ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: MECHANIKA z.103 Nr kol. 1112

Валерия Пилипчук
Химико-технологический институт
Днепропетровск

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ В КАЧЕСТВЕ ПОРОЖДАЮЩИХ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Резюме. Предлагается аналитический метод исследования дифференциальных уравнений теории колебания и волн. Соответствующие алгоритмы особенно эффективны в случаях, наименее благоприятных для квазилинейного (квазигармонического) анализа, и дополняют его со стороны сильных нелинейностей. Рассматриваются периодические процессы и процессы с одной быстрой фазой. Обсуждается возможность обобщения на случай нескольких быстрых фаз.

1. В основе метода лежит представление искомой функции в виде [1,2]:

$$x = X(\tau) + Y(\tau)\tau'; \quad \tau = \tau(t/a), \quad a = \text{const} \tag{1}$$

в случае периодических процессов;

$$x = X(\tau,t) + Y(\tau,t)\tau'; \quad \tau = \tau(\varphi), \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{a(t)} \tag{2}$$

для процессов с одной быстрой фазой;

$$u = U(\tau,x,t) + V(\tau,x,t)\tau'; \quad \tau = \tau(\theta), \quad \theta = \theta(x,t) \tag{3}$$

при изучении модулированных волн, где $\tau = \tau(t)$ – состоящая из кусков прямых пилообразная кусочно-гладкая функция с единичной амплитудой и периодом, равным четырем; τ' – ее производная, с точностью до значений на множестве нулевой меры удовлетворяющая соотношениям $\tau'^2 = 1$, $\tau'^3 = \tau'$. .. Идея таких преобразований следует из легко проверяемого утверждения о возможности представления любой 4а – периодической функции в виде (1), где X и Y некоторым простым образом связаны с x. В непериодическом случае – это элементарное тождество вида

$$x(t) = \frac{1}{2}(x(|t|) + x(-|t|)) + \frac{1}{2}(x(|t|) - x(-|t|))|t|'$$

В частном случае симметричной относительно четверти периода (t=a) функции имеем $Y \equiv 0$ и $x(t) \equiv x(a\tau(\frac{t}{a}))$. Это отвечает "переносу" свойства периодичности функции на ее аргумент – τ – "осциллирующее время"

Ограниченноцть новой временной переменной ($|\tau| \le 1$) позволяет после соответствующего преобразования уравнений существенно упростить процедуры их решения. Например, отпадает необходимость соблюдения традиционного условия исключения секулярных членов; приобретают смысл степенные по "осциллирующему времени" ряды, более простые в преобразованиях и вычислениях, чем тригонометрические; порождающие уравнения могут быть выбраны в наиболее простом виде, содержащем лишь старшие производные, с последующим использованием хорошо изученных процедур последовательных приближений, допускающих автоматизацию преобразований на ЭВМ.

2. Относительно выражения (1) – (3) существенны два обстоятельства. Во-первых, правую часть выражении удобно рассматрвать как "комплексную" величину с "действительной" X и "мнимой" Y частями. Соответствующая алгебра (алгебра гиперболических чисел) проще алгебры обычных комплексных чисел (элемент τ' порождает циклическую группу меньшей размерности). Во-вторых, при дифференцировании правой части по t возникают периодические сингулярные функции τ''. Для включения искомого решения в требуемый класс гладкости такие сингулярные функции уничтожаются при соответствующих условиях на X, Y. При построении решения эти условия, подобно условиям исключения секулярных членов в квазилинейной теории, позволяют установить амплитудно – частотные зависимости либо уравнения для медленных составляющих.

П р и м е р:

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x}) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} X'' + a^2R = 0, & X'\big|_{\tau = \pm 1} = 0 \\ Y'' + a^2I = 0, & Y\big|_{\tau = \pm 1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} R \\ I \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}[f(X + Y, \frac{1}{a}(Y' + X')) \pm f(X - Y, \frac{1}{a}(Y' - X'))]$$

(Преобразование (2) формально дает систему уравнении в частных производных). Данная "комплексификация" уравнения отвечает разделению периодического процесса на симметричную и кососимметричную относктельно четвертьпериода ($t = a$) составляющие. Во многих случаях кососимметричная составляющая заведомо отсутствует (например, колебания консервативной системы), тогда остается одно уравнение относительно X с соответствующим условием.

П р и м е р:

$$\ddot{x} + x^l + x^m = 0; \quad (l = 2n - 1, \quad m = 2k - 1)$$

Построив итерационный процесс по схеме

$$x = A\tau + X_1(\tau) + X_2(\tau) + \ldots \equiv X(\tau); \quad Y \equiv 0;$$

$$a^2 = h_o/(1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots), \quad A = \text{const}.$$

Найдем:

$$X_1 \equiv - h_o [A^l \frac{\tau^{l+2}}{(l+1)(l+2)} + A^m \frac{\tau^{m+2}}{(m+1)(m+2)}] \ldots ;$$

$$h_o = \left(\frac{A^{l-1}}{l+1} + \frac{A^{m-1}}{m+1}\right)^{-1},$$

$$\lambda_1 = h_o^2 \left\{ \frac{lA^{2l-2}}{2(l+1)^2(l+2)} + \frac{1}{(m+l+2)} \times \left[\frac{m}{(l+1)(l+2)} + \frac{l}{(m+1)(m+2)}\right] A^{m+l-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{mA^{2m-2}}{2(m+1)^2(m+2)} \right\} \ldots .$$

Подобные ряды тем эффективнее, чем выше степень нелинейности. При наличии медленноя по сравнению с темпом осцилляций составляющей преобразования (2),(3) реализуют, по сути дела, идею осреднения. Для двух быстрых фаз структура преобразования в общем случае оказывается более сложной:

$$x = X + Y\tau_1' + Z\tau_2' + W\tau_1'\tau_2'; \quad \tau_i = \tau(t/a); \quad i = 1,2$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пилипчук В.Н. О преобразовании колебательных систем при помощи пары негладких периодических функций. - Докл.АН УССР. Сер.А.- 1988.- No4- с.37-40.

[2] Маневич Л.И.,Михлин Ю.В.,Пилипчук В.Н. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем.- М.: Наука,1989, 216с.

O WYKORZYSTANIU WIBROUDAROWYCH UKŁADÓW PRZY BADANIU DRGAŃ NIELINIOWYCH

S t r e s z c z e n i e

Proponuje się analityczną metodę badania różniczkowych równań teorii drgań i fal. Odpowiednie algorytmy są szczególnie efektywne w przypadkach najmniej korzystnych dla quasi-liniowej (quasi-harmonicznej) analizy i uzupełniają ją w przypadku silnej nieliniowości. Rozpatruje się okresowe

procesy z jedną szybką fazą. Rozważa się możliwość uogólnienia dla przypadku kilku szybkich faz

ABOUT MAKING USE OF VIBROPERCUSSIVE SYSTEMS IN EXAMINING NONLINEARY VIBRATORY PROCESSES

S u m m a r y

Analitical method of testing differential equations, theory of vibrations and waves has been suggested. Adequate algorithms are especially effective in cases which are the least favorable for quasilineary (quasiharmonic) analysis and they complement this analysis as for as strong nonlinearities are concerned. Perodic processes and processes with one fast phase are being examined. Possibility of generalization for a case with a few fast phases is being considered.