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) < 1$.

W ten sposób zgodnie ze wzorem (4.36) dochodzimy do oszacowania

$$\|\tau_n\|_{L_2^k(\mathcal{V})}^2 = \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\mathcal{V}} |\tau_n^k(x)|^2 d1_x < \varepsilon \quad (4.41)$$

z którego na mocy równości (4.26) wynika zbieżność metody kolejnych przybliżeń określonych wzorem (4.24).

Dobór parametru λ spełniającego nierówność (4.25b) wymaga znajomości najmniejszej liczby charakterystycznej λ_1 układu jednorodnego (4.28). Do przybliżonego obliczenia najmniejszej liczby charakterystycznej λ_1 można zastosować metodę Kelloga [86].

W rozpatrywanym przypadku polega ona na tym, że dla dowolnych funkcji

$$\omega^k(x) \in L_2(\mathcal{V}^k), \quad \text{gdzie } x \in \mathcal{V}^k \quad (k = 1, 2, \dots, N_p)$$

nieortogonalnych do funkcji własnej $\eta_1^k(x)$ równania jednorodnego (4.28) buduje się ciąg funkcji:

$$\omega_n^k(x) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N_p} \int_{\mathcal{V}} \omega_{n-1}^l(x) \ln \frac{|xy|}{|x'y'|} d1_y; \quad x \in \mathcal{V}^k \quad (k = 1, 2, \dots, N_p). \quad (4.42)$$

gdzie

$$\omega_0^1(x) = \omega^1(x)$$

i ciąg liczb

$$\frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|},$$

gdzie

$$\|\omega_n(x)\| = \left[\sum_{k=1}^{N_p} \int_{\varphi_k} |\omega_n^k(x)|^2 dV \right]^{1/2}. \quad (4.43)$$

Przy powyższych założeniach najmniejszą liczbę charakterystyczną z nadmiarem otrzymuje się w postaci [86]:

$$\lambda_1 = \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|} \quad (4.44)$$

Mając na uwadze realizację procesu obliczeń kolejnych przybliżeń (4.24) na EMC, należy występującą tam operację całkową dyskretyzować jednym ze sposobów podanych w punkcie 3.4, a następnie rozpiąć ten proces w punktach podziału γ_1^k konturów φ^1 ($1 = 1, 2, \dots, N_p$).

Otrzymuje się wówczas

$$\delta_{m,j}^1 = \delta_{m-1,j}^1 + \lambda \left[2\varepsilon_0 v^1 - \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} c_i^k(\gamma_j^1) \delta_{m-1,i}^k \right] \quad (4.45)$$

$$(1 = 1, 2, \dots, N_p) \quad j = 1, 2, \dots, N_1) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

gdzie

$$\delta_{m,j}^1 = \delta_m^1(\gamma_j^1).$$

Nietrudno zauważyć, że algorytm (4.45) stanowi proces kolejnych przybliżeń dla rozwiązania układu równań algebraicznych (4.7). Nie można go jednak rozpatrywać w oderwaniu od metody kolejnych przybliżeń (4.24), gdyż rozpatrywanie jego zbieżności ma sens tylko wtedy, kiedy zbieżne są kolejne przybliżenia (4.24), co, jak pokazano, uzależnione jest od doboru parametru λ .

W przypadku gdy zachodzi konieczność rozwiązywania bardzo dużych układów algebraicznych (4.7), trudności rozwiązania tego układu związane z jego złym uwarunkowaniem można przewyżczyć stosując metodę kolejnych przybliżeń w postaci (4.45). Przykład zastosowania tej metody podano w końcowym rozdziale pracy.

4.2.2. Rozwiązywanie układu równań całkowych I rodzaju (2.4) metodą kolejnych przybliżeń - zagadnienie trójwymiarowe

Analogiczne rozumowanie jak w przypadku układu równań (2.14) (patrz pkt 4.2.1) można przeprowadzić odnośnie do układu równań całkowych (2.4), będącego równoważnym zewnętrznemu problemowi Dirichleta dla trójwymiarowego równania Laplace'a.

W pierwszej kolejności należy zauważyć, że jądro operacji całkowej (2.5) występującej w układzie równań (2.4) jest jądrem symetrycznym. Ponadto jądro to jest określone dodatnio, ponieważ jego forma kwadratowa [86]

$$\langle \mathcal{M}\delta, \delta \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{S_l} \int_{S_k} \frac{\delta^k(y) \delta^l(x)}{|xy|} dS_y dS_x = 2\varepsilon_0 \sum_{l=1}^{N_p} \int_{S_l} v(x) \delta^l(x) dS_x \quad (4.46)$$

odpowiada średniej wartości energii za okres [117], a jako taka jest rzeczywista i dodatnia. Do rozwiązania układu równań całkowych I rodzaju (2.4) można zastosować jak w pkt 4.2.1 koncepcję Fridmana podaną w pracy [47] dla jednego równania I rodzaju.

Można mianowicie wykazać, że ciąg funkcji $\{\delta_n^k(x)\}$ ($k = 1, 2, \dots, N_p$) ($n = 1, 2, \dots$) określony wzorem rekurencyjnym:

$$\delta_n^k(x) = \delta_{n-1}^k(x) + \lambda \left[2\varepsilon_0 v^k - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{N_p} \int_{S_l} \frac{\delta_{n-1}^l(y)}{|xy|} dS_y \right]; \quad x \in S^k \quad (k = 1, 2, \dots, N_p). \quad (4.47)$$

gdzie

$$\delta_0^k(x) \in L_2^*(S^k), \quad 0 < \lambda \leq 2\lambda_1, \quad (4.48)$$

a λ_1 jest najmniejszą liczbą charakterystyczną operacji \mathcal{M} (2.5), jest zbieżny w przestrzeni $L_2^*(S)$ ($S = \bigcup_{k=1}^{N_p} S^k$) do rozwiązania układu równań

całkowych I rodzaju (2.4). Dowód zbieżności tego ciągu funkcji można przeprowadzić w analogiczny sposób jak w pkt. 4.2.1, zamieniając tam operator \mathcal{M}_L z jądrem logarytmicznym w operator (2.5) z jądrem typu $\frac{1}{|xy|}$, którego dziedziną jest przestrzeń funkcji $L_2^*(S)$ określonych na powierzchniach przewodników $S = S_0^1 \cup \dots \cup S^{N_p}$. Dobór parametru spełniającego nierówność (4.48) wymaga znajomości najmniejszej liczby charakterystycznej λ_1 ukła-

du jednorodnego (3.6) odpowiadającego układowi (2.4). Do przybliżonego obliczenia najmniejszej liczby charakterystycznej λ_1 z nadmiarem można zastosować metodę Kelloga [86]. Niech dany jest układ N_p przewodników o dowolnych powierzchniach S^1 ($1 = 1, 2, \dots, N_p$) i potencjałach V^1 . Jak wiadomo, rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta dla równania Laplace'a w takim przypadku wprowadza się do rozwiązania układu równań całkowych I rodzaju (2.4). Do rozwiązania układu (2.4) można wykorzystać metodę kolejnych przybliżeń (4.47), przystosowując ją do realizacji na EMC.

W tym celu należy występującą tam operację całkową (2.5) aproksymować metodą podaną w pkt. 3.1.1, a następnie rozpisać ten proces w punktach γ_j^1 ($j = 1, 2, \dots, N_1$) triangulacji powierzchni S^1 ($1 = 1, 2, \dots, N_p$).

Otrzymuje się wówczas następujący algorytm:

$$\sigma_{n,j}^1 = \sigma_{n-1,j}^1 + \lambda \left[2\epsilon_0 V^1 - \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} A_i^k(\gamma_j^1) \sigma_{n-1,i}^k \right] \quad (4.49)$$

$$(1 = 1, 2, \dots, N_p) \quad (j = 1, 2, \dots, N_1) \quad (n = 1, 2, \dots, \infty),$$

gdzie

$$\sigma_{n,j}^1 = \sigma_n^1(\gamma_j^1),$$

który stanowi proces kolejnych przybliżeń dla rozwiązania układu równań algebraicznych:

$$\sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} A_i^k(\gamma_j^1) \sigma_i^k = 2\epsilon_0 V^1 \quad (j = 1, 2, \dots, N_1) \quad (1 = 1, 2, \dots, N_p) \quad (4.50)$$

Układ równań (3.255) stanowi szczególny przypadek układu (4.1), w którym odrzucono te równania i człony odpowiadające przewodom walcowym, a pozostawiono te, które odpowiadają aproksymacji operatora (2.5) z zastosowaniem triangulacji dowolnych powierzchni przewodzących. Algorytmu (4.49) nie można jednak rozpatrywać w oderwaniu od metody kolejnych przybliżeń (4.47), gdyż rozpatrywanie jego zbieżności ma tylko sens wtedy, kiedy zbieżne są kolejne przybliżenia (4.47), co, jak pokazano, uzależnione jest od doboru parametru λ . Wymaga to zgodnie z nierównością (4.48) określenia najmniejszej liczby charakterystycznej λ_1 operacji (2.5).

Do przybliżonego obliczenia najmniejszej liczby charakterystycznej operacji (2.5) zastosowana będzie metoda Kelloga [86]. W tym celu dla dowolnych funkcji $\omega^k(x) \in L_2^*(S^k)$ ($k = 1, 2, \dots, N_p$) ($x \in S^k$) nieortogonalnych do funkcji własnej $\varphi_1^k(x)$ równania jednorodnego (3.6) buduje się ciąg funkcji:

$$\omega_n^k(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{N_p} \int_{S^l} \frac{\omega_{n-1}^l(\gamma)}{|XY|} dS_\gamma \quad \begin{matrix} x \in S^k \\ k = 1, 2, \dots, N_p \\ (n = 1, 2, \dots, \infty) \end{matrix} \quad (4.51)$$

gdzie

$$\omega_0^k(x) = \omega^k(x)$$

i ciąg liczb

$$\frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|},$$

gdzie

$$\|\omega_n\| = \left[\sum_{k=1}^{N_p} \int_{S^k} |\omega_n^k(x)|^2 dS_x \right]^{1/2}. \quad (4.52)$$

Przy powyższych założeniach najmniejszą liczbę charakterystyczną z nadmiarem otrzymuje się w postaci [86]:

$$\lambda_1 = \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|}. \quad (4.53)$$

Mając na uwadze realizację procesu obliczeń λ_1 na EMC, należy konstrukcje funkcji (4.51) oraz ich normy (4.52) zalgebraizować. W tym celu należy dla funkcji $\omega_n^1(x)$ wprowadzić analogiczną aproksymację jak w pkt. 3.1.1 (wzór (3.17)) oraz identyczną triangulację powierzchni S^1 . Otrzymuje się wówczas:

$$\omega_n^1(x) = \begin{cases} \omega_{n,1}^1 + (\omega_{n,j}^1 - \omega_{n,1}^1)\xi + (\omega_{n,k}^1 - \omega_{n,1}^1)\eta; & x \in e_{ijk}^1; \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad 0 < \eta \leq 1-\xi \\ 0 & x \notin e_{ijk}^1 \end{cases} \quad (4.54)$$

gdzie

$$\omega_{n,1}^1 = \omega_n^1(\gamma_1^1).$$

e_{ijk}^1 - trójkąt triangulacji powierzchni S^1 (wzór (3.10)).

Wykorzystując aproksymację operatora \mathcal{V} (2.5) przeprowadzoną w punkcie 3.1.1 (wzór (3.34)) w procesie konstrukcji (4.51) funkcji $\omega_n^1(x)$ oraz rozpisując ten wzór (4.51) w poszczególnych punktach triangulacji γ_j^1

wierzchni S^1 ($l = 1, 2, \dots, N_p$) ($j = 1, 2, \dots, N_1$), otrzymuje się następującą algebraiczną postać procesu konstrukcji ciągu funkcji $\{\omega_n^1(y_j^1)\}$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$)

$$\omega_n^1(y_j^1) = \omega_{n,j}^1 = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} A_i^k(y_j^1) \omega_{n-1,i}^1 \quad (l = 1, 2, \dots, N_p) \quad (j = 1, 2, \dots, N_1) \quad (4.55)$$

Uwzględniając przy obliczaniu normy (4.52) aproksymację funkcji $\omega_n^1(x)$ daną wzorem (4.54) dla triangulacji powierzchni S^1 ($l = 1, 2, \dots, N_p$) trójkątami \mathcal{T}_{ijk}^1 (wzór (3.10)) oraz uwzględniając wzór (3.13), otrzymuje się następujące przybliżenie normy (4.52):

$$\|\omega_n\| \approx \left\{ \frac{1}{24} \sum_{l=1}^{N_p} \sum_{\{i,j,k\} \in \mathcal{T}^1} |(\overline{y_i^1 y_j^1})| \cdot \cdot (\overline{y_i^1 y_k^1}) \left[|\omega_{n,i}^1|^2 + |\omega_{n,j}^1|^2 + |\omega_{n,k}^1|^2 + + |\omega_{n,i}^1 + \omega_{n,j}^1 + \omega_{n,k}^1|^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (4.56)$$

gdzie

\mathcal{T}^1 - zbiór trójkątów triangulacji powierzchni S^1 .

Wzory (4.55), (4.56) i (4.53) pozwalają więc w sposób przybliżony określić najmniejszą liczbę charakterystyczną operacji \mathcal{V} (2.5) z zastosowaniem techniki numerycznej. Należy zauważyć, że w konstrukcji (4.55) ciągu funkcji $\{\omega_n^1(y_j^1)\}$ niezbędnego do obliczania λ_1 stosuje się tę samą macierz $A_i^k(y_j^1)$, która występuje w procesie iteracyjnym (4.49), co niewątpliwie skraca czas obliczeń.

4.3. Zastosowanie metody kolejnych przybliżeń do rozwiązywania układu równań całkowych II rodzaju (2.27) i (2.43)

Zastosowanie metod regularyzacji podanych w punkcie 2.2.1 pozwala na sprowadzenie układów równań całkowych I rodzaju (2.4) (zagadnienie trójwymiarowe) i (2.14) (zagadnienie dwuwymiarowe) do odpowiednich układów równań całkowych II rodzaju (2.27) i (2.43).

Również stosowanie potencjału warstwy podwójnej pozwala przedstawić zewnętrzny problem Dirichleta dla trój- i dwuwymiarowego równania Laplace'a w postaci równoważnych układów równań całkowych II rodzaju odpowiednio w postaci (2.54) i (2.58). Do przybliżonego rozwiązania układu równań całkowych II rodzaju można zastosować klasyczną metodę kolejnych przybli-

żeń [86]. Metoda ta będzie wykorzystana do rozwiązania wcześniej wymienionych równań algebraizowanej postaci. W dyskretyzacji algorytmów kolejnych przybliżeń zastosowane będą elementy brzegowe i funkcje sklepane.

W pierwszej kolejności rozpatrywany będzie układ równań całkowych II rodzaju (2.27), który jest równoważny zewnętrznemu problemowi Dirichleta dla trójwymiarowego równania Laplace'a.

Zgodnie z metodą kolejnych przybliżeń [136] tworzy się ciąg przybliżeń $\{\phi_n^1(x)\}$ ($l = 1, 2, \dots, N_{p1}$) ($n = 1, 2, \dots$) na podstawie wzoru rekurencyjnego, który dla układu (2.27) przyjmuje postać:

$$\phi_n^1(x) = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S_k} \phi_{n-1}^k(y) \left[\frac{d}{dn_x} \left(\frac{1}{|XY|} \right) - \frac{\alpha_1}{|XY|} \right] dS_Y + 2\epsilon_0 v^1 \alpha^1, \quad (4.57)$$

gdzie

$$\lambda = 1, \quad (x \in S^1) \quad (l = 1, 2, \dots, N_{p1}).$$

Dla $\lambda = 1$ ciąg przybliżeń (4.57) jest zbieżny, jeżeli najmniejsza liczba charakterystyczna λ_1 jest większa co do modułu od jedności [124]

$$|\lambda_1| > 1 \quad (4.58)$$

Istnienie jednoznacznego rozwiązania układu (2.27) nie zależy od stałych współczynników $\alpha_1 > 0$. Z punktu widzenia jednak metody kolejnych przybliżeń należy je dobrać tak, aby zachodziła nierówność (4.58). Współzależność między najmniejszą liczbą charakterystyczną λ_1 operacji (2.29) a współczynnikami α_1 ($l = 1, 2, \dots, N_{p1}$) można znaleźć stosując przybliżoną metodę Kelloga [86].

W rozpatrywanym przypadku buduje się ciąg funkcji $\{\mathcal{K}_n^1(x)\}$ ($l = 1, 2, \dots, N_{p1}$) ($x \in S^1$)

$$\mathcal{K}_n^1(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \oint_{S_k} \mathcal{K}_{n-1}^k(x) \left[\frac{d}{dn_x} \left(\frac{\alpha_1}{|XY|} \right) - \frac{\alpha_1}{|XY|} \right] dS_Y \quad (x \in S^1), \quad (4.59)$$

gdzie

$\mathcal{K}_0^1(x)$ dowolna funkcja należąca do $L_2^1(S^1)$ i ciąg liczb

$$\frac{\|\%_{n-1}\|}{\|\%_n\|},$$

gdzie

$$\|\%_n\| = \left[\sum_{k=1}^{N_{p1}} \int_{S^k} |\%_n^k(x)|^2 dS_x \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.60)$$

Najmniejszą liczbę charakterystyczną operacji (2.29) można wówczas oszacować w postaci:

$$\lambda_1 = \frac{\|\%_{n-1}\|}{\|\%_n\|}. \quad (4.61)$$

Mając na uwadze realizację procesu kolejnych przybliżeń oraz obliczanie najmniejszej liczby charakterystycznej operacji (2.29) na EMC, należy odpowiednio iteracje (4.47) i (4.59) dyskretyzować stosując aproksymację operacji (2.29) daną wzorami (4.8), (4.9) i (4.10). Wzór rekurencyjny (4.57) przyjmie wówczas postać zalgebraizowaną:

$$G_n^s(npr) = \sum_{l=1}^{N_{p1}} \sum_{\{ijk\} \in J^s} \mathcal{K}_{ijk}^1(y_{mpr}^s) G_{n-1}^s(ijk) + 2\epsilon_0 v^s \sigma_s^s; \quad (s = 1, 2, \dots, N_{p1})$$

$$\{npr\} \in J^s; \quad (n = 1, 2, \dots, \infty), \quad (4.62)$$

gdzie

$\mathcal{K}_{ijk}^s(y)$ określone jest wzorem (4.10)

$$G_n^s(npr) = G_n^s(y_{mpr}^s); \quad y_{mpr}^s \in \mathcal{V}_{mpr}^s \quad (\text{wzór 3.10})$$

- stała gęstość ładunku dla trójkąta \mathcal{V}_{mpr}^s triangulacji powierzchni S^s . Analogiczna dyskretyzacja wzoru rekurencyjnego (4.59) oraz (4.60) daje:

$$\%_n^s(npr) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{N_{p1}} \sum_{\{ijk\} \in J^s} \mathcal{K}_{ijk}^1(y_{mpr}^s) \%_{n-1}^s(ijk) \quad (4.63)$$

$$\|\%_n\| = \left[\sum_{l=1}^{N_{p1}} \sum_{\{ijk\} \in J^s} |\%_n^s(ijk)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.64)$$

gdzie $\%_{o(mpr)}^1$ - dowolne stałe przyporządkowane poszczególnym trójkątom \mathcal{V}_{mpr}^1 triangulacji powierzchni S^1 .

Należy zauważyć, że algorytm (4.62) stanowi proces kolejnych przybliżeń dla rozwiązywania układu równań algebraicznych (4.9). Nie można go jednak rozpatrywać w oderwaniu od metody kolejnych przybliżeń (4.57), gdyż rozpatrywanie jego zbieżności ma sens tylko wtedy, gdy zbieżne są kolejne przybliżenia (4.57), co, jak wiadomo [86], uzależnione jest od wartości najmniejszej liczby charakterystycznej operacji (2.29) (nierówności (4.58)). Obliczenie najmniejszej liczby charakterystycznej operacji można wykonać stosując wzory (4.61), (4.63) i (4.64).

Stosowanie potencjału warstwy podwójnej pozwala również na sprowadzenie zewnętrznego problemu Dirichleta dla trójwymiarowego równania Laplace'a do układu równań całkowych II rodzaju (2.43). W takim przypadku można również do rozwiązania układu równań (2.43) zastosować metodę kolejnych przybliżeń w postaci dyskretnej, analogicznie jak dla układu (2.27).

4.4. Algebraizacja układów równań całkowych brzegowych I i II rodzaju (2.69) i (2.70)

W punkcie 2.3 pracy pokazano, że rozwiązanie równania Laplace'a w układzie przewodników i dielektryków doskonałych z warunkami brzegowymi (2.63), (2.64) i (2.65) można sprowadzić do rozwiązania równoważnego układu równań całkowych I i II rodzaju (2.69) i (2.70) ze względu na gęstości ładunków swobodnych $\delta^1(x)$ występujących na powierzchniach przewodników oraz gęstości ładunków fikcyjnych $\%^1(x)$ występujących na powierzchniach dielektryków.

Również w tym przypadku ze względu na dowolność rozpatrywanych powierzchni przewodników S^k i dielektryków Γ^l do ich aproksymacji zastosowana będzie metoda triangulacji powierzchni za pomocą trójkątów \mathcal{V}_{ijk}^1 (wzór (3.10)). Funkcje gęstości ładunków swobodnych $\delta^1(x)$ oraz fikcyjnych $\%^1(x)$ aproksymowane będą funkcjami sklejanymi zerowego stopnia, tj. stałymi na poszczególnych trójkątach \mathcal{V}_{ijk}^1 triangulacji. Operacje całkowe występujące w układzie równań całkowych (2.69) i (2.70) stanowią kombinacje potencjału warstwy pojedynczej i ich pochodnych. Do ich dyskretyzacji można więc zastosować wzory (3.15) i (3.99) wyprowadzone przy założeniu stałych wartości gęstości ładunków swobodnych δ_{ijk}^1 na trójkątach \mathcal{V}_{ijk}^1 triangulacji powierzchni przewodzących S^1 oraz stałych wartości gęstości ładunków fikcyjnych $\%_{ijk}^1$ na trójkątach \mathcal{V}_{ijk}^1 triangulacji powierzchni dielektryków Γ^1 .

Stosując następnie metodę kollokacji polegającą w rozpatrywanym przypadku na zapisaniu układu równań całkowych II rodzaju (2.69) we wszystkich punktach wewnętrznych $y_{mnp}^s \in \mathcal{V}_{mnp}^s$ trójkątów triangulacji powierzchni dielektryków Γ^s ($s = 1, 2, \dots, N_d$) oraz na zapisaniu układu równań całkowych I rodzaju we wszystkich punktach wewnętrznych $x_{mnp}^x \in \mathcal{V}_{mnp}^x$ trój-

kątów triangulacji powierzchni przewodników S^s otrzymuje się następują-
cy układ równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} \alpha_{mnp}^s &= \lambda \sum_{l=1}^{N_p} \sum_{\substack{\{ijk\} \in J^l \\ (s \neq l) \wedge \{mnp\} \in J^l_p}} \beta_s G_{ijk}^1(y_{mnp}^s) \alpha_{ijk}^1 - \\ &- \lambda \sum_{l=1}^{N_p} \sum_{\{ijk\} \in J^l_p} \beta_s G_{ijk}^1(y_{mnp}^s) \sigma_{ijk}^1 = 0 \\ (s = 1, 2, \dots, N_d) \quad (y_{mnp}^s \in \mathcal{E}_{mnp}^s) \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{N_p} \sum_{\{ijk\} \in J^l_p} F_{ijk}^1(x_{mnp}^s) \sigma_{ijk}^1 + \\ &+ \sum_{l=1}^{N_d} \sum_{\{ijk\} \in J^l_p} F_{ijk}^1(x_{mnp}^s) \alpha_{ijk}^1 = 2\epsilon_0 v^s \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$x_{mnp}^s \in \mathcal{E}_{mnp}^s$$

gdzie funkcje $G_{ijk}^1(y)$ i $F_{ijk}^1(x)$ wyrażają się wzorami (3.111) i (3.16)

J^l_p - zbiór trójkątów triangulacji $\{ijk\}$ powierzchni dielektryka Γ^l ,

J^l_p - zbiór trójkątów triangulacji $\{mnp\}$ powierzchni przewodników S^l ,

w którym jest tyle niewiadomych gęstości powierzchniowych ładunków swobodnych σ_{ijk}^1 i fikcyjnych α_{ijk}^1 , ile jest równań.

Jeżeli rozpatrywany układ równań algebraicznych (4.65) i (4.66) jest zbyt duży, to jego rozwiązywanie numeryczne może utrzeć stabilność związaną ze złym uwarunkowaniem układu równań całkowych I rodzaju (2.71).

Dla uniknięcia tych trudności można zastosować metody regularyzacji omawiane w punkcie 2.2. W przypadku np. gdy rozpatrywane powierzchnie przewodników S^l są powierzchniami zamkniętymi, zamiast równań algebraicznych (4.66) można zalgebraizować równoważny układ równań całkowych:

$$\begin{aligned} \sigma^1(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{S^k} \sigma^k(y) \left[\frac{\cos(\vec{x}\vec{y}, \vec{n}_x)}{|\vec{x}\vec{y}|^2} - \frac{\alpha_1}{|\vec{x}\vec{y}|} \right] dS_y - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_d} \oint_{\Gamma^k} \alpha^k(y) \frac{\cos(\vec{x}\vec{y}, \vec{n}_x)}{|\vec{x}\vec{y}|^2} \\ &- \frac{\alpha_1}{|\vec{x}\vec{y}|} dS_y = 2\epsilon_0 \alpha_1 v^1; \quad (x \in S^1) \quad (1 = 1, 2, \dots, N_p), \end{aligned} \quad (4.67)$$

gdzie

$$\alpha_1 > 0.$$

Proces ten przeprowadzony analogicznie jak w pkt. 4.1.2 daje:

$$\begin{aligned} \sigma_{mnp}^s &= \sum_{l=1}^{N_p} \sum_{\{ijk\} \in J^l_p} \alpha_{ijk}^1(x_{mnp}^s) \sigma_{ijk}^1 - \sum_{l=1}^{N_d} \sum_{\{ijk\} \in J^l_p} \alpha_{ijk}^1(x_{mnp}^s) \alpha_{ijk}^1 = 2\epsilon_0 \alpha_s v^s \\ (s = 1, 2, \dots, N_p) \quad (x_{mnp}^s \in \mathcal{E}_{mnp}^s) \end{aligned} \quad (4.68)$$

gdzie zgodnie ze wzorem (4.10)

$$\begin{aligned} \alpha_{ijk}^1(x) &= \begin{cases} -\alpha_1 F_{ijk}^1(x) & \text{dla } x \in \mathcal{E}_{ijk}^1 \\ G_{ijk}^1(x) - \alpha(x) F_{ijk}^1(x) & \text{dla } x \notin \mathcal{E}_{ijk}^1 \end{cases} \\ \alpha(x) &= \alpha_1 \quad \text{dla } x \in \mathcal{E}_{ijk}^1; \quad \{ijk\} \in J^l_p \end{aligned} \quad (4.69)$$

Przy rozwiązywaniu układu równań algebraicznych (4.65) i (4.68) nie wystąpią już takie trudności jak przy rozwiązywaniu równoważnego układu (4.65) i (4.66). Ponadto parametry regularyzacji α_1 można dobrać tak, ażeby współczynnik uwarunkowania macierzy układu równań (4.65) i (4.68) był możliwie najmniejszy.

W przypadku zastosowania metody regularyzacji, polegającej na dołączeniu do układu równań całkowych II rodzaju (2.69) zamiast układu równań całkowych I rodzaju (2.71) równoważnego układu równań całkowych II rodzaju (4.60), można je również rozwiązać stosując metodę kolejnych przybliżeń w zalgebraizowanej postaci, analogicznie jak w pkt. 4.3.

5. OBLICZANIE ROZKŁADU WEKTORA NATĘŻENIA POLA ELEKTRYCZNEGO

W poprzednich rozdziałach pracy dokonano rozwiązania problemu Dirichleta dla dwu- i trójwymiarowego równania Laplace'a jako równoważnego układu równań całkowych I i II rodzaju, których konstrukcja oparta jest na potencjale tak warstwy pojedynczej, jak i podwójnej. Niezależnie jednak od sposobu przybliżonego rozwiązania potencjału $V(x)$ natężenie pola elektrycznego w obszarze zewnętrznym przewodników wyraża się wzorem:

$$E(x) = -\text{grad } V(x).$$

5.1. Pole elektryczne quasi-statyczne sinusoidalnie zmienne w ujęciu trójwymiarowym

Stosowanie potencjału warstwy pojedynczej pozwoliło sprowadzić zewnętrzny problem Dirichleta dla trójwymiarowego równania Laplace'a do układu równań całkowych I rodzaju (2.4) lub II rodzaju (2.27), (2.37), (2.40) i (2.41), (2.42). W zależności od tego czy do dyskretyzacji występujących w tych równaniach operatorów zastosujemy aproksymację funkcji gęstości ładunków stałą G_{ijk}^1 na powierzchni poszczególnych trójkątów triangulacji powierzchni przewodzących S^1 czy liniową ze względu na zmienne węzłowe G_i^1 otrzymuje się rozwiązanie dyskretne tych równań całkowych w postaci $\{G_{ijk}^1\}$ lub $\{G_i^1\}$, które pozwala otrzymać przybliżone rozwiązanie potencjału $V(x)$ w dowolnym punkcie na zewnątrz przewodników odpowiednio w postaci:

$$V(x) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{l=1}^{N_p} \sum_{\{ijk\} \in J^1} F_{ijk}^1(x) G_{ijk}^1 \quad (5.2)$$

$$V(x) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{l=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_1} A_i^1(x) G_i^1 \quad (5.3)$$

gdzie funkcje kształtu $F_{ijk}^1(x)$ i $A_i^1(x)$ określone są odpowiednio wzorami (3.16) i (3.35).

W analogiczny sposób można określić potencjał w przypadku rozpatrywania mieszanego zagadnienia brzegowego (układy przewodników i dielektryków) dla równania Laplace'a (pkt. 2.3 i 4.4).

Stosowanie potencjału warstwy podwójnej pozwala również sprowadzić zewnętrzny problem Dirichleta do układu równań całkowych II rodzaju (2.55), którego przybliżone rozwiązanie ze względu na zmienne węzłowe gęstości warstwy podwójnej ϵ_1^1 pozwala otrzymać przybliżone rozwiązanie na potencjał $V(x)$ w postaci:

$$V(x) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{l=1}^{N_{p1}} \sum_{i=1}^{N_1} \left[R_i^1(x) - a_i R_i^1(x) \right] \epsilon_1^1 \quad (5.4)$$

gdzie funkcje kształtu $R_i^1(x)$ i $\bar{R}_i^1(x)$ wyrażają się odpowiednio wzorami (3.139) i (4.12).

Jeżeli potencjały poszczególnych przewodników są zadane w postaci zespolonej, co odpowiada rzeczywistym przebiegom sinusoidalnie zmiennym o tych samych pulsacjach, lecz różnych fazach, to również gęstości węzłowe G_i^1 lub G_{ijk}^1 będące rozwiązaniem układu równań np. (2.27) lub (2.55) są zespolone, a zgodnie ze wzorami (5.3) i (5.4) oraz (5.1) składowe $E_{x1}(x)$, $E_{x2}(x)$, $E_{x3}(x)$ są również zespolone:

$$E(x) = k_1 E_{x1}(x) + k_2 E_{x2}(x) + k_3 E_{x3}(x) \quad (5.5)$$

gdzie

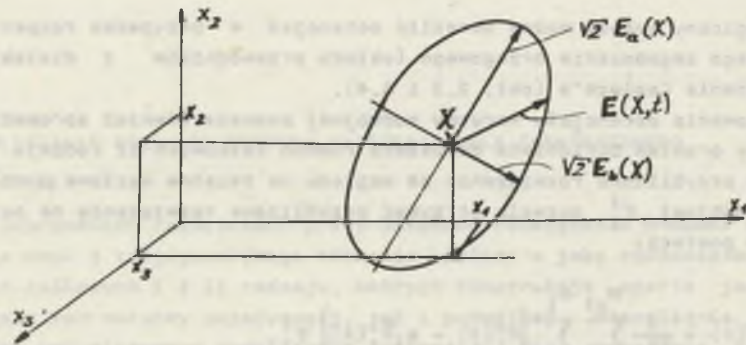
$$E_{x1}(x) = -\partial V / \partial x_1.$$

Jak pokazał autor w pracy [18] w takim przypadku, ogólnie rzecz biorąc, w dziedzinie czasowej wektor natężenia pola elektrycznego

$$E(x) = k_1 E_{x1}(x,t) + k_2 E_{x2}(x,t) + k_3 E_{x3}(x,t) \quad (5.6)$$

jest spolaryzowany eliptycznie, tj. zakreśla w ciągu okresu T elipsę (rys. 5.1). Wartości skuteczne składowych tego wektora w kierunku półośi dużej i małej tej elipsy wynoszą odpowiednio:

$$E_a(x) = \max_{t \in (0,T)} \frac{1}{\sqrt{2}} |E(x,t)| = \left[|E_{x1}(x)|^2 \cos^2(\varphi_{x1} - \frac{1}{2} \varphi_A) + |E_{x2}(x)|^2 \cos^2(\varphi_{x2} - \frac{1}{2} \varphi_A) + |E_{x3}(x)|^2 \cos^2(\varphi_{x3} - \frac{1}{2} \varphi_A)^{1/2} \right]$$



Rys. 5.1. Elipse pola wirującego jako krzywa przestrzenna
Fig. 5.1. Ellipse of the rotational field as the three - dimensional curve

$$\begin{aligned}
 E_a(x) &= k_1 |E_{x1}(x)| \cos \left[\varphi_{x1}(x) - \frac{1}{2} \varphi_A(x) \right] + \\
 &+ k_2 |E_{x2}(x)| \cos \left[\varphi_{x2}(x) - \frac{1}{2} \varphi_A(x) \right] + k_3 |E_{x3}(x)| \cos \left[\varphi_{x3}(x) - \frac{1}{2} \varphi_A(x) \right]; \\
 E_b(x) &= \min_{t \in (0, \tau]} \frac{1}{\sqrt{2}} E(x, t) = \left[|E_{x1}(x)|^2 \sin^2 \left(\varphi_{x1} - \frac{1}{2} \varphi_A \right) + \right. \\
 &+ |E_{x2}(x)|^2 \sin^2 \left(\varphi_{x2} - \frac{1}{2} \varphi_A \right) + |E_{x3}(x)|^2 \sin^2 \left(\varphi_{x3} - \frac{1}{2} \varphi_A \right) \Big]^{1/2} \\
 E_b(x) &= k_1 |E_{x1}(x)| \sin \left[\varphi_{x1}(x) - \frac{1}{2} \varphi_A(x) \right] + \\
 &+ k_2 |E_{x2}(x)| \sin \left[\varphi_{x2}(x) - \frac{1}{2} \varphi_A(x) \right] + k_3 |E_{x3}(x)| \sin \left[\varphi_{x3}(x) - \frac{1}{2} \varphi_A(x) \right].
 \end{aligned}$$

(5.7)

gózie

$$\varphi_A(x) = \arg \left[E_{x1}^2(x) + E_{x2}^2(x) + E_{x3}^2(x) \right] \quad (5.8)$$

$$E_{xi}(x) = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

W przypadku granicznym, gdy punkt X zmierza do powierzchni S^1 przewodnika, otrzymuje się:

$$\lim_{x \rightarrow x_1^1 \in S^1} E(x) = E_a(x_1^1), \quad (5.9)$$

przy czym

$$E_b(x_1^1) = 0. \quad (5.10)$$

Jeżeli do wzoru (5.1) podstawić przybliżone wartości potencjałów $V(x)$ dane np. wzorami (5.3) lub (5.4) i dokonać przejścia granicznego zmierzając z punktem X do powierzchni S^1 przewodnika, otrzymuje się wówczas składową normalną wektora natężenia pola elektrycznego. Jeżeli prototypem rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta jest potencjał warstwy pojedynczej (2.3), to wspomniane przejście graniczne jest równoważne znajomości gęstości powierzchniowej ładunków otrzymanej z rozwiązania układu równań algebraicznych (np. (4.1). Jeżeli natomiast prototypem rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta jest potencjał warstwy podwójnej (2.51), to nie można bezpośrednio rozwiązać rozkładu natężenia pola elektrycznego na powierzchniach przewodów. Z rozwiązania układu równań algebraicznych (4.15) otrzymuje się bowiem gęstości warstwy podwójnej τ_1^1 , które zgodnie ze wzorem (2.53) pozwolą bezpośrednio określić tylko ładunki całkowite q_1 na poszczególnych przewodnikach. Chcąc określić natężenie pola na powierzchniach przewodników, należałoby w tym przypadku we wzorze

$$E(x) = -\text{grad}V(x) = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{l=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_1} \text{grad} \left[R_i^1(x) - a_i R_i^1(x) \right] \tau_i^1 \quad (5.11)$$

dokonać przejścia granicznego przy punkcie X zmierzającym do powierzchni S^1 .

Podany algorytm w postaci wzorów (5.7) i (5.8) jest ogólny i może być dołączony do dowolnego sposobu rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta dla trójwymiarowego równania Laplace'a z sinusoidalnie zmiennymi warunkami brzegowymi o małej pulsacji.

Pozwala więc on na badanie rozkładów pól elektrycznych quasi-statycznych spolaryzowanych eliptycznie, których badanie jest niezbędne w technice wysokich napięć.

5.2. Pole elektryczne quasi-statyczne sinusoidalnie zmiennie w ujęciu dwuwymiarowym

Stosowanie potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej pozwoliło na sprowadzenie zewnętrznego problemu Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a do układu równań całkowych I lub II rodzaju (2.14) i (2.43), których rozwiązania ze względu na zmienne węzłowe gęstości ładunków G_k^k pozwala otrzymać przybliżone rozwiązanie na potencjał $V(x)$ w dowolnym punkcie na zewnątrz przewodników

$$v(x) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} c_i^k(x) \phi_i^k \quad (5.12)$$

gdzie funkcje kształtu $c_i^k(x)$ określone są wzorami (3.171) lub (3.186). Stosowanie potencjału logarymicznego warstwy podwójnej pozwala również sprowadzić zewnętrzny problem Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a do układu równań całkowych II rodzaju (2.58) lub (2.60), których rozwiązanie ze względu na zmienne węzłowe gęstości podwójne τ_i^k pozwala otrzymać przybliżone rozwiązanie na potencjał $v(x)$ określony wzorami (4.13), gdzie funkcje kształtu $h_i^k(x)$ określone są wzorami (4.10).

Jeżeli potencjały poszczególnych przewodników są zadane w postaci zespolonej, co odpowiada rzeczywistym przebiegom sinusoidalnie zmiennym o tych samych pulsacjach, lecz różnych fazach początkowych, to również gęstości węzłowe ϕ_i^k będące rozwiązaniem układu równań (2.14) lub (2.43) są zespolone, a zgodnie ze wzorem (5.1) składowe E_{x1} E_{x2} wektora $E(x)$ są również zespolone.

$$E(x) = k_1 E_{x1}(x) + k_2 E_{x2}(x) \quad (5.13)$$

Jak pokazał autor w pracy [18] w takim przypadku, ogólnie rzecz biorąc, w dziedzinie czasowej wektor $E(x,t) = k_1 E_{x1}(x,t) + k_2 E_{x2}(x,t)$ zakreśla w ciągu okresu T elipsę. Składowe wektora natężenia pola elektrycznego w kierunku półośi dużej i małej tej elipsy wynoszą odpowiednio:

$$E_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{t \in (0,T)} |E(x,t)| = |E_1(x)| + |E_2(x)| \quad (5.14)$$

$$E_b(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{t \in (0,T)} |E(x,t)| = |E_1(x)| - |E_2(x)|, \quad (5.15)$$

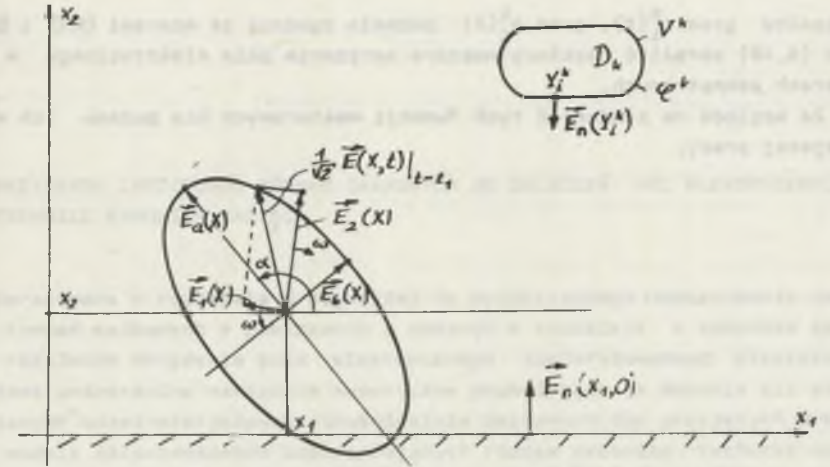
gdzie

$$E_1(x) = \frac{1}{2} [E_{x1}(x) + jE_{x2}(x)] = |E_1(x)| e^{j\alpha_1(x)}, \quad (5.16)$$

$$E_2(x) = \frac{1}{2} [E_{x1}^*(x) + jE_{x2}^*(x)] = |E_2(x)| e^{j\alpha_2(x)}, \quad (5.17)$$

natomiast kąt $\alpha(x)$ położenia półośi dużej elipsy względem osi x_1 (rys. 5.2) wynosi:

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} [\alpha_1(x) + \alpha_2(x)] \quad (5.18)$$



Rys. 5.2. Dwuwymiarowe pola elektryczne spolaryzowane eliptycznie
Fig. 5.2. Two - dimensional electric field polarized elliptically

Jeżeli podstawić wzór (5.12) do wzoru (5.1) i dokonać przejścia granicznego zmierzając z punktem x do powierzchni dowolnego przewodnika ϵ^k , to otrzymuje się składową normalną wektora natężenia pola w danym punkcie y_1^k jego konturu.

Jeżeli prototypem rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta jest potencjał logarymiczny warstwy pojedynczej (2.13), to przejście graniczne jest równoważne znajomości gęstości powierzchniowej ładunków $\phi_1^k = \epsilon_0 E_n(y_1^k)$ otrzymanej z rozwiązania układu równań (4.7). Stosowanie do rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta potencjału warstwy podwójnej nie pozwala na bezpośrednie rozwiązanie rozkładu natężenia pola na powierzchniach przewodników.

W wyniku rozwiązania układu równań (4.22) otrzymuje się gęstości warstwy podwójnej τ_i^k , które zgodnie ze wzorem (2.57) pozwolą bezpośrednio określić tylko ładunki całkowite q_k na poszczególnych przewodach. W tym przypadku w celu określenia natężenia pola na powierzchniach przewodów należy we wzorze

$$E(x) = -\text{grad } v(x) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} \tau_i^k \text{grad } h_i^k(x) \quad (5.19)$$

dokonać przejścia granicznego w przypadku, gdy punkt x zmierza do konturów ϵ^k .

Znajomość gęstości ładunków ϕ_1^k oraz warstwy podwójnej τ_i^k będących rozwiązaniem układów równań (4.7) lub (4.22) oraz wektorowych funkcji

kształtu $\text{grad } c_1^k(x)$, $\text{grad } h_1^k(x)$ pozwala zgodnie ze wzorami (5.1) i (5.12) lub (5.19) określić rozkłady wektora natężenia pola elektrycznego w obszarach zewnętrznych.

Ze względu na złożoność tych funkcji wektorowych nie podano ich w niniejszej pracy.

6. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ RÓWNAŃ CAŁKOWYCH DO OBLICZEŃ PÓL ELEKTRYCZNYCH W TECHNICIE WYSOKICH NAPIĘĆ

Opracowane w rozdziale 4 algorytmy do przybliżonego rozwiązywania układów równań całkowych w powiązaniu z podanym w rozdziale 5 sposobem badania rozkładów natężenia pola elektrycznego spolaryzowanego eliptycznie stanowi uniwersalne narzędzie numeryczne pozwalające na badanie pól elektrycznych quasi-statycznych sinusoidalnie zmiennych dla przyjętych we wstępie modeli obliczeniowych odpowiadających różnym zadaniom techniki wysokich napięć. Wspólną i oryginalną cechą opracowanych algorytmów jest to, że elementy macierzy otrzymanych w wyniku dyskretyzacji operatorów całkowych występujących w układach równań całkowych są wyrażalne w postaci wzorów będących kombinacjami funkcji standardowych lub zbieżnych szeregów funkcjonalnych zależnych od współrzędnych punktów węzłowych powierzchni lub konturów. Uniknięto w ten sposób wielotysięcznych odwołań do procedury całkowań numerycznych, rozwiązano globalnie problem numeryczny związany ze słabą osobliwością jąder operatorów całkowych oraz osiągnięto dużą dokładność w generacji elementów macierzy, co jest szczególnie istotne przy rozwiązywaniu układów równań całkowych I rodzaju (2.4) i (2.14).

6.1. Zastosowanie metody elementów brzegowych do rozwiązania układu równań całkowo-brzegowych I rodzaju linii przesyłowej

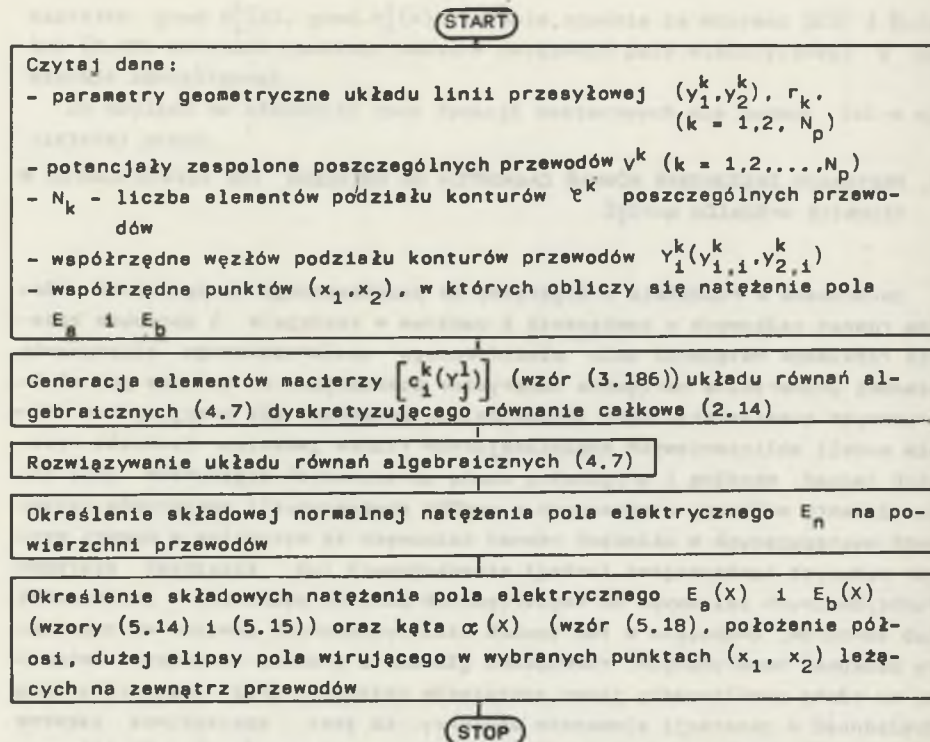
W oparciu o algorytm skonstruowany w pkt. 4.1.1 (wzory (4.7), (3.186), (5.14) i (5.15)) opracowano program obliczeniowy do badania pola elektrycznego dla dwuwymiarowego modelu linii przesyłowych o dowolnych konfiguracjach, którego schemat blokowy przedstawiono na rys. 6.1.

6.1.1. Obliczenia testujące

Opracowany program przetestowano na przykładzie obliczeniowym dla danych z rys. 6.1, tj. dla linii jedнопроводowej. Do obliczeń przyjęto promień $r_0 = 87,18$ mm, natomiast jego odległość względem płaszczyzny przewodzącej $x_2 = 0$ przyjęto $h = 9$ m.

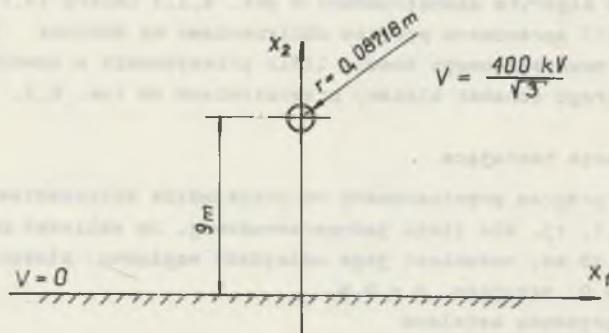
Potencjał przewodu ustalono

$$V = \frac{400 \text{ kV}}{\sqrt{3}}$$



Rys. 6.1. Schemat blokowy programu obliczeniowego pola elektrycznego linii przesyłowej metodą elementów brzegowych

Fig. 6.1. Flowchart for program computing electric field of the transmission line by the method of boundary elements



Rys. 6.2. Linia jedнопроводовая
Fig. 6.2. Transmission line with one conductor

Dla linii jedнопроводовой o przewodzie walcowym rozkład wektora natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodu można wyznaczyć analitycznie [117]:

$$E_n = \frac{G(\zeta)}{\epsilon_0} = \frac{\sqrt{\frac{h^2}{r_0^2} - 1}}{\ln \left| \frac{h}{r_0} + \sqrt{\frac{h^2}{r_0^2} - 1} \right|} \frac{1}{h + r_0 \sin \varphi} \quad (6.1)$$

Dla tych samych danych dokonano obliczeń rozkładu wektora natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodu w oparciu o program przedstawiony na schemacie blokowym (rys. 6.1) i danych z rys. 6.2. W obliczeniach założono podział konturu na $N = 16$ jednakowych elementów. Współczynniki macierzy $c_1^k(y_j^k)$ (wzór (3.186) dla $k = l = 1$) występujące w układzie równań algebraicznych (4.7), dyskretyzujące równanie całkowe (2.14) stanowiące zbliżone szeregi, obliczono z dokładnością 10^{-5} . Otrzymany w ten sposób rozkład natężenia pola na powierzchni przewodu linii jedнопроводовой porównano z rozkładem otrzymanym w oparciu o wzór (6.1) (tabela I).

Tabela I

Porównanie rozkładów natężenia pola na powierzchni linii jedнопроводовой (rys. 6.2) otrzymanych na drodze analitycznej i numerycznej metodą elementów brzegowych

	$E_n \cdot 10^5$	$E'_n \cdot 10^5$
rad	V/m	V/m
0,7854	4,9359	4,8485
1,5708	4,9220	4,8377
2,3562	4,9359	4,8485
3,1416	4,9697	4,8751
3,9270	5,0040	4,9025
4,7124	5,0183	4,9141
5,4978	5,0040	4,9025
6,2832	4,9697	4,8751

E_n - natężenie pola obliczone na podstawie wzoru (6.1),

E'_n - natężenie pola obliczone zgodnie z programem z rys. 6.1 dla $N = 16$ jednakowych elementów podziału konturu.

Z porównania rozkładów natężenia pola elektrycznego dokonanego w tabeli I wynika, że maksymalny błąd obliczeń numerycznych E_n względem obliczeń E'_n dokonanych w oparciu o wzór analityczny wynosi:

$$\max_{\varphi} \frac{E_n(\varphi) - E'_n(\varphi)}{E_n(\varphi)} 100\% = 2,1\%$$

W celu określenia tendencji zmian tego błędu dokonano dla rozpatrywanego przykładu, obliczeń współczynnika K uwarunkowania macierzy układu równań (4.7) (wzór (4.3) w zależności od ilości N jednakowych elementów podziału konturu przewodu (tabela II).

Tabela II

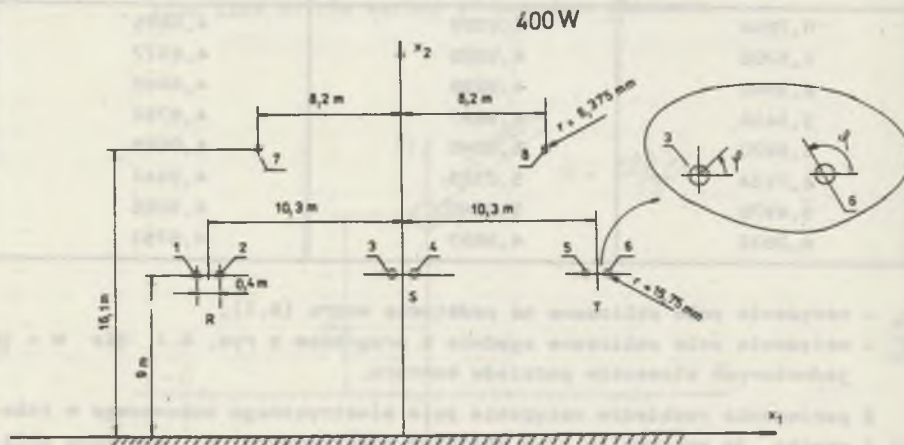
Zależność współczynnika K uwarunkowania macierzy równań (4.7) względem ilości N jednakowych elementów podziału konturu przewodu dla linii jednonprzewodowej o danych z rys. 6.2

N	8	16	32
K	128	518	1680

Z obliczeń tych wynika, że im więcej przyjmie się elementów podziału konturu przewodu, to zgodnie ze wzorem (4.3) zachowanie niezmiennego błędu obliczeń wymaga zwiększenia dokładności obliczeń elementów macierzy układu równań (4.7) w oparciu o szeregi funkcyjne (3.186).

6.1.2. Obliczanie pola dla modelu linii 400 kV i 750 kV metodą elementów brzegowych

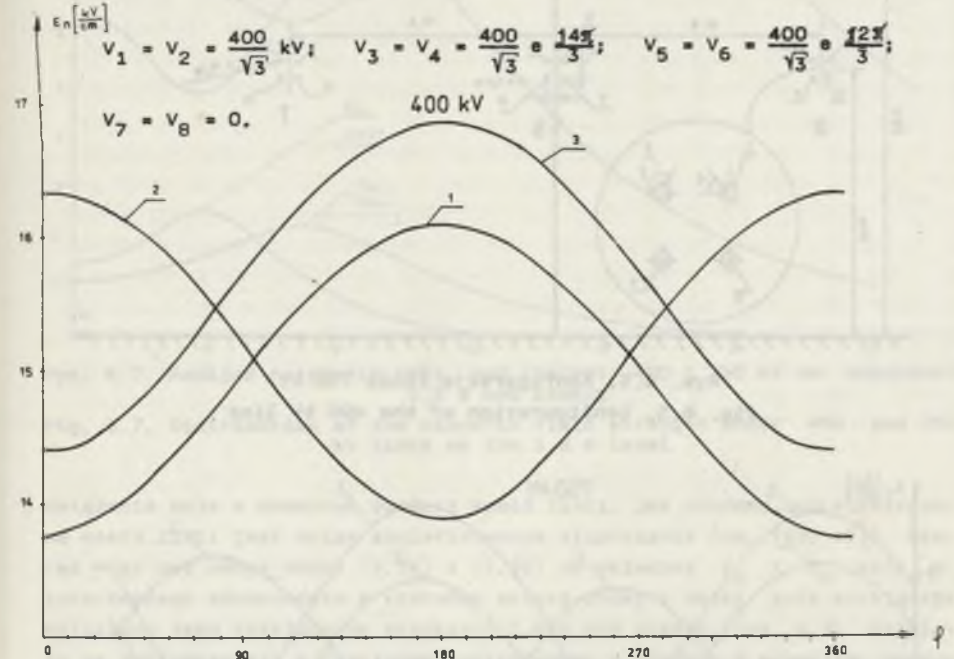
Program obliczeniowy opracowany w pkt. 6.1.1 (rys. 6.1) zastosowano do obliczenia rozkładu natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodów



Rys. 6.3. Konfiguracja linii przesyłowej 400 kV
Fig. 6.3. Configuration of the 400 kV transmission line

linii 400 kV o danych geometrycznych podanych na rys. 6.3. W obliczeniach przewody robocze 1,2,...,6 i przewody odgromowe 7, 8 przyjęto jako walce o promieniu $r_1 = \dots = r_6 = 15,75$ mm, $r_7 = r_8 = 6,375$ mm.

Potencjały przewodów względem płaszczyzny ziemi przyjęto jako sinusoidalnie zmienne o wartościach zespolonych:

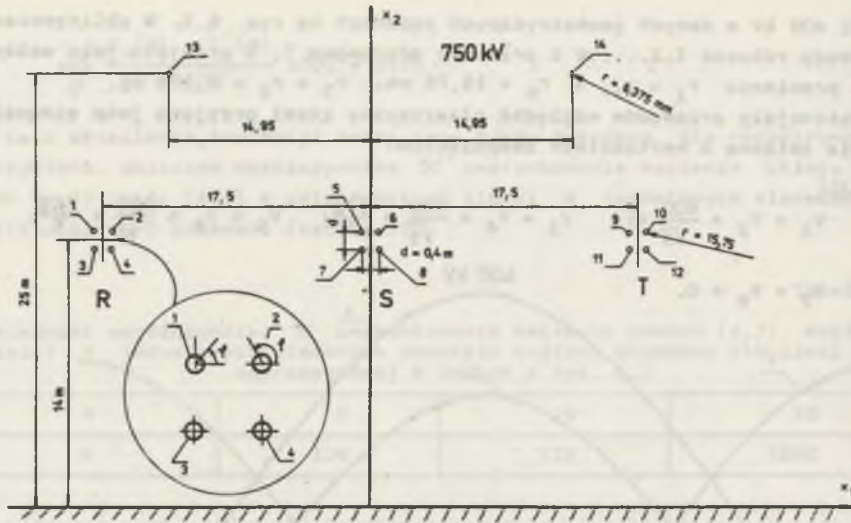


Rys. 6.4. Rozkład natężenia pola na powierzchni przewodów linii 400 kV o danych z rys. 4.1

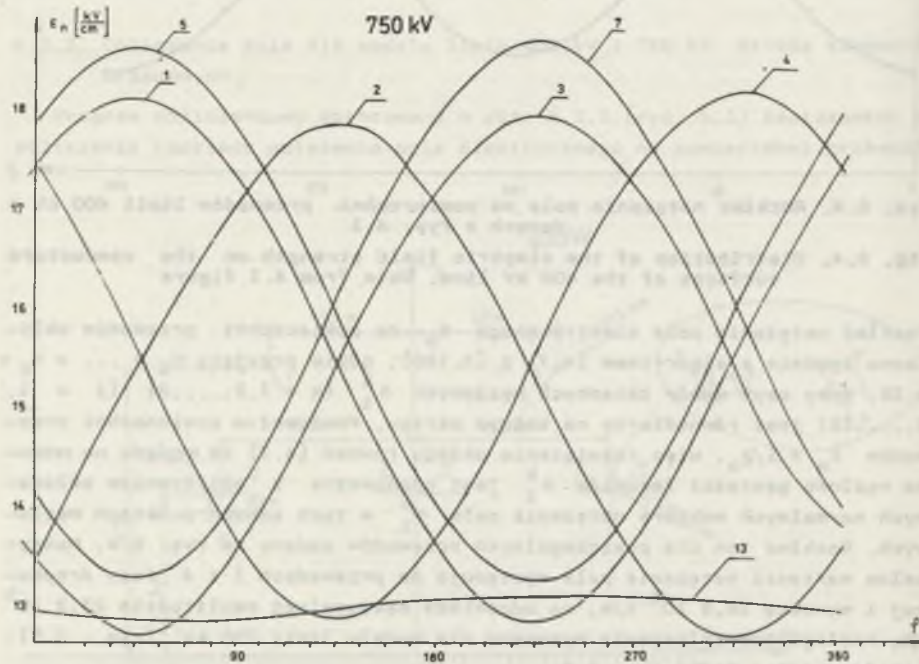
Fig. 6.4. Distribution of the electric field strength on the conductor surfaces of the 400 kV line. Data from 4.1 figure

Rozkład natężenia pola elektrycznego E_n na powierzchni przewodów obliczono zgodnie z algorytmem (4.7) i (3.186), gdzie przyjęto $N_1 = \dots = N_8 = 16$, przy czym wybór zmiennych węzłowych G_1^k ($k = 1, 2, \dots, 8$) ($i = 1, 2, \dots, 16$) jest równomierny na każdym okręgu. Ponieważ na powierzchni przewodów $E_n = G/\epsilon_0$, więc rozwiązanie układu równań (4.7) ze względu na zmienne węzłowe gęstości ładunków G_1^k jest równoważne z obliczeniem składowych normalnych wektorów natężenia pola E_1^k w tych samych punktach węzłowych. Rozkład ten dla poszczególnych przewodów podano na rys. 6.4. Maksymalne wartości natężenia pola występują na przewodach 3 i 4 fazy środkowej i wynoszą $16,4 \cdot 10^5$ V/m, co odpowiada maksymalnej amplitudzie $23,2 \cdot 10^5$ V/m. Analogiczne obliczenia wykonano dla modelu linii 750 kV (rys. 6.5), przedstawiając je na rys. 6.6.

Znajomość rozkładu ładunków na powierzchniach przewodów pozwala zgodnie ze wzorami (3.185), (5.14), (5.15) obliczyć rozkład potencjału i wektora

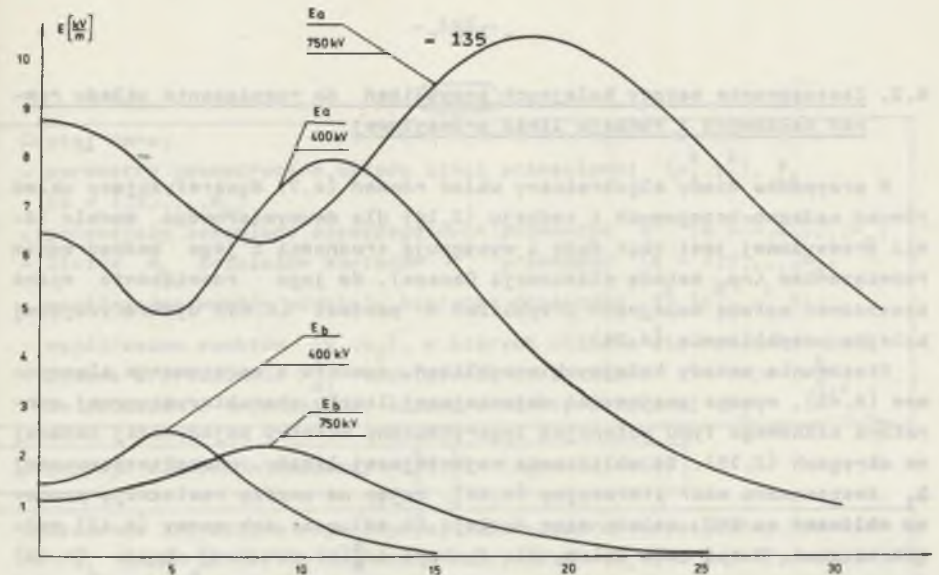


Rys. 6.5. Konfiguracja linii 750 kV
Fig. 6.5. Configuration of the 400 kV line



Rys. 6.6. Rozkład natężenia pola na powierzchni przewodów linii 750 kV o danych z rys. 4.3

Fig. 6.6. Distribution of the electric field strength on the conductor surfaces of the 750 kV line. Data from 4.3 figure



Rys. 6.7. Rozkład natężenia pola pod liniami 400 i 750 kV na wysokości 1,8 m nad ziemię

Fig. 6.7. Distribution of the electric field strength under 400 and 750 kV lines on the 1.8 m level

natężenia pola w dowolnym punkcie wokół linii. Jak wiadomo, pole elektryczne wokół linii jest polem spolaryzowanym eliptycznie (np. [18, 41]). Biorąc więc pod uwagę wzory (5.14) i (5.15) na składową E_a i E_b pola elektrycznego odpowiednio w kierunku półosi dużej i małej pola wirującego obliczono jego rozkłady na wysokości 1,8 m nad ziemię (rys. 6.7). Rozkłady te pokrywają się z rozkładami obliczonymi w oparciu o algorytm podany w pracy [18]. Zbieżność tych obliczeń wynika z faktu, że dla punktów x dostatecznie odległych od przewodów wystarcza aproksymować gęstości ładunków $\sigma^k(\gamma)$ funkcją stałą $\sigma^k(\gamma) = \text{const}$ na każdym konturze ψ^k przewodu, co przy rozwinięciu (3.180) jądra operacji (2.15) daje:

$$\nabla_{LP} \phi = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\psi^k} \sigma^k(\gamma) \ln \frac{|XY|}{|XY^k|} d\gamma = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} 2\pi r_k \sigma^k \ln \frac{|XY^k|}{|XY^k|} \quad (6.2)$$

Taka aproksymacja operatora typu potencjału logarymicznego warstwy pojedynczej była podstawą konstrukcji algorytmu obliczenia pola w punktach leżących dostatecznie daleko od przewodów linii (np. [18, 42, 64, 84]).

Opracowany w tej pracy algorytm stanowi uogólnienie tamtych algorytmów, pozwalając równocześnie obliczać pola w warstwie przy powierzchni ziemi, jak również na powierzchni przewodów linii.

6.2. Zastosowanie metody kolejnych przybliżeń do rozwiązania układu równań całkowych I rodzaju linii przesyłowej

W przypadku kiedy algebraiczny układ równań (4.7) dyskretyzujący układ równań całkowo-brzegowych I rodzaju (2.14) dla dwuwymiarowego modelu linii przesyłowej jest zbyt duży i występują trudności z jego bezpośrednim rozwiązaniem (np. metodą eliminacji Gaussa), do jego rozwiązania można zastosować metodę kolejnych przybliżeń w postaci (4.45) dyskretyzującej kolejne przybliżenia (4.24).

Stosowanie metody kolejnych przybliżeń, zgodnie z opracowanym algorytmem (4.45), wymaga znajomości najmniejszej liczby charakterystycznej operatora całkowego typu potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej zadanej na okręgach (2.15). Do obliczenia najmniejszej liczby charakterystycznej λ_1 zastosowano wzór iteracyjny (4.44). Mając na uwadze realizację procesu obliczeń na EMC, należy ciąg funkcji (4.44) oraz ich normy (4.43) zalgebraizować. W tym celu należy dla funkcji $\omega_m^k(x)$ określonej ciągiem (4.42) wprowadzić analogiczną aproksymację na każdym elemencie φ_i^k podziału okręgu φ^k , jak w pkt. 3.4.2 (wzór (3.173))

$$\omega_m^k(\varphi) = \frac{\omega_{m,i}^k \varphi_{i+1}^k - \omega_{m,i+1}^k \varphi_i^k}{\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k} + \frac{\omega_{m,i+1}^k - \omega_{m,i}^k}{\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k} \varphi, \quad (6.3)$$

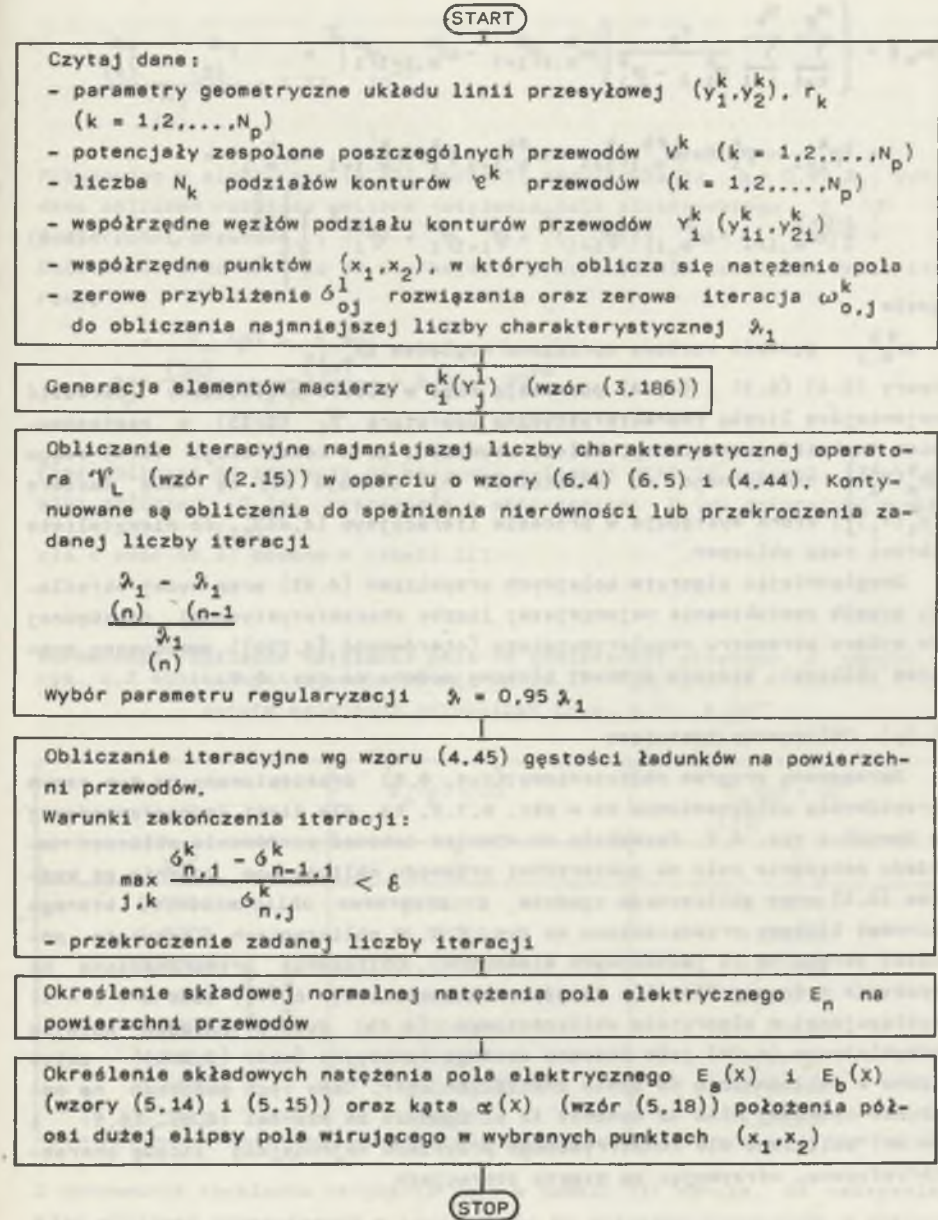
gdzie

$$\omega_{m,i}^k = \omega_m^k(\gamma_i^k); \quad \varphi_i^k \leq \varphi \leq \varphi_{i+1}^k.$$

Wykorzystując aproksymację operatora \mathcal{V}_L (2.15) przeprowadzoną w pkt. 3.4.2 (wzór (3.185)) w procesie konstrukcji ciągu funkcji $\omega_m^k(x)$ (wzór (4.44)) oraz rozpisując go w poszczególnych punktach podziału γ^k okręgu φ^k , otrzymuje się następującą postać algebraiczną konstrukcji ciągu $\{\omega_m^k(\gamma_i^k)\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$):

$$\omega_{m,j}^1 = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} c_i^k(\gamma_j^1) \omega_{m-1,i}^k \quad (l = 1, 2, \dots, N_p) \quad (j = 1, 2, \dots, N_1) \quad (6.4)$$

Uwzględniając przy obliczaniu normy (4.43) aproksymację funkcji $\omega_m^k(x)$ daną wzorem (6.3) dla poszczególnych elementów okręgu φ^k , otrzymuje się następujące przybliżenie normy (4.43):



Rys. 6.8. Schemat blokowy programu obliczeniowego pola elektrycznego linii przesyłowej metodą kolejnych przybliżeń

Fig. 6.8. Flowchart for program computing electric field of the transmission line by the method of subsequent approximations

$$\|\omega_m\| = \left\{ \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{r_k}{\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k} \left[\left| \omega_{m,i}^k \varphi_{i+1}^k - \omega_{m,i+1}^k \varphi_i^k \right|^2 + (\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k) \operatorname{Re}(\omega_{m,i}^{*k} \varphi_{i+1}^k - \omega_{m,i+1}^{*k} \varphi_i^k) (\omega_{m,i+1}^k - \omega_{m,i}^k) + \frac{1}{3} \left| \omega_{m,i+1}^k - \omega_{m,i}^k \right| \left((\varphi_{i+1}^k)^2 + \varphi_{i+1}^k \varphi_i^k + (\varphi_i^k)^2 \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6.5)$$

gdzie

$\omega_{m,i}^{*k}$ - gęstość węzłowa sprzężona względem $\omega_{m,i}^k$.

Wzory (6.4) (6.5) i (4.44) pozwalają więc w sposób przybliżony określić najmniejszą liczbę charakterystyczną operatora Ψ_L (2.15) z zastosowaniem techniki numerycznej. Należy zauważyć, że w konstrukcji (6.4) ciągu $\{\omega_m^k(\gamma_i^k)\}$ niezbędnego do obliczenia λ_1 stosuje się tę samą macierz $[c_1^k(\gamma_j^k)]$, która występuje w procesie iteracyjnym (4.45), co niewątpliwie skraca czas obliczeń.

Uwzględniając algorytm kolejnych przybliżeń (4.45) oraz wyżej określony sposób poszukiwania najmniejszej liczby charakterystycznej niezbędnej do wyboru parametru regularyzującego (nierówność (4.25b)), opracowano program obliczeń, którego schemat blokowy podano na rys. 6.9.

6.2.1. Obliczenia testujące

Opracowany program obliczeniowy (rys. 6.8) przetestowano na tym samym przykładzie obliczeniowym co w pkt. 6.1.2, tj. dla linii jedнопроводowej o danych z rys. 6.2. Pozwoliło to również dokonać porównania obliczeń rozkładu natężenia pola na powierzchni przewodu obliczonego zgodnie ze wzorem (6.1) oraz obliczonego zgodnie z programem obliczeniowym, którego schemat blokowy przedstawiono na rys. 6.8. W obliczeniach przyjęto podział okręgu na 16 jednakowych elementów. Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej RIAD 32. Współczynniki macierzy $c_1^k(\gamma_j^k)$ (dla $k = 1 = 1$) występującej w algorytmie obliczeniowym (4.45) dyskretyzującym kolejne przybliżenia (4.24) jako zbieżne szeregi funkcyjne (wzór (3.186)) obliczono z dokładnością do ośmiu znaczących cyfr. Czas tych obliczeń na maszynie cyfrowej RIAD 32 wynosił 12 s. Zgodnie ze wzorami (6.4), (6.5) i (4.44) obliczono dla rozpatrywanego przykładu najmniejszą liczbę charakterystyczną, otrzymując po pięciu iteracjach

$$\lambda_1 \approx \lambda_1^{(5)} = 1,076023,$$

przy czym różnica między czwartą i piątą iteracją w odniesieniu do piątej iteracji wynosiła:

$$\frac{\lambda_1^{(4)} - \lambda_1^{(5)}}{\lambda_1^{(5)}} = 1,17 \cdot 10^{-7}.$$

Przyjmując w algorytmie (4.45) parametr regularyzacji $\lambda = 0,95 \lambda_1$, dokonano obliczeń rozkładu wektora natężenia pola elektrycznego $E_n^{(52)}(\varphi)$ na powierzchni przewodu.

Obliczenia przerwano po 52 iteracjach, przy czym dla ostatnich dwóch iteracji

$$\max_{\varphi} \frac{E_n^{(52)}(\varphi) - E_n^{(51)}(\varphi)}{E_n^{(52)}(\varphi)} = 8,01 \cdot 10^{-6}.$$

Czas obliczeń 52 iteracji na maszynie cyfrowej RIAD 32 wynosił 12 s. Wyniki obliczeń $E_n^{(52)}(\varphi)$ zestawione z obliczeniami $E_n^{(52)}(\varphi)$ dokonanymi w oparciu o wzór (6.1) podano w tabeli III.

Tabela III

Porównanie rozkładów natężenia pola na powierzchni przewodu o danych z rys. 6.2 obliczonych zgodnie ze wzorem (6.1) $E_n^{(52)}(\varphi)$ oraz w oparciu o algorytm kolejnych przybliżeń (rys. 6.9) $E_n^{(52)}(\varphi)$

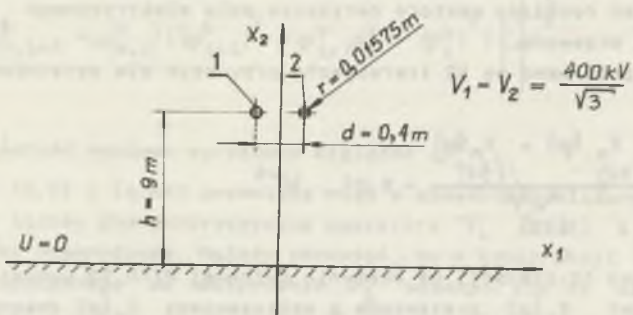
	$E_n(\varphi) \times 10^5$	$E_n^{(52)}(\varphi) \times 10^5$
rad	$\frac{V}{m}$	$\frac{V}{m}$
0,7854	4,93592	4,93578
1,5708	4,92205	4,92185
2,3562	4,93592	4,93578
3,1416	4,96973	4,96974
3,9370	5,00400	5,00414
4,7124	5,01833	5,01851
5,4978	5,00400	5,00414
6,2832	4,96973	4,96974

Z porównania rozkładów natężenia pola w tabeli III wynika, że maksymalny błąd obliczeń numerycznych w odniesieniu do obliczeń dokonanych w oparciu o wzór (6.1) wynosi:

$$\max_{\varphi} \frac{E_n(\varphi) - E_n^{(52)}(\varphi)}{E_n^{(52)}(\varphi)} = 4 \cdot 10^{-5}.$$

6.2.2. Obliczanie natężenia pola na powierzchni przewodów linii jednoprzewodowej o dwóch przewodach w wiązce

Opracowany program obliczeniowy zastosowano do badania rozkładu natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodów linii jednoprzewodowej o danych geometrycznych podanych na rys. 6.9.



Rys. 6.9. Linia jednoprzewodowa o dwóch przewodach w wiązce
Fig. 6.9. Transmission line with two conductors in the bundle

Potencjał przewodu względem ziemi ($x_2 = 0$) przyjęto $v = \frac{400 \text{ kV}}{\sqrt{3}}$.

Kontury przewodów (okręgi) podzielono na 16 jednakowych elementów. Najmniejsza liczba charakterystyczna dla rozpatrywanego układu otrzymana po pięciu iteracjach wynosi:

$$\lambda_1 = \lambda_1 = 2,926368, \quad (5)$$

przy czym

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1} = 1,484 \cdot 10^{-9}. \quad (4)$$

Przyjmując w algorytmie (4.45) parametr regularyzacji $\lambda = 0,95 \lambda_1$, dokonano obliczeń rozkładu wektora natężenia pola na powierzchni przewodów. Obliczenia przerwano po 127 iteracjach, przy czym dla ostatnich dwóch iteracji

$$\max_{\varphi} \frac{E_n(\varphi) - E_n(\varphi)}{E_n(\varphi)} = 8,9 \cdot 10^{-6} \quad (127)$$

Czas obliczeń 127 iteracji na maszynie cyfrowej RIAD 32 wynosił 119 s. Ze względu na symetrię układu z rys. 6.10 obliczenia podano tylko dla przewodu 1 (tabela IV).

Tabela IV

Rozkład natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodu linii jednoprzewodowej o dwóch przewodach w wiązce i danych z rys. 6.9

	rad	0,7854	1,5708	2,3562	3,1416	3,9370	4,7124	5,4978	0
E_n 10^5	$\frac{V}{m}$	12,7280	13,5115	14,2414	14,5505	14,3088	13,6068	12,7954	14,4044

6.2.3. Obliczanie pola dla modelu linii 400 kV i 750 kV metodą kolejnych przybliżeń

Opracowany program obliczeń (rys. 6.8), zgodnie z algorytmem (4.45), zastosowano do obliczeń rozkładu natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodów modelu linii 400 kV i 750 kV o danych geometrycznych podanych na rys. 6.3 i 6.5. Modele linii przesyłowych oraz warunki brzegowe przyjęto tak jak w pkt. 6.1.2, co stwarza możliwość porównania metody prostej algebraizacji, tj. bezpośredniego rozwiązania algebraicznego układu równań (4.7) dyskretyzującego układ równań całkowych I rodzaju (2.14) z metodą kolejnych przybliżeń w zalgebraizowanej postaci (4.45).

W obliczeniach przyjęto podział każdego konturu okręgu przewodów modelu linii 400 kV na 32 jednakowe elementy. Elementy macierzy $[c_j^k(y_j^1)]$ ($k, l = 1, 2, \dots, 8$) dla linii 400 kV występującej w algorytmie (4.45) jako zbieżne szeregi funkcyjne (wzór (3.186)) obliczono do ośmiu znaczących cyfr. Czas generacji elementów macierzy na maszynie cyfrowej RIAD 32 wynosił 631 s. Zgodnie ze wzorami (6.4), (6.5), (4.44) obliczono dla modelu linii 400 kV najmniejszą liczbę charakterystyczną, otrzymując po 27 iteracjach

$$\lambda_1 \approx \lambda_1 = 2,352114, \quad (27)$$

przy czym różnica między 27 a 26 iteracją wynosiła:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1} = 2,8 \cdot 10^{-5}$$

Czas obliczeń najmniejszej liczby charakterystycznej z błędem $2,8 \cdot 10^{-5}$ wynosił 206 s.

Przyjmując w algorytmie (4.45) parametr regularyzacji $\lambda = 0,95 \lambda_1$, dokonano obliczeń rozkładu wektora natężenia pola elektrycznego $E_n^*(x)$ na powierzchni przewodów modelu linii 400 kV. Obliczenia przerwano po 151 iteracjach, przy czym dla ostatnich dwóch iteracji

$$\max_{x \in S} \frac{E_n^{(151)}(x) - E_n^{(150)}(x)}{E_n^{(151)}(x)} = 2,42 \cdot 10^{-5}$$

Czas obliczeń 151 iteracji na maszynie cyfrowej RIAD 32 wyniósł 1100 s. Wyniki obliczeń $E_n^{(151)}(x)$ na powierzchni przewodów linii 400 kV różnią się nie więcej niż 2,8% od odpowiednich obliczeń dokonanych metodą prostej algebraizacji MPA, tj. bezpośredniego rozwiązania układu równań (4.7). Porównania tych wyników dla przewodu 3 linii 400 kV (rys. 6.3), na którym występuje maksymalne natężenie, dokonano w tabeli V.

Tabela V

Porównanie rozkładów natężenia pola elektrycznego linii 400 kV (przewód 3 rys. 6.3) na powierzchni przewodów obliczonych dla jej modelu metodą prostej algebraizacji MPA i metodą kolejnych przybliżeń MKP

φ	MPA	MKP
rad	$E_n \cdot 10^5$	$E_n \cdot 10^5$
	V/m	V/m
0,39270	14,5389	14,4980
0,7854	14,7996	14,7957
1,1781	15,1658	15,2258
1,5708	15,5751	15,7087
1,9653	15,9184	16,1667
2,3562	16,1928	16,5375
2,7489	16,3646	16,7780
3,1416	16,4029	16,8637
3,5343	16,3713	16,7863
3,9270	16,2051	16,5529
4,3197	15,9345	16,1868
4,7124	15,5925	15,7304
5,1051	15,1819	15,2459
5,4978	14,8119	14,8110
5,8905	14,5456	14,5063
6,2832	14,4217	14,3939

Analogiczne obliczenia dokonano dla modelu linii 750 kV, podejść je w tabeli VI.

Tabela VI

Porównanie rozkładów natężenia pola elektrycznego linii 750 kV na powierzchni przewodu (przewód 7 rys. 6.5) obliczonych dla jej modelu metodą prostej algebraizacji MPA i metodą kolejnych przybliżeń MKP

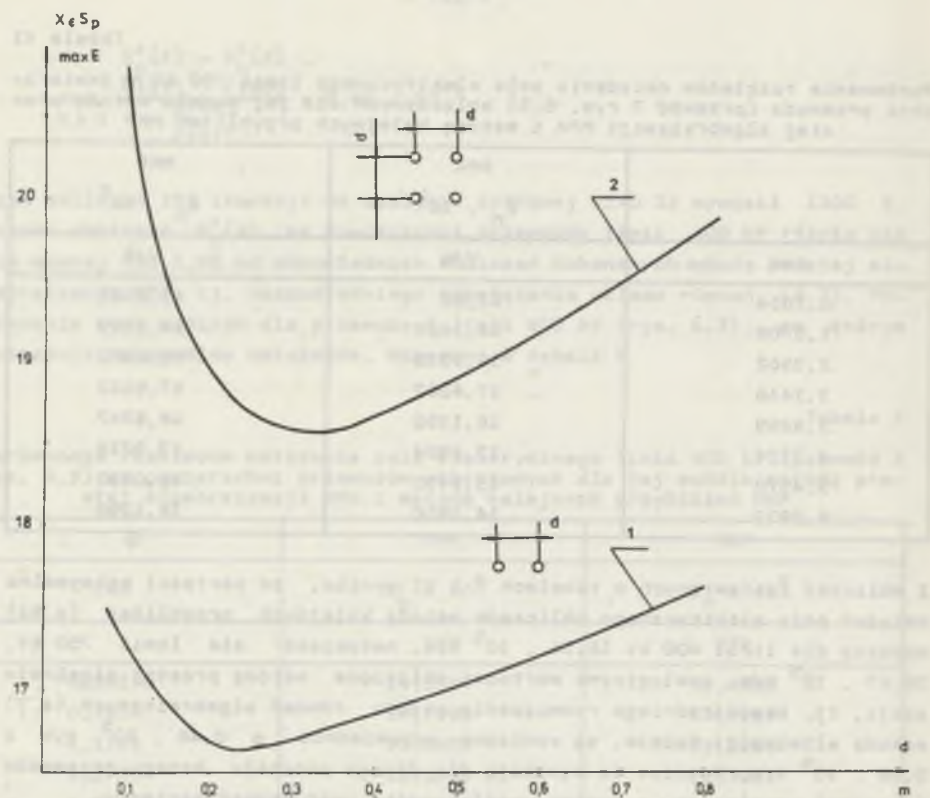
	MPA	MKP
	$E_n \cdot 10^5$	$E_n \cdot 10^5$
rad	V/m	V/m
0,7854	13,66	13,3195
1,5708	14,3428	14,1199
2,3562	15,9330	16,0382
3,1416	17,4267	17,9121
3,9269	18,1150	18,6747
4,7124	17,4984	17,9219
5,4978	15,9450	16,0520
6,2832	14,3550	14,1296

Z obliczeń zestawionych w tabelach V i VI wynika, że wartości maksymalne natężeń pola elektrycznego obliczone metodą kolejnych przybliżeń (4.45) wynoszą dla linii 400 kV $16,86 \cdot 10^5$ V/m, natomiast dla linii 750 kV, $18,67 \cdot 10^5$ V/m. Analogiczne wartości obliczone metodą prostej algebraizacji, tj. bezpośredniego rozwiązania układu równań algebraicznych (4.7) metodą eliminacji Gaussa, są заниżone odpowiednio o $0,46 \cdot 10^5$ V/m i $0,56 \cdot 10^5$ V/m. Różnice te wynikają dla danego podziału brzegu przewodów (okręgów) na elementy z dużego współczynnika uwarunkowań macierzy.

Jak wiadomo bowiem, im większy podział powierzchni przewodów na elementy, tym większy współczynnik uwarunkowania macierzy układu równań, a tym samym większy błąd obliczeń.

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że błędu tego unika się stosując metodę kolejnych przybliżeń.

Opracowany algorytm pozwala na obliczenie rozkładów natężenia pola elektrycznego w zależności od zmian konfiguracji linii, co umożliwia rozwiązywanie wielu zagadnień syntezy pola. Przykładowo zastosowano go do obliczenia wartości maksymalnych natężenia pola na powierzchni przewodów roboczych oraz na wysokości 1,8 m nad ziemią dla linii 400 kV i 750 kV (dane z rys. 6.3 i 6.5) w zależności od zmian odległości między przewodami w wiązce. W obliczeniach stosowano tyle iteracji, dopóki maksymalna różnica między rozkładem natężenia pola na powierzchni przewodów dwóch ostatnich iteracji odniesiona do ostatniej wartości nie osiągnie 10^{-5} . Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli VII. Z obliczeń tych wynika, że przy zachowaniu stałych odległości między osiami przewodów roboczych odgromowych oraz względem ziemi istnieje minimum maksymalnych wartości natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodów roboczych poszczególnych faz w zależności od odległości między przewodami w wiązce (rys. 6.10).



Rys. 6.10. Rozkład maksymalnych wartości natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodów linii 400 i 750 kV

Fig. 6.10. Distribution of the maximum values of the electric field strength on the conductors surfaces of the 400 and 750 kV lines as the function of the d distance between conductors in the bundle

Tabela VII

Maksymalne wartości natężenia pola na powierzchni przewodów i na wysokości 1,8 m nad ziemią dla linii 400 kV i 750 kV

d	$\max E \times 10^5$	$\max E \mid \times 10^3$
	$x_e S_p$	$x_1 \mid x_2 = 1,8$
m	$\frac{V}{m}$	$\frac{V}{m}$
	400 kV	
	2	3
0,1	17,32	6,96
0,2	16,72	7,41
0,3	16,72	7,70
0,4	16,86	7,92

cd. tabeli VII

1	2	3
0,5	17,04	8,10
0,6	17,23	8,25
0,7	17,42	8,38
0,8	17,60	8,50
	750 kV	
0,1	20,79	8,46
0,2	18,90	9,33
0,3	18,59	9,93
0,4	18,67	10,41
0,5	18,89	10,78
0,6	19,17	11,16
0,7	19,47	11,47
0,8	19,79	11,76

7. UWAGI I WNIOSKI

Praca dotyczy analizy pól elektrycznych za pomocą układów równań całkowo-brzegowych I i II rodzaju, sformułowanych w oparciu o teorię potencjału warstwy pojedynczej i podwójnej, numeryczną metodą elementów brzegowych.

Mając na uwadze konstrukcję algorytmów obliczeniowych układów równań całkowo-brzegowych I i II rodzaju, sformułowanych w rozdziale 2 pracy, zgodnie z metodą elementów brzegowych dokonano w rozdziale 3 aproksymacji potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej. Udowodniono szereg twierdzeń pomocniczych.

Lemat 1

Jeżeli powierzchnia określoności warstwy pojedynczej jest aproksymowana układem trójkątów (3.9) generowanych przez punkty węzłowe powierzchni, a gęstości warstwy pojedynczej na każdym z tych trójkątów (3.10) są aproksymowane funkcjami sklejanymi pierwszego stopnia dwóch zmiennych (3.17) interpolującymi dane wartości węzłowe ϕ_i^1 w punktach γ_i^1 triangulacji powierzchni S^1 , to potencjał warstwy pojedynczej w dowolnym punkcie X da się aproksymować wzorem (3.34), gdzie tzw. funkcje kształtu $A_i^1(x)$ współrzędnych punktu X wyrażają się za pomocą kombinacji (3.35) funkcji standardowych (3.39).

W przypadku gdy modele obliczeniowe stanowią przewodniki w postaci cienkich cylindrycznych walców, odpowiadający im potencjał warstwy pojedynczej określony na ich powierzchniach również można aproksymować funkcjami standardowymi współrzędnych punktu X . Wykazano następujący lemat 2.

Lemat 2

Jeżeli powierzchnie określoności warstwy pojedynczej, jako cienkie cylindryczne walce, są podzielone na elementy walcowe (3.66), a gęstość warstwy pojedynczej na każdym z tych elementów jest aproksymowana N wyrazami szeregu trygonometrycznego, przy czym każda amplituda tego szeregu jest z kolei aproksymowana funkcjami sklejanymi jednej zmiennej wzdłuż osi tego elementu walcowego, to potencjał warstwy pojedynczej w dowolnym punkcie X da się aproksymować wzorem (3.76), gdzie tzw. funkcje kształtu $c_{k,1,s}^1(x)$ (wyrażenie (3.77)) są wyrażalne przez zbieżne szeregi funkcyjne (3.78) współrzędnych punktu X .

Do aproksymacji potencjału warstwy podwójnej zastosowano identyczne podejście jak przy aproksymacji potencjału warstwy pojedynczej. Wykazano bowiem następujący lemat 3.

Lemat 3

Jeżeli powierzchnia określoności warstwy podwójnej jest aproksymowana układem trójkątów (3.9) generowanych przez punkty węzłowe powierzchni, a gęstości warstwy podwójnej na każdym z tych trójkątów (3.10) są aproksymowane funkcjami sklejanymi pierwszego stopnia dwóch zmiennych (3.127) interpolującymi dane wartości węzłowe τ_i^1 w punktach γ_i^1 triangulacji powierzchni S^1 , to potencjał warstwy podwójnej w dowolnym punkcie X da się aproksymować wzorem (3.138), gdzie tzw. funkcje kształtu $R_i^1(x)$ współrzędnych punktu X wyrażają się za pomocą kombinacji (3.139) funkcji standardowych (3.111).

W konstrukcji jądra operatora całkowego (2.29) układu równań całkowo-brzegowych II rodzaju (2.27) występuje pochodna potencjału warstwy pojedynczej w kierunku normalnym do powierzchni granicznej. Mając na uwadze jej aproksymację, wykazano następujący lemat 4.

Lemat 4

Jeżeli powierzchnia określoności warstwy pojedynczej jest aproksymowana układem trójkątów (3.9) generowanych przez punkty węzłowe powierzchni, a gęstości warstwy pojedynczej na każdym z tych trójkątów (3.10) są aproksymowane funkcjami sklejanymi zerowego stopnia (stałe na powierzchni trójkąta), to pochodna potencjału warstwy pojedynczej w dowolnym kierunku i punkcie X aproksymuje się wzorem (3.99), gdzie tzw. funkcje kształtu $G_{i,j,k}^1(x)$ współrzędnych punktu X są wyrażalne za pomocą funkcji standardowych (3.111).

Do aproksymacji pochodnej potencjału warstwy pojedynczej można by zastosować funkcje sklepane stopnia pierwszego, co zwiększyłoby dokładność aproksymacji, stwarza to jednak dodatkowe problemy związane z aproksymacją pochodnej normalnej, która w narożach na styku elementów trójkątnych nie leżących w jednej płaszczyźnie jest nieokreślona.

Mając na uwadze zastosowanie dwuwymiarowych modeli obliczeniowych pola elektrycznego dokonano również aproksymacji potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej zadanej na dowolnych konturach (wzór (3.170)) i na konturach w postaci okręgów (wzór (3.186)) oraz pochodnej potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej (wzór (3.197)) i potencjału logarytmicznego warstwy podwójnej (wzór (3.206)), zadanych na dowolnych konturach.

Wszystkie twierdzenia pomocnicze dotyczące aproksymacji potencjałów udowodnione w rozdziale 3 pozwoliły na dyskretyzację wszystkich układów równań całkowo-brzegowych sformułowanych w rozdziale 2, sprowadzając je odpowiednio do układów równań algebraicznych (4.1), (4.7), (4.9), (4.15), (4.22), (4.70) i (4.71). Wykazano w ten sposób następującą tezę 1.

Teza 1

Elementy macierzy otrzymanych w wyniku dyskretyzacji wszystkich układów równań całkowo-brzegowych I i II rodzaju, sformułowanych w rozdziale 2 dla pól elektrycznych są wyrażalne poprzez kombinacje funkcji standardowych lub zbieżne szeregi funkcyjne, zależne od współrzędnych punktów węzłowych triangulacji powierzchni lub konturów.

Bezpośrednie rozwiązanie numeryczne wielkich układów równań algebraicznych może być utrudnione, szczególnie jeżeli stanowią one wynik dyskretyzacji układów równań całkowych I rodzaju. W celu uniknięcia tych problemów wykorzystano w pracy koncepcję kolejnych przybliżeń Fridmana [45] podaną przez niego dla jednego równania całkowego I rodzaju. Uogólniając ją, wykazano następujący lemat 5.

Lemat 5

Ciągi funkcji określone wzorami rekurencyjnymi (4.24) lub (4.47) są zbieżne odpowiednio do rozwiązania układu równań całkowych I rodzaju (2.14) lub (2.4).

Wykorzystując twierdzenia pomocnicze dotyczące aproksymacji potencjałów, udowodnione w rozdziale 3, dokonano dyskretyzacji kolejnych przybliżeń (4.24) i (4.47) w postaci (4.45) i (4.49). Analogiczny algorytm opracowano (równ. (4.62)) bazując na metodzie kolejnych przybliżeń w zastosowaniu do układu równań całkowych II rodzaju (2.27).

We wszystkich opracowanych w pracy algorytmach do cyfrowego rozwiązania układów równań całkowo-brzegowych dla pól elektrycznych, zgodnie z wykazaną tezą, uniknięto wielotysięcznych odwołań do procedury całkowania numerycznego na poszczególnych elementach brzegowych, co niewątpliwie skraca czas obliczeń. Ponadto rozwiązano globalnie problem numeryczny związany ze słabą osobliwością jąder operatorów całkowych, jak również osiągnięto dużą dokładność w generacji elementów macierzy, co jest szczególnie istotne przy rozwiązywaniu układów równań całkowych I rodzaju. Przybliżone rozwiązania układów równań całkowo-brzegowych stanowią gęstości warstwy pojedynczej, które są równoważne rozkładowi natężenia pola elektrycznego na powierzchniach przewodów lub gęstości warstwy podwójnej nie posiadające takiej interpretacji.

Obliczone rozkłady gęstości warstwy pojedynczej i podwójnej pozwalają zgodnie z otrzymanymi aproksymacjami (wzory (3.34) (3.138) (3.185) i (3.199)) określić rozkłady potencjału elektrycznego w dowolnym punkcie rozpatrywanego modelu obliczeniowego. W obliczeniach tych również uniknięto wielotysięcznych odwołań do procedury całkowania numerycznego na poszczególnych elementach brzegowych, zastępując je obliczeniami funkcji kształtu, np. (3.35) lub (3.171), w zależności od dowolnie wybranych punktów, w których badany jest potencjał elektryczny.

W rozdziale 5 pracy dokonano powiązania wcześniej opracowanych przez autora [18] algorytmów do badania dwu- i trójwymiarowych rozkładów wekto-

ra natężenia pola elektrycznego spolaryzowanego eliptycznie, co odpowiada przypadkom zadanych potencjałów przewodników sinusoidalnie zmiennych o tej samej pulsacji, lecz różnych fazach z algorytmami badania rozkładów potencjałów wyprowadzonych w tej pracy. Otrzymano w ten sposób uniwersalne narzędzie numeryczne pozwalające na badanie rozkładów pola elektrycznego dla przyjętej klasy modeli obliczeniowych, występujących przede wszystkim w technice wysokich napięć.

Na zakończenie pracy podano przykłady zastosowań metody elementów brzegowych i metody kolejnych przybliżeń do rozwiązania układu równań całkowych I rodzaju dla dowolnego dwuwymiarowego modelu linii przesyłowej. Porównując obydwie metody na przykładzie obliczeń testujących oraz w zastosowaniu do badania rozkładu natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodów roboczych i pod linią przesyłową 400 kV i 750 kV, można stwierdzić, że większą dokładność obliczeń otrzymuje się stosując metodę kolejnych przybliżeń w zalgebraizowanej postaci, co jest szczególnie istotne przy wzrastającej ilości elementów brzegowych stosowanych do dyskretyzacji układów równań całkowych.

LITERATURA

1. Adamiak K.: Zastosowanie równań źle uwarunkowanych do rozwiązania zagadnień analizy i syntezy pola elektromagnetycznego. Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej. Kielce 1983.
2. Adamiak K.: Odwrotne zagadnienie brzegowe typu Dirichleta dla równania Laplace'a. Rozprawy Elektrotechniczne 27, 1981, ss. 653-665.
3. Adamiak K.: Pole elektrostatyczne dwóch płaskich ekwipotencjalnych taśm. Rozprawy Elektrotechn. 27, 1981, ss. 939-948.
- 3a. Adamiak K.: Obliczanie pojemności kondensatorów z uwzględnieniem efektów brzegowych. Rozprawy Elektrotechniczne 1984. 30 z. 2 ss. 325-337.
4. Alexiewicz A.: Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1969.
5. Aleksandrow G.N.: Koronnyj rozrząd na liniach elektropięrzedaczi. E-niergijsza, Moskwa 1964.
6. Alew B.: Riegiularizirujuszczije algoritmy dla nadchozdienija ustojcziwogo normalnogo rieszenija urawnienija II roda na spiektrie. Żurn. Wycz. Mat. i Matematycz. Fiziki, 1970, No 3, s. 569-571.
7. Allan R.N.: Cottrill J.E.: Design and parameters affecting the surface atress of overhead powerline conductor systems. Proc. Inst. Elect. Eng. No 10 1971.
8. Allan R.N., Solman S.K.: Electrostatic fields underneath power lines operated at very high voltages. Proc. IEE. Vol. 121, No 11, 1974.
9. Andersen O.W.: Laplacian electrostatic field calculations by finite elements with automatic grid generation. IEEE trans., PAS-92/1973, No 5 1485-1492.
10. Andersen O.W.: Finite element solution of complex potential electric field IEEE Trans. PAS-96/1977, No 4, 1156-1161.
11. Anderssen R.S., De Hoog F.R., Luksal M.A.: The application and numerical solution of integral equations. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980.
12. Arkel C.A., Golloway S.J., Gregory B.: Supertension cable terminations for metalchs SF₆ insulated substantions. IEEE Trans. PAS-101/1982, No 5, 1021-1026.
13. Bachwałow W.S.: O swojstwach optimalnych mietodow rieszenija zadacz matematycznej fiziki. Żurn. Wycz. Mat. i Matiem. Fiziki 1970, No 3, ss. 555-568.
14. Banerjee P.K., Butterfield R.: Boundary Element Method in Engineering Science, Mc Graw Hill, 1981.
15. Baron B.: Pole elektryczne przesyłowej linii trójfazowej 400 kV. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 64, 1979, ss.57-70.
16. Baron B.: Dobór układu przewodów linii przesyłowej 750 kV ze względu na dopuszczalne wartości natężeń pola elektrycznego przy powierzchni ziemi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 68, 1980, ss. 17-27.
17. Baron B.: Analiza pola elektrycznego pod skrzyżowaniem dwóch torów trójfazowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 75, 1981.
18. Baron B.: Pole elektryczne linii przesyłowych trójfazowych najwyższych napięć. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 73, 1980, s. 118.
19. Baron B.: Synteza pola elektrycznego linii trójfazowej. Intern. Symp. Theoretische Electr. Sept. 1983, Ilmenau.
20. Baron B.: Zastosowanie metody równań całkowych Fredholma I rodzaju do badania pola elektrycznego linii przesyłowej. Sympozjum. Metody Matematyczne w Elektroenergetyce, Kraków - Zakopane 1983, ss. 115-125.
21. Baron B., Handzlik S.: Analiza funkcji przetwarzania czujnika do pomiaru gradientu potencjału w dowolnym kierunku pola elektrycznego niejednorodnego sinusoidalnie zmiennego o częstotliwości 50 Hz. Archiwum Elektrotechniki (w druku).
22. Baron B.: Analiza błędów systematycznego sondy kulowej do pomiaru natężenia pola elektrycznego quasi-statycznego pod liniami przesyłowymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 64, 1979, ss. 71-78.
23. Bazeljan E.M., Brandenburgskij W.A., i in.: Porażenije moźniej samoletow. Elektrichestwo, 1980 Nr 3, ss. 48-50.
24. Białecki R., Nowak A.J.: Boundary value problems in heat conduction with nonlinear material and nonlinear boundary conditions. Appl. Math. Modelling, Vol 5, December 1981, 417-421, IPC Business Press 1981.
25. Birtles A.B., Mayo B.J., Benett A.W.: Computer technique for solving 3-dimensional electron - opties and capacitance problems Proc. of IEE 120, 1973, 213-220.
26. Błochin J.W., Churawliw E.N., Jarosławski E.N.: K razczotu elektrostatycznych polej mietodom ekwiwalentnych zariadow. Elektrichestwo - 1980, No 2, s. 26-31.
27. Bochenek K.: Metody analizy pól elektromagnetycznych. PWN, Warszawa 1961.
28. Bartnik J.M.: K wyboru raboczich i ispytatielnych napriazennostiej wysokowolnogo oborudowanija s izolaciej SF₆. Elektrichestwo 1974 No 12 ss. 20-27.
29. Brebbia C.A., Walker S.: Boundary Element Techniques in Engineering. Newnes - Butterworths, London. Boston 1980.
30. Cermak I.A., Silvester P.: Boundary-relaxation analysis of rotationally symmetric electric fields problems. IEEE Trans., PAS-89/1970, No 5, ss. 925-932.
31. Chudak J.I.: O riegiularyzaczji intiegralnych urawnienij I roda. Żurn. Wycz. Mat. i Mat. Fiziki, 1966, No 4, ss. 766-769.
32. Chudak J.I.: O riegiularizujuszczich algoritmach. Żurn. Wycz. Mat. i Matematycznej Fiziki, 1975, No 1, ss. 12-18.
33. Comber M.G., Doyle J.R., Scheider H.M., Zoffanelle L.E.: Threephase testing facilities at project UHV. IEEE Trans. PAS, No 5, 1976.
34. Comsa R.P., Luke Y.M.: Transient electrostatic induction by EHV transmission lines. Trans. IEEE, PAS, No 12, 1969.
35. Cykiernikow I.E.: O czislennom rieszenii wnieszniej zadacz Dirichle s pomoszczju intiegralnogo urawnienija pierwogo roda. Żurn. Wycz. Matiem. i Matematycznej Fiziki, 1976 No 5, ss. 1359-1364.
36. Dahlquist G., Björrek A.: Metody numeryczne. PWN, Warszawa 1983.
37. Delves L.M., Walsh J.: Numerical solution of integral equations. Clarendon Press, Oxford 1974.
38. De Mey G.: Integral equation solution of potential problems in geometries with a slottec boundary. Int. J. Electronics 41, 1976, ss. 221-226.
39. Deno D.W.: Calculating electrostatic - offecte of overhead transmission lines, IEEE Trans., PAS No 5, 1974.

40. Deno D.W.: Electrostatic effects induction formulac. IEEE Trans. PAS, No 5, 1975.
41. Deno D.W.: Transmission line fields. IEEE Trans. PAS, No 5, 1976.
42. Deno D.W.: UHV transmission line electric field reduction with a set of horizontal wires. IEEE. Trans. PAS No 5, 1977.
43. Dimitriew W.I., Zacharow E.W.: O cisilennom pieszenii niekatorych intiegralnych urawnienij Friedgolma I roda. W sb. Wycz. Miedoty i Programirowanie Wyp. X.M., Izd, wo MGU, 1968.
44. Drużkin L.A.: Intiegralnyje urawnienija elektrostatiiki i krajiwyje zadaczi. Moskwa 1967.
45. Feld J.N., Suchariewskij J.W.: O swidienii zadacz difrakcji na niezamknutyh powierchnostiach k intiegralnym urawnienijem wtorigo roda. Radiotiechnika i Elektronika No 7, 1966.
46. Fichtenholz G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1978.
47. Fridman W.M.: Miedod posledowatielnych pribliżenii dla intiegralnogo urawnienija Friedgolma I roda. Uspiechi Mat. Nauk. t. XI wyp. 167, 1956.
48. Geer J.F.: The electric field due to stripline conductors I. Appl. Phys. 47, 1976, 5313-5319.
49. Giunter N.M.: Teoria potencjału. PWN, Warszawa 1960.
50. Golberg M.A., Ed: Solution methods for integral equations Theory and applications. Plenum Press, Nowy Jork 1979.
51. Gomczarskij A.W., Leonow A.S., Jagoła A.G.: Koniecznoraznostnaja aproksimacja liniejnych niekorriektnych zadacz. Zurn. Wycz. Mat. i Mat. Fiziki, 1974, No 1, ss. 15-24.
52. Gordonowa W.J., Morozow W.A.: Czielennyje algoritmy wybora paramietra w miedodie riegularizacji. Zurn. Wycz. Mat. i Mat. Fiziki, 1973, No 3, ss. 539-545.
53. Iwanow W.W.: Ob optimalnych po tocznosti algoritmach pribliżennogo rieszienija opieratornych urawnienij I roda. Zur. Wycz. Mat. i Mat. Fiziki, 1975, No 1, ss. 3-10.
54. Jackson J.D.: Elektrodynamiczka klasyczna. PWN, Warszawa 1982.
55. Jakunin E.N.: Elektrizieskoje pole szarowego elektroda obrazowannogo sietiemoj parallelnych toroidow. Elektrizestwo, 1975.
56. Jaswon M.A.: Integral equation methods in potential theory I. Proc. Roy. Soc. London No 1360, 1963, ss. 23-32.
57. Jemielanow K.W., Ilin A.M.: O cziskie apifmieticzeskich diejstwij nieobchodimom dla pribliżennogo rieszienija intiegralnogo urawnienija Friedgolma II roda. Zurn. Wycz. Mat. i Mat. Fiz. No 4, 1967, ss. 905-910.
58. Johnson G.B.: Electric Fields and Ian Courents of Λ +400 kV HVDC Test Line. IEEE Trans. PAS No 8, 1983, pp. 2559-2568.
59. Kącki E.: Równania różniczkowe cząstkowe w elektrotechnice. WNT, Warszawa 1971.
60. Koleczickij E.S.: Czielennyj miedod posczota osiesimietricznych elektrostaticzeskich polej - Elektrizestwo, 1972, No 7, ss. 57-61.
61. Koleczickij E.S.: Rasczot elektrostaticzeskich polej z ispolzowanijem intiegralnych urawnienij pierwego roda. Elektrizestwo, No 8, 1975, ss. 21-25.
62. Koleczickij E.S., Filippow A.A., Firsowa O.B.: Miedoty rasczota elektrizieskich polej wysokowoltnych apparatow. Elektrizestwo, 1980 No 4, ss. 13-15.
63. Koleczickij E.S.: Rasczot elektrizieskich polej ustrojstw wysokogo napiazienija. Energoatomizdat, Moskwa 1983.

64. Konorski B.: Pole elektryczne przesyłowej linii trójfazowej. PWN, Warszawa 1976.
65. Kozakowa L.E.: O pribliżennom pieszenii obrotnoj zadaczi potiencała prostogo słoja. Izw. Wysszych Uczebnych Zawiedienij Matematika 1964, No 5, s. 23-29.
66. Krakowski M.: Elektrotechnika teoretyczna. PWN, Warszawa 1979, t. II.
67. Krakowski M., Kącki E.: Metody analityczne i numeryczne analizy prądów wirowych i strat wiropądowych w układach o złożonej konfiguracji. Praca Inst. Elektrotechniki, Zakład Badań Podst. Elektr. MHiPM i PAN, Warszawa, Instytut Informatyki Politechniki Łódzkiej, 1984.
68. Krawczyk A.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do analizy niestacjonarnych pól elektromagnetycznych. Mat. II Kraj. Konf. Teorii Pola Elektromagnetycznego, Radzyna 1983.
69. Krawczyk A.: Opracowanie algorytmu metody elementów brzegowych dla obliczania niestacjonarnych pól elektromagnetycznych. Praca Instytutu Elektrotechniki, Zakład Badań Podstawowych Elektrotechn. MHiPM i PAN, Warszawa 1984.
70. Krejn S.G.: Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1967.
71. Krianiew A.W.: Iteracionnyj miedod rieszienija niekorriektnych zadacz. Zurn. Wycz. Mat. i Mat. Fiz. No 1, 1974, 25-35.
72. Krzemieński S.K.: Identyfikacja modeli matematycznych w elektrodynamice ośrodków ciągłych. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Elektryka z. 66, 1981.
73. Krzyżański M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. PWN, Warszawa 1967.
74. Kupradze W.D.: O probliżennom rieszenniu zadacz matematiczeskoj fiziki. Usp. Mat. Nauk. t. XVII, wyp. 2 134, 1967, 59-106.
75. Lancaster P.: Theory of matrices. Nauka, Moskwa 1982. (Tł. ros.).
76. Legras J.: Praktyczne metody analizy numerycznej, WNT, Warszawa 1974.
77. Leja F.: Geometria analityczna. PWN, Warszawa 1962.
78. Majergojz I.D.: Intiegralnyje urawnienija dla rasczota triechmiernogo kwazistacjonarnego elektromagnitnogo pola III. Izwiestija wuzow. Elektromiechanika No 7, 1972.
79. Majergojz I.D.: Rasczot elektrostaticzeskich polej miedodom intiegralnych urawnienij 2-go roda. Elektrizestwo, 1975, No 12, 11-15.
80. Majewski A.: Obliczanie rozkładu ładunków na ciałach przewodzących. Archiwum Elektrotechniki t. XXVII, Zeszyt 1, 1978, ss. 63-70.
81. Majewski A.: Obliczanie rozkładu pola elektrycznego wokół układu ciał w polu elektrycznym. Archiwum Elektrotechniki. T. XXIX, Zeszyt 1, 1980, ss. 267-276.
82. Mandżawidze G.F.: Differencjalnyje i intiegralnyje urawnienija krajevyje zadaczi. Zbornik Statiej, Tbilisi 1979.
83. Matusiak R.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1976.
84. Mc cauley T.M.: EHV and UHV electrostatic effects: Simplified design calculations and preventive measures. IEEE Trans PAS No 6, 1975, pp. 2057-2073.
85. Metz D.: Optomierung von Elektrodenformen über Bildung und Veformung von Aquipotentialfachen mit Hilfe von Ersatz Ladungen. ETZ-A 97, 1976, ss. 121-123.
86. Michlin S.G., Smolicki C.L.: Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych. PWN, Warszawa 1972.
87. Morozow W.A.: O riegularizacji niekorriektno postawlennych zadacz i wyborie paramietra riegularizacji. Zurn. Wycz. Mat. i Mat. Fiziki No 1, 1966, ss. 170-175.

88. Okubo H., Ikeda M., Honda M., Yanari T.: Electric field analysis by combination method. IEEE Trans., PAS - 101/1982, No 10, 4039-4048.
89. Parekh H., Nasser E.: Computation of electrical field and potential around stranded conductor by analytical method and comparison with charge - simulation method. Proc. Inst. Elect. Eng. Vol. 122 No 5, 1975, pp. 547-550.
90. Parton V.Z., Perlin P.I.: Integral equations inelasticity, Moscow, 1982.
91. Piskorek A.: Równania całkowe. WNT, Warszawa 1980.
92. Pogorzelski W.: Równania całkowe i ich zastosowanie. PWNT, Warszawa 1960.
93. Poltz J.: Analiza pola elektromagnetycznego quasi-stacjonarnego metodami iteracyjnymi. Wyd. Politechniki Poznańskiej, Rozprawy Nr 96, Poznań 1979.
94. Poltz J.: Metody analizy stręt wiroprądowych. PWN, Warszawa - Poznań 1982.
95. Pazewig P.W., Sokołowa M.W.: Rasczot naczalnych i rozriadnych napriazeni gazowych promieztukow. Moskwa, Energia 1977, s. 199.
96. Sastry S.S.: Numerical solution of Fredholm integral equations with a logarithmic singularity. Int. J. Num. Math. Engng., 10 1976, 1202-1207.
97. Schneider K.H.: Elektrische und magnetische Felder in Hochspannungsanlagen. ETZ B. H6/7, 1976.
98. Schneider W., Baggenston H.: Computation of electrical fields around stranded conductors using orthogonal functions. Arch. Elektrotechniki vol. No 1, 1978.
99. Senduola H.M., Johnson R.R., Hilson P.W., Measer R.C.: Electric Fields Induced by EHV Transmission Over Irregular Terrain. IEEE Trans. PAS No 5, 1983, pp. 1452-1458.
100. Singer H., Steinbigler H., Weiss P.: A charge simulation method for the calculation of high voltage fields. IEEE Trans. PAS - 93, 1974, pp. 1660-16668.
101. Shih C.H., Di Placido J., Ware B.J.: Analysis of parallel plate simulation of the transmission line electric field as related to biological effects laboratory studies. IEEE Trans. PAS No 3, 1977, 962-966.
102. Sikora R.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1977.
103. Sikora R., Pałka R.: Synthesis of one-and twodimensional elektrostatic field. Arch. Elektr. 64, 1981, 105-108.
104. Sikora R.: Wybrane zagadnienia z teorii pola elektromagnetycznego. PAN Oddział w Poznaniu Seria: Elektrotechnika i Elektronika, tom IX, PWN Warszawa - Poznań 1984.
105. Sikora J., Wincenciak S.: Metoda elementów skończonych wyższego rzędu i jej zastosowanie w badaniach pól elektrostatycznych. Arch. Elektrot. T. XXVII, z. 2, 1978, ss. 353-366.
106. Sikora J., Skoczylas J., Sroka J., Wincenciak S.: Synteza warunków brzegowych w zagadnieniach aproksymowanych metodą elementów brzegowych. VII Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów. Gliwice - Ustroń, maj 1984.
107. Silvester P.: Finite element solution of 2-dimensional exterior field problems. Proc. IEE, 118/1971, No 12, 1743-1750.
108. Singer H.: Berechnung des elektrischen Felds von Gittern. ETZ-A, No 5, 1970, 249-253.
109. Spiegel R.J.: Electromagnetic fields in the near vicinity of transmission line towers. IEEE Trans. PAS No 6, 1976.

110. Steinbigler H.: Digitale Berechnung elektrischer Felder. ETZ-A, 1969, Bd 90, H. 25, ss. 663-668.
111. Steinbigler H.: Combined application of finite element method and charge simulation method for the computation of electric field. Third Int. Symp. Hugh. Volt. Eng., Milan 1979, 11.11.
112. Steinbigler H.: Berechnung von Hochspannungsfeldern mit Hilfe von Flächenladungen. Habilitationsschrift, Technischen Universität, München, 1973.
113. Stoer J., Bulirsch R.: Wstęp do metod numerycznych. PWN, Warszawa 1980.
114. Storey J.T., Billings M.I.: General digital computer program for the determination of 3-dimensional electrostatic axially symmetric fields. Proc. IEE, 114/1967, No 10, 1551-1555.
115. Symm G.T.: Integral equation methods in potential theory II. Proc. Roy. Soc. London No 1360, 1963, 33-46.
116. Szpor S.: Ochrona odgromowa. WNT, Warszawa 1975.
117. Szulkin P., Pogorzelski S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1964.
118. Tamm I.E.: Podstawy teorii elektryczności. WNT, Warszawa 1967.
119. Tichonow A.N.: O rieszennii niekorriektno postawlennych zadacz i metodie riegularizacii. Dokł. Akad. Nauk. SSSR, T. 151, No 3, 1963, 501-504.
120. Tichonow A.N.: O riegularizacii niekorriektno postawlennych zadacz. Dokł. An SSSR, T. 153, 1963, 49-53.
121. Tichonow A.N.: Ob ustojcziwosti algoritmw dla rieszennija wyrozdiennych sistem liniejnych algiebraicznych urawnienij. Żur. Wycz. Mat. i Mat. Fiz. No 4, 1965, 718-722.
122. Tichonow A.N., Arsuenin I.: Metody rieszennija niekorriektnych zadacz. Nauka, Moskwa 1974.
123. Tozoni O.W.: Rasczot elektromagnitnych polej na wyczislitielnych maszinach. Kijew 1967.
124. Tozoni O.W., Majergojz I.D.: O rasczotie staticzeskich polej metodom integralnych urawnienij. Elektromiechanika no 11, 1967, 1187 - 1198.
125. Tomcik I.: The computation of electrostatic field by a charge simulation method. Prace Nauk. Politechniki Warszawskiej, Elektryka, Z. 64, 1981, 27-41.
126. Tozoni O.W., Majergojz I.D.: Rasczot triechmiernych elektromagnitnych polej. Izd. Technika. Kijew 1974.
127. Tranen J.D., Wilson G.L.: Electrostatically induced voltages and currents on conducting objects under EHV transmission Lines. IEEE Trans PAS No 2 march/april 1971, 768-775.
128. Turowski J.: Elektrodynamika techniczna, WNT, Warszawa 1968.
129. Utmischl D.: Berechnung dreidimensionalen Hochspannungs felder ETZ-A No 2, 1978.
130. Verlan A.F., Sizikov W.S.: Metody rieszennija intiegralnych urawnienij s programami dla EVM. Naukowa Dumka, Kijów 1978.
131. Volterra W.: Theory of functionals and of integral and integrodifferential equations. Nauka, Moskwa 1982 (tł. ros.).
132. Wasin W.W., Tanana W.P.: Ob ustojcziwosti projekcionnych metodow pri rieszennii niekorriektnych zadacz. Żurn. Wycz. Mat. i Matimaticzeskoj Fiziki, 1975. No 1, ss. 19-29.
133. Weiss P.: Feldstarkeeffekte bei Zweistoffdielektrika. Wissenschaftlicher Beitrag zum Intern. Symp. Hochspan. des VDE der IEE Power Eng. Society, München 1972, Bull. SEV 63, 584-588.

134. Weiss P.: Berechnung von Zweistoffdielektrika. ETZ-A, Bd 60 1969 H. 25, 693-694.
135. Wilhelmy L., Bockner H.: Messung der elektrischen Feldstärke bei hohen transienten und periodisch zeitabhabgigen Spannungen. ETZ-A, No 8, 1970.
136. Wołaka-Bochenek J., Borzymowski A., Chmaj J., Tryjarska M.: Zarys teorii równań całkowych i równań różniczkowych częstkowych. PWN, Warszawa 1981.
137. Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972.
138. Zimny P.: Zastosowanie metody równań całkowych i elementów skończonych dla obliczenia quasi-stacjonarnego pola elektromagnetycznego w ośrodkach przewodzących. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektryka Nr 50, Gdańsk 1980.

ANALIZA NUMERYCZNA RÓWNAŃ CAŁKOWO-BRZEGOWYCH
PÓL ELEKTRYCZNYCH PEWNEJ KLASY MODELI OBLICZENIOWYCH

S t r e s z c z e n i e

Praca dotyczy zastosowań układów równań całkowo-brzegowych Fredholma I i II rodzaju do obliczeń dwu- i trójwymiarowych pól elektrycznych quasi-statycznych. Konstrukcja tych równań całkowych bazuje na teorii potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej.

W pierwszej kolejności dokonano aproksymacji operatorów całkowych typu potencjału warstwy pojedynczej i podwójnej, stosując metodę elementów brzegowych. Wykazano, że te operatory całkowe można aproksymować kombinacjami funkcji standardowych lub za pomocą zbliżnych szeregów funkcyjnych ze względu na współrzędne punktu X , niezależnie od jego położenia. Tak rozwiązane zagadnienie aproksymacji operatorów całkowych pozwalające na dyskretyzację wszystkich równań całkowo-brzegowych sformułowanych we wstępie pracy prowadzi do wielkich układów równań liniowych. Ponadto opracowano algorytmy do rozwiązywania sformułowanych w pracy równań całkowo-brzegowych I i II rodzaju z zastosowaniem metody kolejnych przybliżeń w zalgabraizowanej postaci, w których elementy macierzy dyskretyzujących odpowiednie operatory całkowe są również wyrażalne przez kombinacje funkcji standardowych lub zbliżne szeregi funkcyjne ze względu na współrzędne punktów triangulacji powierzchni lub konturów przewodników i dielektryków. Otrzymanie gotowych wyrażeń aproksymujących potencjał elektryczny w dowolnym punkcie X umożliwia badanie rozkładów natężenia pola elektrycznego bez wielotysięcznych odwołań do procedury całkowania numerycznego, co niewątpliwie skraca czas obliczeń.

Na zakończenie pracy podano przykłady zastosowania opracowanych algorytmów do analizy i syntezy pól elektrycznych w technice wysokich napięć.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРО-КРАЕВЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ
НЕКОТОРОГО КЛАССА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Р е з ю м е

Работа касается применения систем интегро-краевых уравнений Фредгольма I и II рода для вычислений двух и трехмерных квазистатических электрических полей. Построение этих интегральных уравнений базируется на теории потенциала простого и двойного слоя.

Во первых произведена аппроксимация интегральных операторов типа потенциала простого и двойного слоя, применяя метод краевых элементов. Показано, что эти операторы можно аппроксимировать набором стандартных функций или при помощи сходящихся функциональных рядов относительно координат точки X , в независимости от её положения. Таким образом решённая проблема аппроксимации интегральных операторов, позволяющая на дискретизацию всех интегро-краевых уравнений сформулированных в начале работы, ведёт к большим системам линейных уравнений. Кроме этого разработан алгоритм для решения сформулированных в работе интегро-краевых уравнений I и II рода с применением метода последовательных приближений алгебраизованного вида, в которых элементы матрицы дискретизирующие соответствующие интегральные операторы выражаются через набор стандартных функций или сходящиеся функциональные ряды относительно координат точек триангуляции поверхности или контуров проводников и диэлектриков.

Получение готовых выражений, аппроксимирующих электрический потенциал в точке X , даёт возможность исследования распределений напряжения электрического поля без многотысячного обращения к процедурам численного интегрирования, что бесспорно сокращает машинное время.

В окончании работы даны примеры применения разработанных алгоритмов для анализа и синтеза электрических полей в области больших напряжений.

A NUMERICAL ANALYSIS OF THE INTEGRAL-BOUNDED EQUATIONS
OF ELECTRIC FIELDS FOR SOME CLASS CALCULATING MODELS

S u m m a r y

This paper refers to the application of the systems a Fredholm integral-bounded equations of the first and second kind for calculating two and three-dimensional quasi-static electric fields. Derivation of the integral equations is based on potential theory for single and double layer. Firstly, there was performed the approximation of the integral operators of type single and double layer by the method of boundary elements. It was shown that the operators can be approximated by a linear combination of a standard function or by a convergent functional series. Such a solution of the approximation problem for integral operators while permitting to discrete all integral-bounded equations leads to the big systems of linear algebraic equations.

Furthermore, some numerical algorithms for solving derived integral-bounded equations of the first and second kind were elaborated. In the algorithms based on the method of subsequent approximations, the elements of discretizing matrices are also expressed by the combination of standard functions or by the convergent series dependent on the coordinate points of surface triangulation or on the contours of conductors and dielectrics.

Basing on the formulas approximating the electric potential in any point X one can study distributions of electric field strength without multiple citation of the integration procedures thus reducing the computing time. The final part of the paper includes some examples of how to apply the derived algorithms to the analysis and synthesis of electric fields in high voltage technology.

3347/85/97

**WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:**

- 44-100 Gliwice — Księgarnia nr 098, ul. Konstytucji 14 b
- 44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
- 40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
- 40-098 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
- 41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
- 41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
- 41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
- 47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
- 44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
- 41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
- 41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
- 00-90: Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN —
Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.