ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1987

Seria: MECHANIKA z. 86 Nr kol. 1012

XI OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA TEORII MASZYN I MECHANIZMÓW

11th POLISH CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES AND MECHANISMS

27—30. 04. 1987 ZAKOPANE

Józef WOJNAROWSKI, Andrzej NOWAK

Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
Politechnika Śląska

GRAF SKRĘTÓW W KINEMATYCZNEJ ANALIZIE MANIPULATORÓW ROBOTÓW

Streszczenie: W kinematycznej analizie robotów bardzo użyteczne jest stosowanie współrzędnych w przestrzeni rzutowej. Umożliwia to w sposób zwarty opisanie ruchu przestrzeni euklidesowej w porównaniu z zapisem we współrzędnych ogólnych. Określając przekształcenie chwilowych skrętów (śrub) w przestrzeni rzutowej sformułowano sposób wyznaczenia prędkości i przyspieszenia dowolnego punktu ogniwa, a następnie procedurę analizy kinematycznej mechanizmu manipulatora metodą skrętników. Kolejne kroki rekurencyjnej redukcji skrętników przedstawiono w postaci grafu transformacji zmiennych. Metodę zilustrowano na przykładzie analizy mechanizmu manipulatora-robota o ruchliwości sześć. W dodatku przytoczono podstawowe pojęcia i własności geometrii rzutowej.

1. Wprowadzenie

W kinematycznej analizie mechanizmu manipulatora można zastosować metodę składania ruchów śrubowych, tzw. skrętów w przestrzeni rzutowej.[x]

Skrętowi ciała sztywnego, zwanego dalej ogniwem, jako pojęciu mechanicznemu, nadaje się w tej przestrzeni interpretację matematyczną w postaci grupy przekształceń rzutowych zdefiniowanej przez Kleina [1].

Ostatnio za pomocą skrętów Lipkin i Duffy [2, 3] formułują zadania sterowania ruchami manipulatora robota.

Pojęcie skrętu wiąże się z pojęciami motoru i skrętnika, których teoria była rozwijana już przez Misesa [4], a następnie przez Dimentberga [5, 6]. Zaznaczamy, że innym sposobem badania kinematyki mechanizmu manipulatora

[x] Podstawowe pojęcia i własności geometrii rzutowej przedstawiono w dodatku.

jest np. metoda macierzy przejścia określanych dla par kinematycznych, bazująca na transformacjach układów współrzędnych przyporządkowanych ogniwom mechanizmu [7-10]. Metoda ta w realizacji numerycznej jest jednak mniej efektywna ze względu na konieczność różniczkowania macierzy przejścia względem współrzędnych uogólnionych przyporządkowanych parom kinematycznym.

W pracy sformułowano analizę kinematyczną mechanizmu manipulatora metodą składania skrętów, odwołując się również do pojęcia motoru i skrętnika. Zakres analizy obejmuje określenie położeń prędkości i przyspieszeń punktów poszczególnych członów mechanizmu, przy czym wielkości kinematyczne wyznacza się w nieruchomym układzie odniesienia. W tym celu, w przestrzeni rzutowej opisujemy transformacje układów współrzędnych macierzami przejścia określanych dla par kinematycznych.
Metodę zilustrowano na przykładzie modelu kinematycznego mechanizmu manipulatora.

2. Określenie przekształcenia śrubowego i skrętnika w przestrzeni rzutowej

Jedną z ważnych zalet stosowania współrzędnych w przestrzeni rzutowej PR^3 jest własność, że ruch przestrzeni Euklidesa R^3 tzn. przekształcenie postaci $y = ux + b$ $(x,y \in R^3)$ zachowuje długość i równoległość wektorów, jako złożenie obrotu określonego macierzą U o wymiarze (3×3) i przesunięcia równoległego b. Przekształcenie to jest równoważne w współrzędnych jednorodnych przekształceniu liczbowemu PR^3 postaci:

$$r = \left[\begin{array}{c|c} U & b \\ \hline 000 & 1 \end{array}\right] r = Tr , \tag{1}$$

gdzie:

T - jest macierzą transformacji współrzędnych.

Trójwymiarowy wektor $r = \left[x_1, x_2, x_3\right]^T$ wygodnie jest przedstawić w przestrzeni PR^3 czwórkami liczb rzeczywistych

$r = \left[r_1, r_2, r_3, r_4\right]^T$ takimi, że

$$\begin{aligned} &1.\quad r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \neq 0 , \\ &2.\quad \bigwedge_{\lambda \neq 0} \left[r_1, r_2, r_3, r_4\right] = \left[\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4\right], \end{aligned} \tag{2}$$

które nazwiemy współrzędnymi wektora $r \in PR^3$, przy czym zachodzi $r_1:r_2:r_3:r_4 = x_1:x_1:x_3:1$.

Przekształcenie (1) nosi nazwę przekształcenia afinicznego.

Def. 1. Przekształceniem śrubowym $\mathcal{S}$ nazywamy przekształcenie afiniczne, w którym wektor b jest równoległy do osi kolineacji (obrotu).

Przekształcenie śrubowe w kinematyce nazywa się również skrętem. Oś przekształcenia śrubowego nazywamy linią śrubową a jej równanie ma postać:

$$p = x_0 + \lambda e, \quad e = \frac{\omega}{|\omega|}, \tag{3}$$

gdzie:

ω - jest wektorem prędkości kątowej ruchu obrotowego.

W kinematyce mechanizmów manipulatorów będziemy interpretować ruchy ogniw jako złożenie ciągu następujących po sobie przekształceń śrubowych:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \cdots \mathcal{S}_n . \tag{4}$$

Podobnie oś śrubowa łańcucha kinematycznego jest kombinacją liniową chwilowych osi obrotu ogniw:

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_n p_n , \tag{5}$$

przy czym

$$\sum |\alpha i| \neq 0 .$$

Pochodną wektora b po czasie nazwiemy prędkością skrętu i oznaczymy przez v_s.

Przejdziemy do zdefiniowania ważnego pojęcia w kinematyce mechanizmów przestrzennych, jakim jest skrętnik kinematyczny.

Def. 2. Skrętnikiem kinematycznym nazwiemy układ złożony z wektora prędkości kątowej ω i prędkości skrętu

$$S = \{\omega_1, v_s\}, \tag{6}$$

gdzie:

$$v_s = \mu\omega, \qquad \mu = \frac{k}{|\omega|^2},$$

$$k = \omega^T v, \tag{6}$$

przy czym

k - nazywa się parametrem kinematycznym skrętnika,

v - jest wektorem prędkości dowolnego punktu ciała.

Skrętnik kinematyczny nazywany jest również śrubą [3, 5].
Wielkości μ oraz k są niezmiennikami przekształceń rzutowych. Rozpatrzmy rzut dowolnego wektora v na kierunek linii śrubowej:

$$v_s = \mu e, \quad \mu = v^T e,$$

$$e = \frac{\omega}{|\omega|} .$$

Udowodnimy, że miara μ jest niezmiennikiem kolineacji układu współrzędnych:

$$\mu' = |v'^T e'| = v^T (T^T T) e = v^T e = \mu, \tag{7}$$

uwzględniając, że

$$T^T T = E .$$

Zauważmy, że skrętnik można przedstawić w postaci liczby zespolonej Clifforda [5]:

$$S = \omega + c v_s = \omega (1 + \mu c), \tag{8}$$

gdzie:

c - jest symbolem (hiperliczbą) o własności $c^2 = 0$.

Ogólniejszym pojęciem od skrętnika jest motor kinematyczny, rozumiany jako układ złożony z prędkości bieguna, np. punktu A i prędkości kątowej ciała. Wtedy motor

$$M_A = \omega + c v_A \tag{9}$$

Znając motor ciała wyznacza się jego skrętnik

$$S = \omega + c v_s = \omega (1 + \mu c), \tag{10}$$

gdzie

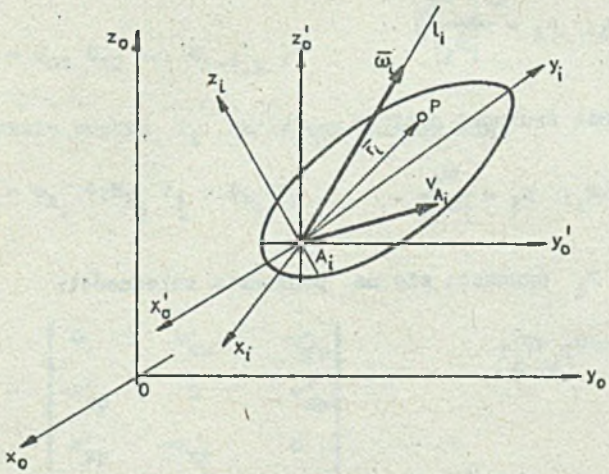
$$v_s = \mu \omega, \qquad \mu = \frac{\omega^T v_A}{|\omega|^2} .$$

Skrętnik jest zatem szczególnym przypadkiem motoru, a ich algebrę omówiono szczegółowo w pracach [4, 5, 6].

Metodę przekształceń śrubowych i skrętników zastosujemy w modelowaniu kinematyki mechanizmów manipulatorów - robotów.

3. Wyznaczanie prędkości i przyspieszenia dowolnego punktu ogniwa

Załóżmy, że dla i-tego ogniwa znany jest motor kinematyczny w biegunie A_i (rys. 1). Znamy również przyspieszenie a_{A_i} bieguna. Współrzędne wyszczególnionych wektorów określono w układzie współrzędnych (x_0', y_0', z_0') o osiach równoległych do osi układu nieruchomego (x_0, y_0, z_0). Układ współrzędnych (x,y,z) jest układem lokalnym związanym na sztywno z ogniwem.



Rys. 1

Położenie punktu P_i względem nieruchomego układu współrzędnych jest określone równaniem

$$r_p^{(0)} = T_{0i}\, r_p, \tag{11}$$

gdzie

$$T_{0i} = T_{01}\, T_{12} \cdots T_{i-1,i}$$

jest macierzą przejścia ogniwa (od lokalnego układu współrzędnych ogniwa do układu nieruchomego związanego z ostoją 0).

$T_{j-1,j}$ są macierzami przejścia lokalnych układów współrzędnych ogniw o wymiarach (4 x 4) i postaci (1), $r_p = [x_p, y_p, z_p, 1]^T$ określa współrzędne punktu P_i w układzie lokalnym, $r_p^{(0)} = [x_p^{(0)}, y_p^{(0)}, z_p^{(0)}, 1]^T$ określa współrzędne P_i w układzie nieruchomym.

Zauważmy, że przekształcenie (11) jest złożeniem ciągu kolejnych przekształceń afinicznych o postaci (4).

Znając motor ogniwa $M_{A_i} = \omega_i + cv_{A_i}$ wyznaczamy jego skrętnik

$$S = \omega_i + cv_{si} \quad , \tag{12}$$

gdzie

$$v_{s_i} = \mu_i \omega_i, \quad \mu_i = \frac{\omega_i^T v_{A_i}}{|\omega_i|^2} \tag{13}$$

oraz równanie linii śrubowej ogniwa:

$$p = x_o + \lambda e_i, \quad e_i = \frac{\omega_i}{|\omega_i|} . \tag{14}$$

Prędkość punktu P_i wyznacza się na podstawie zależności:

$$v_{P_i} = v_{A_i} + B_{P_i} \omega_i , \tag{15}$$

gdzie

$$B_{P_i} = \begin{bmatrix} 0 & z_p' & -y_p' \\ -z_p' & 0 & x_p' \\ y_p' & -x_p' & 0 \end{bmatrix}_i \tag{16}$$

jest macierzą antysymetryczną, której elementami są współrzędne punktu P_i w układzie (x_o', y_o', z_o').

Dokonując kolineacji układów współrzędnych wyznaczamy współrzędne punktu P_i w układzie przesuniętym

$$r_{P_i}' = K_{oi} \, r_{p_i} , \tag{17}$$

gdzie

$$K_{oi} = K_{o1} K_{12} \dots K_{i-1,i}$$

jest macierzą kolineacji ogniwa (od układu $(x_i, y_i, z_i, 1)$ do układu współrzędnych $(x_o', y_o', z_o', 1)$).
Składowe macierze $K_{j-1,j}$ otrzymuje się z macierzy T o postaci (1) przez wyzerowanie wektora b.
Szczegółowa postać macierzy kolineacji K_{oi} ogniwa i-tego jest następująca:

$$K_{oi} = \left[\begin{array}{c|c} U_{oi} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \tag{18}$$

gdzie

$$U_{oi} = U_{01} U_{12} \dots U_{i-1,i} .$$

Przyspieszenie punktu P_i określamy zależnością:

$$a_{P_i} = a_{A_i} + B_{P_i} \varepsilon_i + C_{P_i} \omega_i , \tag{19}$$

gdzie:

$$C_{P_i} = \begin{bmatrix} 0 & v_{zp}' & -v_{yp}' \\ -v_{zp}' & 0 & v_{xp}' \\ v_{yp}' & -v_{xp}' & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

jest macierzą, której elementami są współrzędne wektora prędkości względnej punktu P_i; $v_{P_i}' = v_{P_i}' - v_{A_i}$.

Obecnie sformułujemy sposób prowadzenia analizy kinematycznej mechanizmu manipulatora mającego postać otwartego łańcucha kinematycznego metodą rekurencyjnej redukcji skrętników ogniw. Zadanie sprowadza się do wyznaczania motorów w biegunach par kinematycznych.

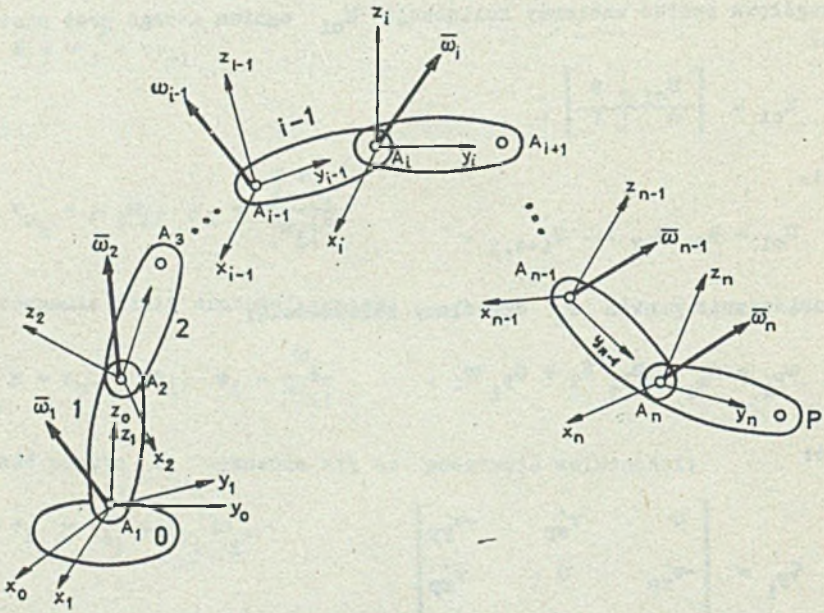
Przez biegun pary kinematycznej rozumiemy punkt należący jednocześnie do obydwu ogniw tworzących tę parę, w którym określono początek lokalnego układu współrzędnych.

4. Analiza kinematyczna manipulatora metodą skrętników

Rozważmy otwarty łańcuch kinematyczny (rys. 2).

Z każdym ogniwem związano lokalny układ współrzędnych, w którym określono wektor prędkości kątowej ω_i ogniwa oraz położenie bieguna następnej pary kinematycznej.

Ogniwo oznaczone przez 0 traktowane jest jako ostoja.



Rys. 2

Należy zwrócić uwagę na wzajemną orientację układów współrzędnych, przy przejściu od jednego ogniwa do drugiego. W tym celu wprowadza się macierz orientacji układów współrzędnych $P_{i-1,i}$.

W przypadku niezgodnej orientacji układów współrzędnych należy utworzyć iloczyn macierzy kolineacji $K_{i-1,i}$ oraz macierzy orientacji układów współrzędnych. Wtedy macierz przekształcenia afinicznego będzie

$$T_{i-1,i} = P_{i-1,i} \; K_{i-1,i}, \tag{21}$$

gdzie

$$P_{i-1,i} = \left[\begin{array}{c|c} W_{i-1,i} & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$K_{i-1,i} = \left[\begin{array}{c|c} U_{i-1,i} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{22}$$

$b_i = [b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}]^T$ jest macierzą, której elementami są współrzędne bieguna A_i w układzie współrzędnych $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ ogniwa (i-1).
$K_{i-1,i}$ jest macierzą kolineacji układów współrzędnych ogniw pary,
$W_{i-1,i}$ jest macierzą (3 x 3) utworzoną z cosinusów kątów, jakie tworzą układy współrzędnych $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ i (x_i, y_i, z_i) w położeniu początkowych ogniw "i-1" oraz "i", w przypadku układów zorientowanych zgodnie macierz ta jest jednostkowa.
Przedstawiamy następnie iteracyjny sposób redukcji skrętników ogniw mechanizmu, formułując zadanie wyznaczenia położenia i prędkości punktu P ogniwa n-tego, traktowanego jako ogniwo robocze.

1. Załóżmy, że określono skrętnik dla pierwszego ogniwa:

$$S_1 = \omega_{01}(1 + \mu_1 c), \tag{23}$$

gdzie:

$$\omega_{01} = K_{01}\omega_1, \quad \mu_1 = \frac{\omega_{01}^T v_{A_1}}{|\omega_{01}|^2},$$

$$v_{S_1} = \mu_1 \omega_{01}.$$

Równanie linii śrubowej ogniwa: $p_1 = p_1^* = \lambda e_1, e_1 = \frac{\omega_{01}}{|\omega_{01}|}$.
Wyznacza się następnie prędkość bieguna A_2

$$v_{A_2} = v_{S_1} + B_{C_1A_2}\omega_{01} r \tag{24}$$

gdzie:

C_1 jest dowolnym punktem osi p_1,

2. Określamy skrętnik dla następnego ogniwa:

$$S_2 = \omega_{02}(1 + \mu_2 c) = \omega_{02} + c v_{S_2}, \tag{25}$$

gdzie:

$$\omega_{o2} = \omega_{o1} + \omega_2^*, \quad \omega_2^* = K_{o2}\omega_2, \tag{26}$$

Prędkość skrętnika ogniwa wynosi:

$$v_{s_2} = \mu_2 \omega_{o2},$$

$$\mu_2 = \frac{\omega_{o2}^T v_{A_2}}{|\omega_{o2}|^2}.$$

Równanie linii śrubowej ogniwa:

$$p_2 = x_{2o} + \lambda e_2, e_2 = \frac{\omega_{o2}}{|\omega_{o2}|^2}.$$

Zauważmy, że wektor prędkości skrętnika ogniwa 2 można przedstawić w postaci kombinacji liniowej:

$$v_{s_2} = \lambda_1 v_{s_1} + \lambda_2^* v_{s_2}^* = \lambda_1 \mu_1 \omega_{o1} + \lambda_2^* \mu_2^* \omega_2^*, \tag{27}$$

gdzie:

$$v_{s_2}^* = \mu_2^* \omega_2^*, \quad \mu_2^* = \frac{\omega_2^{*T} v_{A_2}}{|\omega_2^*|^2}$$

jest prędkością elementarnego skrętnika ogniwa 2, traktowanego jako ciało swobodne.

Współczynniki kombinacji liniowej wynoszą:

$$\lambda_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \lambda_2^* = \frac{\mu_2}{\mu_2^*}.$$

Zauważmy, że dla pierwszego ogniwa zachodzą związki:

$$\omega_{o1} = \omega_1^*, \quad \mu_1 = \mu_1^*, \quad v_{s_1} = v_{s_1}^*, \quad \lambda_1 = \lambda_1^*.$$

W ten sposób prędkość skrętnika ogniwa 2 jest kombinacją liniową prędkości elementarnych skrętników ogniw 1 i 2.

Również równanie linii śrubowej ogniwa 2 można przedstawić w postaci kombinacji liniowej chwilowych osi obrotu ogniw 1 i 2:

$$p_2 = \beta_1 p_1^* + \beta_2 p_2^*, \tag{28}$$

gdzie:

$$p_1^* = p_1, \quad p_2^* = \lambda e_2^*, \quad e_2^* = \frac{\omega_2^*}{|\omega_2^*|}.$$

Współczynniki β_1 i β_2 wyznacza się ze wzorów:

$$\beta_1 = \frac{|\omega_1^*|}{|\omega_{o2}|}, \quad \beta_2 = \frac{|\omega_2^*|}{|\omega_{o2}|}. \tag{29}$$

3. Dla dowolnego i-tego ogniwa (i > 2) odpowiednie wyrażenia określające jego ruch śrubowy są następujące:

$$S_i = \omega_{oi} + v_{si}\, c = \omega_{oi}(1 + \mu_i c), \tag{30}$$

gdzie:

$$v_{si} = \mu_i \omega_{oi} = \mu_i(\omega_1^* + \omega_2^* + \ldots + \omega_i^*), \tag{31}$$

$$\omega_{oi} = \omega_1^* + \omega_2^* + \ldots + \omega_i^*, \quad \omega_i^* = K_{oi}\omega_i,$$

$$\mu_i = \frac{\omega_{oi}^T v_{A_i}}{|\omega_{oi}|^2}, \quad v_{A_i} = v_{s_{i-1}} + B_{c_{i-1}A_i}\omega_{o,i-1}. \tag{32}$$

Zauważmy, że wektor prędkości skrętnika można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów prędkości elementarnych skrętników ogniw łańcucha:

$$v_{s_i} = \lambda_1^* v_{s_1}^* + \lambda_2^* v_{s_2}^* + \ldots \lambda_i^* v_{s_i}^*, \tag{33}$$

gdzie:

$$\lambda_j^* = \frac{\mu_i}{\mu_j^*}, \quad \mu_j^* = \frac{\omega_j^{*T} v_{A_i}}{|\omega_j^*|^2}, \quad j = 1, 2, \ldots i.$$

Równanie osi śrubowej i-tego ogniwa jest kombinacją liniową chwilowych osi obrotu ogniw łańcucha:

$$p_i = \beta_1 p_1^* + p_2 p_2^* + \dots + \beta_i p_i^* , \tag{34}$$

gdzie:

$$p_j^* = \lambda e_j^*, \quad e_j^* = \frac{\omega_j^*}{|\omega_j^*|}, \quad \beta_j = \frac{\omega_j^*}{|\omega_{oi}^*|} .$$

4. W sposób rekurencyjny określamy skrętnik dla ostatniego ogniwa:

$$S_n = \omega_{on} + v_{s_n} c = \omega_{on}(1 + \mu_n c) , \tag{35}$$

$$v_{s_n} = \mu_n \omega_{on} = \mu_n(\omega_1^* + \omega_2^* + \dots + \omega_n^*) , \tag{36}$$

$$\mu_n = \frac{\omega_{on}^T v_{A_n}}{|\omega_{on}|^2} , \quad v_{A_n} = v_{s_{n-1}} + B_{C_{n-1}A_n} \omega_{o,n-1}$$

oraz równanie linii śrubowej tego ogniwa:

$$p_n = \beta_1 p_1^* + \beta_2 p_2^* + \dots + \beta_n p_n^* . \tag{37}$$

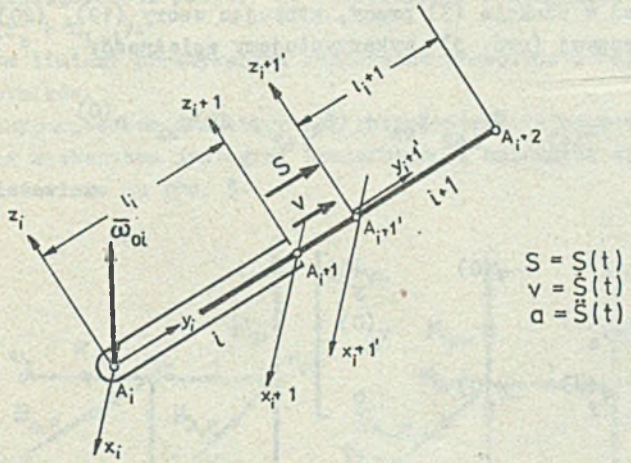
Prędkość punktu P ogniwa wyznaczamy ze wzoru:

$$v_p = v_{s_n} + B_{c_n p} \omega_{on} = (\mu_n E + B_{c_n p})\omega_{on} . \tag{38}$$

Szczególnego omówienia wymaga przypadek pary postępowej, utworzonej np. z ogniw "i" oraz "i+1" (rys. 3).
Przez A_{i+1} oznaczono położenie początkowe ogniwa (i+1), w którym $A'_{i+1} = A_{i+1}$. Wektor $S = \overline{A'_{i+1} A_{i+1}}$ określa przemieszczenie ruchu względnego tego ogniwa.

Załóżmy, że wyznaczono skrętnik dla ogniwa i-tego, wówczas skrętnik ogniwa (i+1) jest następujący

$$S_{i+1} = \omega_{oi} + c\, v_{s_{i+1}}, \tag{39}$$



Rys. 3

gdzie:

$$v_{S_{i+1}} = \mu_{i+1}\,\omega_{oi},\quad \mu_{i+1} = \frac{\omega_{oi}^{T} v_{A_{i+1}}}{|\omega_{oi}|^{2}},$$

$$v_{A_{i+1}} = v_{S_i} + B_{c_i}\,A_{i+1}\,\omega_{oi} + v^{(0)}, \tag{40}$$

$$v^{(0)} = K_{o,i+1}\,v\,.$$

Można udowodnić, że miara μ_{i+1} skrętnika ogniwa z parą postępową wyraża się wzorem:

$$\mu_{i+1} = \mu_i + \mu_{iv}\,, \tag{41}$$

gdzie:

$$\mu_{iv} = (\omega_{oi}^{T}\,v^{(0)})/|\omega_{oi}|^{2}\,.$$

Równanie linii śrubowej ogniwa (i+1) ma postać:

$$p_{i+1} = x_{o,i+1} + \lambda e_{i+1},\quad e_{i+1} = \frac{\omega_{oi}}{|\omega_{oi}|}\,. \tag{42}$$

Zauważmy, że dla pary postępowej linie śrubowe ogniw tej pary są prostymi równoległymi. Przyspieszenia punktów ogniw wyznacza się według metody przedstawionej w punkcie (3) pracy, stosując wzory (19), (20). W przypadku pary postępowej (rys. 3) wykorzystujemy zależność:

$$a_{A_{i+2}} = a_{A_{i+1}} + B_{A_{i+2}} \varepsilon_{oi} + (C_{A_{i+2}} + 2V)\omega_{oi} + a^{(0)}, \tag{43}$$

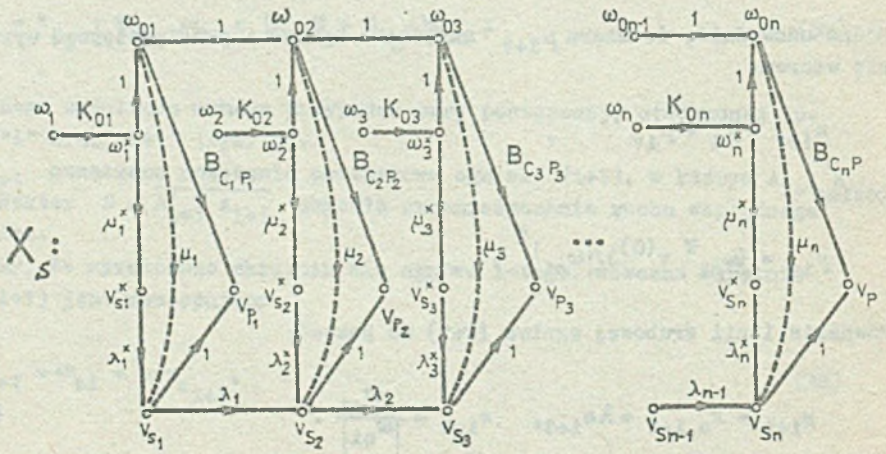
gdzie:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & v_z^{(0)} & -v_y^{(0)} \\ -v_z^{(0)} & 0 & v_x^{(0)} \\ v_y^{(0)} & -v_x^{(0)} & 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

jest macierzą, której elementami są składowe wektora prędkości $v^{(0)}$ ruchu względnego (w układzie nieruchomym).
Ostatni składnik we wzorze (43) określa przyspieszenie ruchu postępowego ogniwa.

5. Graf rekurencyjnej redukcji skrętników

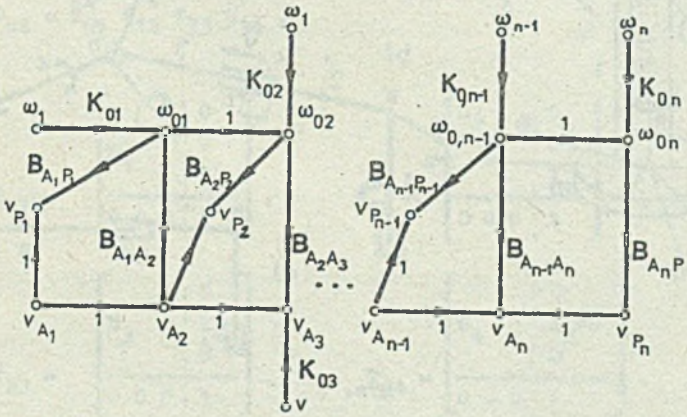
Rekurencyjny algorytm redukcji skrętników otwartego łańcucha kinematycznego można zilustrować za pomocą grafu X_s transformacji zmiennych skrętników (rys. 4). Graf ten reprezentuje ciąg skrętników przyporządkowanych poszczególnym ogniwom, które otrzymuje się przez złożenie elementarnych przekształceń śrubowych ogniw.



Rys. 4

W grafie X_B przez v_{P_i} oznaczono prędkość dowolnego punktu i-tego ogniwa, w szczególności punkty P_i utożsamiamy z biegunami par kinematycznych $(P_i = A_{i+1})$.
W grafie tym liniami przerywanymi zaznaczono krawędzie o wagach równych miarom skrętników.

Równoważnym sposobem geometrycznej interpretacji złożenia ruchów śrubowych ogniw mechanizmu jest graf transformacji zmiennych dla motorów, który przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5

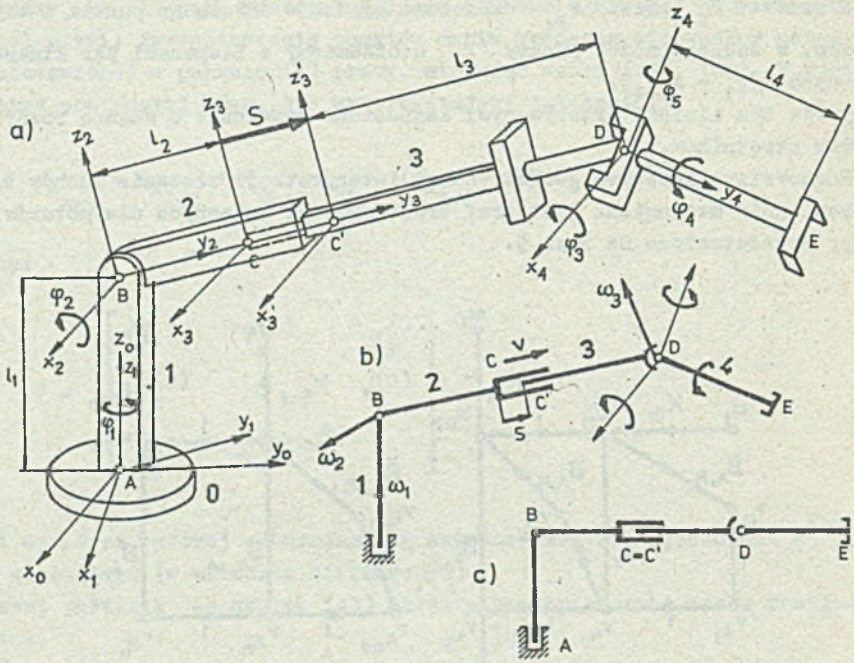
W grafie tym wyodrębniono również wierzchołek v odpowiadający prędkości względnej pary postępowej w biegunie A_3.
Graf motorów posiada znaczenie na etapie wyznaczania skrętników ogniw, w celu określenia prędkości biegunów par kinematycznych.

6. Przykład analizy kinematycznej mechanizmu manipulatora

Mechanizm manipulatora (rys. 6) o ruchliwości sześć ma dwie pary obrotowe klasy piątej, jedną parę postępową klasy piątej i parę sferyczną klasy trzeciej.

Z każdym ogniwem związano lokalny układ współrzędnych. Układ (x_0, y_0, z_0) jest układem nieruchomym przez C' oznaczono początkowe położenie punktu C. Założono jednostajne zmiany parametrów kinematycznych mechanizmu $\varphi_i = \omega_i t$, $i=1,2,3,4,5$, $s = vt$.

Położenie początkowe mechanizmu zaznaczono na rys. 6c. Wektory prędkości kątowych w lokalnych układach współrzędnych posiadają następującą reprezentację macierzową:



Rys. 6

$$\omega_1 = \left[0,0,\omega_1 0\right]^T, \quad \omega_2 = \left[\omega_2,0,0,0\right]^T,$$

$$\omega_3 = \left[\omega_3,\omega_4,\omega_5,0\right]^T \quad \text{oraz} \quad v = \left[0,v,0,0\right]^T.$$

Macierze transformacji obrotowych układów współrzędnych, będące macierzami przejścia par kinematycznych przyjmują następujące postacie:

$$U_1 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 \\ S1 & C1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C2 & -S2 \\ 0 & S2 & C2 \end{bmatrix},$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U_4 = \begin{bmatrix} C4C5 & -S5 & -S4C5 \\ -S3S4 & C3C5 & -C4S3-C3S4S5 \\ C3S4+S3C4S5 & S3C5 & C3C4-S354S5 \end{bmatrix},$$

gdzie:

przez C i S oznaczono funkcję cosinus oraz sinus.

Położenie punktu E w układzie nieruchomym wyznaczymy przez złożenie przekształceń afinicznych

$$r_E^{(0)} = T_{04} \quad r_E ,$$

gdzie:

$$T_{04} = T_{01}\, T_{12}\, T_{23}\, T_{34} ,$$

$$T_{01} = \left[\begin{array}{c|c} U_1 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right], \qquad T_{12} = \left[\begin{array}{c|c} U_2 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$T_{23} = \left[\begin{array}{c|c} U_3 & \begin{matrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right], \qquad T_{34} = \left[\begin{array}{c|c} U_4 & \begin{matrix} 0 \\ l_3+S \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$r_E^{(0)} = \left[x_E^{(0)},\ y_E^{(0)},\ z_E^{(0)},\ 1\right]^T, \qquad r_E = \left[0, l_4, 0, 1\right]^T.$$

Prędkość punktu E wyznaczamy metodą skrętników, określając motory w biegunach par kinematycznych oraz skrętniki poszczególnych ogniw.

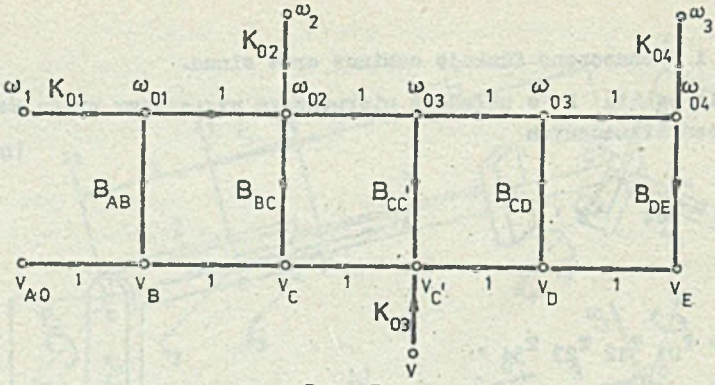
Graf złożenia motorów ilustruje rys. 7, w którym wagi krawędzi oznaczone przez $B_{(.)}$, odpowiadają macierzom położeń biegunów. Postać tej macierzy określa wzór (16). Macierz $K_{c(.)}$ w grafie odpowiada macierzy kolineacji i jest określona wzorem (18). Zauważmy, że macierz ta powstaje z macierzy $T_{(.)}$ przez wyzerowanie ostatniej kolumny z wyjątkiem elementu 1. Redukując graf wyznaczamy prędkości poszczególnych biegunów:

$$v_B = B_{AB}\, T_{01}\, \omega_1, \qquad \omega_{01} = K_{01}\omega_1 ,$$

$$v_{C'} = B_{BC}\omega_{02} + v_B, \qquad \omega_{02} = \omega_{01} + K_{02}\omega_2,$$

$$v_C = v_{C'} + K_{03}v + B_{C'C}\omega_{02}, \qquad \omega_{03}' = \omega_{02},$$

$$v_D = v_C + B_{CD}\omega_{02}, \qquad \omega_{03} = \omega_{02},$$



Rys. 7

oraz prędkość punktu E:

$$v_E = v_D + B_{DE}\omega|_{04}, \qquad \omega_{04} = \omega_{03} + K_{03}\omega_3,$$

Znając prędkości kątowe ω_{0i} oraz prędkości biegunów możemy określić składowe skrętników poszczególnych ogniw:

$$S_1 = \omega_{01} + v_A c = \omega_{01}, \qquad \mu_2 = \frac{\omega_{02}^T v_B}{|\omega_{02}|^2},$$

$$S_2 = \omega_{02}(1 + \mu_2 c), \qquad \mu_3 = \frac{\omega_{02}^T v_c}{|\omega_{02}|^2},$$

$$S_3 = \omega_{02}(1 + \mu_3 c),$$

$$S_4 = \omega_{04}(1 + \mu_4 c), \qquad \mu_4 = \frac{\omega_{04}^T v_D}{|\omega_{04}|^2},$$

oraz równania linii śrubowych:

$$p_2 = x_{20} + \lambda e_2, \qquad e_2 = \frac{\omega_{02}}{|\omega_{02}|},$$

$$p_3 = x_{30} + \lambda e_2, \qquad e_4 = \frac{\omega_{04}}{|\omega_{04}|}.$$

$$p_4 = x_{40} + \lambda e_4,$$

Szczegółowa analiza kinematyczna mechanizmu jest możliwa metodą numeryczną. Przedstawiony przykład modelowania kinematyki mechanizmu manipulatora - robota ma znaczenie poglądowe w zakresie prezentowanej metody analizy.

7. Wnioski

Przedstawiony w pracy rekurencyjny algorytm redukcji skrętników dla otwartych łańcuchów kinematycznych stanowi podstawę do opracowania szczegółowych programów numerycznych.

Przedstawiony sposób modelowania kinematyki mechanizmu manipulatora - wykorzystuje niezmiennicze własności przekształceń śrubowych.

Graf transformacji zmiennych skrętników przedstawia organizację ciągu przekształceń śrubowych, prowadzącego do redukcji ruchów śrubowych kolejnych ogniw mechanizmu. Istnieje potrzeba i możliwość wykorzystania przedstawionej w pracy metody redukcji skrętników w badaniu dynymiki mechanizmów manipulatorów, traktując ogniwa jako ciała nieodkształcalne.

Praca wykonywana jest w ramach CPBP-02.13

LITERATURA

[1] M. STARK: Geometria analityczna. PWN Warszawa 1967.

[2] H. LIPKIN, J. DUFFY: Hybrid Twist and Wrench Control for a Robotic Manipulator. Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. New York 1986.

[3] H. LIPKIN: Geometry and Mappings of Serews with applications to the Hybrid Control of Robotic Manipulators. PWD Dissertation Univ. of Florida 1985.

[4] R. MISES: Andwendungen der Motorrechnung Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. Berlin 1924.

[5] F. DIMENTBERG: Metod wintow w prikładnoj mechanike. Maszinostrojenije, Moskwa 1971.

[6] F. DIMENTBERG: Teoria prostranstwennych szarnirnych mechanizmów. Nauka, Moskwa 1982.

[7] B. JANEK, A. MEDWEC: Kinematicke funkcie nadenia robota pri wseobecnom a wiazanom polokowaneho objektu po pristorowej kriwke. Strojnicky casopis. Veda, Slowensko Akademie Vied, c. 3 1986 (321-331).

[8] B. PAWŁOW: Algoritmizacja reszenia zadacz kinematyki prostranstwennych mechanizmów. Issledowanie dinamiczeskich sistiem na EWM Moskwa, Nauka 1982.

[9] J. DENOWIT, R. HARTENBERG: A kinematic notation for lower-pair mechanism based an matrices. ASME Journal of Applied Mechanics, 1981.

[10] Kinematika, dinamika i tocznost mechanizmow. Sprawocznik pod redakciej 6. Krejnina. Moskwa Maszinostrojenie 1984.

DODATEK

D.1. Podstawowe pojęcia i własności geometrii rzutowej

Geometria rzutowa bada własności figur, które nie nie zmieniają przy operacjach rzutowania. Wprowadza się przestrzeń rzutową, w której każda prosta przecina płaszczyznę, w szczególności prosta równoległa do niej przecina płaszczyznę w punkcie ∞.

Punkt X przestrzeni rzutowej jest określony czwórką współrzędnych $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, przy czym przyjmujemy $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = 1$, gdzie x, y, z są współrzędnymi punktu w przestrzeni euklidesowej.

Płaszczyzna jest określana zbiorem liczb $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, punkt X należy do płaszczyzny, gdy

$$U^T X = u_1 x_1 u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0 \quad . \tag{D.1}$$

Wektorem w przestrzeni rzutowej o metryce euklidesowej jest zbiór liczb $r = [r_1, r_2, r_3, 0]^T$.

Rzutem wektora y na wektor x nazywamy wektor $y' = \mu x$, gdzie

$$\mu = \frac{x^T y}{|x|^2} ,$$

Określimy następnie przekształcenia rzutowe w przestrzeni RP^3 a zwłaszcza kolineację, translację i przekształcenie afiniczne. Niech X będzie punktem w przestrzeni rzutowej RP^3.

Def. 1. Kolineacją nazywamy przekształcenie $RP^3 \to RP^3$ określone następująco:

$$x' = Kx , \tag{D.2}$$

gdzie

K jest macierzą przekształcenia o postaci:

$$K = \left[\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] , \tag{D.3}$$

gdzie

U jest macierzą obrotu, której elementami są cosinusy kątów pomiędzy osiami układów współrzędnych.

Zauważmy, że zachodzi $|K| = \det K = 1$.

Odpowiednikiem kolineacji w przestrzeni euklidesowej jest obrót układu współrzędnych.

Def. 2. Translacja nazywamy przekształcenie:

$$X' = X + b \,, \tag{D.4}$$

gdzie

$b = [b_1, b_2, b_3, 0]^T$ jest wektorem przesunięcia równoległego.

Def. 3. Przekształceniem afinicznym nazywamy złożenie kolineacji i translacji:

$$X' = Ux + b = Tx \,, \tag{D.5}$$

gdzie

T jest macierzą przekształcenia o postaci:

$$T = \left[\begin{array}{c|c} U & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] . \tag{D.6}$$

Zauważmy, że macierze T oraz K są wymiaru (4 x 4).

Przekształcenia rzutowe tworzą grupę przekształceń, która w myśl programu Kleina określa geometrię rzutową.

Metryczne własności geometrii rzutowej można określić rozpatrując następującą formę biliniową [2, 3] :

$$X^T \sigma_\varepsilon Y = 0 \,, \tag{D.7}$$

gdzie

$$\sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon I_3 \end{bmatrix} .$$

Zależność (D.7) określa ortogonalność dwóch punktów.
Parametr ε występujący w macierzy σ_ε może przyjmować wartości $\varepsilon = 1, 0, -1$. Określają one odpowiednio przestrzeń rzutową o metryce eliptycznej, euklidesowej i hiberbolicznej.

W naszych rozważaniach przyjmujemy, że przestrzeń ta posiada metrykę euklidesową, przyjmując $\varepsilon = 0$.

W przypadku kolineacji forma (D.7) przyjmuje postać:

$$x^T \sigma_\varepsilon x'' = x^T(\sigma_\varepsilon T)x = x'^T(T^T \sigma_\varepsilon T)x \tag{D.8}$$

skąd otrzymujemy, że

$$\sigma_\varepsilon = T^T \sigma_\varepsilon T. \tag{D.9}$$

Kolineacja jest zatem niezmiennikiem własności metrycznych przestrzeni rzutowej.

Równanie prostej w przestrzeni rzutowej przechodzącej przez punkt x i równoległej do wektora b ma postać:

$$p = x + \lambda e \quad , \tag{D.10}$$

gdzie:

$e = \frac{b}{|b|}$ jest wersorem prostej.

Szersze omówienia własności przestrzeni rzutowej można znaleźć w pracy [1].

ГРАФ ВИНТОВ В КИНЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ МАНИПУЛЯТОРОВ РОБОТОВ

Р е з ю м е

Очень полезным в кинематическом анализе механизмов манипуляторов является применение методов проективной геометрии. Этими методами можно просто определить движение эвклидового пространства по сравнению с общими координатами. Определив превращение винтов в проективном пространстве, представлен способ определения скорости и ускорения произвольной точки звена, а также метод кинематического анализа манипулятора при использовании алгебры винтов. Итерационный алгоритм редукций винтов иллюстрируется графом трансформации переменных. Метод винтов представлен на примере механизма манипулятора с шестью степенями подвижности. Основные понятия и свойства проективной геометрии представлены в дополнительных сведениях.

THE GRAPH OF WRENCHES IN THE KINEMATICAL ANALYSIS
OF THE ROBOTIC MANIPULATORS

S u m m a r y

It is useful to apply the projective geometry in the Kinematical analysis of the robotic manipulators. This way enables description of the motion of Euclidean space than using the general coordinates. Defining the transformation of momentary twists (screws) in the projective space the way determining velocity and accelaration of optional point link has been formulated. Using the method of wrenchs a procedure of kinematical analysis of manipulators was presented. The successive steps of iterative reduction of wrenches can be shown in the terms of variables transformation graph. The method of wrenches illustrated an example of robotic manipulator with six degrees of mobility. The fundamental notions and properties of projective geometry are presented in the annex.

Recenzent: Doc. dr inż. Roman Klus

Wpłynęło do redakcji 22.I.1987 r.