ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: MECHANIKA z.103 Nr kol. 1112

Maciej Kulisiewicz, Stanisław Piesiak, Mieczysław Szata

Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej
Politechnika Wrocławska

OKREŚLENIE ODPOWIEDZI UKŁADU DYNAMICZNEGO PRZY WYKORZYSTANIU FORMUŁY ANALITYCZNEJ

Streszczenie. Przedstawiono formułę analityczną umożliwiającą wyznaczenie odpowiedzi układu dynamicznego na dowolne wymuszenie. Metoda wykorzystuje współrzędne fazowe i równania charakterystyczne z jego pierwiastkami.

1. WSTĘP

W pracy przedstawiono formułę analityczną umożliwiającą wyznaczenie odpowiedzi układu dynamicznego na dowolne wymuszenie p(t). Stosowanie metody nie wymaga znajomości techniki operatorowej ani wstępnej analizy przypadków drgań swobodnych i harmonicznych. Odwrotnie, przypadki te dają się prosto wyprowadzić na podstawie przedstawionej formuły.

2. ODPOWIEDZ UKŁADU DLA DOWOLNYCH WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH

Rozważania prowadzące do określenia formuły analitycznej wyprowadzono dla klasy układów dynamicznych dających się opisać równaniem różniczkowym liniowym drugiego rzędu postaci:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = p(t). \tag{1}$$

Wyprowadzenie formuły analitycznej zaczniemy dla przypadku, gdy $p(t)=0$, wówczas równanie (1) można zapisać w postaci:

$$\ddot{x} + \eta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{2}$$

Wprowadzając współrzędne fazowe [1,3] równanie (1) możemy zapisać:

$$\dot{x}_1=x_2, \quad \dot{x}_2=-\omega_0^2 x_1-\eta x_2 , \quad \text{gdzie:} \quad x_1=x, \quad x_2=\dot{x}, \ \eta=k/m > 0, \ \omega_0^2=c/m > 0. \tag{3}$$

W przypadku gdy $\eta=0$, z równania (3) można wyrugować czas i otrzymać rozwiązanie równań w postaci $x_2(x_1)$. Dla $\eta\neq0$ wprowadzimy nowe zmienne u_1, u_2:

$$u_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2 , \qquad u_2=b_{21}x_1+b_{22}x_2 . \tag{4}$$

które pozwolą rozseparować układ (3) do postaci:

$$\dot{u}_1=a_1u_1,\quad \dot{u}_2=a_2u_2, \tag{5}$$

gdzie a_1, a_2 mogą być dowolnymi stałymi niekoniecznie rzeczywistymi. W celu wyznaczenia stałych $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ należy wstawić transformację (4) do (5) i zauważyć, że muszą być spełnione warunki na te stałe, tj.

$$a_1b_{11}+\omega_0^2b_{12}=0,\quad -b_{11}+(a_1+\eta)b_{12}=0, \tag{6'}$$

$$a_2b_{21}+\omega_0^2b_{22}=0,\quad -b_{21}+(a_2+\eta)b_{22}=0. \tag{6''}$$

Dla dowolnych stałych a_1, a_2, dla których

$$\begin{vmatrix} a_1, & \omega_0^2 \\ -1, & a_1+\eta \end{vmatrix} \neq 0,\quad \begin{vmatrix} a_2, & \omega_0^2 \\ -1, & a_2+\eta \end{vmatrix} \neq 0, \tag{7}$$

jedynym rozwiązaniem jest rozwiązanie $b_{ij}=0$, $(i,j=1,2)$. Rozwiązanie różne od zera otrzymamy jedynie dla wybranych wartości $a_1=\lambda_1$ $a_2=\lambda_2$ takich, dla których

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \omega_0^2 \\ -1 & ,\lambda_1+\eta \end{vmatrix} = 0,\quad \begin{vmatrix} \lambda_2, & \omega_0^2 \\ -1 & ,\lambda_2+\eta \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Dla wartości $a_1=\lambda_1, a_2=\lambda_2$ spełniających warunki (8) układy równań (6) stają się układami równań zależnych. Istnieje wtedy nieskończenie wiele rozwiązań układu (6') i (6''). Warunki (8) można zapisać w postaci jednego warunku, tzw. równania charakterystycznego

$$\lambda^2+\eta\,\lambda+\omega_0^2=0, \tag{9}$$

którego pierwiastki są równe λ_1, λ_2.

Powyższy rezultat umożliwia następującą ogólnie znaną konstrukcję rozwiązania równania (2):

- wyznaczenie pierwiastków λ_1, λ_2 równania (9),
- rozwinięcie układu (5) dla $a_1=\lambda_1, a_2=\lambda_2$ przez zwykły rozdział zmiennych, tj. $\frac{du_i}{dt}=\lambda_iu_i \longrightarrow \frac{du_i}{u}=\lambda_idt \longrightarrow \ln u_i=\lambda_it+C_i \longrightarrow u_i=C_ie^{\lambda_it}$,
- podstawienie rozwiązań u_i do układu (4), którego rozwiązanie daje funkcje $x_1(t), x_2(t)$. W szczególności dla $x_1(t)=x(t)$ otrzymamy znaną postać

$$x(t)=x_1(t)=d_1e^{\lambda_1t}+d_2e^{\lambda_2t}, \tag{10}$$

gdzie stałe d_1, d_2 zależeć będą od warunków początkowych $x(0), \dot{x}(0)$.

3. ROZWIĄZANIE DLA DOWOLNEGO WYMUSZENIA p(t)

W przypadku równania (1) wprowadzenie współrzędnych fazowych daje

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\omega_0^2x_1-\eta x_2+\hat{p}(t),\qquad \hat{p}(t)=p(t)/m. \tag{11}$$

Zastosujemy transformację B postaci (4) do układu (11) zaznaczając, że współczynniki b_{ij} tej transformacji spełniają warunki (6) dla $a_1=\lambda_1, a_2=\lambda_2$:

$$\lambda_1 b_{11} + \omega_0^2 b_{12} = 0,$$
$$-b_{11} + (\lambda_1 + \eta) b_{22} = 0. \tag{13}$$
$$\lambda_2 b_{21} + \omega_0^2 b_{12} = 0,$$
$$-b_{21} + (\lambda_2 + \eta) b_{22} = 0. \tag{14}$$

Podstawiając równanie (11) do zróżniczkowanych związków (4) i uwzględniając zależności (13) i (14) ostatecznie otrzymujemy:

$$\dot{u}_1 = \lambda_1 (b_{11} x_1 + b_{12} x_2) + b_{12} \hat{p},$$
$$\dot{u}_2 = \lambda_2 (b_{21} x_1 + b_{22} x_2) + b_{22} \hat{p}. \tag{15}$$

Uwzględniając równanie (4) zależność (15) wyrazimy w postaci:

$$\dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 + b_{12} \hat{p},$$
$$\dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 + b_{22} \hat{p}. \tag{16}$$

Układ równań (16) jest układem dwu równań rozseparowanych pierwszego rzędu o jednakowej postaci. Rozwiązanie równań (16) łatwo otrzymać np. znaną metodą wariacji stałych [2,3]. Stosując tę metodę dla równań (16) otrzymujemy:

$$u_i(t) = \hat{C}_i e^{\lambda_i t} + b_{i2} \left[\int \hat{p} e^{-\lambda_i t} dt \right] e^{\lambda_i t}, \tag{17}$$

gdzie C_i oznacza pewną stałą całkowania ($i=1,2$). Rozwiązanie $x(t)$ równania (1) uzyskamy na podstawie transformacji D odwrotnej do transformacji B. Wprowadźmy więc oznaczenia:

$$D = B^{-1}, \tag{18}$$

gdzie B oznacza macierz współczynników transformacji (4):

$$B = \begin{bmatrix} b_{11}, b_{12} \\ b_{21}, b_{22} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Stosując zapis macierzowy, transformację tę możemy zapisać w postaci:

$$\bar{u} = B\bar{x}, \tag{20}$$

gdzie $\bar{u}, \bar{x}$ oznaczono wektory kolumnowe:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Mnożąc lewostronnie równanie (20) przez macierz $D=B^{-1}$ otrzymamy

$$\bar{x} = D\bar{u} = \begin{bmatrix} d_{11} u_1 + d_{12} u_2 \\ d_{21} u_1 + d_{22} u_2 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

skąd po uwzględnieniu postaci (17) mamy

$$x = x_1 = d_{11} u_1 + d_{12} u_2 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + g_1 e^{\lambda_1 t} \int \hat{p} e^{-\lambda t} dt + g_2 e^{\lambda_2 t} \int \hat{p} e^{-\lambda_2 t} dt, \tag{23}$$

gdzie stałe C_1, C_2, g_1, g_2, są równe

$$C_1 = \hat{C}_1 d_{11}, \quad g_1 = b_{12} d_{11} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$C_2 = \hat{C}_2 d_{12}, \quad g_2 = b_{22} d_{12} = \frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{24}$$

Podstawiając stałe g_1, g_2, postaci (24) do (23) otrzymujemy ostatecznie

$$(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[e^{\lambda_1 t}\int p(t) e^{-\lambda_1 t} dt - e^{\lambda_2 t}\int p(t) e^{-\lambda_1 t} dt\right]. \tag{25}$$

Otrzymany związek (25) może być traktowany jako wygodna formuła otrzymywania odpowiedzi $x(t)$ układu dynamicznego postaci (1) na dowolne wymuszenie $p(t)$ dla dowolnych warunków początkowych $x(t)$, $\dot{x}(t)$. Występujące w nim stałe, λ_1, λ_2, są pierwiastkami charakterystycznymi równania (1). Stałe C_1, C_2 zależą od warunków początkowych $x(0), \dot{x}(0)$.

LITERATURA

[1] Bishop R.E.D., Gladwell G.M.L., Michgelson S.: Macierzowa analiza drgań. WNT, Warszawa 1972.

[2] Gutowski R.: Równania różniczkowe zwyczajne. WNT, Warszawa 1971.

[3] Kaliski S., Dżygadło Z., Włodarczyk E.: Drgania i fale. PWN, Warszawa 1975.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОТВЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЛЯ ЛЮБОГО ВЫНУЖДЕНИЯ

Р е з ю м е

Представлено метод использующий фазовые координаты и характеристические уравниения. Процедура применима в системах с одним степенем свободы.

AN ANALYTICAL FORMULA FOR THE DETERMINATION OF DYNAMIC SYSTEMS RESPONSE FOR ANY KIND OF EXCITATION

S u m m a r y

An analytical formula for the determination of a dynamic system response for any kind of excitation was presented. Solution for the one degree of freedom models was considered. The method use characteristic equation with its roots.