

XI OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA TEORII MASZYN
I MECHANIZMÓW11th POLISH CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES
AND MECHANISMS

27-30. 04. 1987 ZAKOPANE

Петр СТОЯНОВ

Высший машинно-электротехнический институт - Габрово
НР Болгария

ДИНАМИКА ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

Резюме. При моделировании внутренней динамики зубчатых механизмов с прямозубыми и косозубыми колесами переменной жесткости, ошибки в основном шаге, профильные ошибки и др. параметры колес обычно рассматривают как денерминированные величины. В настоящей работе учитывается случайный характер изменения основного шага и суммарной жесткости зацепления из-за случайных ошибок при изготовлении и сборке эвольвентных прямозубых и косозубых колес. Приведены дифференциальные уравнения движения зубчатой пары. Получена спектральная плотность входного воздействия как результат случайного характера геометрических параметров колес. Рассматривая переменную жесткость как квазипериодический случайный импульсный процесс определены непрерывные и дискретные спектры. Дифференциальное уравнение движения решено методом численного моделирования. Этим решением получен спектр колебаний выходного вала передачи. Сделаны экспериментальные исследования, которые подтвердили результаты теоретических исследований.

Введение

Динамические процессы в зубчатых механизмах приводят к возбуждению дополнительных нагрузок, вибраций и шума. Проблема снижения виброактивности нагруженных, тяжело нагруженных и высокоскоростных зубчатых передач приобретает большое значение в связи с уменьшением повышенных динамических нагрузок и других нежелательных динамических явлений. Основным путем уменьшения виброактивности зубчатой пары является борьба с источниками возбуждения колебаний, т.е. уменьшение возмущающих сил. Процесс пересопряжения зубьев в прямозубых и косозубых передачах сопровождается значительными перепадами жесткости зацепления и резким перераспределением нагрузки между зубьями на границах фаз однопарного и двухпарного зацепления. В этих условиях взаимодействие колес носит импульсивный характер, степень выраженности которого зависит от совокупности факторов, где главные - погрешности

изготовления, нагруженность и скорость движения передачи. Поэтому определение возмущающих сил является основным этапом при расчете вынужденных колебаний зубчатых передач.

Вопросам динамики зубчатых механизмов посвящена обширная литература. Однако эти вопросы рассматриваются, в основном, с позиций определения динамических нагрузок в зацеплении зубьев. При этом движение передач с прямозубыми и косозубыми колесами обычно рассматривается на ограниченном отрезке времени, включающем вход одного зуба в зацепление и выход из него. Период зацепления разбивается на отдельные интервалы времени. Для каждого интервала составляется дифференциальное уравнение движения колес, решением этих уравнений определяются динамические нагрузки на каждом из интервалов времени за один период пересопрежения зубьев [1], [8]. Работа [2] посвящена возникновению возмущающих сил в зубчатых передачах из-за переменной жесткости зацепления, учитывая периодический детерминированный характер этого параметра.

В данной работе исследуется стохастическая динамическая модель нагруженной прямозубой и косозубой эвольвентной зубчатой пары, при которой переменная жесткость зацепления моделируется с помощью импульсного случайного процесса. При таком подходе исходя из физической природы возмущающей силы можно определить ее спектр как составленный из непрерывной части и дискретных спектральных линий. Стохастическое моделирование применено автором и для исследования ненагруженных и малонагруженных зубчатых передач [6].

Моделирование динамики нагруженной зубчатой пары

Динамическая модель зубчатой пары состоит из двух абсолютно жестких зубчатых колес 1 и 2, установленных в абсолютно жестких в рациональных направлениях опорах. Колеса связаны между собой пружинами, имитирующими переменные жесткости $c(t)$ зацепляющихся пар зубьев, и вращаются под действием приложенных к ним статических крутящих моментов соответственно M_1 и M_2 . Принятая модель предполагает отсутствие размыкания в контактах нагруженных зубьев при вступлении в зацепление каждой новой пары зубьев, что имеет место при тяжело нагруженных передачах.

Из условий статического равновесия колес с учетом принципа Даламбера составляется уравнение движения зубчатых колес по линии зацепления в виде [1], [2]

$$\mu \ddot{x} + k\dot{x} + c(t)x = F, \quad (1)$$

где

$x = \varphi_1 r_{01} - \varphi_2 r_{02}$ — относительное линейное перемещение;

$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса пары;

$m_1 = I_1 / r_{01}^2$; $m_2 = I_2 / r_{02}^2$;

$$F = M_1/r_{01} = M_2/r_{02};$$

φ_1, φ_2 - углы поворота колес 1 и 2;

r_{01}, r_{02} - радиусы основных окружностей;

I_1, I_2 - моменты инерции колес;

k - осредненный во времени коэффициент трения в зубчатой паре.

В результате соударений при пересопрежении зубьев возникает значительное ускорение колес, но так как эти ускорения действуют весьма кратковременно, то вызываемые ими изменения угловых скоростей очень малы. Вследствие этого равномерность вращения колес нарушается незначительно. Поэтому считают, что и при наличии колебаний время однопарного и двухпарного зацепления остается таким же, как и при равномерном вращении колес [1]. Это допущение позволяет считать жесткость зацепления периодической функцией времени, что значительно упрощает исследования, так как дает возможность описать колебания зубчатых передач дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами.

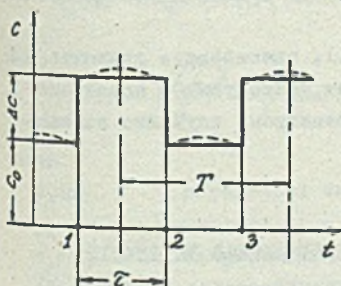


Рис. 1

Определением жесткости занимались многие авторы. Согласно экспериментальным данным жесткость при двухпарном и однопарном зацеплении прямоугольных колес можно считать постоянной (сплошная линия на рис. 1) так как она в действительности изменяется в незначительных пределах (пунктирная линия) [7]. При переходе же однопарного зацепления к двухпарному (и наоборот) жесткость изменяется скачком - от c_0 до $c_0 + \Delta c$.

Поле зацепления и изменение суммарной жесткости зацепления $c(t)$ за период за-

цепления T разобьем на две фазы:

- первая фаза - соответствующая двухпарному зацеплению, определена точками 1 и 2. Продолжительность первой фазы τ ;
- вторая фаза - соответствующая однопарному зацеплению, определена точками 2 и 3.

Как показали проведенные эксперименты, из-за случайных ошибок основного шага колес эти точки, а следовательно, и длительность τ являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону с плотностью [3]

$$w(\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (2)$$

где

τ_0 - математическое ожидание (в рассматриваемом случае среднее значение) длительности τ ;

σ - среднее квадратическое отклонение.

Изменение суммарной жесткости зацепления $c(t)$ косозубых колес показано на рис. 2. Здесь жесткость вновь входящей в зацепление и выходящей из зацепления пары зубьев теоретически равна нулю, и поэтому изменение жесткости от значения c_0 до значения $c_0 + \Delta c$ и наоборот происходит хотя и не скачком, но достаточно быстро [2]. Отсутствие скачка жесткости при переходе от одного зацепления к другому наблюдается и при прямозубых колесах, что объясняется наличием масляной пленки [1].

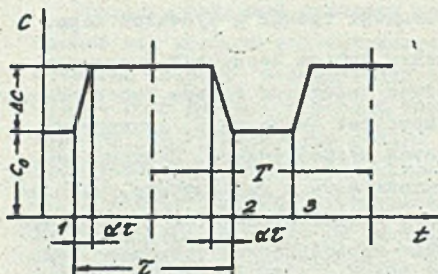


Рис. 2

В этом случае так же имеются две фазы зацепления, определенные точками 1, 2 и 3. Длительность z распределена по нормальному закону (2), коэффициент α является постоянной величиной.

Таким образом, дифференциальное уравнение (1), описывающее динамическое поведение нагруженной эвольвентной зубчатой пары прямозубых и косозубых колес, является линейным с одним переменным параметром, случайно изменяющимся во времени.

Спектр стохастического (квазипериодического) измерения жесткости прямозубого зацепления

В обоих рассматриваемых случаях суммарную жесткость зацепления можно представить как следующую сумму

$$c(t) = c_0 + \Delta c(t),$$

(3)

в котором при движении зубчатой пары c_0 представляет собой постоянную величину, а $\Delta c(t)$ и $c(t)$ — импульсные стационарные случайные процессы. В дальнейшем будем рассматривать случайный процесс $\Delta c(t)$, который для прямозубого зацепления представлен на рис. 3. Этот квазипериодический процесс характеризуется постоянной амплитудой Δc и постоянным интервалом

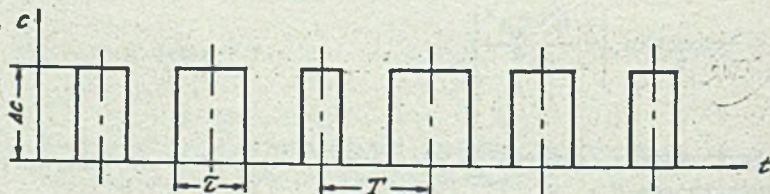


Рис. 3

времени (шагом) T между серединами любых двух соседних импульсов. Длительность τ прямоугольного импульса случайна и распределена по нормальному закону (2). Или стохастическая модель сведена к стационарной последовательности неперекрывающихся импульсов при двухсторонней модуляции их по длительности.

Так как длительности импульсов независимы и импульсная последовательность стационарна, то спектральную плотность $S(\omega)$ процесса (3) определим следующей зависимостью [4]:

$$S(\omega) = S_c(\omega) + S_d(\omega) \sum_{N=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{N}{T}), \quad (4)$$

где сделаны следующие подстановки:

$$S_c(\omega) = \frac{\Delta c^2}{T} \left\{ M[|F_1(\omega, \tau)|^2] - |M[F_1(\omega, \tau) e^{j\omega\tau/2}]|^2 \right\}, \quad (5)$$

$$S_d(\omega) = \left(\frac{\Delta c}{T} \right)^2 |M[F_1(\omega, \tau) e^{j\omega\tau/2}]|^2.$$

здесь

- $S_d(\omega)$ — определяет интенсивность дискретных спектральных линий при частоте $f = N/T$;
- $S_c(\omega)$ — непрерывная часть спектральной плотности;
- $\delta(f - N/T)$ — дельта-функция (функция Дирака), определяемая равенством

$$\delta(f - N/T) = \begin{cases} 0 & \text{при } f \neq N/T; \\ \infty & \text{при } f = N/T; \end{cases}$$

- $M[\quad]$ — статистическое усреднение случайной функции (процесса);
- $F_1(\omega, \tau)$ — спектр единичного типового импульса случайного импульсного процесса.

Для прямоугольного случайного импульса последовательно, в соответствии с принципами теории случайных функций, находим:

$$F_1(\omega, \tau) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau});$$

$$F_1(\omega, \tau) e^{j\omega\tau/2} = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2};$$

$$M[F_1(\omega, \tau) e^{j\omega\tau/2}] = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau_0}{2} \exp(-\frac{1}{8} \sigma^2 \omega^2);$$

$$M[|F_1(\omega, \tau)|^2] = \frac{2}{\omega^2} \left[1 - \cos \omega\tau_0 \cdot \exp(-\frac{1}{2} \sigma^2 \omega^2) \right].$$

Подстановка этих соотношений в формулы (5) дает выражения спектральной плотности независимых прямоугольных импульсов переменной жесткости при двухсторонней модуляции их по длительности, определяющие непрерывный и дискретный спектр возмущающей силы при прямозубом зацеплении:

$$S_c(\omega) = \frac{2\Delta c^2}{\omega^2 T} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \omega^2\right) \cos \omega t_0 - 2 \exp\left(-\frac{1}{4} \sigma^2 \omega^2\right) \sin^2\left(\frac{\omega t_0}{2}\right) \right];$$

$$S_d(\omega) = \left(\frac{2\Delta}{\omega T}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega t_0}{2}\right) \exp\left(-\frac{1}{4} \sigma^2 \omega^2\right).$$
(6)

На рис. 4 показан искривленный непрерывный $S_d(\omega)$ и дискретный $S_c(\omega)$ спектр для нагруженной зубчатой пары эвольвентных прямозубых колес 8-ой степени точности с модулем 3,5 мм, передаточным числом 2,94 и коэффициентом перекрытия 1,45, производимые заводом грузоподъемных сооружений в гор. Габрове. Линии дискретного спектра совпадают со субдвовой частотой передачи 245 с^{-1} и с частотами, кратными зубцовой. Интенсивность непрерывного спектра находится при низких частотах, а ее максимум — при нулевой частоте. При этом ряд непрерывного спектра сходится быстрее по сравнению с дискретным спектром. Для построения спектральных плотностей на рис. 4 использованы уравнения (6).

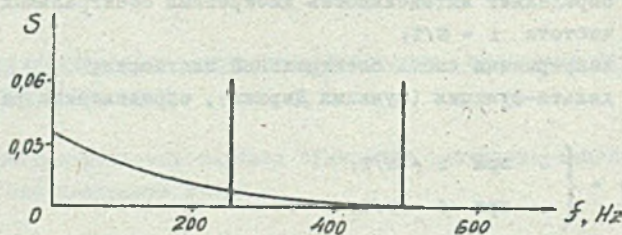


Рис. 4

Спектр изменения жесткости косозубого зацепления

Переменные собираемые зависимости (3) $\Delta c(t)$ при косозубых эвольвентных колесах является таким же квазипериодическим случайным процессом, характеризующимся трапецидальным единичным импульсом, у которого постоянны амплитуда Δc , интервал между средними двух соседних импульсов T и коэффициент α , определяющий участки переменной жесткости (сторон трапеции). И в этом случае случайный процесс представляет собой стационарную последовательность неперекрывающихся независимых импульсов при двухсторонней модуляции их по длительности.

Спектральная плотность $S(\omega)$ этого процесса определяется зависимости (4) и (5). Для определения конкретных выражений этих зависимостей определим

спектр единичного типового импульса для случая когда длительность τ определена по нормальному закону (2)

$$F_1(\omega, \tau) = \frac{1}{\alpha \tau \omega^2} \left[e^{-j\alpha \tau \omega} + e^{-j(1-\alpha)\tau \omega} - e^{-j\tau \omega} - 1 \right]. \quad (7)$$

После подстановки (7) и (5) получаем выражения для непрерывного и дискретного спектра случайной возмущающей силы при косозубом зацеплении:

$$S_c(\omega) = \left(1 - \frac{\alpha}{\tau_0}\right) \frac{2\Delta c^2}{\omega^2 T} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \omega^2\right) \cos(1-\alpha)\tau_0 \omega - 2 \exp\left(-\frac{1}{4} \sigma^2 \omega^2\right) \sin^2 \frac{1}{2} (1-\alpha)\tau_0 \omega \right];$$

$$S_d(\omega) = \left(1 - \frac{\alpha}{\tau_0}\right)^2 \left(\frac{2\Delta c}{\omega T}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{4} \sigma^2 \omega^2\right) \sin^2 \frac{\tau_0 \omega}{2} \sin^2 \frac{\alpha \tau_0 \omega}{2}. \quad (8)$$

Численное моделирование зубчатой пары

Дифференциальное уравнение движения зубчатой пары (1) решено численным методом. Для его решения на ЭВМ составлена программа на алгоритмическом языке ФОРТРАН. Основной особенностью программы является использование метода Рунге-Кутты 4-го порядка для выполнения операций интегрирования. Точность процедуры численного интегрирования была проверена тем, что при большом числе циклов для случая свободных недемпфированных колебаний обеспечивалось равенство входной и выходной скоростей в режиме однопарного и двухпарного зацепления. Максимальная величина автоматически выбираемого шага интегрирования в программе ограничена выводами на печать интервалом с целью обеспечения желаемой точности.

Проверка программы была осуществлена путем сравнения полученных численных решений уравнения (1) с результатами аналогичных процессов, полученных в области исследований динамики зубчатых передач.

Для дальнейшей проверки был изготовлен испытательный стенд, спроектировав таким образом, чтобы обеспечить очень большую жесткость входного и выходного вала зубчатой пары, благодаря чему система могла колебаться как одномассовая. На этом стенде замерялись вибрации выходного вала и кум зубчатой передачи при изменении скорости движения и нагрузки.

На рис. 5 показан спектр в безразмерной форме в зависимости от частоты вращения входного вала зубчатой пары, составленной из тех же зубчатых колес (для которых были вычислены спектры) при постоянной нагрузке F . Из спектрограммы видно, что при работе под постоянной нагрузкой основные колебания выходного вала происходят на частоте, равной частоте переоснащения зубьев

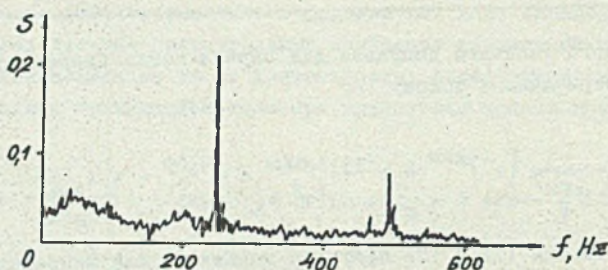


Рис. 5

колес, т.е. основное влияние на колебания зубчатых передач оказывает дискретные спектральные линии. Непрерывный спектр оказывает влияние колебаниям зубчатой пары в зоне низких частот.

Выводы

Цель настоящего исследования состояла в том, чтобы определить, возможно ли с помощью теории случайных стационарных процессов провести моделирование и теоретическое исследование нагруженных зубчатых прямозубых и косозубых передач. Рассматривая переменную жесткость зацепления как квазипериодический импульсный случайный процесс определены непрерывный и дискретный спектр возмущающей силы в эвольвентной зубчатой паре. Для решения дифференциального уравнения движения с переменным коэффициентом применено численное моделирование. Полученные результаты колебаний выходного вала хорошо согласуются с данными, полученными экспериментальным путем.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б.М. АБРАМОВ: Колебания прямозубых зубчатых колес. Харьков, Изд-во ХГУ, 1968.
- [2] З.Л. АЙРАПЕТОВ, В.И. АПАРХОВ, М.Д. ГЕНЧИН, А.А. ЖИРНОВ, О.И. КОСАРЕВ: Возбуждения колебаний в зубчатых передачах. - В кн.: Динамические процессы в механизмах с зубчатыми передачами. М., "Наука", 1976.
- [3] Е.С. ВЕНТШЕЛЬ: Теория вероятностей. М., "Наука", 1964.
- [4] В.Т. ГОРЯИНОВ, А.Г. ЗУРАВЛЕВ, В.И. ТИХОНОВ: Примеры и задачи по статистической радиотехнике. М., "Советское радио", 1970.
- [5] А.В. СОЛОДОВ, Ф.С. ПЕТРОВ: Линейные автоматические системы с переменными параметрами. М., "Наука", 1971.
- [6] П. СТОЯНОВ: Стохастично моделиране на обикновени зъбни механизми. - Научна сесия на ВМЕИ-Габрово и ВВБАУ-Шумен, 1977.
- [7] П. СТОЯНОВ: Динамика на равнинно зъбно сцепване - определяне на основните динамични характеристики. - Научна сесия на ВМЕИ-Габрово и ВВБАУ-Шумен, Шумен, 1985.

- [8] E.P. REMMERS: Gear Mesh Excitation Spectra for Arbitrary Tooth Spacing Errors, Load and Design Contact Ratio. ~ Transactions of the ASME, B, Journal of Mechanical Design, 1978, v. 100, N° 4.

DYNAMIKA MECHANIZMÓW ZĘBATYCH

Streszczenie

Przy modelowaniu wewnętrznej dynamiki mechanizmów zębatych z kołami o zębach prostych i skośnych zmiennej trwałości, błędy w podziałce zasadniczej, błędy profili i inne parametry kół zwykle rozpatruje się jako wielkość zdeterminowaną. W niniejszej pracy uwzględnia się przypadkowy charakter zmiany podziałki zasadniczej i sumarycznej trwałości zaczeplenia z powodu błędów przypadkowych powstających przy wytwarzaniu i montażu ewolwentowych prostych i skośnych kół zębatych. Przytoczone są równania różniczkowe ruchu zębatej pary. Otrzymana została spektralna gęstość wejściowego oddziaływania jako rezultat przypadkowego charakteru parametrów geometrycznych kół. Rozpatrując zmienną trwałość jako quasiokresowy przypadkowy proces impulsowy określono nieprzerwane i dyskretne spektry. Równania różniczkowe ruchu zostały rozwiązane za pomocą metody modelowania liczbowego. Tym sposobem otrzymano widmo drgań wyjściowego wału napędu. Przeprowadzone zostały badania eksperymentalne, które potwierdziły rezultaty badań teoretycznych.

DYNAMICS OF THE TOOTHED MECHANISMS

Summary

While modelling the inner dynamics of the toothed mechanisms with wheels having straight and oblique teeth of the durability variable the errors in the main scale, errors of the profiles and other parameters of the wheels are usually considered as the determined quantities. In this paper an accidental character of the change of the scale and total durability of catching are taken into account because of the accidental errors that originate while producing and assembly of involute straight and oblique gears. There are also differential equations given of the motion of the gear pair. Considering variable durability as a quasi-period accidental impulsing process the continuous and discrete spectra have been determined. Differential equations

of the motion have been solved by means of the numerical modelling. Experimental investigations have been carried out and they confirmed the theoretical studies.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Eugeniusz Świtoński

Wpłynęło do redakcji 2.I.1987 r.