

Виктор Кипчарокий  
Мариупольский металлургический институт

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

**Резюме.** В докладе описана методика математического моделирования движения плоского сечения сыпучего материала. При помощи программы, составленной по изложенной в докладе методике, исследовано поведение сыпучей среды при различных режимах движения камер

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Для моделирования динамики сыпучих материалов наиболее распространены такие методы, как:

- Метод сплошной среды. По этой гипотезе сыпучий материал уподобляется деформируемому твердому телу, и для его описания используется математический аппарат теории упругости или пластичности в зависимости от постановки задачи.

- Метод конечных элементов. Применяется для исследования напряженного состояния и перемещений в объеме сыпучего материала. Использование метода позволяет учитывать изменение свойств сыпучих материалов в результате действия внешней нагрузки.

- Гипотеза вязкой жидкости. Движение сыпучего материала в разрыхленном состоянии (расстояние между частицами материала больше размеров частиц) аналогично движению вязкой жидкости и может быть описано уравнениями гидравлики.

- Исследование движения единичной частицы. Движение частицы сыпучего материала описывается уравнениями классической механики.

- Метод частиц. Для описания поведения сыпучего материала используется аппарат молекулярной динамики. Частицы сыпучего материала представляются в виде сфер из упругого материала. Рассматриваются мгновенные парные взаимодействия частиц.

Методы сплошной среды, конечных элементов и вязкой жидкости предназначены для решения специфических задач.

## 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЧАСТИЦ

В методе частиц исследуется движение каждой из  $n$  частиц сыпучего материала под действием внешних сил: гравитационных; сил контактного взаимодействия с другими телами; сопротивления окружающей среды (газа, жидкости); электрического, магнитного и др.

В большинстве случаев из гравитационных сил достаточно учитывать силу тяжести  $P$  :

$$\vec{P}_{gi} = m_i \cdot \vec{g}_i. \quad (1)$$

Величина силы  $P_{kij}$ , действующей на тело  $i$  при его соприкосновении с телом  $j$  зависит от сближения тел  $\delta_{ij}$ , формы  $L_{kij}$ , размеров  $R_{kij}$  и свойств материалов  $S_{kij}$  контактирующих поверхностей тел:

$$\vec{P}_{kij} = \vec{F}_1(\delta_{ij}, L_{kij}, R_{kij}, S_{kij}). \quad (2)$$

Сближение тел определяется их координатами.

Сила сопротивления среды движению тела  $i$  зависит от его скорости относительно среды  $V_{2i}$ , формы  $L_{2i}$  и диссипативных свойств среды  $S_{2i}$  :

$$\vec{P}_{2i} = \vec{F}_2(V_{2i}, L_{2i}, S_{2i}). \quad (3)$$

На силу электростатического взаимодействия тел  $j$  и  $i$  влияют сближение тел  $\delta_{ij}$ , диэлектрические свойства среды  $S_\sigma$  и заряды тел соответственно  $q_i$  и  $q_j$  :

$$\vec{P}_{\sigma ij} = \vec{F}_3(\delta_{ij}, S_\sigma, q_i, q_j). \quad (4)$$

Аналогично можно определить силы других взаимодействий тел, например магнитного  $\vec{P}_{mij}$  и т.д.

Найдя все действующие на  $i$ -тое тело силы, составим уравнение его движения с учетом инерционной силы  $\vec{F}_{ui}$  :

$$\vec{F}_{ui} + \vec{P}_{gi} + \vec{P}_{si} + \sum_{i=1}^n (\vec{P}_{kij} + \vec{P}_{\sigma ij} + \vec{P}_{mij}) + \dots = 0, \quad (5)$$

(j ≠ i)

$$\vec{F}_{ui} = m_i \cdot \vec{a}_i. \quad (6)$$

где  $m_i$ ,  $\vec{a}_i$  — соответственно масса и ускорение  $i$ -того тела.

Подобным образом можно составить уравнения движения всех частиц сыпучего материала. Система уравнений вида (5) описывает движение сыпучего материала на уровне его частиц. Решение системы позволяет определить положение и скорости каждой из частиц в любой момент времени.

Этот способ моделирования процессов, происходящих с ослучеи материалами является наиболее точным, однако его применение ограничено трудоемкостью, пропорциональной числу рассматриваемых частиц, их формой и т.п. Трудоемкость способа можно снизить, представив частицы ослучеи материала в виде шаров; в некоторых ослучаях задачу о движении ослучеи материала можно существенно упростить, оведя ее к двумерной (плоской).

2.1. Учет сил контактного взаимодействия частиц

Задача состоит в том, чтобы определить величину оближения тел, направление нормали к поверхностям тел в точке контакта, а также величину и направление нормальной и касательной составляющих относительной скорости оударяемых тел. Зависимости для определения перечисленных параметров удара приведены в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

Параметры, характеризующие оударение круглой частицы о поверхностями различных типов

Параметр и его обозначение	Тип поверхности		
	Плоская	Вогнутая	Выпуклая
Оближение тел $\delta_{ij}$	$y_i - (y_o - (x_i - r_i \cdot \text{tg}\alpha) \cdot \text{tg}\alpha - r_i)$	$r_o - r_i - [(r_o - x_i)^2 + (r_o - y_i)^2]^{1/2}$	$[(y_i - y_o)^2 + (x_i - x_o)^2]^{1/2} - r_i - r_o$
Угол нормали $\alpha$	Перпендикулярен плоскости	$\arctg \frac{r_o - x_i}{r_o - y_i}$	$\arctg \frac{x_o - x_i}{y_o - y_i}$
Относит. нормальная скорость $v_n$	$\Delta v_y \cdot \cos\alpha - \Delta v_x \cdot \sin\alpha$	$\Delta v_y \cdot \cos\alpha - \Delta v_x \cdot \sin\alpha$	$\Delta v_y \cdot \cos\alpha - \Delta v_x \cdot \sin\alpha$
Относит. касательная скорость $v_t$	$\Delta v_y \cdot \sin\alpha - \Delta v_x \cdot \cos\alpha - \omega_i \cdot r_i$	$\Delta v_y \cdot \cos\alpha - \Delta v_x \cdot \sin\alpha - \omega_o \cdot r_o - \omega_i \cdot r_i$	$\Delta v_y \cdot \cos\alpha - \Delta v_x \cdot \sin\alpha - \omega_o \cdot r_o + \omega_i \cdot r_i$

Герц установил между контактной силой и суммарной деформацией тел (оближением) зависимость в виде:

$$\delta = k \cdot P^{2/3}, \tag{7}$$

где P — контактная сила;

k — коэффициент, учитывающий форму и овойства оударяемых тел в зоне контакта.

При моделировании ударных процессов удобнее пользоваться обратной зависимостью:

$$P = N_\delta \cdot \delta^{3/2}, \tag{8}$$

$$N_\delta = 1/k^{3/2}. \tag{9}$$

В случае контакта двух сфер ( $B/A=1$ ) можно пользоваться упрощенной методикой:

$$N_0 = \left[ \frac{1.7776}{1/R_1 + 1/R_2} \right]^{1/2} \cdot \frac{1}{\eta}, \quad (10)$$

а для контакта сферы с плоскостью ( $B/A=0$ ):

$$N = 1.3333 \cdot \frac{R^{1/2}}{\eta}, \quad (11)$$

$$\eta = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} \cdot \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}, \quad (12)$$

где  $\mu_1^2, \mu_2^2$  - коэффициент Пуассона материалов тел ;  
 $E_1, E_2$  - модули упругости, Па .

По описанной методике составлена программа BARRING, эмулирующая на экране персонального компьютера движение шаров в цилиндрической камере, совершающей вращательное и/или колебательное движение. При помощи результатов численного моделирования исследовалось движение рабочей загрузки в камере установки роторного типа для отделочно-зачистной обработки.

#### MODELOWANIE DYNAMIKI MATERIAŁU SYPKIEGO

##### Streszczenie

W referacie opisano metodykę matematycznego modelowania ruchu przekroju poprzecznego materiału sypkiego. Za pomocą programu zbudowanego według przedstawionej w referacie metodyki badano zachowywanie się materiałów sypkich przy różnych warunkach ruchu komory.

#### MODELLING OF THE LOOSE MATERIAL DYNAMICS

##### Summary

In the paper the mathematical modelling methodology of loose material cross-section movement has been presented. With the assistance of the programme created on the base of the methodology presented in the paper the behaviour of loose materials in the different conditions of chamber movement has been tested.