

Adam Siemiński

Katedra Biomechaniki

Akademia Wychowania Fizycznego we Wrocławiu

MODELOWANIE WSPÓLDZIAŁANIA MIĘŚNI - NOWA KLASA KRYTERIÓW  
OPTYMALIZACYJNYCH

Streszczenie. W pracy wykazano, że przewidywania stosowanych obecnie do modelowania współdziałania mięśni kryteriów optymalizacyjnych opartych na potęgowych wskaźnikach jakości są nie do pogodzenia z własnościami rzeczywistych napędów mięśniowych. Sformułowano warunki zgodności oraz zdefiniowano odpowiadającą im klasę wskaźników jakości prowadzących do efektu łagodnego nasycenia.

1. PRZEWIDYWANIA KRYTERIÓW OPTYMALIZACYJNYCH OPARTYCH NA POTĘGOWYCH  
WSKAŹNIKACH JAKOŚCI

Biomechanizmy kończyn kręgowców charakteryzują się znacznym nadmiarem liczby mięśni w stosunku do minimum zapewniającego niezależny napęd wszystkich stopni swobody. Sprawia to, że w celu określenia sił rozwijanych przez poszczególne mięśnie na podstawie momentów siły w stawach konieczne jest przyjęcie pewnej zasady zapewniającej jednoznaczność rozwiązania. Zasada ta przyjmuje najczęściej postać kryterium optymalizacyjnego zbudowanego na bazie wskaźnika jakości o postaci

$$J = \sum_{i=1}^N x_i^n \quad (1)$$

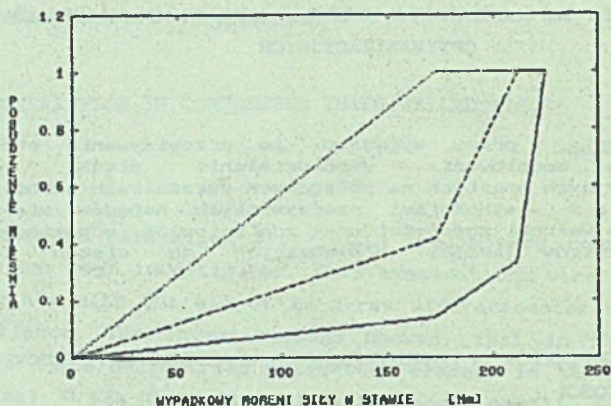
gdzie: N - liczba mięśni.

$x_i$  - pewna miara aktywności i-tego mięśnia (najczęściej rozwijana siła, naprężenie bądź stosunek rozwijanej siły do siły maksymalnej, czyli pobudzenie mięśnia).

Zagadnienie określenia udziałów mięśni za pomocą takiego kryterium polega na minimalizacji (1) przy warunku realizacji przez mięśnie danych

momentów siły w stawach.

Rysunek 1 przedstawia wynik symulacji współdziałania trzech mięśni obsługujących staw o jednym stopniu swobody. Użyto kwadratowego wskaźnika jakości ( $n=2$  w (1)). a  $x_i$  interpretowano jako pobudzenie  $i$ -tego mięśnia mogące przyjmować wartości z przedziału  $[0, 1]$ . Rozpatrywane kryterium, również dla innych wartości wykładnika, przewiduje dla pewnego przedziału wartości wypadkowego momentu współpracę pewnych mięśni rozwijających swoją maksymalną siłę z innymi, które mają jeszcze możliwość zwiększania swojego naprężenia [1].



Rys. 1. Przewidywania kryteriów potęgowych

Fig. 1. Power criterion prediction

Aby zrozumieć, jak bardzo nienaturalny jest ten rodzaj współdziałania dla realnych mięśni, należy przypomnieć znany w biomechanice związek między siłą rozwijaną przez mięsień a czasem, przez który siła ta może być podtrzymywana. Otóż w miarę zbliżania się siły mięśnia do jej wartości maksymalnej, czas ten szybko maleje. Schemat współdziałania z rysunku 1 musi się zatem załamać już w momencie osiągnięcia stanu nasycenia przez pierwszy mięsień, gdyż siła przez niego wytwarzana musiałaby zacząć niemal natychmiast zmniejszać swoją wartość. Widać stąd, że przewidywać kryteriów potęgowych nie sposób pogodzić z własnościami realnych napędów mięśniowych.

## 2. KRYTERIA OPTIMALIZACYJNE PROWADZĄCE DO EFEKTU ŁAGODNEGO NASYCENIA

Zbadajmy, jakie warunki powinien spełniać wskaźnik jakości, aby

zbudowane na jego bazie kryterium optymalizacyjne nie prowadziło do opisanej wyżej sprzeczności. W tym celu rozważmy uogólnienie wskaźnika jakości (1)

$$J = \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (2)$$

gdzie o funkcji  $f(x)$  zakładamy, że jest dwukrotnie różniczkowalna i wypukła na odcinku  $[0, 1]$ , oraz że  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ . Określmy teraz za pomocą (2) współdziałanie dwóch mięśni o iloczynach ramion sił i sił maksymalnych  $R_1$  i  $R_2$ . Będziemy zatem poszukiwać minimum wskaźnika jakości (2) przy warunku

$$R_1 x_1 + R_2 x_2 = M \quad (3)$$

gdzie:  $x_1$  - pobudzenie i-tego mięśnia,  
 $M$  - moment siły w stawie.

Wprowadzając mnożnik Lagrange'a  $\lambda$ , powyższe zadanie poszukiwania minimum warunkowego można sprowadzić do szukania minimum funkcji dwóch zmiennych

$$F(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2) + \lambda (M - R_1 x_1 - R_2 x_2) \quad (4)$$

Warunkiem koniecznym osiągnięcia przez funkcję (4) minimum w punkcie  $(x_1, x_2)$  jest

$$f'(x_1) = \lambda R_1, \quad f'(x_2) = \lambda R_2 \quad (5)$$

Równania (5) prowadzą do wniosku, że

$$R_1 f'(x_2) = R_2 f'(x_1) \quad (6)$$

Aby uzyskać poszukiwaną własność funkcji  $f$  założmy teraz, że wypadkowy moment  $M$  zmienia się w taki sposób, że wynikające z minimalizacji (2) pobudzenie jednego z mięśni zmierza do wartości maksymalnej równej 1. Łatwo zrozumieć, że aby uniknąć sytuacji z rysunku 1, należy zażądać, aby wtedy również pobudzenie drugiego mięśnia dążyło do 1. Z równania (6) wynika wtedy

$$R_1 \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = R_2 \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) \quad (7)$$

Na ogół jednak  $R_1 \neq R_2$ , co sprawia, że z równania (7) i założonych własności funkcji  $f(x)$  wynika

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \infty \quad (8)$$

Warunku (8) nie spełnia żadne z kryteriów potęgowych. Oznacza to, że formuła (2) uzupełniona warunkiem (8) definiuje istotnie nową klasę kryteriów optymalizacyjnych. Kryteria te przewidują gładką zależność naprężeń mięśni od wypadkowego momentu siły w całym zakresie jego zmienności oraz wspólne, łagodne osiąganie stanu nasycenia przez całe grupy mięśniowe.

#### LITERATURA

- [1] Dul, J., Townsend, M. A., Shavi, R., Johnson, G. E. (1984) Muscular synergism - I. On criteria for load sharing between synergistic muscles. *Journal of Biomechanics* 17, 663-673.

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ СОДЕЙСТВИЯ МЫШЦ - НОВЫЙ КЛАСС КРИТЕРИЕВ ОПТИМИЗАЦИИ

##### Резюме

В работе показано, что содействие мышц предсказанное критериями оптимизации базированными на степенных показателях качества не совместимо с известными свойствами скелетных мышц. Сформулировано необходимые условия совместности и определено новый класс показателей качества удовлетворяющих этим условиям.

#### MODELLING OF MUSCULAR SYNERGISM - A NEW CLASS OF OPTIMIZATION CRITERIA

##### Summary

The paper deals with optimization criteria currently used to predict individual muscle forces in redundant biomechanical systems. It is shown that minimization of an objective function equal to the weighted sum of muscle stresses raised to a power leads to muscular synergism which cannot be realized by real muscles. Appropriate necessary conditions to be satisfied by any reasonable objective function are subsequently formulated and a new class of objective functions defined.