ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

TADEUSZ BURCZYŃSKI

METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W WYBRANYCH ZAGADNIENIACH ANALIZY I OPTYMALIZACJI UKŁADÓW OBKSZTAŁCALNYCH

MECHANIKA

Z. 97
GLIWICE
1989

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1050

TADEUSZ BURCZYŃSKI

METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W WYBRANYCH ZAGADNIENIACH ANALIZY I OPTYMALIZACJI UKŁADÓW ODKSZTAŁCALNYCH

GLIWICE 1989

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

Druk z makiet sporządzonych przez Autora

PL ISSN 0434-0877

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakl. 150+85 Ark. wyd. 14,5 Ark. druk. 12 Papier offset. kl.III 70x100, 70 g
Oddano do druku 24.10.89 Podpis. do druku 7.11.89 Druk ukończ. w listopadzie 1989
Zam. 694/89

Fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

Spis treści

Содержание

Contents

WSTĘP

Umiejętność określenia przemieszczeń oraz stanów odkształcenia i naprężenia ma istotne znaczenie w procesie projektowo-konstrukcyjnym elementów maszyn i budowli. Tak rozumiane zadanie, polegające na przewidywaniu odpowiedzi ciągłego układu mechanicznego, o określonej postaci konstrukcyjnej, na dane wymuszenie, jest zadaniem z zakresu *analizy*.

W tradycyjnych zagadnieniach analizy przyjmuje się zwykle model liniowy rzeczywistego układu mechanicznego i bada się jego zachowanie przy obciążeniach statycznych i dynamicznych.

W modelowaniu wielu obiektów mechanicznych takie postępowanie jest jednak niewystarczające. Uwzględnienie nieliniowości (geometrycznych i fizycznych) oraz lokalnych zjawisk mechanicznych będących rezultatem kontaktu z innymi ciałami staje się często pilną koniecznością. Również uwzględnienie stochastycznej natury warunków, w jakich działa układ, umożliwia wyjście poza ramy analizy konwencjonalnej.

Znamienną cechą lat ostatnich jest fakt, że oprócz wymienionych tradycyjnych oraz niekonwencjonalnych zagadnień analizy, rozpatrywane są także problemy *syntezy* konstrukcji (*analiza wrażliwości* i *optymalizacja*). Informacje uzyskane z analizy nie dają bowiem wystarczającej informacji potrzebnej w projektowaniu geometrycznej postaci konstrukcyjnej elementów maszyn.

Zagadnieniem określenia wpływu zmiennych projektowych, opisujących kształt brzegu ciała, na zmienne stanu i przyjęte charakterystyki mechaniczne układu zajmuje się *analiza wrażliwości kształtu*.

Optymalizacja kształtu polega na wyznaczeniu takich zmiennych kształtowych, aby funkcjonał jakości, opisujący przyjęte kryterium optymalizacji, osiągał minimum przy spełnieniu warunków ograniczających. Wymienione wyżej typy zagadnień, a więc

- *analiza (konwencjonalna i niekonwencjonalna)*,
- *analiza wrażliwości kształtu*,
- *optymalizacja kształtu*,

stanowią podstawowe etapy racjonalnego projektowania postaci konstrukcyjnej elementów maszyn.

W praktyce inżynierskiej uniwersalną drogą uzyskania rozwiązań wymienionych zagadnień jest zastosowanie metod numerycznych, takich jak metoda elementów skończonych (MES), metoda różnic skończonych (MRS) lub *Metoda Elementów Brzegowych* (MEB).

W niniejszej pracy podjęto próbę sformułowania i zastosowania metody elementów brzegowych w wybranych zagadnieniach *analizy (konwencjonalnej i niekonwencjonalnej)*, *analizy wrażliwości* i *optymalizacji* geometrycznej postaci konstrukcyjnej ciał odkształcalnych.

Metoda elemetów brzegowych jest ostatnio intensywnie rozwijana i znajduje coraz szersze zastosowanie w obliczeniach inżynierskich. Wykaz podstawowych prac monograficznych i specjalistycznych, serii wydawniczych oraz materiałów licznych konferencji naukowych poświęconych metodzie elementów brzegowych został przedstawiony w dodatku do pracy.

Istotą metody elementów brzegowych jest sprowadzenie zadania brzegowego lub początkowo-brzegowego, opisanego układem równań różniczkowych cząstkowych z odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi, do równoważnego układu równań całkowych określonych tylko na brzegu rozpatrywanego ciała. Skończenie wymiarowa aproksymacja tych równań prowadzi do układu równań algebraicznych.

Główną zaletą metody elementów brzegowych jest zmniejszenie o jeden rząd wymiaru rozwiązywanego zagadnienia, dzięki czemu dyskretyzacji podlega tylko powierzchnia ciała w przypadku zagadnień przestrzennych lub brzegu obszaru dwuwymiarowego w przypadku zagadnień płaskich. W ten sposób liczba danych, jakie należy przygotowywać do obliczeń komputerowych, jest znacznie mniejsza niż w innych metodach numerycznych. Metoda ta przy tym samym stopniu dyskretyzacji daje zwykle dokładniejsze wyniki niż metody, które wymagają dyskretyzacji całego obszaru zajmowanego przez ciało.

Wymienione zalety wskazują, że metoda elementów brzegowych może być efektywną metodą numeryczną w analizie i optymalizacji ciał odkształcalnych.

Rozdział 1 niniejszej pracy poświęcono omówieniu podstaw metody elementów brzegowych. Dokonano tego na przykładzie zagadnień liniowych statycznej i dynamicznej teorii sprężystości.

W rozdziale 2 pokazano sposób formułowania problemów nieliniowych mechaniki ośrodków ciągłych w ujęciu metody elementów brzegowych, z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznych, nieliniowości fizycznych oraz nieliniowych warunków brzegowych. Rozważono zagadnienia dynamiczne w opisie materialnym i przestrzennym.

W rozdziale 3 sformułowano zagadnienie kontaktu ciał przestrzennych i obrotowo-symetrycznych z uwzględnieniem zjawiska tarcia w strefie styku.

W rozdziele 4 przedstawiono zastosowanie metody elementów brzegowych do analizy stochastycznych zagadnień brzegowych, propagacji fal w ośrodkach stochastycznych oraz wpływu losowego brzegu na częstości drgań własnych.

W rozdziale 5 pokazano zastosowanie metody elementów brzegowych do zagadnień analizy wrażliwości i optymalizacji kształtu ciał sprężystych poddanych obciążeniom statycznym i dynamicznym.

Uwagi końcowe i wnioski przedstawiono w rozdziale 6.

Praca niniejsza jest wynikiem przeszło ośmioletnich studiów i prac autora, które prowadzone były w ramach Problemu Węzłowego 05.12 PAN, Centralnego Programu Badań Podstawowych CPBP 02.01. PAN oraz w zakresie badań własnych.

1. WPROWADZENIE DO METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH - ZAGADNIENIA LINIOWE TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

1.1. UWAGI WSTĘPNE

Metoda elementów brzegowych jest metodą komputerową, która dzięki intensywnemu rozwojowi stała się w ostatnich latach atrakcyjną i akceptowalną metodą numeryczną mechaniki, alternatywną do metody elementów skończonych i metody różnic skończonych.

Podstaw analitycznych metody doszukać się można w klasycznej teorii potencjału (Kellog [1.38]), która znalazła zastosowanie w formułowaniu zadań brzegowych teorii sprężystości (Kupradze [1.46]) w postaci wielowymiarowych osobliwych równań całkowych (Michlin [1.55]).

Sprowadzenie zadania brzegowego, opisanego w pewnym obszarze układem cząstkowych równań różniczkowych, do układu równań całkowych określonych na brzegu tego obszaru stało się podstawą metody, która nazywa się *metodą brzegowych równań całkowych*. Wymiar klasycznego zadania brzegowego sformułowanego w kategoriach tej metody obniżony jest o jeden rząd. Aby jednak praktycznie wykorzystać tę niewątpliwą zaletę metody, należy dysponować efektywną techniką numeryczną, która pozwala rozwiązać otrzymany układ równań całkowych.

Metoda elementów brzegowych jest metodą przybliżoną, która mając za podstawę analityczne sformułowanie zadania brzegowego w postaci układu brzegowych równań całkowych umożliwia ich przybliżone rozwiązanie przez dyskretyzację brzegu ciała elementami brzegowymi i aproksymację funkcji brzegowych za pomocą funkcji interpolacyjnych. W wyniku takiej procedury otrzymuje się układ równań algebraicznych, w którym niewiadome odnoszą się tylko do brzegu układu.

Rozwinęły się dwa podejścia w formułowaniu zagadnień brzegowych w postaci brzegowych równań całkowych: podejście bezpośrednie i podejście pośrednie. W ujęciu bezpośrednim zadanie formułowane jest wprost za pomocą wielkości mających bezpośredni sens fizyczny (np. w postaci przemieszczeń i sił powierzchniowych). W ujęciu pośrednim zagadnienie brzegowe rozwiązywane jest dla funkcji, które nie mają prostego znaczenia fizycznego, ale z których można wyznaczyć poszukiwane wielkości. Ujęcie bezpośrednie, jako bardziej uniwersalne, zdobyło sobie największe zastosowanie.

Nazwa "*metoda elementów brzegowych*" pojawiła się w literaturze przedmiotu pod koniec lat siedemdziesiątych (por. Brebbia [1.6]) i od tego czasu jest stosowana do określenia techniki numerycznej bazującej na klasycznym brzegowo-całkowym sformułowaniu zadań brzegowych fizyki matematycznej.

Szybki rozwój i zastosowanie metody są związane z powstającym oprogramowaniem komputerowym. Opis ponad 130 programów metody elementów brzegowych znajduje się w pracy [1.56]. W tej samej pracy podany jest także aktualny wykaz badaczy (Who's Who) zajmujących się profesjonalnie tą metodą.

Metoda elementów brzegowych, jako uniwersalna metoda komputerowa, znalazła zastosowanie w wielu problemach mechaniki. Jednym z pierwszych zastosowań metody były zagadnienia brzegowe teorii sprężystości.

Autorem pierwszej oryginalnej pracy (1967 r.) na temat zastosowania bezpośredniego ujęcia metody elementów brzegowych do zagadnień płaskich statycznej teorii sprężystości jest Rizzo [1.70]. Następnie pojawiły się prace Cruse'a [1.22, 1.23, 1.24], w których autor rozwinął zastosowanie metody do zagadnień przestrzennych elastostatyki.

Znaczny wkład do rozwoju metody miały także prace Lachata i Watsona [1.48, 1.49] oraz Watsona [1.79], w których przedstawiono udoskonaloną skończenie wymiarową dyskretyzację brzegowych równań całkowych, poprzez wprowadzenie funkcji iterpolacyjnych i elementów brzegwych wyższych rzędów. Prace z tego zakresu rozwijane były także przez Kuhna i Möhrmanna [1.45].

Zagadnienia obrotowo-symetryczne w ujęciu metody elementów brzegowych rozważane były przez Rizzo i Shippy [1.71, 1.72, 1.75]. Wilson i Cruse [1.84] oraz Ugodczikow i Hutorjański [1.78] podali sposób formułowania metody dla ośrodków anizotropowych.

Prace z zakresu zastosowania metody elementów brzegowych do zagadnień statycznych teorii sprężystości były kontynuowane także w kraju. Warto tu wymienić pierwszą przeglądową pracę Bijak-Żochowskiego [1.5] oraz prace wykonywane przez Burczyńskiego [1.10, 1.13, 1.18].

Stosowanie metody elementów brzegowych w dynamice zapoczątkowały prace Cruse'a i Rizza [1.25] i Cruse'a [1.21] w 1968 r.. W pracach tych zastosowano przekształcenie całkowe Laplace'a do eliminacji czasu z równań opisujących zachowanie się układu. Inne prace dotyczące zastosowania przekształceń całkowych w dynamice związane są z takimi nazwiskami jak Shippy [1.74], Manolis i Beskos [1.52, 1.53], Kobayashi i Nishimura [1.43], Manolis [1.50], Rizzo, Shippy i Rezayat [1.73], Kobayashi [1.40], Kitahara i Nakagawa [1.39], Burczyński i John [1.17].

Koncepcję techniki numerycznej kroków czasowych w rozwiązaniu dynamiki ośrodka sprężystego podali po raz pierwszy Cole, Koslof i Minster [1.19]. Zastosowanie tego ujęcia kontynuowali Tanaka i Tanaka [1.77], Manolis [1.50], Mansur i Brebbia [1.54], Rice i Sadd [1.69], Manolis, Ahmad i Banerjee [1.51], Spyrakos i Antes [1.76], Banerjee, Ahmad i Manolis [1.2], Ahmad i Banerjee [1.1].

Alternatywne ujęcie dynamiki ośrodka sprężystego, polegające na wykorzystaniu rozwiązań podstawowych elastostatyki i utworzeniu macierzy bezwładności podali Nardini i Brebbia [1.59-1.63, 1.7], Haisheng [1.31], Kanarachos i Provatidis [1.37]. Ujęcie to było stosowane także przez Fedelińskiego i Burczyńskiego [1.15, 1.28, 1.29].

Zastosowanie metody elementów brzegowych do modelowania statyki i dynamiki układów prętowych, jako zagadnień jednowymiarowych, rozpatrywane było przez Burczyńskiego [1.11, 1.12]] oraz Burczyńskiego i Adamczyka [1.14].

Podstawy matematyczne metody w zakresie badań dokładności i zbieżności metody elementów brzegowych rozważane były przez Wendlanda [1.80-1.82].

Z książkowych opracowań ujmujących obszernie tematykę zastosowania analitycznego ujęcia całkowego do zagadnień brzegowych teorii sprężystości oraz dających podstawy metody elementów brzegowych należy wymienić następujące prace: Kupradze [1.46, 1.47], Jaswon i Symm [1.34], Parton i Perlin [1.64], Brebbia [1.6], Banerjee i Butterfield [1.4], Brebbia i Walker [1.9], Hartmann [1.34], Crouch i Starfield [1.20], Brebbia, Telles i Wrobel [1.8], Ugodczikov i Hutorjański [1.78], Gomez-Lera i Alarcon [1.30], Kobayashi [1.41, 1.42], Banerjee, Ahmad i Manolis [1.3], Kuhn [1.44] oraz Burczyński, Grabacki i Orkisz [1.16].

W rozdziele ninejszym przestawiono wprowadzenie do metody elementów brzegowych. Na przykładzie zagadnień statycznych i dynamicznych teorii sprężystości przedstawiono sposób formułowania brzegowych równań całkowych oraz ich skończenie wymiarową aproksymację. Na końcu rozdziału pokazano własne przykłady zastosowań metody elementów brzegowych w analizie zagadnień liniowych.

1.2. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W STATYCZNEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

1.2.1. Brzegowe równania całkowe statycznej teorii sprężystości

Rozpatrywane jest ciało liniowo-sprężyste zajmujące obszar Ω w przestrzeni Euklidesa $\mathscr{E}^d$ (d=2 lub 3) z brzegiem $\partial\Omega\equiv\Gamma$. Zakłada się, że brzeg jest powierzchnią Lapunowa z normalą n (rys.1.1). Pod wpływem działania sił objętościowych $\mathbf{b}=(b_i)$ oraz obciążeń powierzchniowych $\mathbf{p}=(p_i)$ w ciele powstaje pole przemieszczeń $\mathbf{u}(x)=(u_i(x))$ oraz związane z nim pola odkształceń ε_{ij} i naprężeń σ_{ij}.

Pola przemieszczeń $\mathbf{u}(x)$, odkształceń ε_{ij} oraz naprężeń σ_{ij} powinny spełniać następujące zależności (por. Nowacki [1.64]):

- równania równowagi:

$$\sigma_{ij,j} + b_i(x) = 0, \qquad x\in\Omega, \tag{1.1}$$

- związki konstytutywne:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{1.2}$$

- związki między przemieszczeniami i odkształceniami:

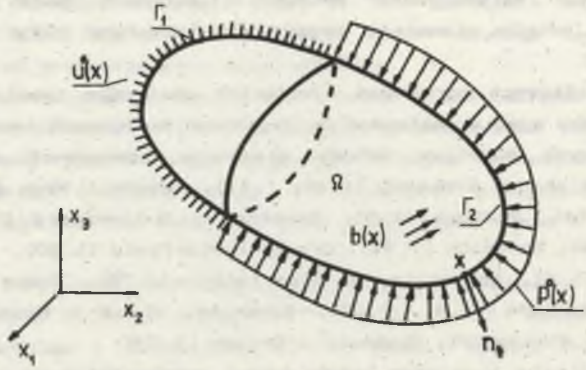
$$\varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \tag{1.3}$$

- warunki brzegowe (mieszane):

$$u_i(x) = u_i^o(x), \quad x\in\Gamma_1, \tag{1.4}$$

$$p_i(x) = \sigma_{ij}n_j = p_i^o(x), \quad x\in\Gamma_2, \tag{1.5}$$

gdzie $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ oraz $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.



Rys. 1.1 Ciało odkształcalne obciążone statycznie

Fig. 1.1 The deformable body loaded statically

Cechy sprężyste materiału specyfikujące jego wewnętrzną budowę zawarte są w tensorze $C=(c_{ijkl})$. Ponieważ istnieją następujące symetrie tensora C:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij} \tag{1.6}$$

więc istnieje tylko 21 składowych tensora C różnych od zera. Jest to maksymalna liczba składowych opisująca najogólniejszy przypadek anizotropii materiału.

W przypadku jednorodnego ośrodka izotropowego składowe tensora C wyrażają się następująco:

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{1.7}$$

gdzie λ i μ są stałymi Lamego, δ_{ij} jest symbolem Kroneckera.

Uwzględniając związki (1.2) i (1.3) w (1.1) otrzymuje się równania przemieszczeniowe statycznej teorii sprężystości:

$$L_a u = b, \quad x\in\Omega, \tag{1.8}$$

gdzie elementy operatora $L_a u$ określone są następująco:

$$(L_s u)_i = -(c_{ijkl} u_{k,l})_{,j} \tag{1.9}$$

W przypadku ośrodka izotropowego operator $L_s u$ ma postać:

$$L_s u = -\mu\nabla^2 u - (\lambda + \mu)\operatorname{grad} \operatorname{div} u. \tag{1.10}$$

Korzystając z zasady wzajemności prac Bettiego zadanie brzegowe opisane równaniem operatorowym (1.8) z warunkami brzegowymi (1.4) i (1.5) można przedstawić w równoważnej postaci całkowej.

Wprowadźmy formę biliniową zależną od dwóch pól przemieszczeń u i u':

$$\mathbb{A}(u,u') = \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u')d\Omega. \tag{1.11}$$

Forma biliniowa $\mathbb{A}(u,u')$ posiada własność symetrii:

$$\mathbb{A}(u,u') = \mathbb{A}(u',u), \quad \forall\, u,u'. \tag{1.12}$$

Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego otrzymuje się:

$$\mathbb{A}(u,u') = \int_\Gamma \sigma_{ij} n_j u_i' d\Gamma - \int_\Omega \sigma_{ij,j} u_i' d\Omega. \tag{1.13}$$

Uwzględniając, że $p_i = \sigma_{ij} n_j$ i $\sigma_{ij,j} = -(L_s u)_i$ oraz wprowadzając wektor naprężenia $\mathcal{P}_n$ związany z normalą n, który przyporządkowuje przemieszczenie u sile powierzchniowej p w sposób następujący:

$$p_i = (\mathcal{P}_n u)_i = \sigma_{ij} n_j = c_{ijkl} u_{k,l} n_j, \tag{1.14}$$

otrzymuje się:

$$\mathbb{A}(u,v) = \int_\Gamma \mathcal{P}_n u\cdot u' d\Gamma + \int_\Omega L_s u\cdot u' d\Omega. \tag{1.15}$$

Zamieniając miejscami u i u' oraz uwzględniając symetrię formy biliniowej otrzymuje się ostatecznie zasadę Bettiego:

$$\int_\Omega (L_s u\cdot u' - L_s u'\cdot u)d\Omega = \int_\Gamma (\mathcal{P}_n u'\cdot u - \mathcal{P}_n u\cdot u')d\Gamma. \tag{1.16}$$

Jeśli pole przemieszczeń u' spełnia równanie:

$$L_s u' = b', \quad x\in\Omega, \tag{1.17}$$

to uwzględniając (1.8), zależność (1.16) przyjmuje znaną postać zasady wzajemności prac:

$$\int_\Omega (b\cdot u' - b'\cdot u)d\Omega = \int_\Gamma (\mathcal{P}_n u'\cdot u - \mathcal{P}_n u\cdot u')d\Gamma. \tag{1.18}$$

Jeśli założyć, że cała przestrzeń $\mathcal{E}^d$ wypełniona jest ośrodkiem o stałych materiałowych c_{ijkl} oraz w przestrzeni tej działa w charakterze sił objętościowych b^* jednostkowa siła skupiona:

$$b^*(y) = \delta(y-x)I, \tag{1.19}$$

gdzie I jest macierzą jednostkową $[\delta_{ij}]_{d\times d}$, to pole przemieszczeń $u^*=U(x,y)$ jest rozwiązaniem podstawowym (rozwiązaniem Kelvina) spełniającym równanie:

$$L_a U(x,y) = \delta(x-y)I, \quad x,y\in\mathcal{E}^d. \tag{1.20}$$

Uwzględniając (1.19) oraz (1.20) w zasadzie wzajemności (1.18) otrzymuje się wzór Somigliany:

$$u(x) = \int_\Gamma U(x,y)p(y)d\Gamma(y) - \int_\Gamma P(x,y)u(y)d\Gamma(y) + \int_\Omega U(x,y)b(y)d\Omega(y), \quad x\in\Omega, \tag{1.21}$$

gdzie

$$P(x,y) = \left[P_{ik}(x,y)\right]_{d\times d} = \left[\mathcal{P}_{n(y)}U(y,x)\right]^T \tag{1.22}$$

Znając rozkład przemieszczeń u(y) i sił powierzchniowych p(y) na brzegu Γ oraz mając dane siły objętościowe b można wyznaczyć ze wzoru (1.21) rozkład przemieszczeń w dowolnym punkcie $x\in\Omega$.

Działając na zależność (1.21) operatorem naprężenia $\mathcal{P}_{n(x)}$ otrzymuje się wzór na składowe stanu naprężenia:

$$\sigma_{ij}(x) = \int_\Gamma D_{ijk}(x,y)p_k(y)d\Gamma(y) - \int_\Gamma S_{ijk}(x,y)u_k(y)d\Gamma(y) + \int_\Omega D_{ijk}(x,y)b_k(y)d\Omega(y), \quad x\in\Omega, \tag{1.23}$$

gdzie

$$D_{ijk}(x,y) = c_{ijlm}\frac{\partial}{\partial x_m}U_{lk}(x,y), \tag{1.24}$$

$$S_{ijk}(x,y) = c_{ijlm}\frac{\partial}{\partial x_m}P_{lk}(x,y). \tag{1.25}$$

W ogólnym przypadku materiału anizotropowego rozwiązanie podstawowe wygodnie jest przedstawić w postaci (por. [1.84, 1.78]):

$$U_{ij}(x,y) = \frac{1}{8\pi^2|x-y|}R_{ij}(v_1,v_2), \tag{1.26}$$

gdzie

$$R_{ij}(v_1, v_2) = \oint\limits_{|\zeta|=1} K^{-1}_{ij}(\zeta) ds, \tag{1.27}$$

przy czym v_1 i v_2 określają orientację wektora $(x-y)$.

Całka (1.27) określona jest na jednostkowym okręgu leżącym w płaszczyźnie normalnej do $(x-y)$ i przechodzącej przez początek układu współrzędnych, ds jest elementem długości jednostkowego okręgu. Funkcja $K^{-1}_{ij}(\zeta)$ określona jest zależnością:

$$K^{-1}_{ij}(\zeta) = [c_{ijkm}\zeta_k\zeta_m]^{-1}, \tag{1.28}$$

gdzie c_{ijkm} jest tensorem anizotropowych własności sprężystych materiału. Całkę (1.27) w przypadku ogólnym, dla określonego typu anizotropii, oblicza się numerycznie (por. [1.84]).

W przypadku ciała izotropowego składowe tensorów $U(x,y)$ oraz $P(x,y)$ dane są wzorami:

$$U_{ij}(x,y) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu\, r}\left[(3-4\nu)\delta_{ij} + r,_i\, r,_j\right], \tag{1.29}$$

$$P_{ij}(x,y) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)\, r^2}\left\{[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r,_i\, r,_j]\frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r,_i n_j - r,_j n_i)\right\}, \tag{1.30}$$

dla zagadnień przestrzennych oraz

$$U_{ij}(x,y) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu}\left[(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} - r,_i\, r,_j\right], \tag{1.31}$$

$$P_{ij}(x,y) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)\, r}\left\{[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r,_i\, r,_j]\frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r,_i n_j - r,_j n_i)\right\}, \tag{1.32}$$

dla płaskiego stanu odkształcenia.

W powyższych wzorach ν jest liczbą Poissona, r oznacza odległość zdefiniowaną następująco:

$$r(x,y) = (r_i r_i)^{1/2}, \quad r_i = x_i(y) - x_i(x), \tag{1.33}$$

natomiast

$$r,_i = \frac{\partial r}{\partial x_i(y)} = \frac{r_i}{r}. \tag{1.34}$$

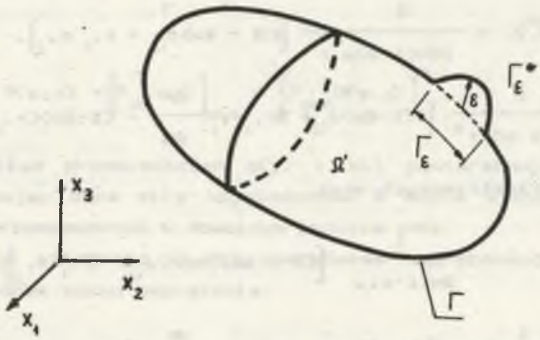
Wzór Somigliany (1.21) może być użyteczny, gdy znany jest rozkład wszystkich przemieszczeń i sił brzegowych. W zadaniu brzegowym poprawnie sformułowanym znane są przemieszczenia na części brzegu Γ_1 oraz siły powierzchniowe na części brzegu Γ_2. Gdy punkt x zdąża do brzegu, wzór (1.21) staje się równaniem całkowym. Ten graniczny przypadek można rozważyć umiejscawiając punkt x w ten sposób, że otoczony jest on powierzchnią Γ_ε^* o promieniu ε (rys.1.2). Wówczas brzeg Γ przedstawić można następująco:

$$\Gamma = (\Gamma - \Gamma_\varepsilon) + \Gamma_\varepsilon^*, \tag{1.35}$$

natomiast wzór Somigliany przyjmuje postać:

$$u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_\varepsilon^*} U(x,y)p(y)d\Gamma(y) - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_\varepsilon^*} P(x,y)u(y)d\Gamma(y) + \int_{\Omega'} U(x,y)b(y)d\Omega(y)\right\}, \tag{1.36}$$

gdzie Ω' jest obszarem powstałym w wyniku otoczenia punktu źródłowego x sferą o promieniu ε.



Rys. 1.2 Lokalizacja punktu źródłowego x na brzegu ciała

Fig. 1.2 Source point x located on the boundary

Ponieważ jądro $U(x,y)$ posiada słabą osobliwość, $O(r^{-1})$ dla d=3 i $O(\ln r)$ dla d=2, więc pierwsza i trzecia całka po prawej stronie istnieją w zwykłym sensie jako całki niewłaściwe, natomiast drugą całkę można przedstawić w postaci sumy dwóch całek. Zależność (1.36) przyjmuje teraz postać:

$$u(x) = \int_\Gamma U(x,y)p(y)d\Gamma(y) + \int_\Omega U(x,y)b(y)d\Omega(y) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} P(x,y)u(y)d\Gamma(y) + \int_{\Gamma_\varepsilon^*} P(x,y)u(y)d\Gamma(y)\right\}. \tag{1.37}$$

Trzecia całka w zależności (1.37) istnieje w sensie wartości głównej

Cauchy'ego z uwagi na osobliwość jądra $P(x,y)$, $O(r^{-2})$ dla $d=3$ i $O(r^{-1})$ dla $d=2$, natomiast ostatnią całkę można przekształcić następująco:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma^{*}_{\varepsilon}} P(x,y)u(y)d\Gamma(y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma^{*}_{\varepsilon}} P(x,y)[u(y) - u(x)]d\Gamma(y)$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} u(x)\int_{\Gamma^{*}_{\varepsilon}} P(x,y)d\Gamma(y). \tag{1.38}$$

Piewsze wyrażenie całkowe po prawej stronie zależności (1.38) jest równe zeru z uwagi na ciągłość przemieszczeń, druga całka wraz z lewą stroną zależności (1.36) tworzy, po wyłączeniu pola przemieszczeń $u(x)$, następujące wyrażenie:

$$c(x) = I + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma^{*}_{\varepsilon}} P(x,y)d\Gamma(y). \tag{1.39}$$

Ostatecznie wyrażenie (1.36) przyjmuje następującą postać:

$$c(x)u(x) + \int_{\Gamma} P(x,y)u(y)d\Gamma(y) = \int_{\Gamma} U(x,y)p(y)d\Gamma(y) + \int_{\Omega} U(x,y)b(y)d\Omega(y) \tag{1.40}$$

W przypadku brzegu gładkiego[1] $c(x)=(1/2)I$. Całkę osobliwą występującą po lewej stronie równań całkowych (1.39) należy rozumieć w sensie wartości głównej Cauchy'ego (por. Michlin [1.55]). Wektorowe równanie całkowe (1.41) tworzy układ d osobliwych równań całkowych. Jeśli punkt x leży wewnątrz obszaru Ω, to $c(x)=I$ i wówczas zależność (1.40) jest znanym już wzorem Somigliany.

Równanie (1.40) opisuje problem brzegowy teorii sprężystości zarówno dla zagadnień przestrzennych, jak i problemów dwuwymiarowych.

Dla obszarów nieskończonych $\Omega^{-}=\mathbb{R}^{d}\setminus(\Omega\cup\Gamma)$, $d=2$ lub 3, (tzw. zewnętrzne zadanie brzegowe), równanie (1.40) zachowuje swoją ważność, ale przy spełnieniu przez przemieszczenia i siły dodatkowych warunków. Jeśli rozpatruje się obszar zawarty między Γ_{ρ} i Γ, gdzie Γ_{ρ} jest powierzchnią kuli o promieniu ρ, poprowadzonym z punktu x leżącym na brzegu wewnętrznej pustki Γ, to równanie (1.40) ma postać:

---

[1] Także w przypadku brzegu składającego się z układu ciągłych części brzegowych, macierz stałych $c(x)$, $x\in\Gamma$, w punktach nieciągłości wyrażona być może explicite (por. Hartmann [1.33, 1.34]). Jednakże w obliczeniach praktycznych stałe $c(x)$ oblicza się zwykle przez uwzględnienie przemieszczenia ciała jako bryły sztywnej (p. 1.2.2.).

$$c(x)u(x)+\int_{\Gamma}P(x,y)u(y)d\Gamma(y)+\int_{\Gamma_\rho}P(x,y)u(y)d\Gamma(y)$$
$$=\int_{\Gamma}U(x,y)p(y)d\Gamma(y)+\int_{\Gamma_\rho}U(x,y)p(y)d\Gamma(y)+\int_{\Omega}U(x,y)b(y)d\Omega(y). \qquad (1.41)$$

Jeśli teraz $\rho\to\infty$, to równanie (1.41) przyjmuje postać identyczną z (1.40) jeśli spełniony jest warunek:

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{\Gamma_\rho}[P(x,y)u(y) - U(x,y)p(y)]d\Gamma(y) = 0. \qquad (1.42)$$

Warunek (1.42) spełniony jest wówczas, gdy $u(y)=O(\rho^{-1})$ oraz $p(y)=O(\rho^{-2})$, gdzie znak O charakteryzuje asymptotyczne zachowanie się przy $\rho\to\infty$.

Istnieją rozmaite modyfikacje prezentowanej wyżej wersji metody elementów brzegowych, umożliwiające sformułowanie pośrednie lub nieosobliwe, np. metody brzegowe oparte na metodzie Trefftza (por. Zieliński i Herrera [1.85]). W praktyce największe zastosowanie zdobyło sformułowanie bezpośrednie i dla tego ujęcia zostanie przedstawiony sposób dyskretyzacji równania całkowego (1.40).

1.2.2. Dyskretyzacja numeryczna

Równanie (1.40) rozwiązywane jest w sposób przybliżony z uwzględnieniem danych warunków brzegowych i siły objętościowych, przy zastosowaniu dyskretyzacji brzegu elementami brzegowymi i aproksymacji funkcji brzegowych za pomocą funkcji kształtu. Opisany niżej sposób, oparty na ujęciu kolokacyjnym, zyskał największe zastosowanie w praktyce.

Brzeg ciała sprężystego dzielony jest na elementy brzegowe Γ^e, $e=1,2,\ldots E$. W przypadku zagadnień przestrzennych są to powierzchniowe elementy w kształcie płaskich lub zakrzywionych w przestrzeni czworokątów (rys.1.3a) lub trójkątów (rys.1.3b). W problemach dwuwymiarowych elementy brzegowe reprezentowane są przez odcinki krzywoliniowe (rys.1.3c) lub prostoliniowe.

Każdy element przechodzi przez pewien układ brzegowych punktów węzłowych. Współrzędne prostokątne $x=(x_k)$ dowolnego punktu elementu brzegowego wyrażają się poprzez współrzędne punktów węzłowych $x^v=(x_k^v)$ w postaci:

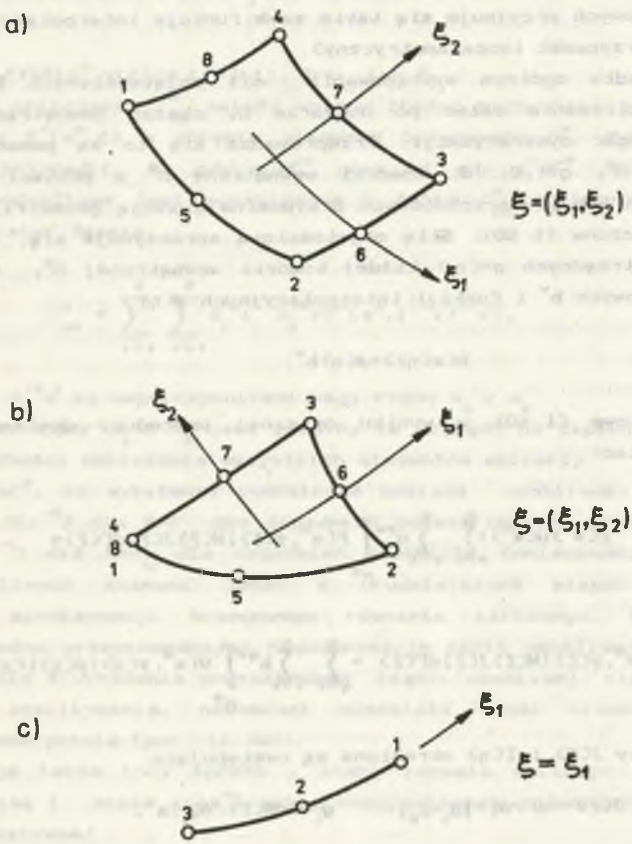
$$x(\xi)=M(\xi)x^v, \qquad (1.43)$$

gdzie macierz funkcji interpolacyjnych (funkcji kształtu) $M(\xi)$ ma postać:

$$M(\zeta)=\left[IM_1(\zeta),IM_2(\zeta),\ldots IM_{W_e}(\zeta)\right], \tag{1.45}$$

przy czym I jest kwadratową macierzą jednostkową o wymiarze *dxd*, $M_w(\zeta)$, $w=1,2,\ldots W_e$, jest funkcją kształtu, gdzie W_e wyraża liczbę punktów węzłowych na elemencie Γ^e.

Funkcje kształtu $M_w(\zeta)$ określone w lokalnym układzie współrzędnych $\zeta=(\zeta_i)$ są opisane podobnymi wzorami jak w metodzie elementów skończonych (por. [1.86]).



Rys. 1.3 Elementy brzegowe
Fig. 1.3 Boundary elements

Brzegowe pola przemieszczeń u(x) i sił p(x) są na każdym elemencie Γ^e aproksymowane w lokalnym układzie współrzędnych $\zeta=(\zeta_i)$ za pomocą wartości węzłowych u^{ev} i p^{ev} oraz odpowiednich funkcji kształtu:

$$u^{e}(x(\xi))=N(\xi)u^{e\nu}, \tag{1.45}$$

$$p^{e}(x(\xi))=N(\xi)p^{e\nu}, \tag{1.46}$$

gdzie $N(\xi)$ jest macierzą funkcji kształtu.

Funkcje kształtu mają postać wielomianów β-tego rzędu. Gdy β=0, to aproksymowana wielkość jest stała w granicach elementu, gdy natomiast β=1, 2 lub 3, to mamy do czynienia odpowiednio z aproksymacją liniową, kwadratową lub sześcienną. Często przy aproksymacji geometrii brzegu i funkcji brzegowych przyjmuje się takie same funkcje interpolacyjne, tzn. $M(\xi)=N(\xi)$, (przypadek izoparametryczny).

W przypadku ogólnym występowania sił objętościowych b, w celu ułatwienia obliczania całek po obszarze Ω, obszar wewnętrzny Ω może również podlegać dyskretyzacji. Przeprowadza się to za pomocą komórek wewnętrznych Ω^{q}, q=1,2,..Q. Komórki wewnętrzne Ω^{q} w postaci segmentów objętościowych lub powierzchniowych przypominają swoją geometrią i opisem elementy skończone [1.86]. Siłę objętościową aproksymuje się, w lokalnym układzie współrzędnych $\eta=(\eta_i)$ każdej komórki wewnętrznej Ω^{q}, za pomocą wartości węzłowych b^{ν} i funkcji interpolacyjnych $\phi(\eta)$:

$$b(x(\eta))=\phi(\eta)b^{\nu}. \tag{1.47}$$

Równanie całkowe (1.40) w wyniku opisanej procedury dyskretyzacyjnej przyjmuje postać:

$$c(x^{a})u(x^{a})+\sum_{e=1}^{E}\sum_{\nu=1}^{W}u^{e\nu}\int_{\Gamma^{e}}P[x^{a},y(\xi)]N(\xi)J(\xi)d\Gamma(\xi)= \tag{1.48}$$

$$\sum_{e=1}^{E}\sum_{\nu=1}^{W}p^{e\nu}\int_{\Gamma^{e}}U[x^{a},y(\xi)]N(\xi)J(\xi)d\Gamma(\xi)\ +\sum_{q=1}^{Q}\sum_{\nu=1}^{V}b^{q\nu}\int_{\Omega^{q}}U[x^{a},y(\eta)]\phi(\eta)I(\eta)d\Omega(\eta),$$

gdzie jakobiany $J(\xi)$ i $I(\eta)$ określone są następująco:

$$J(\xi)\ =d\Gamma/d\xi=|g_1\times g_2|, \qquad g_i=[\partial M(\xi)/\partial\xi_i]x^{\nu}, \tag{1.49}$$

$$I(\eta)\ =d\Omega/d\eta=|a_1\times a_2\cdot a_3|, \qquad a_i=[\partial\phi(\eta)/\partial\eta_i]x^{\nu}. \tag{1.50}$$

Punkty x^{a}, a=1,2,..W, utożsamiane są ze wszyskimi punktami węzłowymi występującymi na brzegu Γ. Równanie (1.48) można doprowadzić do następującej postaci algebraicznej:

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} + \{B\}, \tag{1.51}$$

gdzie macierze kolumnowe {u} i {p} zawierają węzłowe wartości przemieszczeń $u^{a\nu}$ i sił $p^{a\nu}$ brzegowych, macierz [H] określona jest równaniem: $[H]=[C]+[\hat{H}]$, gdzie [C] jest macierzą diagonalną zawierającą stałe c, natomiast macierze kwadratowe $[\hat{H}]$ i [G] zależą od całek brzegowych, macierz kolumnowa {B} zależy od sił objętościowych.

Obliczenie macierzy [H] i [G] z odpowiednią dokładnością stanowi jeden z istotnych etapów dyskretryzacji zagadnienia. Elementy tych macierzy zależą od całek brzegowych typu:

$$J^{\nu}_{ae} = \int_{\Gamma^e} F^{\nu}(x^a,\xi)d\xi, \tag{1.52}$$

gdzie $F^{\nu}(x^a,\xi)=R[x^a,y(\xi)]N_{\nu}(\xi)J(\xi)$, $R=U_{ij}$ lub P_{ij}.

W celu obliczenia J^{ν}_{ae} należy wpierw zbadać zachowanie się wyrażenia podcałkowego $F^{\nu}(x^a,\xi)$ w obrębie elementu brzegowego Γ^e. Wyróżnić można tutaj dwa przypadki: a) gdy $x^a \notin \Gamma^e$ oraz b) gdy $x^a \in \Gamma^e$. Gdy $x^a \notin \Gamma^e$, to wyrażenie podcałkowe jest ograniczone i całka J^{ν}_{ae} obliczana jest przy pomocy kwadratur Gaussa:

$$J^{\nu}_{ae} = \sum_{r=1}^{m_1}\sum_{s=1}^{m_2} A_r^{(m_1)} A_s^{(m_2)} F^{\nu}(x^a,\xi^{(m_1)}\xi^{(m_2)}), \tag{1.53}$$

gdzie $A_r^{(m_1)}$, $A_s^{(m_2)}$ są współczynnikami wagi rzędu m_1 i m_2.

Właściwy wybór m_1 i m_2 jest istotny ze względu na zapewnienie takiej samej dokładności obliczenia wszystkich elementów macierzy.

Gdy $x^a \in \Gamma^e$, to wyrażenie podcałkowe posiada osobliwość typu $O(r^{-1})$ dla $R=U_{ij}$ i $O(r^{-2})$ dla $R=P_{ij}$ dla zagadnień przestrzennych oraz $O(\ln r)$ dla $R=U_{ij}$ i $O(r^{-1})$ dla $R=P_{ij}$ dla zagadnień płaskich. Konieczność obliczania całek osobliwych stanowi jeden z trudniejszych etapów skończenie wymiarowej aproksymacji brzegowego równania całkowego. Problem ten rozwiązać można przeprowadzając regularyzację całki osobliwej. Polega to na wydzieleniu z wyrażenia podcałkowego części osobliwej, która może być scałkowana analitycznie, natomiast pozostała część nieosobliwa jest obliczana numerycznie (por. [1.32]).

Istnieje także inny sposób , który pozwala obliczyć jednocześnie całkę osobliwą i stałe $c_{ij}(x^a)$ przez uwzględnienie przemieszczenia ciała jako bryły sztywnej.

Zakładając, że ciało jako bryła sztywna doznaje jednostkowego przemieszczenia w dowolnym kierunku, otrzymujemy z równania (1.51), że

$$[H]I_l=0, \tag{1.54}$$

gdzie I_l jest wektorem jednostkowego przemieszczenia bryły w kierunku l. Ostatecznie diagonalne elementy macierzy [H] są określone następująco:

$$h_{ii}=-\sum_{i\neq j} h_{ij} \qquad (1.55)$$

W przypadku ciała nieskończonego lub półnieskończonego zależność (1.55) przyjmuje postać (por. [1.8]):

$$h_{ii}=I-\sum_{i\neq j} h_{ij} \qquad (1.56)$$

Uwzględniając warunki brzegowe, równanie (1.51) po przekształceniach przyjmuje postać liniowego układu równań algebraicznych:

$$[A]\{X\}=\{Y\}. \qquad (1.57)$$

gdzie macierz kolumnowa {X} zawiera niewiadome wartości sił węzłowych na brzegu Γ_1 i przemieszczeń na brzegu Γ_2, macierz kolumnowa {Y} zależy od danych warunków brzegowych i sił objętościowych.

Macierz kwadratowa [A] jest macierzą pełną i niesymetryczną, co jest główną wadą kolokacyjnego sformułowania metody. Jednakże wymiary tej macierzy są mniejsze niż wymiary macierzy sztywności, jaką uzyskuje się stosując metodę elementów skończonych do takiego samego zagadnienia.

Jeśli obszar Ω podzielić na podobszary Ω_s, $s=1,2,..S$, każdy z brzegiem Γ_s, to dla każdej części ciała można napisać równanie typu (1.51), które wraz z odpowiednimi warunkami zgodności sił i przemieszczeń na Γ_s doprowadzi do utworzenia macierzy współczynników [A] będącej macierzą blokowo-pasmową (por. p.1.2.5).

Stosując podejście energetyczne (por. [1.67]) lub metodę Galerkina [1.66] można otrzymać układ równań algebraicznych z symetryczną macierzą współczynników, jednakże czas obliczeń potrzebny do wyznaczenia elementów tej macierzy jest znacznie dłuższy niż w ujęciu kolokacyjnym.

Układ równań algebraicznych (1.57) rozwiązać można jedną ze znanych metod, np. metodą Gaussa.

Znając przemieszczenia i siły na całym brzegu Γ, przemieszczenia wewnątrz ciała oblicza się ze wzoru Somogliany (1.21). Składowe tensora naprężeń σ_{ij} wyznacza się z zależności (1.23).

Wzóry (1.21) oraz (1.23) po dyskretyzacji przyjmują postać

$$u(x)=[G(x)]\{p\} \quad - [H(x)]\{u\} \quad + \{B(x)\}, \quad x\in\Omega, \qquad (1.58)$$

$$\sigma(x)=[D(x)]\{p\} \quad - \quad [S(x)]\{u\} \quad + \{\bar{B}(x)\}, \quad x\in\Omega. \qquad (1.59)$$

gdzie macierze [D(x)] i [S(x)] zależa od całek brzegowych o jądrach zależnych od D_{ijk} i S_{ijk}.

W wielu zastosowaniach interesująca jest znajomość składowych stanu naprężenia nie tylko wewnątrz ciała, ale także na brzegu. MEB pozwala na stosunkowo dokładne określenie naprężeń na brzegu, co ma istotne znaczenie

nie tylko w analizie wytrzymałościowej, ale jest bardzo cenne w optymalizacji i analizie wrażliwości kształtu (por. roz. 5).

W celu określenia naprężeń na brzegu wygodnie jest wprowadzić w punkcie, w którym szukane jest naprężenie, lokalny kartezjański układ współrzędnych $\bar{x}_k$, $k\in[1,2,3]$, taki że osie $\bar{x}_1$ i $\bar{x}_2$ są styczne do brzegu. Przemieszczenia w tym układzie można przedstawić zależnością

$$\bar{u}^e = N\bar{u}^{em}, \tag{1.60}$$

natomiast składowe tensora odkształceń określone są w lokalnym układzie $\bar{x}_k$ przez wartości węzłowe w sposób następujący: $\bar{\varepsilon}_{ij} = 0.5(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$.

Teraz składowe stanu naprężenia można wyrazić zależnościami:

$$\bar{\sigma}_{13} = \bar{p}_1 \;,\; \bar{\sigma}_{23} = \bar{p}_2 \;,\; \bar{\sigma}_{33} = \bar{p}_3, \tag{1.61a}$$

oraz

$$\bar{\sigma}_{11} = [\nu\bar{p}_3 + 2G(\bar{\varepsilon}_{11} + \nu\bar{\varepsilon}_{22}]/(1-\nu), \tag{1.61b}$$

$$\bar{\sigma}_{22} = [\nu\bar{p}_3 + 2G(\bar{\varepsilon}_{22} + \nu\bar{\varepsilon}_{11}]/(1-\nu), \tag{1.61c}$$

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia powyższe wzory przyjmują postać:

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{p}_1 \;,\; \bar{\sigma}_{22} = \bar{p}_2,$$
$$\bar{\sigma}_{11} = (\nu\bar{p}_2 + 2G\bar{\varepsilon}_{11}). \tag{1.62}$$

Innym sposobem określenia naprężeń brzegowych jest zastosowanie wzoru (1.23) dla $x\to\Gamma$. Jednakże takie ujęcie jest z punktu widzenia dokładności i efektywności obliczeń numerycznych mało korzystne z uwagi na pojawienie się silnych osobliwości w jądrach D_{ijk} i S_{ijk} (np. w zagadnieniach trójwymiarowych są to osobliwości rzędu $1/r^2$ i $1/r^3$).

1.2.3. Szczególne przypadki sił objętościowych

W przedstawionym ogólnym przypadku występowania sił objętościowych, aby obliczyć całkę po obszarze Ω, zaproponowano dyskretyzację wnętrza ciała za pomocą komórek Ω^q, $q=1,2,..Q$. Istnieje jednak szeroka klasa sił objętościowych, mających ważne praktyczne znaczenie, dla kórych całki określone na obszarze Ω dają się sprowadzić do całek brzegowych. Tak jest w przypadku, gdy siły objętościowe są zachowawcze, tzn. mogą być reprezentowane przez gradient pewnej skalarnej funkcji. Do tej klasy sił objętościowych należą obciążenia grawitacyjne (czyli ciężar własny) oraz siły odśrodkowe powstałe w wyniku obrotu ciała wokół stałej osi. Również obciążenie wynikłe z odziaływania stacjonarnego pola temperatur $T(x)$, spełniającego równanie:

$$\Delta T(x)=0, \tag{1.63}$$

może być przedstawione przez całkę brzegową.

Podstawą transformacji całek określonych na obszarze Ω do całek określonych na brzegu Γ może być wyrażenie rozwiązania podstawowego teorii sprężystości U_{ij} przez tensor Galerkina G_{ij} w postaci:

$$U_{ij} = G_{ij,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{ik,kj}, \tag{1.64}$$

gdzie tensor G_{ij} określony jest następująco:

$$G_{ij}=r\delta_{ij}/(8\pi\mu) \tag{1.65}$$

dla zagadnień przestrzennych, oraz

$$G_{ij}=r^2\ln(r^{-1})/(8\pi\mu) \tag{1.66}$$

dla płaskiego stanu odkształcenia.

Jeśli ciało sprężyste o stałej gęstości masy ρ znajduje się w stałym polu grawitacyjnym g_j, to

$$b_j=\rho g_j, \tag{1.67}$$

i całka objętościowa wyrażająca wpływ sił objętościowych transformuje się do całki brzegowej:

$$B_i=\rho g_j \int_\Gamma \left(G_{ij,k} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{ik,j}\right) n_k d\Gamma. \tag{1.68}$$

Gdy ciało obraca się ze stałą prędkością kątową ω_i wokół osi przechodzącej przez początek układu współrzędnych, wówczas siły objętościowe określone są równaniem:

$$b_j=g_{ij}x_i, \tag{1.69}$$

gdzie $g_{ij}=\rho(\delta_{ij}\omega_m\omega_m-\omega_i\omega_j)$.
Siła objętościowa redukuje się do całki brzegowej w postaci:

$$B_i=g_{jk} \int_\Gamma \left\{ x_j\left(G_{ik,m} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{im,k}\right) n_m - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} G_{ik}n_j \right\} d\Gamma. \tag{1.70}$$

W przypadku stacjonarnego pola temperatur $T(x)$ wpływ sił objętościowych wyraża się następującą całką brzegową:

$$B_i = \mu\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\alpha\int_\Gamma (G_{ik,kj}T - G_{ik,k}T_{,j})n_j d\Gamma, \tag{1.71}$$

ghdzie α jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej.

Temperaturę T i jej pochodną $T_{,j}$ na brzegu Γ otrzymuje się w wyniku rozwiązania zadania brzegowego przepływu ciepła opisanego równaniem różniczkowym (1.63) wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi.

1.2.4. Ciała obrotowo-symetryczne

W przypadku ciał o symetrii obrotowej sformułowanie zadania brzegowego za pomocą metody elementów brzegowych prowadzi do obniżenia wymiaru zadania o 2 rzędy, ponieważ brzegowe równania całkowe określone są tylko na tworzącej L, której obrót wokół osi symetrii tworzy powierzchnię ciała.

Wprowadźmy cylindryczny układ współrzędnych (ρ,Θ,z), a następnie rozwińmy w szereg Fouriera przemieszczenia u(x) i siły brzegowe p(x):

$$m(x) = 0.5m^0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[{}^am^n(\hat{x})\sin n\Theta_x + {}^cm^n(\hat{x})\cos n\Theta_x\right] \qquad m=u,p \tag{1.72}$$

oraz rozwiązania podstawowe:

$$T^{nc(\hat{s})}(\hat{x},\hat{y}) = \int_{-\pi}^{\pi} T(x,y)\begin{Bmatrix}\sin n\Theta\\ \cos n\Theta\end{Bmatrix}d\Theta, \qquad \begin{matrix}T=U,P\\ \Theta=\Theta(x)-\Theta(y)\end{matrix} \tag{1.73}$$

gdzie znak $(\hat{\ })$ nad x i y oznacza, że punkty x i y są zdefiniowane przez współrzędne ρ i z, ${}^au^n$, ${}^cu^n$, ${}^ap^n$ oraz ${}^cp^n$ są współczynnikami rozwinięcia Fouriera.

Teraz brzegowe równanie całkowe w wersji bezpośredniej można przedstawić za pomocą dwóch równań wektorowych (dla uproszczenia pominięto siły objętościowe):

$$c(\hat{x})\,{}^au^n(\hat{x}) = \int_L\left\{\left[U^{nc}(\hat{x},\hat{y})\,{}^ap^n(\hat{y}) - U^{na}(\hat{x},\hat{y})\,{}^cp^n(\hat{y})\right]\right.$$

$$\left. - \left[P^{nc}(\hat{x},\hat{y})\,{}^au^n(\hat{y}) - P^{na}(\hat{x},\hat{y})\,{}^cu^n(\hat{y})\right]\right\}\rho(\hat{y})\,dL(\hat{y}), \tag{1.74}$$

$$c(\hat{x})\,{}^{c}\mathbf{u}^{n}(\hat{x})=\int_{L}\Big\{\Big[\mathbf{U}^{nc}(\hat{x},\hat{y})\,{}^{c}\mathbf{p}^{n}(\hat{y})+\mathbf{U}^{ns}(\hat{x},\hat{y})\,{}^{s}\mathbf{p}^{n}(\hat{y})\Big]$$

$$-\Big[\mathbf{P}^{nc}(\hat{x},\hat{y})\,{}^{c}\mathbf{u}^{n}(\hat{y})+\mathbf{P}^{ns}(\hat{x},\hat{y})\,{}^{s}\mathbf{u}^{n}(\hat{y})\Big]\Big\}\rho(\hat{y})\,dL(\hat{y}), \qquad (1.75)$$

$$n=0,1,2,\ldots\infty.$$

Tworząca L jest dyskretyzowana za pomocą elementów brzegowych podobnie jak brzeg w zadaniach dwuwymiarowych. Ostatecznie otrzymuje się dyskretną postać równań całkowych (1.74) i (1.75):

$$[\mathbf{H}_n]\{{}^{n}\mathbf{u}^{*}\}=[\mathbf{G}_n]\{{}^{n}\mathbf{p}^{*}\}, \qquad (1.76)$$

gdzie $[\mathbf{H}_n]$ i $[\mathbf{G}_n]$ są macierzami kwadratowymi $6W\times 6W$, W jest całkowitą liczbą węzłów na L, $\{{}^{n}\mathbf{u}^{*}\}$ i $\{{}^{n}\mathbf{p}^{*}\}$ są macierzami kolumnowymi zawierającymi po $6W$ wartości przemieszczeń węzłowych ${}^{s}\mathbf{u}^{n}$, ${}^{c}\mathbf{u}^{n}$ i sił ${}^{s}\mathbf{p}^{n}$, ${}^{c}\mathbf{p}^{n}$.

Jeśli oprócz osiowo-symetrycznej geometrii ciała również warunki brzegowe są osiowo-symetryczne, to pozostaje tylko $n=0$ składowych rozwinięcia Fouriera. Wówczas do rozwiązania problemu wystarczy tylko równanie (1.75) z ${}^{s}\mathbf{p}^{n}$ i ${}^{s}\mathbf{u}^{n}$ równymi zeru, a w równaniu (1.76) $n=0$ i macierze redukują się do wymiaru $3W\times 3W$. W przypadku niesymetrycznych warunków brzegowych równanie (1.76) jest rozwiązywane sukcesywnie dla każdej wartości n.

1.2.5. Ciała przedziałami jednorodne

Jeżeli ciało jest niejednorodne, to tensor stałych materiałowych $c_{ijkl}(\mathbf{x})$ zależy od położenia punktu $\mathbf{x}$. W tym przypadku zagadnienie brzegowe można sformułować także w postaci całkowej. Jednakże niełatwym problemem jest uzyskanie rozwiązania podstawowego, które powinno spełniać równanie o zmiennych współczynnikach. Zagadnienie znacznie się upraszcza, jeśli niejednorodność może być aproksymowana układem funkcji przedziałami stałymi.

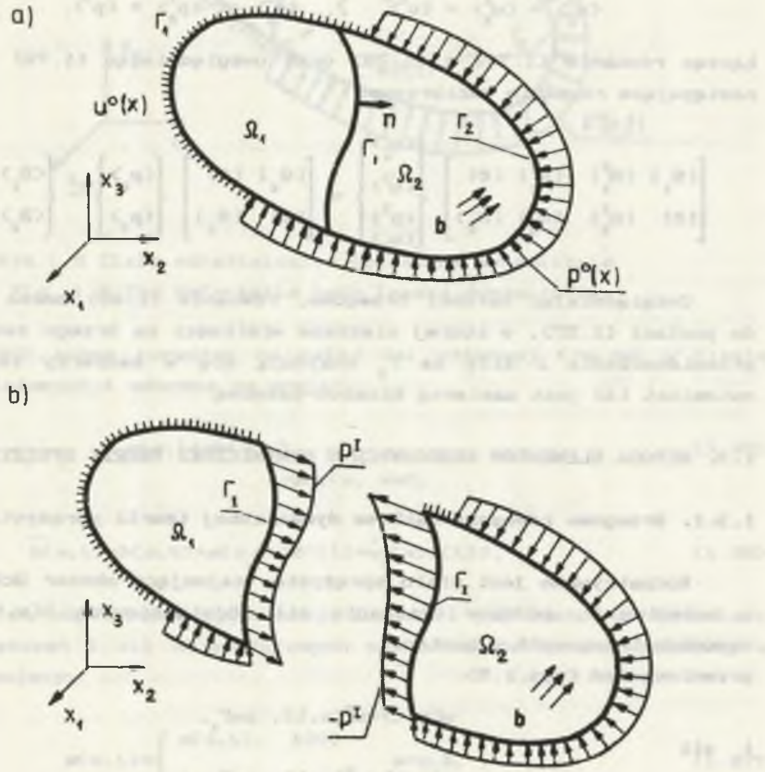
Podzielmy obszar Ω zajmowany przez ciało na podobszary Ω_m tak, że $\bigcup_m \Omega_m=\Omega$ i $\bigcap_m \Omega_m=\emptyset$. Ciało niejednorodne można "aproksymować" układem ciał jednorodnych o własnościach opisanych stałymi $c_{ijkl}^{(m)}$, jeśli przyjmiemy, że

$$\forall_{ijkl} \qquad c_{ijkl}(\mathbf{x}) = \sum_m c_{ijkl}^{(m)}\,\varkappa^{(m)},$$

gdzie

$$\varkappa^{(m)} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \forall \mathbf{x}\notin\Omega_m \\ 1 & \text{dla } \forall \mathbf{x}\in\Omega_m . \end{cases}$$

Dla ilustracji zagadnienia rozważane jest ciało sprężyste składające się z dwóch podobszarów jednorodnych Ω_1 i Ω_2. Obszary Ω_1 i Ω_2 rozdzielone są brzegiem wewnętrznym Γ_I i ograniczone z zewnątrz brzegiem zewnętrznym Γ, na którym dane są mieszane warunki brzegowe w postaci (1.4) i (1.5) (rys.1.4a). Problem analizy opisanego zagadnienia polega na podziale rozważanego ciała na dwa jednorodne obszary i rozpatrzeniu każdego z nich osobno (rys.1.4b).



Rys. 1.4 Ciało przedziałami jednorodne podzielone na dwa podobszary
Fig. 1.4 The zoned body divided in two homogeneous subregions

Dla każdego podobszaru można napisać brzegowe równanie całkowe typu (1.40) lub po dyskretyzacji brzegu elementami brzegowyni utworzyć macierzowe równania w postaci (1.51). Otrzymuje się wówczas:

$$\left[[H_1] \,|\, [H_1^I] \right] \begin{bmatrix} \{u_1\} \\ \{u_1^I\} \end{bmatrix} = \left[[G_1] \,|\, [G_1^I] \right] \begin{bmatrix} \{p_1\} \\ \{p_1^I\} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{B_1\} \\ \{B_2\} \end{Bmatrix} \tag{1.77}$$

dla podobszaru Ω_1 oraz

$$\left[[H_2] \,|\, [H_2^I]\right] \begin{bmatrix} \{u_2\} \\ \{u_2^I\} \end{bmatrix} = \left[[G_2] \,|\, [G_2^I]\right] \begin{bmatrix} \{p_2\} \\ \{p_2^I\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{B_1\} \\ \{B_2\} \end{bmatrix}, \tag{1.78}$$

dla podobszaru Ω_2.

Warunki zgodności przemieszczeń i równowagi sił na brzegu Γ_I mają postać:

$$\{u_1^I\} = \{u_2^I\} = \{u^I\} \quad , \quad \{p_1^I\} = -\{p_2^I\} = \{p^I\}. \tag{1.79}$$

Łącząc równanie (1.77) z (1.78) oraz uwzględniając (1.79) otrzymuje się następujące równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} [H_1] & [H_1^I] & -[G_1^I] & [0] \\ [0] & [H_2^I] & [G_2^I] & [H_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \{u^I\} \\ \{p^I\} \\ \{u_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_1] & [0] \\ [0] & [G_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p_1\} \\ \{p_2\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{B_1\} \\ \{B_2\} \end{Bmatrix}. \tag{1.80}$$

Uwzględniając warunki brzegowe, równanie (1.80) można przekształcić do postaci (1.57), w której nieznane wielkości na brzegu zewnętrznym oraz przemieszczenia i siły na Γ_I znajdują się w macierzy kolumnowej $\{X\}$, natomiast $[A]$ jest macierzą blokowo-pasmową.

1.3. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W DYNAMICZNEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

1.3.1. Brzegowe równania całkowe dynamicznej teorii sprężystosci

Rozpatrywane jest ciało sprężyste, zajmujące obszar $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ (d=2 lub 3) z brzegiem Γ, poddane działaniu sił objętościowych $b(x,t)$, $x\in\Omega$, oraz warunków brzegowych w postaci:

przemieszczeń (rys.1.5):

$$u(x,t)=u^o(x,t), \quad x\in\Gamma_1, \tag{1.81}$$

i sił

$$p(x,t)=p^o(x,t), \quad x\in\Gamma_2, \tag{1.82}$$

gdzie $t\in\mathcal{T}=[0,T]$ jest czasem, $\Gamma_1\cup\Gamma_2=\Gamma$ oraz $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset$.

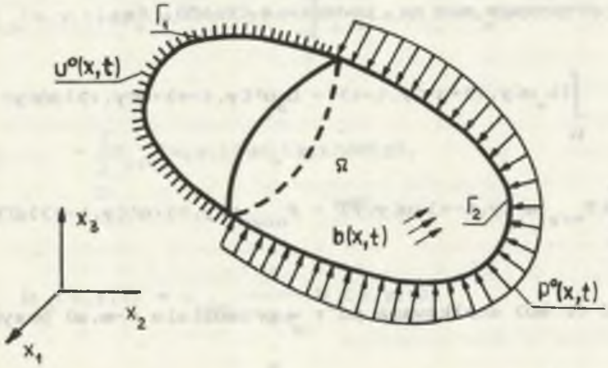
Ruch ciała opisany jest, w ramach liniowej teorii sprężystości, hiperbolicznym równaniem różniczkowym:

$$L_d u(x,t)=L_e u(x,t) + \rho\ddot{u}(x,t)=b(x,t), \quad x\in\Omega, \tag{1.83}$$

gdzie elementy operatora eliptycznego L_e opisane są zależnością (1.9), ρ jest gęstością ośrodka.

Równanie (1.83) spełnione jest dla $t>0$, a przy $t=0$ powinno spełniać warunki początkowe:

$$u(x,0)=u_o(x), \quad \dot{u}(x,0)=\dot{u}_o(x), \quad x\in\Omega. \tag{1.84}$$



Rys. 1.5 Ciało odkształcalne obciążone dynamicznie

Fig. 1.5 The deformable body loaded dynamically

Równanie (1.83) można rozważać na całej osi czasowej $(-\infty,+\infty)$ w klasie funkcji uogólnionych i wówczas ma postać:

$$L_d u(x,t) = \hat{b}(x,t), \qquad (1.85)$$

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in \Omega,$$

gdzie

$$\hat{b}(x,t) = b(x,t) + \rho[u_o(x)\delta'(t) + \dot{u}_o(x)\delta(t)], \qquad (1.86)$$

$\delta(t)$ i $\delta'(t)$ są odpowiednio dystrubucją Diraca i jej pochodną, natomiast pola przemieszczeń i sił objętościowych są określone na osi czasowej w sposób następujący:

$$m(x,t) = \begin{cases} m(x,t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad m = u, b. \qquad (1.87)$$

Dodatkowo w obszarze Ω rozpatrywane jest pole przemieszczeń $u^*(x,t)$, które spełnia równanie:

$$L_d u^*(x,t) = \hat{b}^*(x,t), \qquad (1.88)$$

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in \Omega.$$

Równania (1.85) i (1.88) przedstawić można następująco:

$$L_* u = \hat{b} - \rho\ddot{u}, \qquad (1.89a)$$

$$L_* u^* = \hat{b}^* - \rho\ddot{u}^*. \qquad (1.89b)$$

Rozpatrując pole przemieszczeń u' w chwili czasu (t-τ) oraz pole u w chwili τ otrzymuje się na podstawie (1.16), że

$$\int_{\Omega}[L_s u(y,\tau)\cdot u'(y,t-\tau) - L_s u'(y,t-\tau)\cdot u(y,\tau)]d\Omega(y) =$$

$$\int_{\Gamma}[\mathcal{P}_{n(y)} u'(y,t-\tau)\cdot u(y,\tau) - \mathcal{P}_{n(y)} u(y,\tau)\cdot u'(y,t-\tau)]d\Gamma(y). \tag{1.90}$$

Zależność (1.90) scałkowana po τ w przedziale (-∞,∞) przybiera postać:

$$\int_{\Omega}(u' * L_s u - L_s u' * u)d\Omega = \int_{\Gamma}(\mathcal{P}_n u' * u - u' * \mathcal{P}_m u)d\Gamma, \tag{1.91}$$

gdzie symbol $*$ oznacza splot względem czasu.

Przyjmując, że gęstość ośrodka nie zależy od czasu oraz uwzględniając wzory (1.89) w (1.91) otrzymuje się zasadę wzajemności prac dla zagadnienia nieustalonego teorii sprężystości:

$$\int_{\Omega}(u' * \hat{b} - \hat{b}' * u)d\Omega = \int_{\Gamma}(\mathcal{P}_n u' * u - u' * \mathcal{P}_n u)d\Gamma. \tag{1.92}$$

Zakładając, że pole przemieszczeń $u'=U(x,y,t)$ jest wywołane przez jednostkową, chwilową siłę skupioną $b'=\delta(y-x)\delta(t)I$ działającą w nieograniczonej przestrzeni sprężystej, otrzymuje się ostatecznie brzegowe równanie całkowe dynamicznej teorii sprężystości:

$$c(x)u(x,t) + \int_{\Gamma}P(x,y,t) * u(y,t)d\Gamma(y) = \int_{\Gamma}U(x,y,t) * p(y,t)d\Gamma(y)$$

$$+ \int_{\Omega}U(x,y,t) * \hat{b}(y,t)d\Omega(y), \tag{1.93}$$

gdzie

$$P(x,y,t) = \left[P_{ik}(x,y,t)\right]_{d\times d} = \left[\mathcal{P}_{n(y)}U(x,y,t)\right]^T, \tag{1.94}$$

natomiast $p(y,t)$ jest wektorem sił powierzchniowych.

Gdy punkt $x \in \Omega$ to $c(x)=I$ i pole naprężeń wewnątrz ciała określone jest następująco:

$$\sigma_{ij}(x,t) = \int_\Gamma D_{ijk}(x,y,t) * p_k(y,t)\,d\Gamma(y) - \int_\Gamma S_{ijk}(x,y,t) * u_k(y,t)\,d\Gamma(y) \tag{1.95}$$

$$+ \int_\Omega D_{ijk}(x,y,t) * b_k(y,t)\,d\Omega(y), \qquad x \in \Omega,$$

gdzie

$$D_{ijk}(x,y,t) = c_{ijlm} \frac{\partial}{\partial x_m} U_{lk}(x,y,t), \tag{1.96}$$

$$S_{ijk}(x,y,t) = c_{ijlm} \frac{\partial}{\partial x_m} P_{lk}(x,y,t) \tag{1.97}$$

W przypadku jednorodnego ośrodka izotropowego rozwiązanie podstawowe $U(x,y,t)=[U_{ij}(x,y,t)]$ ma postać:

$$U_{ij}(x,y,t) = \frac{1}{4\pi\rho c_2^2} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{r} \delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right) + \right. \tag{1.98}$$

$$\left. c_2^2 \left\{ \frac{1}{r} \left[\left(t - \frac{1}{c_1}\right)_+ - \left(t - \frac{1}{c_2}\right)_+ \right] \right\}_{,ij} \right\},$$

gdzie

$$\left(t - \frac{1}{c_1}\right)_+ = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < r/c_1, \\ \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{r}{c_1}\right) & \text{dla } t > r/c_1, \end{cases}$$

dla zagadnień przestrzennych, oraz

$$U_{ij}(x,y,t) = \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ \delta_{ij}\, f_o\left(t, \frac{r}{c_2}\right) + c_2^2 \left[f_2\left(t, \frac{r}{c_1}\right) - f_2\left(t, \frac{r}{c_2}\right) \right]_{,ij} \right\}, \tag{1.99}$$

gdzie

$$f_o(t,a) = \frac{H(t-a)}{\sqrt{t^2 - a^2}}$$

$$f_2(t,a) = H(t-a) \left\{ t \ln\left(t + \sqrt{t^2 - a^2}\right) - \sqrt{t^2 - a^2} \right\}$$

H - funkcja Heaviside'a,

dla zagadnień dwuwymiarowych.

We wzorach (1.98) i (1.99) $c_1=[(\lambda+2\mu)/\rho]^{1/2}$ oznacza prędkość fali dylatacyjnej, natomiast $c_2=(\mu/\rho)^{1/2}$ oznacza prędkość fali skrętnej w ośrodku sprężystym.

Równanie całkowe (1.93) jest słuszne zarówno dla zagadnień wewnętrznych (a więc ciał ograniczonych), jak i dla problemów zewnętrznych, gdzie mamy do czynienia z nieograniczonym lub półograniczonym ośrodkiem sprężystym[2].

Równanie (1.93) rozwiązać można w dziedzinie czasowej, stosując metodę kroków czasowych, lub w dziedzinie transformat, stosując metodę transformacji całkowych Laplace'a lub Fouriera.

1.3.2. Metoda kroków czasowych

Istnieją dwa sposoby rozwiązywania równania całkowego (1.93) w dziedzine czasu. W pierwszym ujęciu każdy krok czasowy Δt rozważany jest jako nowe oddzielne zadanie, w konsekwencji czego na końcu każdego kroku należy obliczyć przemieszczenia i prędkości wewnątrz obszaru Ω i traktować je jako warunki pseudopoczątkowe dla następnego kroku. W drugim ujęciu całkowanie po czasie przeprowadza się zawsze startując od chwili początkowej $t=0$ i dlatego przemieszczenia i prędkości nie muszą być obliczane dla kroków pośrednich. Drugie ujęcie jest szczególnie efektywne dla zagadnień z jednorodnymi warunkami początkowymi. Niżej przedstawione jest ujęcie drugie, w którym dla uproszczenia rozważań przyjęto, że warunki początkowe i siły objętościowe są zerowe.

Okres czasu $t\in[0,t_K]$ dzielony jest na M kroków czasowych $\Delta t = t_m - t_{m-1}$, $m=1,2,..M$. Przy założeniu, że $\hat{b}=0$, formuła całkowa (1.93) odniesiona do chwili t_m może być zapisana w postaci

$$c(x)u(x,t_m)+\int_{t_{m-1}}^{t_m}\int_{\Gamma}[P(x,y,t_m-\tau)u(y,\tau)-U(x,y,t_m-\tau)p(y,\tau)]d\Gamma d\tau=$$

$$=\sum_{r=1}^{m-1}\int_{t_{r-1}}^{t_{r+1}}\int_{\Gamma}[P(x,y,t_m-\tau)\ u(y,\tau)\ -\ U(x,y,t_m-\tau)\ p(y,\tau)]d\Gamma d\tau,\qquad m=1,2,..M. \tag{1.100}$$

Przyjmuje się, że pola przemieszczeń $u(y,\tau)$ i sił brzegowych $p(y,\tau)$ zmieniają się liniowo w każdym przedziale czasu Δt

---

[2] Jest to bardzo ważna zaleta metody elementów brzegowych, ponieważ nie trzeba wprowadzać sztucznej granicy nieskończonego obszaru (jak to jest w przypadku metody elementów skończonych lub metody różnic skończonych), na której narzuca się specjalne warunki brzegowe symulujące fizyczne zachowanie się badanego zjawiska dynamicznego w nieskończoności.

$$u(y,\tau) = N_1^m u^{m-1}(y) + N_2^m u^m(y)$$

$$p(y,\tau) = N_1^m p^{m-1}(y) + N_2^m p^m(y),$$

gdzie funkcje interpolacyjne[*] czasu mają postać

$$N_1^m = \frac{t_m - \tau}{\Delta t}\,\phi_m(\tau), \qquad N_2^m = \frac{\tau - t_m}{\Delta t}\,\phi_m(\tau),$$

$$\phi_m(\tau) = H\,[\tau - (m-1)\,\Delta t] - H\,[\tau - m\,\Delta t],$$

przy czym $u^m(y) = u(y,t_m)$ oraz $p^m(y) = p(y,t_m)$, zaś H jest funkcją Heaviside'a.

Formuła całkowa (1.100) przyjmuje teraz postać

$$c(x)u(x,t_m) + \int_\Gamma P^m(x,y)u(y,t_m)d\Gamma(y) = \int_\Gamma U^m(x,y)p(y,t_m)d\Gamma(y) + R(x,t_m), \tag{1.101}$$

gdzie

$$U^m(x,y)=[1/\Delta t]\int_{t_{m-1}}^{t_m}(\tau-t_{m-1})U(x,y,t_m-\tau)d\tau,$$

$$P^m(x,y)=[1/\Delta t]\int_{t_{m-1}}^{t_m}(\tau-t_{m-1})P(x,y,t_m-\tau)d\tau,$$

oraz

$$R(x,t_m)=[1/\Delta t]\int_\Gamma\Big[p(x,t_{m-1})\int_{t_{m-1}}^{t_m}(t_m-\tau)U(x,y,t_m-\tau)d\tau$$

$$-u(x,t_{m-1})\int_{t_{m-1}}^{t_m}(t_m-\tau)P(x,y,t_m-\tau)d\tau\Big]d\Gamma(y)$$

$$+\sum_{r=1}^{m-1}\int_\Gamma\int_{t_{r-1}}^{t_r}\Big[U(x,y,t_m-\tau)p(y,\tau) - P(x,y,t_m-\tau)u(y,\tau)\Big]d\tau d\Gamma(y).$$

---

[*] W przypadku gdy $N_1^m=N_2^m=0{,}5\phi_m(\tau)$, to opisana procedura kroków czasowych redukuje się do aproksymacji pola przemieszczeń i sił powierzchniowych przedziałami stałymi.

Równanie (1.101), dla każdej chwili czasu $t=t_m$, można sprowadzić do układu równań algebraicznych wcześniej omówionych. W tym celu, podobnie jak w przypadku zagadnienia statycznego, należy przeprowadzić dyskretyzację brzegu za pomocą elementów brzegowych i aproksymować brzegowe przemieszczenia i siły za pomocą wartości węzłowych i funkcji kształtu. W rezultacie dla kroku m otrzymuje się układ równań algebraicznych

$$[A^m]\,\{X^m\} = [F^m]\,\{Z^m\} + \{R^m\}, \qquad m = 1,2,..M$$

gdzie:

- $[A^m]$ i $[F^m]$ są macierzami kwadratowymi, których elementy zależą od całek brzegowych o jądrach $U^m(x,y)$ i $P^m(x,y)$,
- $\{X^m\}$ jest macierzą kolumnową zbudowaną z nieznanych wartości przemieszczeń i sił brzegowych w chwili t_m,
- $\{Z^m\}$ jest macierzą kolumnową zależną od danych wartości przemieszczeń i sił brzegowych oraz całek brzegowych o jądrach $U^m(x,y)$ i $P^m(x,y)$,
- $\{R^m\}$ jest macierzą kolumnową, której elementy zależą od historii procesu dynamicznego poprzedzającego chwilę t_m.

W przypadku zagadnień trójwymiarowych, z uwagi na prostotę rozwiązań podstawowych $U(x,y,t)$ i $P(x,y,t)$ całkowanie po czasie może być przeprowadzone analitycznie (por. [1.1]).

1.3.3. Metoda transformacji całkowych

Metoda ta polega na wyeliminowaniu czasu z równań ruchu ośrodka sprężystego przez zastosowanie transformacji całkowej Laplace'a:

$$\bar{f}(x,s)=\mathcal{L}\,\{f(x,t)\} = \int_0^\infty f(x,t)e^{-st}dt, \tag{1.102}$$

lub Fouriera:

$$\tilde{f}(x,\omega)= \mathcal{F}\,\{f(x,t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-i\omega t}dt. \tag{1.103}$$

W rezultacie hiperboliczne równanie (1.83) sprowadza się do równania eliptycznego, natomiast wektorowe równanie całkowe (1.93) przyjmuje postać:

$$c(x)\bar{u}(x,s) + \int_\Gamma \bar{P}(x,y,s)\bar{u}(y,s)d\Gamma(y) = \int_\Gamma \bar{U}(x,y,s)\bar{p}(y,s)d\Gamma(y)$$
$$+ \int_\Omega \bar{U}(x,y,s)\bar{\hat{b}}(y,s)d\Omega(y), \tag{1.104}$$

gdzie $\bar{U}(x,y,s)=\mathcal{L}[U(x,y,t)]$ i $\bar{P}(x,y,s)=\mathcal{F}[P(x,y,t)]$.

Równanie całkowe (1.104) dla ustalonego parametru przekształcenia Laplace'a s ma postać podobną do zagadnień statycznych. Dlatego procedura rozwiązania jest taka sama. Polega ona na rozwiązaniu tego równania dla szeregu wartości parametru s za pomocą dyskretyzacji elementami brzegowymi względem nieznanych wartości brzegowych transformat przemieszczeń $\bar{u}(x,s)$ i sił $\bar{p}(x,s)$ na podstawie danych warunków brzegowych i początkowych, wyrażonych w postaci transformat.

Na końcowym etapie rozwiązania należy przeprowadzić numeryczne odwracanie (por. [1.26, 1.27, 1.83]) otrzymanych transformat przemieszczeń i sił korzystając ze wzoru:

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \bar{f}(x,t)e^{st}ds, \quad i=\sqrt{-1}, \tag{1.105}$$

gdzie $\beta>0$ oraz $Re(s)\geq\beta>0$.

Powyższa całka jest określona na płaszczyźnie zespolonej i równanie całkowe (1.104) powinno być rozwiązane dla zespolonych wartości parametru s, który przyjmuje postać:

$$s = \beta + i(2\pi/T)n, \tag{1.106}$$

gdzie n zmienia się od 1 do N i obejmuje cały przedział czasu $\mathcal{T}$.

Jeśli stosuje się przekształcenie Fouriera, to równanie całkowe (1.104) ma taką samą postać, z tym że w miejsce parametru przekształcenia Laplace'a należy podstawić $s=i\omega$. Różnica jest natomiast w odwracaniu transformat, ponieważ stosujemy teraz następujący wzór:

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x,\omega)e^{i2\pi\omega t}d\omega. \tag{1.107}$$

W praktyce dolną i górną granicę całkowania zastępuje się skończonymi wartościami częstości ω.

Opis dynamiki ośrodka w dziedzinie transformat całkowych umożliwia zastosowanie przedstawionego ujęcia do zagadnień dynamiki i quasi-statyki ciał lepkosprężystych (por. [1.74, 1.52, 1.17, 1.36]).

Równanie stanu dla ciała lepko-sprężystego można przedstawić następująco:

$$P(D)s_{ij}(x,t) = F(D)e_{ij}(x,t). \tag{1.108}$$

gdzie $P(D)$ i $F(D)$ są liniowymi operatorami różniczkowymi:

$$P(D)=\sum_{r=0}^{m} a_r D^r, \quad F(D)=\sum_{r=0}^{n} b_r D^r, \quad D=\partial/\partial t, \quad D^r=\partial^r/\partial t^r, \tag{1.109}$$

natomiast s_{ij} i e_{ij} są dewiatorami naprężeń i odkształceń.

Wykorzystując analogię sprężysto-lepkosprężystą zadanie brzegowo-początkowe lepkosprężystości rozwiązujemy w dziedzinie transformat Laplace'a tak samo, jak zadanie teorii sprężystości, z tym że w miejsce stałych Lamego μ i λ należy w rozwiązaniu podstawowym wstawić następujące wielkości zależne od parametru przekształcenia całkowego s:

$$\mu_v(s) = F(s)/[2P(s)], \quad \lambda_v(s) = \lambda + (2/3)[\mu-\mu_v(s)]. \tag{1.110}$$

Wadą metody transformacji całkowych jest konieczność stosowania numerycznego odwracania transformat na końcowym etapie rozwiązania zadania[4)]

1.3.4. Drgania ustalone dynamiczej teorii sprężystości. Wartości własne

Duże znaczenie praktyczne ma analiza drgań przy wymuszeniu harmonicznym. Wówczas wpływ warunków początkowych można pominąć, natomiast siła objętościowa $b(x,t)$ oraz brzegowe pola przemieszczeń $u(x,t)$ i sił $p(x,t)$ przedstawić można następująco:

$$b(x,t)=\tilde{b}(x,\omega)e^{-i\omega t}, \quad u(x,t)=\tilde{u}(x,\omega)e^{-i\omega t}, \quad p(x,t)=\tilde{p}(x,\omega)e^{-i\omega t}, \tag{1.111}$$

gdzie $\tilde{b}(x,\omega)$, $\tilde{u}(x,\omega)$ i $\tilde{p}(x,\omega)$ są zespolonymi amplitudami sił objętościowych, przemieszczeń i sił brzegowych.

Zadanie brzegowo-początkowe redukuje się teraz do zadania brzegowego opisanego równaniem różniczkowym o operatorze eliptycznym L_d^{ω}:

$$L_d^{\omega}\tilde{u}(x,\omega) = L_s\tilde{u}(x,\omega) - \rho\omega^2\tilde{u}(x,\omega) = \tilde{b}(x,\omega), \tag{1.112}$$

wraz z warunkami brzegowymi określonymi dla amplitud:

$$\tilde{u}(x,\omega)=\tilde{u}^o(x,\omega), \quad x\in\Gamma_1, \quad \tilde{p}(x,\omega)=\tilde{p}^o(x,\omega), \quad x\in\Gamma_2. \tag{1.113}$$

Istnieje duża klasa zagadnień dynamiki stochastycznej, gdzie rozwiązanie w dziedzinie transformat Fouriera, w postaci gęstości widmowych losowych przestrzenno-czasowych pól przemieszczeń, sił i naprężeń daje wystarczającą charakterystykę analizowanego procesu dynamicznego ośrodka bez konieczności powrotu do dziedziny czasowej (por. roz. 4).

Brzegowe równanie całkowe przyjmuje teraz postać:

$$c(x)\tilde{u}(x,\omega) + \int_{\Gamma}\tilde{P}(x,y,\omega)\tilde{u}(y,\omega)d\Gamma(y) = \int_{\Gamma}\tilde{U}(x,y,\omega)\tilde{p}(y,\omega)d\Gamma(y) \tag{1.114}$$

$$+ \int_{\Omega}\tilde{U}(x,y,\omega)\tilde{b}(y,\omega)d\Omega(y),$$

gdzie $\tilde{U}(x,y,\omega)$ jest rozwiązaniem podstawowym operatora L_d^{ω}.

Powyższe równanie można otrzymać w sposób formalny wstawiając $s=i\omega$ w równaniu (1.104), opisującym drgania nieustalone w dziedzinie transformat Laplace'a.

Dyskretyzując brzeg ciała za pomocą elementów brzegowych i aproksymując amplitudy $\tilde{u}(x,\omega)$, $\tilde{p}(x,\omega)$, dla każdej wartości $\omega=(\omega_l)$, $l=1,2,..$, za pomocą wartości węzłowych i funkcji kształtu, otrzymuje się następujący układ równań algebraicznych:

$$[\tilde{H}(\omega)]\{u(\omega)\} = [\tilde{G}(\omega)]\{p(\omega)\} + \{\tilde{B}(\omega)\}, \quad \omega=(\omega_l),\ l=1,2,.. \tag{1.115}$$

gdzie kwadratowe zespolone macierze $[\tilde{H}(\omega)]$ i $[\tilde{G}(\omega)]$ są obliczane dla ciągu wartości ω_l, $l=1,2,...$.

Uwzględniając warunki brzegowe (1.113), równanie (1.115) można transformować do następującej postaci:

$$[\tilde{A}(\omega)]\{\tilde{X}(\omega)\} = \{\tilde{Y}(\omega)\}, \quad \omega=(\omega_l),\ l=1,2,.. \tag{1.115}$$

Równanie to dla ciał ograniczonych posiada jednoznaczne rozwiązanie z wyjątkiem przypadku, gdy ω^2 nie jest wartością własną operatora L_d^{ω}.

W przypadku jednorodnych warunków brzegowych i przy zerowych siłach objętościowych równanie (1.116) przyjmuje postać:

$$[\tilde{A}(\omega)]\{\tilde{X}(\omega)\} = 0. \tag{1.117}$$

Koniecznym i dostatecznym warunkiem istnienia nietrywialnego rozwiązania równania (1.117) jest, aby

$$\det\left|[\tilde{A}(\omega)]\right| = 0. \tag{1.118}$$

Pierwiastki równania (1.118) są wartościami własnymi problemu (1.117).

Ponieważ macierz $[A(\omega)]$ jest pełna i niesymetryczna, więc numeryczne określenie wartości własnych jest pracochłonne . Znając wartości własne można następnie obliczyć postacie stosując równanie (1.117).

1.3.5. Alternatywne sformułowanie dynamiki ośrodka sprężystego w ujęciu metody elementów brzegowych

Główną wadą przedstawionych metod rozwiązania zagadnienia dynamicznego teorii sprężystości była konieczność obliczania macierzy współczynników dla każdej chwili czasu (metoda kroków czasowych) lub dla ciągu wartości parametru przekształcenia całkowego (metody transformacji całkowych). Wynika to z faktu, że rozwiązanie podstawowe elastodynamiki zależy od czasu. Prezentowane niżej alternatywne ujęcie bazuje na rozwiązaniu podstawowym statycznej teorii sprężystości $U(x,y)$ i wymaga tylko jednokrotnego obliczenia macierzy współczynników. Prezentowana metoda umożliwia utworzenie macierzy masy układu sprężystego tylko na podstawie dyskretyzacji brzegu układu mechanicznego.

Stosując do wzoru (1.83) formułę Greena opartą na rozwiązaniu podstawowym operatora L_* otrzymuje się

$$c(x)u(x,t) + \int_\Gamma P(x,y)u(y,t)d\Gamma(y) = \int_\Gamma U(x,y)p(y,t)d\Gamma(y) \tag{1.119}$$
$$+ \int_\Omega U(x,y)b(y,t)d\Omega(y) - \rho\int_\Omega U(x,y)\ddot{u}(y,t)d\Omega(y).$$

Ostatnia całka po prawej stronie równania (1.119) zawiera nieznane pole przyśpieszeń $\ddot{u}(y,t)=(\ddot{u}_i(y,t))$ wewnątrz obszaru Ω. Zakłada się, że pole to można wyrazić w postaci sumy iloczynów nieznanych funkcji czasu $\ddot{\alpha}^j(t)=(\ddot{\alpha}^j_i(t))$ i znanych funkcji współrzędnych $f^j(y)$, $y\in\Omega$,:

$$\ddot{u}_i(y,t) = \ddot{\alpha}^j_i(t)f^j(y), \quad j=1,2,\dots N, \tag{1.120}$$

Funkcje bazowe $f^j(y)$ można wybrać w różny sposób. Jedną z najprostszych klas funkcji bazowych opisuje relacja (por. [1.59-1.63]):

$$f^j(y) = R(A_j,y), \tag{1.121}$$

gdzie $R(A_j,y)$ jest odległością od pewnego punktu A_j do punktu y.

Jeżeli wyrażenie $\delta_{li}f^j$ potraktować jako pseudosiłę objętościową, to wywołuje ona w nieskończonej przestrzeni sprężystej pole pseudoprzemieszczeń Ψ^j_{li} spełniające równanie:

$$L_*(\Psi^j_{li}) = \delta_{li}f^j.$$

Stosując teraz wzór Greena i uwzględniając (1.120), człon inercyjny w formule (1.119) przyjmuje postać:

$$\ddot{\alpha}^j(t)\int_\Omega U(x,y)f^j(y)d\Omega(y)=\ddot{\alpha}^j(t)\Big\{-c(x)\Psi^j(x)$$

$$+\int_\Gamma U(x,y)\Sigma^j(y)d\Gamma(y) - \int_\Gamma P(x,y)\Psi^j(y)d\Gamma(y)\Big\}, \tag{1.122}$$

gdzie $\Psi^j(y)$ i $\Sigma^j(y)$ są wektorami pseudoprzemieszczeń i pseudonaprężeń wywołanych w nieograniczonej przestrzeni sprężystej przez pseudosiłę objętościową $\delta_{ik}f^j$.

Ostatecznie równanie (1.119) przyjmuje postać:

$$c(x)u(x,t) + \int_\Gamma P(x,y)u(y,t)d\Gamma(y) - \int_\Gamma U(x,y)p(y,t)d\Gamma(y)$$

$$= \rho\Big\{-c(x)\Psi^j(x) + \int_\Gamma U(x,y)\Sigma^j(y)d\Gamma(y) - \int_\Gamma P(x,y)\Psi^j(y)d\Gamma(y)\Big\}\ddot{\alpha}^j(t) \tag{1.123}$$

$$+ \int_\Omega U(x,y)b(y,t)d\Omega(y), \qquad x\in A_w$$

gdzie A_w pokrywa się z w-tym punktem węzłowym na brzegu Γ.

Aproksymując pola przemieszczeń $u(y,t)$, sił brzegowch $p(y,t)$ oraz pola pseudoprzemieszczeń $\Psi^j(y)$ i pseudosił $\Sigma^j(y)$ za pomocą funkcji kształtu i wartości węzłowych otrzymuje się

$$[H]\,\{u(t)\} + [G]\,\{p(t)\} - \rho([H][\Psi] - [G][\Sigma])\{\ddot{\alpha}(t)\} = \{B(t)\}.$$

Macierze $[H]$ i $[G]$ określone są identycznie do zagadnienia statycznego natomiast macierze $[\Psi]$ i $[\Sigma]$ zawierają wartości węzłowe funkcji Ψ^j i Σ^j. Zależność (1.120) zapisana dla wszystkich punktów węzłowych $y\in A_j$, $j=1,2,\ldots W$, przybiera następującą postać macierzową

$$\{\ddot{u}(t)\} = [D]\,\{\ddot{\alpha}(t)\},$$

gdzie $[D]$ jest macierzą kwadratową zawierającą wartości funkcji $f^j(y)$ w punktach węzłowych.

Ostatecznie otrzymuje się układ równań różniczkowych zwyczajnych, który w postaci macierzowej ma postać:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [H]\{u(t)\} = [G]\{p(t)\} + \{B(t)\}, \tag{1.124}$$

gdzie macierz bezwładności wyraża się zależnością:

$$[M] = -\rho([H][\Psi] - [G][\Sigma])[D]^{-1}. \tag{1.125}$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych, równanie (1.124) przyjmuje postać:

$$[M']\{\ddot{u}_2\} + [H']\{u_2\} = [G']\{p_2\} + [H'']\{u_1\} + [M'']\{\ddot{u}_1\}, \tag{1.126}$$

gdzie $\{u_2\}$ jest macierzą kolumnową nieznanych przemieszczeń na brzegu Γ_2, natomiast $\{p_2\}$ i $\{u_1\}$ są macierzami kolumnowymi sił i przemieszczeń określonych przez warunki brzegowe (1.82) i (1.81). Macierze $[M']$, $[H']$, $[G']$, $[H'']$, $[M'']$ określone są następująco:

$$[A'] = [A_{22}] - [G_{21}][G_{11}]^{-1}[A_{12}],$$

$$[A''] = [G_{21}][G_{11}]^{-1}[A_{11}] - [A_{21}], \tag{1.127}$$

gdzie A reprezentuje macierze M, H i G, natomiast wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do części brzegu Γ_1 i Γ_2.

Równanie ruchu (1.126) jest rozwiązywane metodą bezpośredniego całkowania względem czasu, np. metodą Newmarka, Wilsona lub Houbolta.

Drgania swobodne są szczególnym przypadkiem opisywanym przez równanie ruchu (1.126). Przyjmując, że na układ nie działają wymuszenia zewnętrzne ($\{u_1\}=0$ i $\{p_2\}=0$), oraz że przemieszczenia zmieniają się harmonicznie w czasie:

$$\{\ddot{u}_2\} = -\omega^2\{u_2\}, \tag{1.128}$$

równanie ruchu (1.126) redukuje się do postaci:

$$([H'] - \omega^2[M'])\{u_2\} = 0. \tag{1.129}$$

Równanie (1.129) przedstawia uogólnione zagadnienie własne w alternatywnym ujęciu metody elementów brzegowych.

1.4. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

Przykład 1.1.

Dla ilustracji zastosowań metody elementów brzegowych do obliczeń sprężystych elementów maszyn obciążonych statycznie rozważono symetryczny ząb prosty koła zewnętrznie uzębionego (por. Burczyński i Mrówczyńska [1.18]).

W literaturze przedmiotu najczęściej rozpatruje się wyodrębniony z koła zębatego pojedynczy ząb obciążony siłą skupioną w górnej części zarysu. Wpływ sąsiednich zębów jest najczęściej pomijany. Głębokość zamocowania wyodrębnionej części zęba zależy od rodzaju koła zębatego i może być uwarunkowana przyjętą metodą obliczeniową (por. Müller [1.58]).

Obliczenia wykonano dla zęba stalowego o następujących parametrach: liczba zębów w kole z=30, współczynnik przesunięcia zarysu x=0, zębatka o kącie zarysu $\alpha_{on}=20^{\circ}$, promień zaokrąglenia głowy zęba $h_{ao}=0.38$.

Wszyskie wymiary zęba odniesiono do modułu, tak że uzyskano geometrię zarysu zęba w wielkościach bezwymiarowych. Ząb utwierdzono na brzegu określonym punktami ABCD (rys. 1.6) i obciążono jednostkową siłą skupioną. Naprężenia główne σ_1 i σ_2 przyjmują na brzegu podstawy zęba wartości ekstremalne. Po stronie, gdzie przyłożono siłę, naprężenia główne σ_1 są styczne do brzegu swobodnego i mają znak dodatni, a naprężenia σ_2 są normalne do brzegu. Po stronie przeciwnej naprężenia główne σ_2 są styczne do brzegu i mają znak ujemny, a naprężenia σ_1 są normalne.

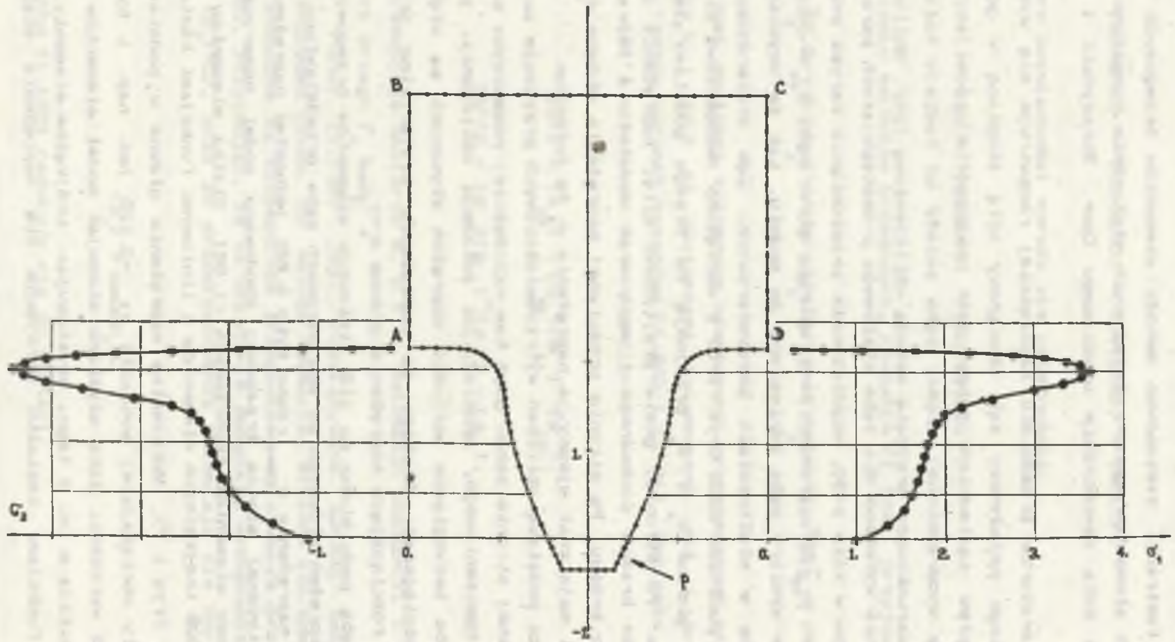
Zwykle za podstawę obliczeń wytrzymałościowych przyjmuje się naprężenia po rozciąganej stronie zęba, gdyż tam najczęściej rozpoczyna się inicjacja pęknięcia zmęczeniowego, chociaż jak pokazują obliczenia, po ściskanej stronie zęba bezwzględne wartości naprężeń stycznych są większe niż po stronie rozciąganej. Dlatego za naprężenia kryterialne przyjmuje się maksymalne rozciągające naprężenia główne $\sigma_1=\sigma_{1max}$.

Zarys zęba podzielono na 118 liniowych elementów brzegowych[5]. Wyniki obliczeń naprężeń głównych po obu stronach zęba przedstawiono na rys.1.6. Maksymalne naprężenie σ_{1max} równe było 3.621 jednostek naprężenia.

Na identycznej siatce brzegowej zbudowano model numeryczny zęba za pomocą metody elementów skończonych [1.86]. Siatka elementów skończonych posiadała 398 trójkątnych elementów z liniowymi funkcjami kształtu i miała 253 węzłów (rys.1.7). Maksymalne naprężenie główne w podstawie zęba po stronie siły obciążającej wynosiło $\sigma_{1max}=3.128$ jed. nap. i było znacznie mniejsze od wartości, jaką uzyskano stosując model elementów brzegowych. Różnice wynikają m.in. z tego, że stosując trójkątne elementy skończone z liniowymi funkcjami kształtu otrzymuje się naprężenia stałe wewnątrz

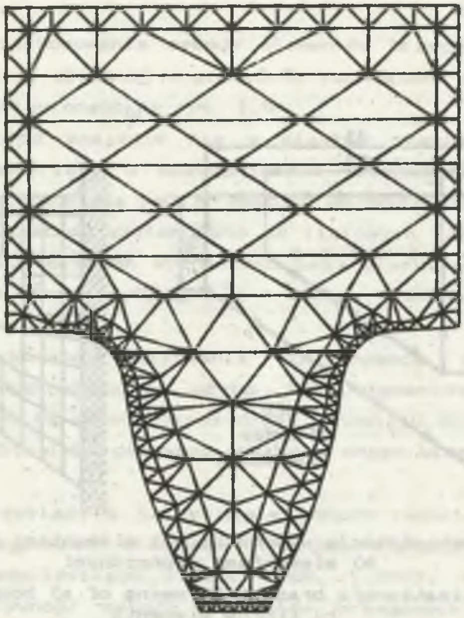
---

5) W pracy własnej [1.18] rozważano także inne modele dyskretne zęba, zwierające 78, 98, 138, 158 i 178 liniowych elementów brzegowych. Podano tam także globalne i lokalne kryteria adaptacyjne umożliwiające zagęszczenie siatki elementów brzegowych.



Rys. 1.6 Dyskretyzacja zęba elementami brzegowymi. Wykres naprężeń głównych

Fig. 1.6 Boundary element discretization of a tooth. Diagram of principal stresses



Rys. 1.7 Dyskretyzacja zęba za pomocą elementów skończonych

Fig. 1.7 Discretization of the tooth using finite elements

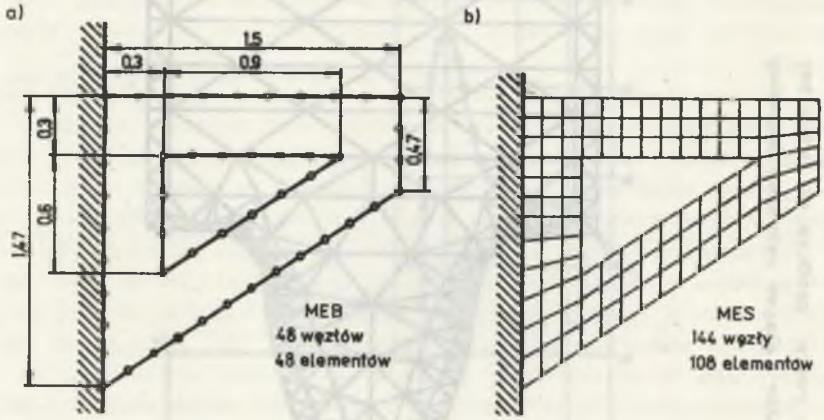
elementu skończonego. Zwykle odnosi się je do środków ciężkości poszczególnych elementów. Jednakże środek ciężkości elementu skończonego przyległego do brzegu nie leży wprost na brzegu, lecz jest od niego oddalony w kierunku wnętrza.

Dla tego samego poziomu dyskretyzacji metoda elementów skończonych daje zwykle mniej dokładne wyniki obliczeń niż metoda elementów brzegowych (por. [1.57, 1.68]). Odnosi się to szczególnie do zagadnień, w których określa się naprężenia na brzegu ciała.

W obliczeniach przeprowadzonych za pomocą metody odwzorowań wiernokątnych [1.58], będącą jedną z bardziej rozpowszechnionych i zaakceptowanych metod służących do określania naprężeń w podstawie zęba, dla zęba o takich samych parametrach jak analizowany w niniejszej pracy, otrzymano maksymalne naprężenie główne σ_{1max} równe 3,629 jed. nap.

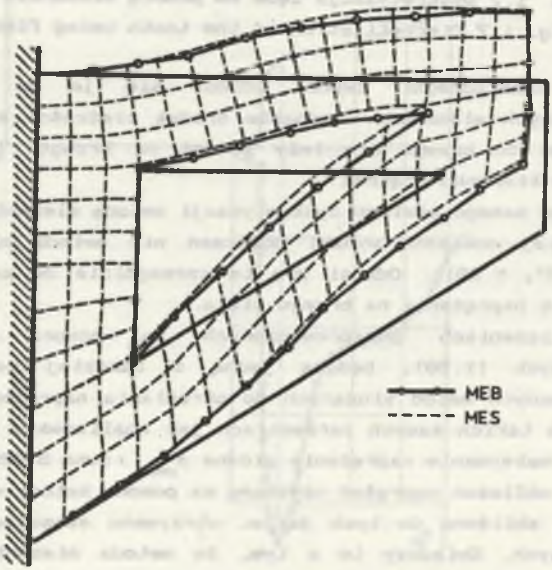
Wyniki obliczeń naprężeń uzyskanę za pomocą metody elementów brzegowych są bardzo zbliżone do tych jakie, otrzymano stosując metodę odwzorowań wiernokątnych. Świadczy to o tym, że metoda elementów brzegowych jest skuteczną i efektywną techniką numeryczną w analizie wytrzymałościowej zębów.

Inne zastosowania metody elementów brzegowych do statycznych obliczeń elementów maszyn znaleźć można w pracy autora [1.13].



Rys. 1.8 Dyskretyzacja wspornika: a) elementami brzegowymi
b) elementami skończonymi

Fig. 1.8 Discretizationofa bractet by means of: a) boundaryelements,
b) finite elements



Rys. 1.9 Pierwsza postać drgań własnych wspornika

Fig. 1.9 The first mode of free vibration of the bracket

Przykład 1.2.

Dla ilustracji zastosowania metody elementów brzegowych do zagadnień dynamicznych, w wersji opisanej w p. 1.3.5, rozwiązano zagadnienie własne dla wspornika przedstawionego na rys. 1.9.

Założono, że układ znajduje się w płaskim stanie odkształcenia i wykonany jest z materiału o następujących własnościach: moduł Younga $0{,}21\times10^{12}$[Pa], liczba Poissona ν=0,3, gęstość ρ=7860[kg/m^3].

Do dyskretyzacji układu zastosowano 48 liniowych elementów brzegowych (rys.1.8a). W wyniku obliczeń wyznaczono trzy pierwsze częstości drgań. Wynosiły one kolejno ω_1=2122[s^{-1}] (okres drgań $0{,}296\cdot10^{-2}$[s]), ω_2=5176[s^{-1}] i ω_3=5741[s^{-1}].

Jednocześnie wykonano obliczenia za pomocą metody elementów skończonych. Do dyskretyzacji użyto 108 elementów czterowęzłowych (rys.1.8b). Otrzymany tą metodą okres drgań wynosił $0{,}312\cdot10^{-2}$[s].

Na rys.1.9 przedstawiono pierwsze postacie drgań własnych otrzymane za pomocą obu metod.

Przedstawiony przykład, a także wiele innych rezultatów numerycznych otrzymanych dla zagadnień własnych i drgań wymuszonych (por. prace Burczyńskiego i Fedelińskiego [1.15, 1.28, 1.29]), wskazują na dużą dokładność i efektywność metody elementów brzegowych w rozwiązywaniu zagadnień dynamiki ośrodka sprężystego.

LITERATURA

[1.1] Ahmad S. and Banerjee P.K.: Time-domain transient elastodynamic analysis of 3-D solids by BEM. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, No.8, pp.1709-1728, 1988.

[1.2] Banerjee P.K., Ahmad S. and Manolis G.D.: Transient elastodynamic analysis of three-dimensional problems by boundary element method. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 14, pp.933-949, 1986.

[1.3] Banerjee P.K., Ahmad S. and Manolis G.D.: Advanced elastodynamic analysis.Chapter 5 in: Boundary element methods in mechanics (Ed. D.E. Beskos), North-Holland, Amsterdam 1987.

[1.4] Banerjee P.K. and Butterfield R.: Boundary element methods in engineering science. McGraw-Hill, London 1981.

[1.5] Bijak-Żochowski M.: Numeryczne zastosowania metody całkowania brzegowego do zagadnień sprężystości i plastyczności. Archiwum Budowy Maszyn, t.XXII, z. 4, s.407-427, 1975.

[1.6] Brebbia C.A.: The boundary element method for engineers. Pentech Press, London 1978.

[1.7] Brebbia C.A. and Nardini D.: Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 2, pp.228-233, 1983.

[1.8] Brebbia C.A., Telles J.C.F. and Wrobel L.C.: Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag, Berlin 1984.

[1.9] Brebbia C.A. and Walker S.: Boundary element techniques in engineering. Newnes-Butterworths, London 1980.

[1.10] Burczyński T.: Metoda brzegowych równań całkowych w przestrzennych zadaniach teorii sprężystości i sprężysto-plastyczności w aspekcie możliwości zastosowań w analizie stanu naprężenia w kolejowych zestawach kołowych. Spraw. z pracy n-b IMiPKM Pol. Śl. NB-305/RMK/81, (kier. pracy R. Bąk), Problem węzłowy PAN 05.12 -1.5.21, Gliwice 1981.

[1.11] Burczyński T.: Analiza dynamiczna układów prętowych metodą elementów brzegowych. Mat. IX Konferencji teorii maszyn i mechanizmów, Kraków 1982.

[1.12] Burczyński T.: Modelowanie jednowymiarowych układów ciągłych metodą elementów brzegowych. Zb. ref. 22 Sympozjonu PTMTS nt. Modelowanie w mechanice, s.77-84, Gliwice-Wisła 1983.

[1.13] Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych w analizie sprężystych elementów konstrukcyjnych. Spraw. z pracy naukowo-badawczej IMiPKM Pol. Śl. NB-148/RMT-4/86, (kier. pracy A. Jakubowicz), Etap I, Zad. 1, CPBP 02.01. IPPT PAN, Gliwice 1986.

[1.14] Burczyński T., Adamczyk T.: Dynamika układów o dyskretno-ciągłych parametrach w ujęciu metody elementów brzegowych. ZN Pol. Rzeszowskiej, nr 13, s. Mechanika, nr 5, s.59-62, Rzeszów 1983.

[1.15] Burczyński T., Fedeliński T.: Metoda elementów brzegowych w analizie drgań własnych sprężystych elementów kostrukcyjnych. Spraw. z pracy naukowo-badawczej IMiPKM Pol. Śl. NB-148/RMT-4/86, (kier. pracy A. Jakubowicz), Etap II, Zad. 2, CPBP 02.01. IPPT PAN, Gliwice 1987.

[1.16] Burczyński T., Grabacki J., Orkisz J.: Metoda elementów brzegowych. Część 4 w: Komputerowe metody mechaniki ciał stałych (red. M. Kleiber), Mechanika Techniczna, tom XI, PWN, Warszawa (w przygotowaniu).

[1.17] Burczyński T., John A.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do zadań brzegowych teorii lepkosprężystości. ZN Pol. Śląskiej, s. Mechanika, nr 83, s.81-100, Gliwice 1986.

[1.18] Burczyński T., Mrówczyńska B.: Metoda elementów brzegowych w analizie wytrzymałościowej kół zębatych. ZN Politechniki Śląskiej, s. Transport, nr 9, Gliwice 1989.

[1.19] Cole D.M., Kosloff D.D. and Minster J.B.: A numerical boundary integral equation method for elastodynamics - I. Biulletin of the Seismological Society of America, Vol. 68, No 5, pp.1331-1357, 1978.

[1.20] Crouch S.L. and Starfield A.M.: Boundary element methods in solids mechanics. George Allen & Unvin, London 1983.

[1.21] Cruse T.A.: A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem -II. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 22, No. 2, pp.341-355, 1968.

[1.22] Cruse T.A.: Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. Int. J. Solids Structures, Vol. 5, No. 12, pp.1259-1274, 1969.

[1.23] Cruse T.A.: Application of the boundary integral equation method to three-dimensional stress analysis. Computer and Structures, Vol. 3, No. 5, pp.509-527, 1973.

[1.24] Cruse T.A.: An improved boundary integral equation method for three-dimensional elastic stress analysis. Computer and Structures, Vol. 4, No. 4, pp.741-754, 1974.

[1.25] Cruse T.A. and Rizzo F.J.: A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem -I. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 22, No. 1, pp.244-259, 1968.

[1.26] Dubner H. and Abate J.: Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to finite Fourier cosine transform. Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 15, No. 1, pp.115-123, 1968.

[1.27] Durbin F.: Numerical solution of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. Computer J., Vol. 17, pp.371-376, 1974.

[1.28] Fedeliński P., Burczyński T.: Modelowanie drgań sprężystych elementów konstrukcyjnych metodą elementów brzegowych. Mat. 27 Sympozjum nt. Modelowanie w mechanice, s.129-136, Gliwice-Wisła 1988.

[1.29] Fedeliński P. and Burczyński T.: Analysis of vibrating structural elements by the boundary element method. Prac. Nauk. Inst. Konstr. i Ekspl. Maszyn Pol.Wrocławskiej, nr 56, pp.129-133, Wrocław 1989.

[1.30] Gomez-Lera M.S. and Alarcon E.: Elastostatics. Chap. 3 in: Boundary element methods in mechanics (Ed. D.E. Beskos), North-Holand, Amsterdam 1987.

[1.31] Haisheng R.: The symmetric dynamic boundary element method for transient elastodynamic analysis. In: Boundary elements X (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 4: Geomechanics, wave propagation and vibrations, pp.375-386, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[1.32] Hall W.S.: Integration methods for singular boundary element integrands. In: Boundary elements X (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 1: Mathematical and computational aspects, pp.219-236, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[1.33] Hartmann F.: Computing the C-matrix in non-smooth boundary points. In: New developments in boundary element methods (Ed. C.A. Brebbia), pp.367-379, Butterworths, London 1980.

[1.34] Hartmann F.: Elastostatics. Chap. 4 in: Progress in boundary element methods (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 1, Pentech Press, London 1981.

[1.35] Jaswon M.A. and Symm G.T.: Integral equation methods in potential theory and elastostatics. Academic Press, London 1977.

[1.36] John A., Adamczyk T., Burczyński T.: Analiza drgań układów lepkosprężystych metodą elementów brzegowych. Mat. XI Sympozjum Drgania w układach fizycznych, s.171-172, Poznań-Błażejewko 1984.

[1.37] Kanarachos A. and Provatidis Ch.: Perfomance of mass matrices for the BEM dynamic analysis of wave propagation problems. Computer Methods in Appl. Mech. Eng., Vol. 63, pp.155-165, 1987.

[1.38] Kellog P.D.: Foundations of potential theory. Dover, New York 1953.

[1.39] Kitahara M. and Nakagawa K.: Boundary integral equation methods in three dimensional elastodynamics. In: Boundary elements VII (Eds. C.A. Brebbia and G. Maier), pp.6/27-6/36, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[1.40] Kobayashi S.: Some problems of the boundary integral equation method in elastodynamics. In: Boundary elements V (Eds. C.A. Brebbia, T. Futugami and M. Tanaka), pp.775-784, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[1.41] Kobayashi S.: Fundamentals of boundary integral equation methods in elastodynamics. Chapter 1 in: Topics in boundary element research (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[1.42] Kobayashi S.: Elastodynamics. Chapter 4 in: Boundary element methods in mechanics (Ed. D.E. Beskos), North-Holand, Amsterdam 1987.

[1.43] Kobayashi S. and Nishimura N.: Transient of tunnels and caverns of arbitrary shape due to travelling waves. Chapter 7 in: Developments in boundary element methods-2 (Eds. P.K. Banerjee and R.P. Shaw), Applied Science Publishers, London 1982.

[1.44] Kuhn G.: Boundary element technique in elastostatics and linear fracture mechanics. Chap. In: Finite element and boundary element techniques from mathematical and engineering point of view (Eds. E. Stein and W. Wendland), CISM, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[1.45] Kuhn G. and Mohrmann W.: Boundary element method in elastostatics: theory and application. Appl. Math. Modellimg, Vol. 7, pp.97-105, 1983.

[1.46] Kupradze B.D.: Mietody potencyała w tieorii uprugosti. Fizmatgiz, Moskwa 1963.

[1.47] Kupradze B.D.(red): Triechmiernyje zadaczi matiematiczeskoj tieorii uprugosti i tiermouprugosti. Nauka, Moskwa 1976.

[1.48] Lachat J.C. and Watson J.O.: A second generation boundary integral equation program for three-dimensional elastic analysis. In: Boundary-integral equation method-computational applications in applied mechanics (Eds. T.A. Cruse and F.J. Rizzo), ASME, New York 1975.

[1.49] Lachat J.C. and Watson J.O.: Effective numerical treatment of boundary integral equation: a formulation for three-dimensional elastostatics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, No. 5, pp.991-1005, 1976.

[1.50] Manolis G.D.: A comparative study on three boundary element method approaches to problems in elastodynamics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, pp.73-91, 1983.

[1.51] Manolis G.D., Ahmad S. and Banerjee P.K.: Boundary element method implementation for three-dimensional transient elastodynamics. Chapter 2 in: Developments in boundary element methods-4 (Eds. P.K. Banerjee and J.O. Watson), Elsevier Applied Science Publishers, London 1986.

[1.52] Manolis G.D. and Beskos D.E.: Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and Laplace transform. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp.573-599, 1981.

[1.53] Manolis G.D. and Beskos D.E.: Dynamic response of lined tunnels by an isoparametric boundary element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 36, pp.291-307, 1983.

[1.54] Mansur W.J. and Brebbia C.A.: Transient elastodynamics using a time-stepping technique. In: Boundary element techniques V (Eds. C.A. Brebbia, T. Futugami and M. Tanaka), pp. 677-698, Springer Verlag, Berlin 1983.

[1.55] Michlin S.G.: Mnogomiernyje singularnyje intiegrały i intiegralnyje urawnienija. Fizmatgiz, Moskwa 1962.

[1.56] Mackerle J. and Brebbia C.A.: The boundary element reference book. CMP, 1987.

[1.57] Mukherjee S. and Morjaria M.: On the efficiency and accuracy of the boundary element method and the finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, No. 3, pp.515-522, 1984.

[1.58] Müller L.: Obliczanie naprężeń w podstawie zęba (metoda odwzorowań wiernokątnych). ZN Pol. Śl., s. Transport, nr 8, Gliwice 1988.

[1.59] Nardini D. and Brebbia C.A.: A new approach to free vibration analysis using boundary elements. In: Boundary element methods in engineering (Ed. C.A. Brebbia), pp.312-326, Springer-Verlag, Belin 1982.

[1.60] Nardini D. and Brebbia C.A.: Transient dynamic analysis by the boundary element method. In: Boundary elements (Eds. C.A. Brebbia, T. Futagami and M. Tanaka), pp.719-730, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[1.61] Nardini D. and Brebbia C.A.: The solution of parabolic and hyperbolic problems using an alternative boundary element formulation. In: Boundary element methods VII (Eds. C.A. Brebbia and G. Maier), Vol. 1, pp.3/87-3/97, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[1.62] Nardini D. and Brebbia C.A.: Boundary integral formulation of mass matrices for dynamic analysis. Chap. 7 in: Topics in boundary element research (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 2, pp.191-208, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[1.63] Nardini D. and Brebbia C.A.: Transient boundary element elastodynamics using the dual reciprocity method and modal superposition. In: Boundary element method VIII (Ed. C.A. Brebbia), pp.435-443, Springer-Verlag, Berlin 1986.

[1.64] Nowacki W.: Teoria sprężystości. PWN, Warszawa 1970.

[1.65] Parton V.Z. and Perlin P.I.: Integral equations in elasticity. Mir Publishers, Moscow 1982.

[1.66] Perreira P.: A numerical integration scheme for the Galerkin approach in boundary elements. In: Boundary elements X (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 1: Mathematical and computational aspects, pp.297-311, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[1.67] Polizzotto C.: An energy approach to the boundary element method. Part I: Elastic solids. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 69, No. 2, pp.167-184, 1988.

[1.68] Radaj D., Möhrmann W. and Schilberth G.: Economy and convergence of notch stress analysis using boundary and finite element methods. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 20, pp.565-572, 1984.

[1.69] Rice J.M. and Sadd M.H.: Propagation and scatering of SH-waves in semi-infinite domains using a time-dependent boundary element method. Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, pp.641-645, 1984.

[1.70] Rizzo F.J.: An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quart. Appl. Math. Vol. 25, pp.83-95, 1967.

[1.71] Rizzo F.J. and Shippy D.J.: A boundary integral approach to potential and elasticity problems for axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions. Mech. Research Comm., Vol. 6, No. 2, pp.99-103, 1979.

[1.72] Rizzo F.J. and Shippy D.J.: A boundary element method for axisymmetric elastic bodies. Chapter 3 in: Developments in boundary element method-4 (Eds. P.K. Bamerjee and J.O. Watson), Elsevier Applied Science Publishers, London 1985.

[1.73] Rizzo F.J., Shippy D.J. and Rezayat M.: A boundary integral equation method for radiation and scattering of elastic waves in three dimensions. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, pp.115-129, 1985.

[1.74] Shippy D.J.: Application of the boundary integral equation method to transient phenomena in solids. In: Boundary-integral equation method - computational applications in applied mechanics. ASME, New York 1975.

[1.75] Shippy D.J. and Rizzo F.J.: On the effectiveness of three boundary integral equation formulations for certain axisymmetric elastostatic problems. Res Mechanica, Vol. 4, pp.43-56, 1982.

[1.76] Spyrakos C.C. and Antes H.: Time domain boundary element method approaches in elastodynamics: a comparative study. Computer and Structures, Vol. 24, No. 4, pp.529-535, 1986.

[1.77] Tanaka M. and Tanaka K.: On boundary-value element discretization of inhomogeneous elastodynamic problems. Applied Mathematical Modelling, Vol. 5, No. 3, 1981.

[1.78] Ugodczikow A.G., Hutorjanskij N.M.: Mietod granicznych elemientow w miechanikie deformirujemogo twierdogo tiela. Izd. Kazanskogo Uniwiersiteta, Kazań 1986.

[1.79] Watson J.O.: Advanced implementation of the boundary element method for two- and three-dimensional elastostatics. Chap. 3 in: Developments in boundary element methods-1 (Eds. P.K. Banerjee and R. Butterfield), Applied Science Publishers, London 1979.

[1.80] Wendland W.L.: Asymptotic accuracy and convergence. Chapter in: Progress in boundary element methods (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 1, Pentech Press, London 1981.

[1.81] Wendland W.L.: Asymptotic accuracy and convergence of point collocation methods. Chapter in: Topics in Boundary element research, (Ed. C.A Brebbia), Vol. 2, Springer-Verlag , Berlin 1985.

[1.82] Wendland W.L.: Mathematical properties and asymptotic error estimates for elliptic boundary element methods. In: Advanced boundary element methods (Ed. T.A. Cruse), pp.475-489, Springer-Verlag. Berlin 1988.

[1.83] Wilcox D.J. and Gibson I.S.: Evaluation of a new method for numerical Laplace transformation and inversion. Inter. J. Num. Meth. Eng., Vol. 20, pp.1521-1528, 1984.

[1.84] Wilson R.B. and Cruse T.A.: Effecient implementation of anisotropic three dimensional boundary-integral equation stress analysis. Inter. J. Num. Meth. Eng., Vol. 12, No. 9, pp.1383-1397, 1978.

[1.85] Zielinski A.P. and Herrera I.: Trefftz method: fitting boundary conditions. Inter. J. Num. Meth Eng., Vol. 24, pp.871-891, 1987.

[1.86] Zienkiewicz O.C.: The finite element method. McGraw-Hill, 1977.

2. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ANALIZIE ZAGADNIEŃ NIELINIOWYCH

2.1. UWAGI WSTĘPNE

Metoda elementów brzegowych, jako uniwersalna metoda numeryczna mechaniki, znalazła największe zastosowanie w rozwiązywaniu zagadnień liniowych. Przebieg rzeczywistych zjawisk i procesów mechanicznych zachodzących w odkształcalnych ciałach stałych wykracza zwykle poza ramy modeli liniowych (por. np. [2.19, 2.39, 2.42, 2.52, 2.60, 2.61, 2.75]).

Metoda elementów brzegowych, jako rozwijająca się intensywnie metoda numeryczna, nie znalazła jeszcze tak szerokiego zastosowania do nieliniowych zagadnień mechaniki, jak metoda elementów skończonych (por. np. [2.27, 2.53, 2.74]). Za pomocą tej metody można jednak sformułować i rozwiązać nieliniowe problemy mechaniki posługując się powszechnie stosowanymi procedurami przyrostowymi i iteracyjnymi.

Pionierską pracą poświęconą zastosowaniu metody elementów brzegowych do zagadnień fizycznie nieliniowych był artykuł Swedlowa i Cruse'a [2.62] z 1971r. W pracy tej po raz pierwszy sformułowano przestrzenne zagadnienie plastycznego płynięcia w postaci całkowej, uwzględniającej odkształcenia plastyczne.

Płaskie zagadnienia teorii plastyczności oraz sprężysto-plastyczne skręcanie pręta w ujęciu metody elementów brzegowych rozważane było w pracy Mendelsona i Albertsa [2.40].

Mukherjee [2.43] sformułował płaskie zagadnienie termo-sprężysto-plastyczności w ujęciu brzegowych równań całkowych oraz wskazał na pewne nieprawidłowości w formułach prezentowanych w pracach Mendelsona.

Bardzo ważny wkład do badania zagadnień niesprężystych w ujęciu brzegowych równań całkowych wniósł Bui [2.9], który przedstawił poprawnie sformułowane wyrażenia na gradient całki osobliwej członu nieliniowego zawierającego odkształcenia plastyczne.

W pracach Tellesa i Brebbi [2.8, 2.66-2.69] podano kompletne sformułowania metody elementów brzegowych dla zagadnień trójwymiarowych i dwuwymiarowych teorii plastyczności w ujęciu odkształceń i naprężeń wstępnych oraz pseudosił objętościowych.

Następnie pojawiło się wiele prac, w których metoda elementów brzegowych stosowana była od różnych problemów niesprężystych. Warto tu wymienić następujące prace: Banerjee i Mustone [2.5], Banerjee i Cathie i Davies [2.2], Banerjee i Cathie [2.3], Mukherjee [2.45], Nashimura i Kobayashi [2.49], Benitez, Alarcon, Brebbia i Telles [2.7], Oliveria Faria, Mota Soares, Pereira i Brebbia [2.55], Banerjee i Davies [2.4], Maier i Novati [2.33], Maier i Polizzotto [2.36], Mustone [2.48], Banerjee i Raveenda [2.6], Henry i Banerjee [2.20, 2.21], Telles i Carrer [2.71] oraz opracowanie Burczyńskiego [2.10].

Problemy plastycznego przystosowania do obciążeń cyklicznie zmiennych w czasie[6] badali Maier i Nappi [2.32] oraz Maier i Polizzotto [2.37].

Próbę symetrycznego ujęcia metody elementów brzegowych do zagadnień sprężysto-plastycznych podjęli Maier [2.31], Maier i Polizzotto [2.38] i Polizzotto [2.57-2.59], Maier, Novati i Sirtori [2.35] oraz Novati i Burczyński [2.51].

Zagadnienia nieliniowości geometrycznych formułowane były następujących pracach: Novati i Brebbia [2.50] oraz Chandra i Mukherjee [2.15-2.18, 2.46].

Problemy nieliniowe geometrycznie i fizycznie dla płyt rozważane były przez następujących autorów: Kamiya [2.22, 2.23], Kamiya i Sawaki [2.24, 2.25], Kamiya, Sawaki, Nakamura i Fukui [2.26] oraz Tanaka [2.63, 2.64].

Uogólnioną koncepcję zastosowania metody elementów brzegowych do problemów opisanych nieliniowym równaniem operatorowym przedstawili Tosaka i Kakuda [2.72].

Zastosowanie nieosobliwej wersji metody elementów brzegowych, opartej na metodzie Trefftza, przedstawił dla zagadnień sprężysto-plastycznych Zieliński [2.73].

Z opracowań książkowych lub samodzielnych rozdziałów monograficznych ujmujących tematykę zastosowania metody elementów brzegowych do zagadnień nieliniowych należy wymienić: Telles i Brebbia [2.70], Mukherjee [2.44], Telles [2.65], Maier, Novati i Perego [2.34] oraz Mukherjee i Chandra [2.47].

Omówione wyżej prace dotyczą zastosowania metody elementów brzegowych do nieliniowych zagadnień statycznych.

Ostatnio metoda elementów brzegowych znalazła także zastosowanie w nieliniowych zagadnieniach dynamicznych. Pierwszą próbę zastosowania metody do sformułowania problemów dynamicznych z nieliniowościami geometrycznymi i fizycznymi podjęli Burczyński i Adamczyk [2.11, 2.1]. Ci sami autorzy stosowali także metodę do zagadnień dynamicznych z nieliniowymi warunkami brzegowymi [2.12, 2.13].

Kantoni i Beskos [2.28-2.30] zastosowali metodę elementów brzegowych do dynamicznych zagadnień sprężysto-plastycznych i lepko-plastycznych.

Uogólnione sformułowanie dynamicznych zagadnień nieliniowych mechaniki w ujęciu metody elementów brzegowych, uwzględniające nieliniowości geometryczne (w opisie materialnym i przestrzennym), fizyczne i nieliniowe warunki brzegowe przedstawili Burczyński i Adamczyk [2.14].

W niniejszym rozdziale przedstawiono, na podstawie oryginalnych prac własnych, sformułowanie metody elementów brzegowych dla nieliniowości geometrycznych, fizycznych oraz dla nieliniowych warunków brzegowych.

---

[6] ang. "shakedown".

Zagadnienie ujęto w sposób ogólny i jednolity dla wymienionej klasy nieliniowości uwzględniając jednocześnie dynamiczny stan ośrodka mechanicznego.

2.2. NIELINIOWOŚCI GEOMETRYCZNE

2.2.1. Opis materialny

Przyjmuje się, że w chwili początkowej $t=0$, rozpatrywany ośrodek, wypełniający obszar $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ (d=2 lub 3) i ograniczony brzegiem Γ, opisany jest w kartezjańskim układzie współrzędnych Lagrange'a x_i z bazą e_i (i=1,..d). W chwili następnej $t>0$ ośrodek przemieszczając się wypełni obszar V ograniczony brzegiem S. Będzie on opisany w kartezjańskim układzie współrzędnych Eulera z_i z tą samą bazą e_i. Zakłada się, że Γ i S spełniają warunki powierzchni Lapunowa.

Odwzorowanie obszaru Ω w V ma postać:

$$z_i = u_i(x_k,t) + x_i, \quad x_i\in\Omega, \; z_i\in V\times T, \; T=(0,t), \; t\in(0,\infty), \tag{2.1}$$

gdzie u_i jest składową wektora przemieszczenia $u(x,t)=(u_i(x,t))$.

Deformacja ośrodka opisana zależnością (2.1) generuje pole odkształceń i naprężeń. W opisie materialnym Lagrange'a tensor odkształceń skończonych Greena ma postać:

$$2\gamma_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,k}u_{k,j} = 2e_{ij} + 2\eta_{ij}, \tag{2.2}$$

gdzie wyrażenia e_{ij} i η_{ij} przedstawiają liniową i nieliniową część tensora γ_{ij}.

Tensorowi Greena odpowiada tensor naprężeń Kirchhoffa T_{ij}, który spełnia równania ruchu Signoriniego (por. [2.19]):

$$-(T_{kj}z_{i,k})_{,j} + \rho\ddot{u}_i = b_i, \quad (x_k,t)\in\Omega\times T=\Omega_T, \tag{2.3a}$$

$$T_{kj}z_{i,k}n_j = p_i, \quad (x_k,t)\in\Gamma\times T=\Gamma_T, \tag{2.3b}$$

gdzie n_j jest jednostkowym wektorem normalnym do brzegu Γ, b_i i p_i przedstawiają odpowiednio siłę objętościową i powierzchniową, które odniesione są do konfiguracji początkowej.

Zakładamy, że pole przemieszczeń spełnia jednorodne warunki początkowe. Nie zmniejsza to ogólności rozważań, bowiem każde niejednorodne zagadnienie początkowe można sprowadzić do jednorodnego przyjmując, że w sile objętościowej b_i uwzględnione jest wymuszenie ruchu ośrodka warunkami początkowymi (por. roz. 1).

Uwzględniając (2.1) w równaniach (2.3) otrzymuje się:

$$-T_{ij,j} + \rho\ddot{u}_i = b_i^*, \tag{2.4a}$$

$$T_{ij}n_j = p_i^*, \tag{2.4b}$$

gdzie

$$b_i^* = b_i + (T_{kj}u_{i,k})_{,j}, \qquad p_i^* = p_i - T_{kj}u_{i,k}n_j.$$

Wielkości b_i^* oraz p_i^* traktować można odpowiednio jako pseudosiłę objętościową i pseudosiłę powierzchniową. Wówczas równania (2.4) są identyczne z równaniami Eulera występującymi w teorii małych odkształceń. Do ich rozwiązania zastosować można sposób opisany poniżej.

Rozważane jest zagadnienie przestrzeni sprężystej obciążonej w chwili czasu $t=\tau$, w punkcie $y=(y_i)$ siłą skupioną działającą w kierunku wersora e_m. W przestrzeni tej powstanie pole przemieszczeń $U_{im}(x,y,t-\tau)$ (por. wzór (1.98)), które jest odpowiedzią na jednostkowy impuls $\delta_{im}\delta(x-y)\delta(t-\tau)$. Rozwiązanie podstawowe U_{im} generuje pole odkształceń E_{ijm} i naprężeń T_{ijm}. Naprężenia T_{ijm} spełniają równania ruchu Eulera:

$$-T_{ijm,j} + \rho\ddot{U}_{im} = \delta_{im}\delta(x-y)\delta(t-\tau), \qquad (x,y)\in\mathcal{E}^d, \tag{2.5a}$$

$$T_{ijm}n_j = P_{im}, \qquad x\in\Gamma,\ y\in\mathcal{E}^d, \tag{2.5b}$$

i są związane z odkształceniami prawem Hooke'a:

$$T_{ijm} = 2\mu E_{ijm} + \delta_{ij}\lambda E_{kkm}, \tag{2.6}$$

gdzie

$$E_{ijm} = (U_{im,j} + U_{jm,i})/2.$$

W celu wyprowadzenia brzegowych formuł całkowych w opisie Lagrange'a pomnóżmy równanie (2.4a) przez rozwiązanie podstawowe elastodynamiki U_{im} i scałkujmy po obszarze Ω_T. Otrzymujemy wtedy:

$$-\int_{\Omega_T} U_{im}(x,y,t-\tau)T_{ij,j}(x,\tau)d\Omega_T + \int_{\Omega_T} U_{im}(x,y,t-\tau)\rho\ddot{u}_i(x,\tau)d\Omega_T =$$
$$\int_{\Omega_T} U_{im}(x,y,t-\tau)b_i(x,\tau)d\Omega_T + \int_{\Omega_T} U_{im}(x,y,t-\tau)\Big[T_{kj}(x,\tau)u_{i,k}(x,\tau)\Big]_{,j}d\Omega_T, \tag{2.7}$$

gdzie $d\Omega_T = d\Omega(x)d\tau$.

Stosując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego oraz biorąc pod uwagę jednorodność warunków początkowych równanie (2.7) po przekształceniach przyjmuje postać:

$$-\int_{\Gamma_T} U_{im} p_i d\Gamma_T + \int_{\Omega_T} U_{im,j} T_{kj} u_{i,k} d\Omega_T + \int_{\Omega_T} \rho \dot{U}_{im} \dot{u}_i d\Omega_T = \int_{\Omega_T} U_{im} b_i d\Omega_T - \int_{\Omega_T} E_{ijm} T_{ij} d\Omega_T , \tag{2.8}$$

gdzie $d\Gamma_T = d\Gamma(x)d\tau$.

Podobne operacje wykonywane są z równaniem (2.5). Jeśli pomnożyć go przez u_i i scałkować po obszarze Ω_T, to otrzymuje się następującą postać całkową:

$$-\int_{\Gamma_T} u_i P_{im} d\Gamma_T + \int_{\Omega_T} \rho \dot{U}_{im} \dot{u}_i d\Omega_T = u_m(y,t) - \int_{\Omega_T} T_{ijm} e_{ij} d\Omega_T . \tag{2.9}$$

Odejmując teraz od równania (2.9) równanie (2.8) otrzymuje się ostatecznie (Burczyński i Adamczyk [2.14]):

$$u_m(y,t) = \int_{\Gamma_T} U_{im} p_i d\Gamma_T - \int_{\Gamma_T} P_{im} u_i d\Gamma_T + \int_{\Omega_T} U_{im} b_i d\Omega_T$$

$$- \int_{\Omega_T} U_{im,j} T_{kj} u_{i,k} d\Omega_T + \int_{\Omega_T} (T_{ijm} e_{ij} - E_{ijm} T_{ij}) d\Omega_T . \tag{2.10}$$

Powyższe wyrażenie przedstawia uogólnienie formuły całkowej Somogliany na dynamiczne zagadnienia geometrycznie nieliniowe w opisie materialnym. Jeśli w formule całkowej (2.10) pominąć człony nieliniowe (dwie ostatnie całki), to będą one przedstawiać znany wzór Somogliany dla zagadnień geometrycznie liniowych (por. roz. 1). Inne szczególne postacie formuły (2.10) zależą od przyjętego równania konstytutywnego ośrodka. Problem ten rozważany jest w p. 2.3.

2.2.2. Opis przestrzenny

Posługując się opisem przestrzennym Eulera wyprowadzić można równania analogiczne do (2.10). W opisie tym tensor odkształceń Almansiego ma postać:

$$2\varepsilon_{ij} = D_j u_i + D_i u_j - D_i u_k D_j u_k = 2e_{ij} - 2n_{ij}, \qquad (2.11)$$

gdzie $D_j(\ ) = \partial(\ )/\partial z_j$.

Tensorowi ε_{ij} odpowiada tensor naprężeń Cauchy'ego σ_{ij}. Powinien on spełniać równania ruchu Eulera (por. [2.54]):

$$-D_j\sigma_{ij} + \rho D_t v_i = b_i, \qquad (z_k,t)\in V\times T = V_T,$$

$$(2.12)$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i, \qquad (z_k,t)\in S\times T = S_T,$$

gdzie $v_i = D_t u_i$, D_t jest operatorem pochodnej materialnej.

Rozwiązanie podstawowe dla przestrzeni nieograniczonej $U_{im}(z,y,t-\tau)$ generuje pola: odkształceń E_{ijm} i naprężeń σ_{ijm}. Pole naprężeń σ_{ijm} powinno spełniać równanie:

$$-D_j\sigma_{ijm} + \rho D_t V_{im} = \delta_{im}\delta(z-y)\delta(t-\tau), \qquad (z,y)\in\mathcal{E}^d,$$

$$(2.13)$$

$$\sigma_{ijm} n_j = P_{im}, \qquad z\in S,\ y\in\mathcal{E}^d,$$

gdzie $V_{im} = D_t U_{im}$.

Przyjmujemy liniowy związek konstytutywny:

$$\sigma_{ijm} = 2\mu E_{ijm} + \lambda\delta_{ij} E_{kkm}, \qquad (2.14)$$

gdzie

$$E_{ijm} = (D_i U_{jm} + D_j U_{im})/2.$$

Podobnie jak poprzednio, w celu wyprowadzenia formuły całkowej tym razem w opisie Eulera, mnożymy równanie (2.12) przez U_{im}, całkujemy po obszarze V i korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego otrzymujemy:

$$-\int_S U_{im} p_i dS + \int_V E_{ijm} \sigma_{ij} dV + \int_V U_{im} \rho D_t(v_i) dV = \int_V U_{im} b_i dV. \tag{2.15}$$

Ostatnią całkę występującą po lewej stronie równania (2.15) przekształcić można w następujący sposób:

$$\int_V U_{im} \rho D_t(v_i) dV = \int_V D_t(U_{im} \rho v_i) dV - \int_V U_{im} v_i D_t \rho dV - \int_V V_{im} \rho v_i dV. \tag{2.16}$$

Korzystając z twierdzenia o pochodnej materialnej całki objętościowej (por. [2.19]) oraz z równania ciągłości otrzymuje się:

$$\int_V U_{im} \rho D_t(v_i) dV = D_t \int_V U_{im} \rho v_i dV - \int_V V_{im} \rho v_i dV. \tag{2.17}$$

Następnie równanie (2.13) mnożone jest przez u_i i całkowane po V. Po przekształceniach otrzymuje się równanie, które odjęte od równania (2.15) daje w rezultacie następującą zależność:

$$\delta(t-\tau) u_m(y,\tau) = \int_S U_{im} p_i dS - \int_S P_{im} u_i dS + \int_V U_{im} b_i dV$$

$$+ D_t \int_V \rho (V_{im} u_i - v_i U_{im}) dV + \int_V (\sigma_{ijm} e_{ij} - E_{ijm} \sigma_{ij}) dV. \tag{2.18}$$

Całkując równanie (2.18) ze względu na czas w przedziale (0,t) i uwzględniając jednorodność warunków początkowych otrzymujemy zależność będącą odpowiednikiem równania (2.10) w opisie przestrzennym (Burczyński i Adamczyk [2.14]):

$$u_m(y,t) = \int_{S_\tau} U_{im} p_i dS_\tau - \int_{S_\tau} P_{im} u_i dS_\tau + \int_{V_\tau} U_{im} b_i dV_\tau + \int_{V_\tau} (\sigma_{ijm} e_{ij} - E_{ijm} \sigma_{ij}) dV_\tau. \tag{2.19}$$

Przedstawione zostały dwa sposoby opisu zachowania się ciała odkształcalnego w ujęciu całkowym. Formuła (2.10) reprezentuje uogólniony wzór Somigliany w opisie materialnym (Lagrange'a), natomiast formuła (2.19) w opisie przestrzennym (Eulera).

2.3. NIELINIOWOŚCI FIZYCZNE

Zakłada się, że rozpatrywany ośrodek jest jednorodny i izotropowy oraz że równanie konstytutywne ośrodka da się przedstawić w następującej ogólnej postaci:

$$T_{ij} = (CN)_{ijkl}\gamma_{kl} = (C_{ijkl} + N_{ijkl})\gamma_{kl} = T^{L}_{ij} + \hat{T}_{ij}, \tag{2.20}$$

gdzie tensory C_{ijkl} i N_{ijkl} charakteryzują własnosci materiałowe.

Za pomocą równania (2.20) opisać można własności wielu znanych materiałów, z których wykonuje się elementy maszyn i budowli.

Rozważane są następujące przypadki:

a) jeżeli ciało jest liniowo-sprężyste, lub sprężysto-plastyczne podczas procesu biernego, to tensory materiałowe mają postać:

$$C_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}, \tag{2.21a}$$

$$N_{ijkl} = 0, \tag{2.21b}$$

gdzie λ i μ stałe Lamego;

b) dla ośrodka sprężysto-plastycznego w procesie aktywnym, gdy stosowana jest deformacyjna teorii plastyczności, tensory materiałowe wyrażają się zależnościami:

$$C_{ijkl} = K\delta_{ij}\delta_{kl}, \tag{2.22a}$$

$$N_{ijkl} = 2m(\varepsilon_{(i)})[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ij}\delta_{kl}/3], \tag{2.22b}$$

gdzie

$$K = (2\mu + 3\lambda)/3,$$

natomiast związek między intensywnością naprężenia $\sigma_{(i)}$ i intensywnością odkształcenia $\varepsilon_{(i)}$ dany jest zależnością $\sigma_{(i)}=2m(\varepsilon_{(i)})\varepsilon_{(i)}$, przy czym $m(\varepsilon_{(i)})$ jest funkcją intensywności odkształceń (por. [2.52]);

c) dla nieliniowego ośrodka sprężystego tensor C_{ijkl} wyraża się zależnością (2.21a), natomiast

$$N_{ijkl} = c_1\gamma_{nn}\delta_{ij}\delta_{kl} + c_2\gamma_{ij}\delta_{kl} + c_3\gamma_{ik}\delta_{jl}, \tag{2.23}$$

gdzie c_1, c_2 i c_3 są stałymi sprężystymi.

Równania konstytutywne w formie przyrostowej, zlinearyzowanej w otoczeniu konfiguracji aktualnej, mają postać:

$$\Delta T_{ij} = (\overline{CN})_{ijkl}\Delta\gamma_{kl} = (C_{ijkl} + \bar{N}_{ijkl})\Delta\gamma_{kl} = \Delta T^{L}_{ij} + \Delta\hat{T}_{ij}, \tag{2.24}$$

gdzie tensor $\bar{N}_{ijkl}$ określony jest następująco:

- dla przypadku b)

$$\bar{N}_{ijkl} = N_{ijkl} + \frac{2}{3}\frac{dm}{d\varepsilon_{(i)}}\varepsilon^{s}_{(i)}(\gamma_{kl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\gamma_{nn})(\gamma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\gamma_{ss}),$$

- dla przypadku c)

$$\bar{N}_{ijkl} = N_{ijkl} + (c_1\delta_{ij}\delta_{kl} + c_2\delta_{ik}\delta_{jl})\gamma_{nn} + c_3\gamma_{kj}\delta_{il}.$$

W podobnej formie co zależność (2.24) można zapisać równania teorii plastycznego płynięcia (por. [2.52]), przy czym

$$\bar{N}_{ijkl} = -\frac{4\mu^2 F_{ij}F_{kl}}{1/h + 2\mu F_{mn}F_{mn}},$$

gdzie

$$F_{ij} = \frac{\partial F}{\partial T_{ij}}, \qquad h = -1/[(\partial F/\partial\gamma^{p}_{ij})F_{ij}],$$

natomiast

$$F(T_{ij}, \gamma^{p}_{ij}, \varkappa) = 0$$

jest warunkiem plastyczności, w którym $\varkappa$ jest współczynnikiem wzmocnienia, a plastyczna część tensora prędkości odkształcenia ma postać:

$$\dot{\gamma}^{p}_{ij} = \lambda\frac{\partial F}{\partial T_{ij}}.$$

λ jest nieujemnym współczynnikiem proporcjonalności.

We wszystkich przedstawionych wyżej równaniach konstytutywnych zastosowano opis Lagrange'a. W opisie Eulera mają one taką samą postać, z tym że T_{ij} należy zastąpić przez σ_{ij}, natomiast γ_{ij} przez ε_{ij}.

Uwzględniając związki konstytutywne (2.20) w zależnościach (2.10) i (2.19) oraz przyjmując, że punkt y zdąża do brzegu ciała Γ lub S, otrzymuje się następujące dwa układy równań całkowych:

- dla opisu materialnego:

$$c_{im}(y)u_i(y,t) = \int_{\Gamma_T} U_{im}p_i d\Gamma_T - \int_{\Gamma_T} P_{im}u_i d\Gamma_T + \int_{\Omega_T} U_{im}b_i d\Omega_T$$
$$- \int_{\Omega_T} (T_{ijm}n_{ij} - E_{ijm}\hat{T}_{ij} + U_{im,j}T_{kj}u_{i,k} d\Omega_T) d\Omega_T, \tag{2.25}$$

- dla opisu przestrzennego:

$$c_{im}(y)u_i(y,t) = \int_{S_T} U_{im}p_i dS_T - \int_{S_T} P_{im}u_i dS_T + \int_{V_T} U_{im}b_i dV_T + \int_{V_T} (\sigma_{ijm}n_{ij} - E_{ijm}\hat{\sigma}_{ij}) dV_T. \tag{2.26}$$

Stałe c_{im} zależą od położenia punktu y i określone są podobnie jak w rozdziale 1.

Równania (2.25) i (2.26) tworzą dwa układy nieliniowych osobliwych równań całkowych[7], w których niewiadome występują w obszarze domkniętym $\Omega \cup \Gamma$ lub $V \cup S$. Podstawowa zaleta metody elementów brzegowych, polegająca na tym, że niewiadome występują tylko na brzegu ciała (obowiązująca w zagadnieniach liniowych), w ogólnym przypadku zagadnienia nieliniowego nie występuje. Jeśli jednak zastosuje się do rozwiązania równań (2.25) i (2.26) procedurę iteracyjną, pomijając w pierwszym przybliżeniu człony nieliniowe, to niewiadome wystąpią tylko na brzegu ciała. Całki objętościowe oblicza się w takim przypadku na podstawie rozwiązania z poprzedniej iteracji. Przy obliczeniach numerycznych dyskretyzacji podlega brzeg ciała, natomiast wnętrze obszaru Ω lub V należy podzielić za pomocą komórek wewnętrznych, które umożliwiają obliczenie całek objętościowych.

---

[7] Dokładnie są to układy równań całkowo-różniczkowych, ponieważ oprócz nieznanych wartości brzegowych przemieszczeń i sił powierzchniowych nieznane są także gradienty przemieszczeń wewnątrz ciała.

2.4. METODA PRZYROSTOWA

Mimo że bibliografia z zakresu równań całkowych jest dość obszerna, to prace poświęcone osobliwym równaniom całkowym zawierają przeważnie klasyczne już rozwiązania Tricomiego i Girarda. Wyjątkiem w tym zakresie są m.in. prace Michlina [2.41] i Pogorzelskiego [2.56]. W pracach tych znaleźć można warunki wystarczające istnienia i jednoznaczności rozwiązań liniowych równań osobliwych. W pracy [2.56] przedstawiono także pewną klasę nieliniowych równań osobliwych podając warunki wystarczające istnienia rozwiązania.

Równania (2.25) i (2.26) spełniają warunki podane w [2.56] w całym obszarze $y \in \Omega$ (V). Nie wiadomo jednak, jak wygląda problem istnienia rozwiązań, gdy do równań tych dołączy się sprzężone z nimi równania określone na brzegu $y \in \Gamma$(S).

Jeśli znany jest rozkład przemieszczeń i sił powierzchniowych na całym brzegu, to wtedy równania (2.25) i (2.26), w myśl twierdzenia sformułowanego w [2.56], mają rozwiązania, które można uzyskać drogą iteracji. Dlatego wydaje się celowe stosowanie metod przyrostowych, dzięki którym układy równań (2.25) i (2.26) zmieniają się w skończoną liczbę liniowych układów równań całkowych. Te ostatnie mają jednoznaczne rozwiązania, które otrzymać można metodą kolejnych przybliżeń.

Rozważana jest liniowa część przyrostu $\Delta u_m(y,t)$ otrzymana w wyniku nasunięcia na równanie (2.25) operatora $\Delta t \partial(\cdot)/\partial t$. Uwzględniając jednorodność warunków początkowych otrzymuje się:

$$
\begin{aligned}
c_{im}(y)\Delta u_i(y,t) = {} & \int_{\Gamma_T} U_{im}\Delta p_i \, d\Gamma_T - \int_{\Gamma_T} P_{im}\Delta u_i \, d\Gamma_T + \int_{\Omega_T} U_{im}\Delta b_i \, d\Omega_T \\
& - \int_{\Omega_T} [T_{ijm}\Delta n_{ij} - \bar{N}_{ijkl}E_{ijm}\Delta\gamma_{kl} + (\overline{CN})_{kjrs}u_{i,k}U_{im,j}\Delta\gamma_{rs} + T_{kj}U_{im,j}\Delta u_{i,k}]\, d\Omega_T .
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Równanie (2.27) zapisać można w zwartej postaci:

$$
\begin{aligned}
c_{im}(y)\Delta u_i(y,t) = \int_0^t \Bigg[& \int_{\Gamma} L_{im}(x,y,t-\tau)\Delta R_i(x,\tau)\, d\Gamma(x) \\
& + \int_{\Omega} N_{mik}(x,y,t-\tau;u_{r,s})\Delta u_{i,k}\, d\Omega(x) \Bigg] d\tau + \Delta G_m(y,t),
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

gdzie przez $\Delta R_i(x,t)$ oznaczono nieznane przyrosty sił i przemieszczeń na brzegu w przedziale czasu Δt, natomiast wielkości $\Delta G_m(y,t)$ wyrażają znane przyrosty tych samych wielkości, dane przez warunki brzegowe. Jądra L_{im} zależą od rozwiązań podstawowych, natomiast jądra N_{mik} są zależne również od pochodnych funkcji przemieszczeń i przedstawiają nieliniową część równania (2.27).

Równanie (2.28), opisujące zachowanie się ośrodka w opisie przestrzennym, zapisać można w podobnej postaci:

$$c_{im}(y)u_i(y,t) = \int_0^t \left[\int_S L_{mik}(z,y,t-\tau)R_i(z,\tau)n_k\,dS(z) \right. \tag{2.29}$$

$$\left. \int_V N_m(z,y,t-\tau;D_k u_l)\,dV(z) \right] d\tau + G_m(y,t).$$

W równaniu (2.29) skorzystano z zależności $L_{ml}=(L_{ml}\delta_{ik}/n_i)n_k=L_{mik}n_k$.

Aby równanie (2.29) można było przedstawić w postaci przyrostowej, należy najpierw wyprowadzić wzór na pochodną materialną całki powierzchniowej (por. Burczyński i Adamczyk [2.14]):

$$D_t\int_S f_i n_i\,dS=D_t\int_V f_{i,i}\,dV=\int_V \frac{\partial}{\partial t} f_{i,i}\,dV + \int_S f_{i,i}v_{k,k}n_k\,dS=\int_S \left(\frac{\partial f}{\partial t} n_i + f_{i,i}v_k n_k\right)dS. \tag{2.30}$$

Nasuwając teraz operator $\Delta t D_t(\cdot)$ na równanie (2.29) i uwzględniając jednorodność warunków początkowych otrzymuje się:

$$c_{im}(y)\Delta u_i(y,t) = \int_0^t \left[\int_S \left(D_k(L_{mik}R_i)\Delta u_s n_s + L^t_{mik}R_i n_k\right)dS \right. \tag{2.31}$$

$$\left. + \int_V \left(N^t_m + N_{ml}\Delta u_i + N_{mik}\Delta(D_k u_i) + N_m\Delta(D_k u_k)\right)dV \right] d\tau + \Delta G_m(y,t),$$

gdzie

$$\partial(\cdot)/\partial t=(\cdot)^t,\quad N_{ml}=D_i N_m,\quad N_{mik}=\partial N_m/\partial(D_k u_i).$$

Złożona postać równań (2.31) wynika z faktu uwzględnienia zmiany kształtu obszaru V w przedziale czasu Δt. Jeżeli w przedziale tym pominąć wpływ zmiany odkształceń objętościowych na wartości poszukiwanych przyrostów przemieszczeń w obszarze V, to równania (2.31) przyjmują uproszczoną postać:

$$c_{im}(y)\Delta u_i(y,t) = \int_0^t \left[\int_S (L_{mi}\Delta R_i + R_i D_i L_{mi}) dS \right.$$

$$\left. + \int_V \left[N_m^t + N_{mi}\Delta u_i + N_{mik}\Delta(D_k u_i) \right] dV \right] d\tau + \Delta G_m(y,t). \tag{2.32}$$

Odpowiednikiem równań (2.28) i (2.32), opisujących dynamiczne zachowanie się ośrodka, są w statyce następujące równania całkowe:

$$c_{im}(y)\Delta u_i(y) = \int_\Gamma L_{mi}(x,y)\Delta R_i(x) d\Gamma(x) + \int_\Omega N_{mik}(x,y;u_{r,s})\Delta u_{i,k} d\Omega(x) + \Delta G_m(y,t), \tag{2.33}$$

w opisie materialnym oraz

$$c_{im}(y)\Delta u_i(y) = \int_S \left[L_{mi}\Delta R_i + R_i D_k (L_{mi})\Delta u_k \right] dS$$

$$+ \int_V \left[N_{mi}\Delta u_i + N_{mik}\Delta(D_k u_i) \right] dV + \Delta G_m(y). \tag{2.34}$$

w opisie przestrzennym.

2.5. DYSKRETYZACJA

Czas dyskretujemy na M przedziałów (kroków) o długości $h = t_\alpha - t_{\alpha-1}$ w sposób następujący:

$$t \in (t_\alpha = \alpha h;\ \alpha = 1,2,\dots,M). \tag{2.35}$$

Zakłada się dalej, że przyrosty poszukiwnych wielkości są w poszczególnych przedziałach czasu stałe[*]. Wówczas równania (2.28) można zapisać następująco:

---

[*] Jest to szczególny przypadek interpolacji liniowej czasu opisany w p. 1.3.2.

$$c_{im}(y)\Delta u_i^{\alpha}(y) = \sum_{\alpha=}^{\beta}\Bigg[\int_{\Gamma} L_{mi}^{\alpha\beta}(x,y)\Delta R_i^{\beta}(x)d\Gamma(x)$$

$$+\int_{\Omega} N_{mik}^{\alpha\beta}(x,y;u_{r,s}^{\beta-1})\Delta u_{i,k}^{\beta}\,d\Omega(x)\Bigg] + \Delta G_m^{\alpha}(y), \tag{2.36}$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\Delta u_m^{\alpha}=u_m^{\alpha} - u_m^{\alpha-1}=u_m(y,t_{\alpha})-u_m(y,t_{\alpha-1}),$$

$$u_m^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\alpha}\Delta u_m^{\beta}, \quad u_m^{0}\equiv 0,$$

$$L_{mi}^{\alpha\beta} = \int_{t_{\beta-1}}^{t_{\beta}} L_{mi}(x,y,t^{\alpha}-\tau)d\tau, \qquad N_{mi}^{\alpha\beta} = \int N_{mik}(x,y,t^{\alpha}-\tau;u_{r,s}^{\beta-1})d\tau.$$

Równania (2.32) po dyskretyzacji czasu przyjmują postać:

$$c_{im}(y)\Delta u_i^{\alpha}(y) = \sum_{\beta=1}^{\alpha}\Bigg[\int_{S^{\beta-1}}(L_{mi}^{\alpha\beta}\Delta R_i^{\beta} + R_i^{\beta-1}L_{mi}^{\alpha\beta})dS^{\beta-1}$$

$$+\int_{V^{\beta-1}}\left(K_m^{\alpha\beta}(z,y;D_k u_i^{\beta-1}) + N_{mik}^{\alpha\beta}\Delta(D_k u_i^{\beta})dV^{\beta-1}\right] + \Delta G_m^{\alpha}(y), \tag{2.37}$$

gdzie

$$M_{mi}^{\alpha\beta} = L_{mi}(z,y,t_{\alpha}-t_{\beta-1}) - L_{mi}(z,y,t_{\alpha}-t_{\beta}),$$

$$K_m^{\alpha\beta} = N_m(z,y,t_{\alpha}-t_{\beta-1};D_i u_k^{\beta-1}) - N_m(z,y,t_{\alpha}-t_{\beta};D_k u_i^{\beta-1}),$$

$$N_{mik}^{\alpha\beta} = \int_{t_{\beta-1}}^{t_{\beta}} N_{mik}(z,y,t_{\alpha}-\tau;D_k u_i^{\beta-1})d\tau.$$

Porównanie równań (2.36) i (2.37) wskazuje, że rozwiązanie nieliniowego zagadnienia dynamicznego w chwili t_α, w opisie przestrzennym, mimo prostszej nieliniowej funkcji N_m, niż w opisie materialnym, wymaga pamiętania wszystkich poprzednich konfiguracji obszaru $V^{\beta-1}$, $\beta=1,2,..\alpha$. Jest to duże utrudnienie w praktycznej realizacji numerycznej. Opis materialny nieliniowego zagadnienia dynamicznego w ujęciu całkowym jest korzystniejszy, ponieważ nie posiada tego mankamentu.

Dalsza uwaga skupiona będzie na równaniach (2.36). Jest to układ liniowych równań całkowych określonych w obszarze $\Omega \cup \Gamma$. Rozwiązanie numeryczne wymaga przeprowadzenia dyskretyzacji wnętrza ciała Ω wraz z jego brzegiem Γ i poszukiwaniu rozwiązania w tym obszarze. Jeżeli jednak przyjąć do rozwiązania procedurę iteracyjną, w której całkę objętościową oblicza się na podstawie znanych wielkosci z poprzedniej iteracji, to niewiadome występują tylko na brzegu Γ. Całkę objętościową można obliczać za pomocą dowolnej metody przybliżonej. W praktyce obszar Ω dzieli się na komórki wewnętrzne Ω^q, $q=1,2,...,Q$, (por. roz. 1.) i za ich pomocą oblicza całki określone na obszarze Ω.

Równania (2.36) w postaci iteracyjnej zapisać można następująco:

$$c_{mi}(y)\Delta u_i^{\alpha,(N+1)} = \int_\Gamma L_{mi}^{\alpha\alpha}\Delta R_i^{\alpha,(N+1)} d\Gamma + \int_\Omega N_{mik}^{\alpha\alpha}(x,y;u_{r,s}^{\alpha-1})\Delta u_{i,k}^{\alpha,(N)} d\Omega + \Delta H_m^\alpha, \qquad (2.38)$$

$$N=0,1,2,...$$

gdzie

$$\Delta H_m^\alpha(y) = \sum_{\beta=1}^{\alpha-1}\left[\int_\Gamma L_{mi}^{\alpha\beta}\Delta R_i^\beta d\Gamma + \int_\Omega N_{mik}^{\alpha\beta}(x,y;u_{r,s}^{\beta-1})\Delta u_{i,k}^\beta d\Omega\right] + \Delta G_m^\alpha.$$

W każdym kroku iteracji należy rozwiązać układ równań całkowych (2.38), dla $y\in\Gamma$, i znaleźć nieznane przemieszczenia i siły na brzegu, a następnie korzystając z (2.38), dla $y\in\Omega$ i $c_{mi}=\delta_{mi}$, obliczyć gradienty przemieszczeń wewnątrz obszaru* Ω. Pochodne przemieszczeń obliczyć można za pomocą metody różnicowej lub skorzystać z równań (2.38), dla $y\in\Omega$ i $c_{mi}=\delta_{mi}$.

Z uwagi na silną osobliwość jądra N_{mik} operacja różniczkowania analitycznego wymaga specjalnego potraktowania (por. Biu [2.9]).

---

* W literaturze przedmiotu (por. np. [2.6, 2.8, 2.65]) gradientom przemieszczeń przypisuje się zwykle interpretację fizyczną w postaci odkształceń lub (po uwzględnieniu praw konstytutywnych ośrodka) naprężeń. Dlatego iteracyjno-przyrostowe procedury noszą nazwę sformułowań za pomocą odkształceń początkowych lub naprężeń początkowych.

Różniczkując (2.38) względem y_j otrzymuje się:

$$\Delta u_{i,j}^{\alpha,(N+1)} = \int_{\Gamma} L_{mi,j}^{\alpha\alpha} \Delta R_i^{\alpha,(N+1)} d\Gamma + \int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} N_{mik,j}^{\alpha\alpha}(x, y; u_{r,s}^{\alpha-1}) \Delta u_{i,k}^{\alpha,(N)} d\Omega + \Delta\hat{H}_{m,j}^{\alpha}, \tag{2.39}$$

$$N=0,1,2,\ldots$$

gdzie Ω_ε jest infinitezymalną sferą (dla d=3) lub okręgiem (dla d=2) o promieniu ε w punkcie y, natomiast człon $\Delta\hat{H}_{m,j}^{\alpha}$ oprócz pochodnej $\partial\Delta H_m^{\alpha}/\partial y_j$ zawiera także wyrażenie powstałe w wyniku całkowania jądra N_{mik} po powierzchni tej sfery.

Układ równań całkowych (2.38) sprowadzamy do postaci algebraicznej aproksymując na każdym elemencie brzegowym Γ^e, e=1,2, E, poszukiwane wielkości ΔR_i^{β} za pomocą funkcji kształtu $N^{\nu}(\xi)$ i wartości węzłowych $\Delta R_i^{\beta\nu}$ (por. roz. 1.):

$$\Delta R_i^{\beta}(\xi) = N^{\nu}(\xi) \Delta R_i^{\beta\nu}. \tag{2.40}$$

Także obszar Ω dzielimy na komórki wewnętrzne Ω^q, q=1,2,...,Q, które umożliwiają obliczenia całek objętościowych o jądrach $N_{mik,j}$. W tym celu również gradienty przemieszczeń wewnątrz obszaru Ω są aproksymowane przez funkcje interpolacyjne i wartości węzłowe.

Jeśli teraz w równaniach (2.38) całki brzegowe zastąpi się przez sumę całek po elementach Γ^e to otrzymuje się układ równań algebraicznych:

$$[A^{\alpha}]\{X\}^{\alpha,(N+1)} = \{Y\}^{\alpha,(N)} + \{H\}^{\alpha}, \tag{2.41}$$

gdzie $[A^{\alpha}]$ jest macierzą kwadratową zależną od całek brzegowych z rozwiązań podstawowych, $\{X\}^{\alpha,(N+1)}$ jest macierzą kolumnową, której elementami są nieznane przyrosty przemieszczeń i sił węzłowych ΔR na brzegu, $\{Y\}^{\alpha,(N)}$ jest macierzą kolumnową zależną od danych warunków brzegowych i sił objętościowych, natomiast $\{H\}^{\alpha}$ jest macierzą kolumnową, której elementy zależą od znanych przyrostów sił i przemieszczeń, od historii odkształcenia ośrodka oraz gradientów przemieszczeń obliczonych z poprzedniej iteracji.

Znając rozkład przemieszczeń i sił brzegowych w chwili t_{α} należy następnie obliczyć gradienty przemieszczeń wewnątrz obszaru Ω korzystając z zależności całkowej (2.39).

2.6. NIELINIOWE WARUNKI BRZEGOWE

Rozważany jest ośrodek liniowo-sprężysty, w którym stan odkształcenia opisuje tensor odkształceń infinitezymalnych określony następująco:

$$\gamma_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2. \qquad (2.42)$$

Przyjmujemy dla uproszczenia, że siły objętościowe są zerowe, natomiast siły powierzchniowe są nieliniowymi funkcjami przemieszczeń brzegowych.

Analizowane zagadnienie opisuje często spotykany w praktyce przypadek, w którym ciało odkształcalne przymocowane jest na części brzegu do nieodkształcalnego ośrodka za pomocą nieważkich podatnych elementów o nieliniowych charakterystykach. Na brzegu takiego układu mechanicznego spełnione powinny być następujące warunki:

$$T_{ij}(x,t)n_j = p_i(x,t,;u_k), \qquad x\in\Gamma, \qquad (2.43)$$

gdzie

$$p_i(x,t;u_k) = \begin{cases} \varphi_i(x,t;u_k) & \text{gdy } x\in\Gamma_n, \\ \hat{p}_i(x,t) & \text{gdy } x\in\Gamma_p, \\ \tilde{p}_i(x,t) & \text{gdy } x\in\Gamma_u, \end{cases}$$

$$\Gamma=\Gamma_n \cup \Gamma_u \cup \Gamma_p.$$

Równania całkowe tak sformułowanego problemu mają postać (Burczyński i Adamczyk [2.13, 2.14]):

$$c_{im}(y)u_i(y,t)= \int_0^t \left[\int_\Gamma U_{im}(x,y,t-\tau)p_i(x,\tau;u_k)d\Gamma - \int_\Gamma P_{im}(x,y,t-\tau)u_i(x,\tau)d\Gamma \right] d\tau. \qquad (2.44)$$

Przyjmując sposób dyskretyzacji opisany zależnością (2.35), równania (2.44) można przedstawić następująco:

$$c_{im}(y)u_i^\alpha(y)= \int_{\Gamma_n} U_{im}^{\alpha\alpha}\, \varphi_i^\alpha(x;u_k^\alpha)d\Gamma_n + \int_{\Gamma_u} U_{im}^{\alpha\alpha}\, \tilde{p}_i^\alpha d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} P_{im}^{\alpha\alpha}\, u_i^\alpha d\Gamma_p + G_m^\alpha(y), \qquad (2.45)$$

gdzie

$$u_m^{\alpha} = u_m(y, t_{\alpha}), \qquad \varphi_i^{\alpha}(x; u_k^{\alpha}) = \varphi_i(x, t_{\alpha}; u_k^{\alpha}),$$

$$U_{im}^{\alpha\beta} = \int_{t_{\beta-1}}^{t_{\beta}} U_{im}(x, y, t_{\alpha}-\tau)d\tau, \qquad P_{im}^{\alpha\beta} = \int_{t_{\beta-1}}^{t_{\beta}} P_{im}(x, y, t_{\alpha}-\tau)d\tau,$$

$$G_m^{\alpha}(y) = \sum_{\beta=1}^{\alpha-1}\left[\int_{\Gamma_n} U_{im}^{\alpha\beta}\varphi_i^{\beta}(x; u_k^{\beta})d\Gamma_n + \int_{\Gamma_u} U_{im}^{\alpha\beta}\tilde{p}_i^{\beta}d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} P_{im}^{\alpha\beta}u_i^{\beta}d\Gamma_p\right]$$

$$+ \int_0^{t_{\alpha}}\left[\int_{\Gamma_p} U_{im}(x, y, t_{\alpha}-\tau)\hat{p}_i(x, \tau)d\Gamma_p - \int_{\Gamma_u} P_{im}(x, y, t_{\alpha}-\tau)u_i(x, \tau)d\Gamma_u\right]d\tau.$$

Funkcja $G_m^{\alpha}(y)$ występująca w równaniu (2.45) zależy od znanych wartości przemieszczeń i sił na brzegu w chwili t_{α} oraz historii odkształcenia.

Dyskretyzując brzeg za pomocą elementów brzegowych Γ^e, $e=1,2,\ldots,E$, i aproksymując przemieszczenia i siły brzegowe przez funkcje kształtu i wartości węzłowe otrzymuje się ostatecznie układ nieliniowych równań algebraicznych:

$$[A^{\alpha}]\ \{F(U)\}^{\alpha} = \{G\}^{\alpha}, \tag{2.46}$$

gdzie $[A^{\alpha}]$ jest macierzą kwadratową zależną od całek brzegowych z rozwiązań podstawowych, $\{F(u)\}^{\alpha}$ jest macierzą kolumnową, której elementami są nieliniowe funkcje wartości przemieszczeń w węzłach elementów brzegowych na powierzchni Γ_n, natomiast elementy macierzy kolumnowej $\{G\}^{\alpha}$ zależą od danych warunków brzegowych i historii odkształcenia.

LITERATURA

[2.1] Adamczyk T., Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych w dynamice ciągłego ośrodka nieliniowego. Mat. XI Sympozjum nt. Drgania w układach fizycznych, s.72-73, Poznań-Błażejewko 1984.

[2.2] Banerjee P.K., Cathie D.N. and Davies T.G.: Two- and three-dimensional problems of elasto-plasticity. Chap. 4 in: Developments in boundary element methods-1 (Eds. P.K. Banerjee and R. Butterfield), London 1979.

[2.3] Banerjee P.K. and Cathie D.N.: A direct formulation and numerical implementation of the boundary element method for two-dimensional problems of elastoplasticity. Int. J. Mech. Sci., Vol. 22, No 4, pp.233-245, 1980.

[2.4] Banerjee P.K. and Davies T.G.: Advanced implementation of boundary element methods for three-dimensional problems of elastoplasticity and viscoplasticity. Chap. 1 in: Developments in boundary element methods-3 (Eds. P.K. Banerjee and S. Mukherjee), Elsevier Applied Science Publishers, London 1984.

[2.5] Banerjee P.K. and Mustone G.G.: Boundary element methods in two-dimensional problems of elasto-plasticity. In: Recent advances in boundary element methods (Ed. C.A. Brebbia), pp.283-300, Pentech Press, London 1978.

[2.6] Banerjee P.K. and Raveenda S.T.: Advanced boundary element analysis of two and three dimensional problems of elastoplasticity. Int. J. Numer. Meth. Eng. Vol. 32, pp.985-1002, 1986.

[2.7] Benitez F.G., Alarcon E., Brebbia C.A. and Telles J.: Triomensional plasticity using BIEM. Applied Mathematical Modelling, Vol. 5, pp.442-447, 1981

[2.8] Brebbia C.A. and Telles J.C.F.: Elasto-plastic boundary element analysis. In: Nonlinear finite element analysis in structural mechanics (Eds. W. Wünderlich, E. Stein and K.J. Bathe), pp.403-434, Springer-Verlag, Berlin 1981.

[2.9] Bui H.D.: Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations. Int. J. Solids Structures, Vol. 14, pp.935-939, 1978.

[2.10] Burczyński T.: Metoda brzegowych równań całkowych w przestrzennych zadaniach teorii sprężystości i sprężysto-plastyczności w aspekcie możliwości zastosowań w analizie stanu naprężenia w kolejowych zestawach kołowych. Praca naukowo-badawcza IMiPKM Pol. Śl. NB-305/RMK/81 (kier. pracy R. Bąk), Problem węzłowy PAN 05.12-1.5.21, Gliwice 1981.

[2.11] Burczyński T., Adamczyk T.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do analizy układów nieliniowych. Mat. VI Konferencji nt. Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, t. 1, s.67-72, Białystok 1983.

[2.12] Burczyński T., Adamczyk T.: Application of the boundary element method to dynamical analysis of nonlinear systems. Abstr. 10th Int. Conference on Nonlinear Oscillations, ICNO-X, Varna 1984.

[2.13] Burczyński T., Adamczyk T.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do analizy układów ciągłych z nieliniowymi warunkami brzegowymi. Mat. X Konferencji Teorii maszyn i mechanizmów, s.256-261, Warszawa 1984.

[2.14] Burczyński T., Adamczyk T.: Analiza układów nieliniowych metodą elementów brzegowych. Mechanika i komputer, tom 7, s.149-164, PAN IPPT, Warszawa 1988.

[2.15] Chandra A. and Mukherjee S.: Applications of the boundary element method to large strain/large deformation problems of viscoplasticity. J. Strain Anal., Vol.18, pp.261-270, 1983.

[2.16] Chandra A. and Mukherjee S.: Boundary element formulations for large strain large deformation problems of viscoplasticity. Int. J. Solids Struct., Vol. 20, pp.41-53, 1984.

[2.17] Chandra A. and Mukherjee S.: A boundary element formulation for sheet metal forming. Applied Mathematical Modelling, Vol. 9, pp.175-182, 1985.

[2.18] Chandra A. and Mukherjee S.: A boundary element analysis of metal extrusion processes. J. Appl. Mech., Vol. 54, pp.335-340, 1987.

[2.19] Fung Y.C.: Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, Warszawa 1970.

[2.20] Henry D.P. and Banerjee P.K.: A variable stiffness type boundary element formulation for axisymmetric elastoplastic media. Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 26, No 5, pp.1005-1027, 1988.

[2.21] Henry D.P. and Banerjee P.K.: A new BEM formulation for two- and three-dimensional elastoplasticity using particular integrals. Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 26, No 8, pp.2079-2096, 1988.

[2.22] Kamiya N.: Geometrically nonlinear analysis of elastic plates by the boundary element method. In: Advanced boundary element methods (Ed. T.A. Cruse), pp.189-196, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[2.23] Kamiya N.: Structural nonlinear analysis by boundary element methods. In: Boundary elements X (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 3: Stress analysis, pp.17-27, CMP, Springer-Verlag 1988.

[2.24] Kamiya N. and Sawaki Y.: An integral equation approach to finite deflections of elastic plates. International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 17, pp.187-194, 1982.

[2.25] Kamiya N. and Sawaki Y.:Boundary element analysis of nonlinear bending of sandwich plates and shallow shells, Chap. 5 in: Developments in boundary element methods-4 (Eds. P.K. Banerjee and J.O. Watson), pp.121-148, Elsevier Applied Science Publishers, 1986.

[2.26] Kamiya N., Sawaki Y., Nakamura Y. and Fukui A.: An approximate finite deflection analysis of a heated elastic plate by the boundary element method. Applied Mathematical Modelling, Vol. 6, pp.23-27, 1982.

[2.27] Kleiber M.: Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum. PWN, Warszawa 1985.

[2.28] Kontoni D.P.N. and Beskos D.E.: Inelastic dynamic analysis by the boundary element method. In: Boundary elements IX (Ed. C.A. Brebbia, W.L. Wendland and G. Kuhn), Vol. 2, pp.335-351, Springer-Verlag, Berlin 1987.

[2.29] Kontoni D.P.N. and Beskos D.E.: BEM dynamic analysis of materially nonlinear problems. In: Boundary elements X (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 3: Stress Analysis, pp.119-132, CMP, Sgringer-Verlag, Berlin 1988.

[2.30] Kontoni D.P.N. and Beskos D.E.: Boundary element formulation for dynamic analysis of nonlinear systems. Engineering Analysis, Vol. 5, No 3, pp.114-125, 1988.

[2.31] Maier G.: On elastoplastic analysis by boundary elements. Mechanics Research Communications, Vol. 10, No 1, pp.45-52, 1983.

[2.32] Maier G. and Nappi A.: On bounding post-shakedown quantities by the boundary element method. Engineering Analysis, Vol. 1, pp.223-229, 1984.

[2.33] Maier G. and Novati G.: Elastic-plastic boundary element analysis as a linear complementarity problem. Applied Mathematical Modelling, Vol. 7, pp.74-81, 1983.

[2.34] Maier G., Novati G. and Perego U.: Plastic analysis by boundary elements. Chap. in: Finite element and boundary element techniques from mathematical and engineering point of view (Eds. E. Stein and W. Wendland), pp.213-272, CISM, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[2.35] Maier G., Novati G. and Sirtori S.: On symmetrization in boundary element elastic and elasto-plastic analysis. Proc. IUTAM-IACM Symp. on Discrete Methods in Structural Mechanics, June 5-8, Viena 1989.

[2.36] Maier G. and Polizzotto C.: A boundary element approach to limit analysis. In: Boundary elements V (Eds. C.A. Brebbia, T. Futugami and M. Tanaka), pp.551-556, CML Publications, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[2.37] Maier G. and Polizzotto C.: On shakedown analysis by boundary elements. In: Verba Volant, Scripta Manent, Chap. Massonet Anniversary Volume, Liege, pp.265-277, 1984.

[2.38] Maier G. and Polizzotto C.: A Galerkin approach to elastoplastic analysis by boundary elements. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 60, pp.175-194, 1987.

[2.39] Martin J.B.: Plasticity. MIT Press, Cambridge 1975.

[2.40] Mendelson A. and Alberts L.U.: Application of boundary integral equations to elasoplastic problems. In: Boundary integral equation method: computational applications in applied mechanics (Eds. T.A. Cruse and F.J. Rizzo), pp.47-84, ASME, New York 1975.

[2.41] Michlin S.G.: Mnogomiernyje singularnyje intiegrały i intiegralnyje urawnienia. Fizmatgiz, Moskwa 1962.

[2.42] Mróz Z.: Mathematical models of inelastic material behaviour. University of Waterloo, 1973.

[2.43] Mukherjee S.: Corrected boundary integral equations in planar thermoelastoplasticity. International Journal of Solids and Structures, Vol. 13, pp.331-335, 1977.

[2.44] Mukherjee S.: Boundary element methods in creep and fracture. Applied Science Publishers, London 1982.

[2.45] Mukherjee S.: Time-dependent inelastic deformation of metals by boundary element methods. Chap. 5 in: Deveplopments in boundary element methods-2 (Eds. P.K. Banerjee and R.P. Shaw), Applied Science Publishers, London 1982.

[2.46] Mukherjee S. and Chandra A.: Boundary element formulation for large strain-large deformation problems of plasticity and viscoplasticity. Chap. 2 in: Developments in boundary element methods-3 (Eds. P.K. Banerjee and S. Mukherjee), Elsevier Applied Science Publishers, London 1984.

[2.47] Mukherjee S. and Chandra A.: Nonlinear solid mechanics. Chap. 6 in: Boundary element method in mechanics (Ed. D.E. Beskos), North-Holland, Amsterdam 1987.

[2.48] Mustone G.G.W.: Advanced integration schemes over boundary elements and volume cells for two- and three-dimensional non-linear analysis. Chap. 9 in: Developments in boundary element methods-3 (Eds. P.K. Banerjee and S. Mukherjee), Elsevier Applied Science Publishers, London 1984.

[2.49] Nishimura N. and Kobayashi S.: Elastoplastic analysis by indirect methods. Chap. 3 in: Developments in boundary element methods-3 (Eds. P.K. Banerjee and S. Mukherjee), Elsevier Applied Science Publishers, London 1984.

[2.50] Novati G. and Brebbia C.A.: Boundary element formulation for geometrically nonlinear elastostatics. Applied Mathematical Modelling, Vol. 6, pp.136-138, 1982.

[2.51] Novati G. and Burczyński T.: Inelastic analysis via integral equations: the symmetric approach illustrated with reference to beam on elastic foundation. Proc. Inter. Symp. on Boundary Element Methods, East Hartford, Connecticut, USA, October 2-4, 1989.

[2.52] Nowacki W.K.: Zagadnienia falowe w teorii plastyczności. PWN, Warszawa 1974.

[2.53] Oden J.T.: Finite elements of nonlinear continua. McGraw-Hill, New York 1972.

[2.54] Ostrowska-Maciejewska J.: Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych. PWN Warszawa 1982.

[2.55] Oliveria Faria L.M., Mota Soares C.A., Seabra Pereira M.F. and Brebbia C.A.: Boundary elements in 2D plasticity using quadratic shape functions. Applied Mathematical Modelling, Vol. 5, pp.371-375, 1981.

[2.56] Pogorzelski W.: Równania całkowe i ich zastosowania. t. IV, PWN, Warszawa 1970.

[2.57] Polizzotto C.: An energy approach to the boundary element method. Part II: Elasto-plastic solids. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 69, No 3, pp.263-276, 1988.

[2.58] Polizzotto C.: Variational principles for boundary element formulations in structural mechanics. In: Boundary elements X, Vol. 1: Mathematical and computational aspects (Ed. C.A. Brebbia), pp.19-32, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[2.59] Polizzotto C.: A consistent formulation of the BEM within elastoplasticity. In Advanced boundary element methods (Ed. T.A. Cruse), pp.315-324, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[2.60] Sawczuk A.: Mechanics and plasticity of structures. PWN, Warszawa 1989.

[2.61] Szczepiński W.: Mechanika plastycznego płynięcia. PWN, Warszawa 1978.

[2.62] Swedlow J.L., Cruse T.A.: Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elasto-plastic flow. Inter. J. Solids Structures, Vol. 7, pp.1673-1683, 1971.

[2.63] Tanaka M.: Integral equation approach to small and large displacements of thin elastic plates. Boundary element methods in engineering (Ed. C.A. Brebbia), pp.526-539, Springer-Verlag, Berlin 1982.

[2.64] Tanaka M.: Large deflection analysis of thin elastic plates. Chap. 5 in: Developments in boundary element methods-3 (Eds. P.K. Banerjee and S. Mukherjee), pp.115-136, Elsevier Applied Science Publishers, 1984

[2.65] Telles J.C.F.: The boundary element method applied to inelastic problems. Lecture Notes in Engineering, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[2.66] Telles J.C.F and Brebbia C.A.: On the application of the boundary element method to plasticity. Applied Mathematical Modelling, Vol. 3, pp.466-470, 1979.

[2.67] Telles J.C.F and Brebbia C.A.: The boundary element method in plasticity. In: New developments in boundary element methods (Ed. C.A. Brebbia), pp.295-317, Proc. of the 2nd Conf. on BEM, Southampton 1980., CML Publications, Southampton 1980.

[2.68] Telles J.C.F and Brebbia C.A.: The boundary element method in plasticity. Applied Mathematical Modelling, Vol. 5, pp.275-281, 1981.

[2.69] Telles J.C.F and Brebbia C.A.: Boundary elements: new developments in elastoplasic analysis. Applied Mathematical Modelling, Vol. 5, pp.376-382, 1981.

[2.70] Telles J.C.F. and Brebbia C.A.: Plasticity. Chapter 5 in: Progress in boundary element methods (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 1, Pentech Press, London 1981.

[2.71] Telles J.C.F. and Carrer J.A.M.: Implicit solution techniques for inelastic boundary element analysis. In: Boundary elements X (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 3: Stress Analysis, pp.3-15, CMP, Sgringer-Verlag, Berlin 1988.

[2.72] Tosaka N., Kakuda K.: The generalized boundary element method for nolinear problems. In: Boundary elements X (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 1: Mathematical and computational aspects, pp.3-17, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[2.73] Zieliński A.P.: Trefftz method: elastic and elastoplastic problems. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 69, pp.185-204, 1988.

[2.74] Zienkiewicz O.C.: The finite element method. McGraw-Hill, London 1977.

[2.75] Życzkowski M.: Combined loadings in the theory of plasticity. PWN, Warszawa 1981.

3. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ANALIZIE KONTAKTU CIAŁ STAŁYCH

3.1. UWAGI WSTĘPNE

W zagadnieniach analizy wytrzymałościowej różnych elementów maszyn często pojawia się problem określenia naprężeń i przemieszczeń lokalnych wywołanych oddziaływaniem innego układu mechanicznego. Analiza niehertzowskiego kontaktu, uwzględniająca dowolny kształt kontaktujących się powierzchni ciał stałych oraz zjawisko tarcia między tymi powierzchniami, możliwa jest obecnie dzięki zastosowaniu metod numerycznych.

Metoda elementów brzegowych jest wyjątkowo dogodną metodą numeryczną w analizie zagadnień kontaktowych, ponieważ uwzględnia w sposób bezpośredni fakt, że rzeczywiste elementy maszyn stykają się ze sobą powierzchniami zewnętrznymi. Inną zaletą metody elementów brzegowych w formułowaniu zagadnień kontaktowych jest możliwość bezpośredniego uwzględnienia normalnych i stycznych sił powierzchniowych w strefie styku.

Zagadnienie kontaktu jest ze swej istoty zadaniem, które można zakwalifikować do problemów brzegowych o nieliniowych warunkach brzegowych, ponieważ siły powierzchniowe w strefie styku zależą, w ogólnym przypadku, od przemieszczeń brzegowych w sposób nieliniowy. Wyodrębienie tych problemów z klasy zagadnień opisywanych w roz. 2 (p. 2.6) wynika ze specyfiki i ważności zagadnień kontaktowych. Nieliniowość rozpatrywanego zjawiska powoduje, że do rozwiązania problemu należy zastosować technikę iteracyjno-przyrostową.

Oryginalny dorobek związany z zastosowaniem metody elementów brzegowych do rozwiązania dwuwymiarowego zagadnienia kontaktu wniosły prace Anderssona, Fredrikssona i Persona [3.8], Anderssona [3.5-3.7] oraz Anderssona i Persona [3.9].

Możliwość wykorzystania metody elementów brzegowych do analizy kontaktu rozpatruje także Witkowski [3.26], traktując jednak omawianą metodę tylko jako narzędzie służące do określenia podatności ciała.

W pracach Burczyńskiego i Adamczyka [3.2-3.4, 3.10-3.12] uogólniono prace Anderssona na przypadek trójwymiarowy oraz osiowo-symetryczny i sformułowano zagadnienie kontaktu koła kolejowego z szyną i koła z osią zestawu wagonowego.

Zastosowanie metody elementów brzegowych do zagadnień kontaktu rozpatrywane było także w innych pracach. Warto tu wymienić następujące pozycje: Paris i Garrido [3.20, 3.21], Tsuta i Yamaji [3.25], Abdul-Mihsin, Bakr i Paker [3.1], Kuich [3.17], Margenov i inni [3.18], Karami i Fenner [3.16], Jin, Runesson i Samuelsson [3.14], Panagiotopoulos [3.19], Selvadurai [3.22], Takahashi i Brebbia [3.23], Tralli i Alessandri [3.24] oraz Jodko [3.15].

W rozdziale niniejszym rozpatrzono zagadnienie kontaktu z tarciem sprężystych ciał przestrzennych oraz omówiono sposób modelowania połączeń wtłaczanych elementów maszyn o symetrii obrotowej stosując ujęcie metody elemntów brzegowych przedstawione w oryginalnych pracach własnych.

3.2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważane są dwa liniowo-sprężyste ciała zajmujące odpowiednio obszary Ω^A i Ω^B i ograniczone powierzchniami Γ^A i Γ^B (rys.3.1a). Ciała te pod wpływem czynników zewnętrznych podlegają zbliżeniu. Skutki tego zbliżenia są analizowane od chwili odpowiadającej zetknięciu obu ciał. Od tego momentu wraz ze wzrostem obciążenia wzrastać będzie pole powierzchni, na której oba ciała się stykają. Powierzchnia ta oznaczana jest przez Γ_c.

Położenie powierzchni Γ_c jest na początku analizy kontaktu nieznane. W chwili początkowej wyróżnić można tylko na brzegach obu ciał części powierzchni Γ_c^A i Γ_c^B, których fragmenty w następnych chwilach wejdą w kontakt (rys.3.1b). Warto zauważyć, że Γ_c^A i Γ_c^B nie muszą być identyczne z powierzchniami odpowiadającymi po odkształceniu powierzchni Γ_c. Jeśli oznaczyć przez $\bar{\Gamma}_c^A$ i $\bar{\Gamma}_c^B$ powierzchnie, które po odkształceniu przejdą w powierzchnię Γ_c, to powinny zachodzić następujące związki:

$$\Gamma^K \supset \Gamma_c^K \supseteq \bar{\Gamma}_c^K, \quad K=A,B. \tag{3.1}$$

Na powierzchniach Γ_c^A i Γ_c^B wprowadza się lokalne układy współrzędnych (rys.3.2). Analiza kontaktu przeprowadzona będzie metodą przyrostową, tzn. przyrostom obciążenia odpowiadać będą poszukiwane przyrosty przemieszczeń. Wielkość $u^{o,n}$, przedstawiona na rys.3.2, oznacza odległość między powierzchniami w n-tym kroku obciążenia. Na tej części brzegu, która weszła w kontakt, spełniony jest warunek $u^{o,n}=0$.

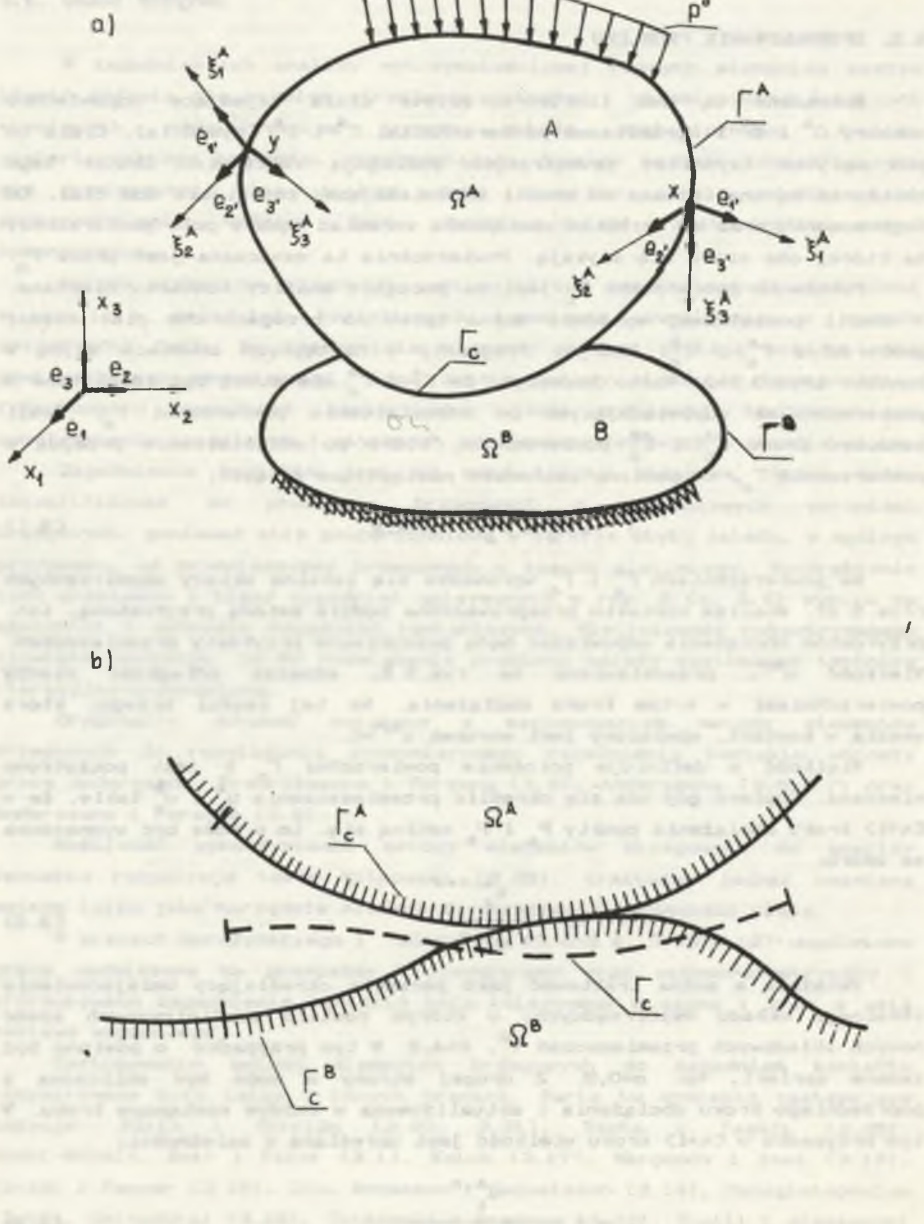
Wielkość α definiuje położenie powierzchni Γ_c i jest początkowo nieznana. Dopiero gdy uda się określić przemieszczenia u_1^A i u_2^B takie, że w $(n+1)$ kroku obciążenia punkty P_A i P_B zetkną się, to α może być wyznaczona ze wzoru:

$$\alpha = \frac{u_1^{A,n+1}}{u^{o,n}} \tag{3.2}$$

Wskaźnik α można traktować jako parametr określający umiejscowienie lokalnego układu współrzędnych, w którym zostało zdefiniowanych sześć nowych składowych przemieszczeń v_i^K, $K=A,B$. W tym przypadku α powinno być zadane apriori, np. $\alpha=0.5$. Z drugiej strony α może być obliczona z poprzedniego kroku obciążenia i aktualizowana w każdym następnym kroku. W tym przypadku w $(n+1)$ kroku wielkość jest określana z zależności:

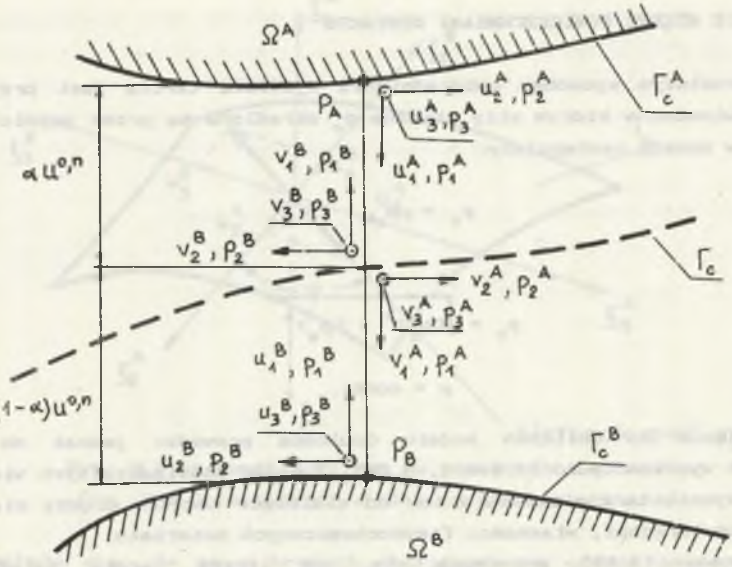
$$\alpha = \frac{u_1^{A,n}}{u_1^{A,n} + u_1^{B,n}} \tag{3.3}$$

jeżeli $u_1^{A,n} + u_1^{B,n} \neq 0$. W przeciwnym razie przyjmuje się do obliczeń α z kroku $(n-1)$.



Rys. 3.1 Dwa ciała w kontakcie

Fig. 3.1 Two bodies in contact



Rys. 3.2 Definicja lokalnych układów współrzędnych w strefie kontaktu

Fig. 3.2 Definition of local coordinate systems in the contact zone

Przyrosty przemieszczeń i sił, jakich doznają ciała *A* i *B*, określane będą w układach współrzędnych zaczepionych na powierzchniach Γ_c^A i Γ_c^B (rys.3.2), natomiast w układach współrzędnych zaczepionych na powierzchni Γ_c przyrosty przemieszczeń zdefiniowane są następująco:

$$\Delta v_1^{A,n} = \Delta u_1^{A,n} - \alpha^n u^{0,n-1},$$

$$\Delta v_1^{B,n} = \Delta u_1^{B,n} - (1-\alpha^n) u^{0,n-1}, \tag{3.4}$$

$$\Delta v_i^{K,n} = \Delta u_i^{K,n}, \qquad K=A,B, \quad i=2,3.$$

Składowe przemieszczeń $\Delta v_1^{K,n}$ interpretować można jako odległości jakie muszą przebyć punkty brzegowe, aby osiągnąć powierzchnię Γ_c. Całkowita wartość przemieszczeń obliczana jest następująco:

$$u_i^{K,n} = \Delta u_i^{K,n} + u_i^{K,n-1}, \qquad K=A,B. \tag{3.5}$$

Podczas obciążania tworzą się nowe więzy ograniczajace odkształcalność ciała. Jeśli powierzchnie Γ_c^A i Γ_c^B pokryć płaskimi elementami brzegowymi, to wówczas można określić takie przyrosty obciążenia, przy których przejście do nowego stanu odbywać się będzie przy nie zmienionych warunkach kontaktu.

3.3. TARCIE MIĘDZY POWIERZCHNIAMI KONTAKTU

Najprostszym sposobem uwzględnienia zjawiska tarcia jest przyjęcie modelu Coulomba, w którym siły styczne p_τ określone są przez współczynnik tarcia μ w sposób następujący:

$$p_\tau = \mu p_1, \tag{3.6}$$

gdzie

$$p_\tau = \sqrt{(p_2)^2 + (p_3)^2}$$

$$\mu = \text{const.}$$

Przyjęcie do obliczeń modelu Coulomba prowadzi jednak do mało dokładnych wyników (por. [3.5-3.7, 3.9]). Z badań doświadczalnych wiadomo, że współczynnik tarcia zależy m.in. od wielkości nacisku między ciałami, kształtu powierzchni, własności fizykochemicznych materiału.

W pracy [3.13] przyjmuje się, że liczba tarcia zależy od współczynnika twardości h i względnego poślizgu stykających się powierzchni v_τ w sposób następujący:

$$\mu(v_\tau, h) = \mu_k[1 - (1 - \mu_o/\mu_k)\exp(-hv_\tau)], \tag{3.7}$$

gdzie μ_o jest wartością początkową współczynnika tarcia, natomiast μ_k jest wartością końcową (graniczną).

Gdy $\mu_o = \mu_k$, otrzymuje się model Coulomba.

Po n krokach obciążenia względny poślizg v_τ^n można obliczyć ze wzoru:

$$v_\tau^n = \sqrt{(u_2^{A,n} + u_2^{B,n})^2 + (u_3^{A,n} + u_3^{B,n})^2} \tag{3.8}$$

Współczynnik tarcia μ zmienia się w sposób ciągły wraz z obciążeniem. Ten fakt należy uwzględnić w obliczaniu przyrostów sił stycznych. Przyjmuje się, że siły styczne związane są z normalnymi naciskami w sposób następujący:

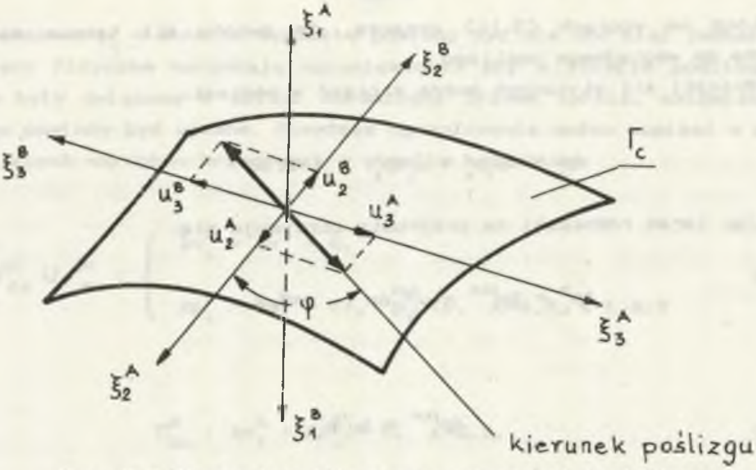
$$p_i = \mu_i p_1, \quad i=2,3, \tag{3.9}$$

gdzie

$$\mu_2 = \mu \cos\varphi,$$

$$\mu_3 = \mu \sin\varphi.$$

Parametr φ określa kierunek wypadkowej siły stycznej (rys. 3.3), a jego sposób wyznaczania przedstawiony jest poniżej (por. [3.4, 3.10-3.12]).



Rys. 3.3 Kierunek poślizgu na powierzchni kontaktu

Fig. 3.3 Direction of a slip in the contact area

Zakłada się, że po n krokach obciążenia na części powierzchni Γ_c wystąpi zjawisko poślizgu. Wówczas w $(n+1)$ kroku kierunek siły tarcia jest taki sam, jak siły stycznej do powierzchni w n-tym kroku. Otrzymuje się więc

$$\cos\varphi = \frac{p_2^n}{\sqrt{(p_2^n)^2 + (p_3^n)^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{p_3^n}{\sqrt{(p_2^n)^2 + (p_3^n)^2}} \qquad (3.10)$$

Przyjmuje się, że w każdym następnym kroku kierunek siły tarcia pokrywa się z kierunkiem poślizgu, tj.

$$\cos\varphi = -\frac{u_2^{A,n+1} + u_2^{B,n+1}}{\sqrt{(u_2^{A,n+1} + u_2^{B,n+1})^2 + (u_3^{A,n+1} + u_3^{B,n+1})^2}} \qquad (3.11a)$$

$$\sin\varphi = -\frac{u_3^{A,n+1} + u_3^{B,n+1}}{\sqrt{(u_2^{A,n+1} + u_2^{B,n+1})^2 + (u_3^{A,n+1} + u_3^{B,n+1})^2}} \qquad (3.11b)$$

Znak minus we wzorach (3.11) oznacza, że zwroty sił tarcia mają być przeciwne do względnego poślizgu.

Różniczki sił stycznych można zapisać w postaci:

$$dp_i = d\mu_i p_1 + \mu_i dp_1, \quad i=2,3. \tag{3.12}$$

Zmieniając teraz różniczki na przyrosty otrzymuje się:

$$\Delta p_i^n = \Delta p_i^{\mu,n} + \mu_i^{n-1}\Delta p_1^n, \quad i=2,3, \tag{3.13}$$

gdzie

$$\Delta p_i^{\mu,n} = \Delta\mu_i^n p_1^n,$$

$$\Delta\mu_i^n = \mu_i^{n-1} - \mu_i^{n-2},$$

$$\mu_i^n = \mu_i(v_T^n,\lambda),$$

przy czym względny poślizg v_T^n określony jest równaniem (3.8).

Przyrosty współczynnika tarcia określone są na podstawie poprzedniego kroku obciążenia. Zastosowanie wzoru (3.13) do zagadnień dwuwymiarowych prowadziło do poprawnych wyników obliczeń (por. [3.7]).

3.4. WARUNKI BRZEGOWE W STREFIE KONTAKTU

Zakłada się, że na tych częściach powierzchni Γ_c^A i Γ_c^B, dla których $u^{o,n}=0$ (a więc w tych miejscach, gdzie ciała się stykają), wyróżnić można następujące strefy:

- strefy adhezyjne Γ_{ca}^A i Γ_{ca}^B,
- strefy poślizgu Γ_{cs}^A i Γ_{cs}^B.

Jest oczywiste, że zachodzą następujące związki:

$$\Gamma_c^K \supseteq \Gamma_{ca}^K \cup \Gamma_{cs}^K \quad \text{oraz} \quad \Gamma_{ca}^K \cap \Gamma_{cs}^K = \emptyset, \qquad K=A,B \tag{3.14}$$

Wymóg prawidłowego rozwoju kontaktu narzuca potrzebę sformułowania odpowiednich więzów geometrycznych i fizycznych, które w strefie kontaktu wprowadzają ograniczenia na dowolną deformację obu ciał. Więzy geometryczne wynikają z warunku zgodności przemieszczeń w strefie kontaktu. Żąda się, aby wartości przemieszeń normalnych punktów będących w kontakcie były przeciwnych znaków i równe co do wartości bezwzględnych. To samo dotyczy przemieszczeń stycznych w strefie adhezyjnej. Siły powierzchniowe p_i w strefie kontaktu powinny być dla obu ciał jednakowe.

Więzy fizyczne narzucają ograniczenia, aby w strefie poślizgu siły styczne były związane z siłami normalnymi prawem tarcia, natomiast siły normalne powinny być ujemne. Powyższe ograniczenia można zapisać w postaci następujących warunków brzegowych w strefie kontaktu:

$$\Gamma^K_{Ca} \cup \Gamma^K_{Cs} : \begin{cases} \Delta v^A_i + \Delta v^B_i = 0, \\ \Delta p^A_i - \Delta p^B_i = 0, \quad p^K_i < 0, \quad K=A,B;\ i=1,2,3 \end{cases} \tag{3.15a}$$

$$\Gamma^K_{Ca} : \Delta v^A_i + \Delta v^B_i = 0, \quad i=2,3, \tag{3.15b}$$

$$\Gamma^K_{Ca} : \Delta p^K_i = \Delta p^\mu_i + \mu_i \Delta p^K_1, \quad K=A,B; \quad i=1,2,3. \tag{3.15c}$$

Warto nadmienić, że z uwagi na specyfikę formułowania zadania brzegowego w postaci całkowej, w której przemieszczenia brzegowe i siły powierzchniowe występują w sposób jawny w równaniach, więzy geometryczne i fizyczne są uwzględniane w sposób bezpośredni.

3.5. BRZEGOWE RÓWNANIA CAŁKOWE ZAGADNIENIA KONTAKTU

Dla każdego ciała znajdującego się w kontakcie można napisać układ brzegowych równań całkowych w postaci[10]:

$$c_{ij}(x)u^K_j(x) = \int_{\Gamma^K} U_{ij}(x,y)p^K_j(y)d\Gamma^K(y) - \int_{\Gamma^K} P_{ij}(x,y)u^K_j(y)d\Gamma^K(y), \quad K=A,B \tag{3.16}$$

lub

$$\int_{\Gamma^K} T_{ij}(x,y)u^K_j(y)d\Gamma^K(y) = \int_{\Gamma^K} U_{ij}(x,y)p^K_j(y)d\Gamma^K(y), \quad K=A,B \tag{3.17}$$

gdzie

$$T_{ij}(x,y) = P_{ij}(x,y) + c_{ij}(y)\delta(x-y). \tag{3.18}$$

Ponieważ przy opisie zagadnienia kontaktu stosuje się zasadę przyrostową, więc układ równań całkowych (3.17) przybiera postać:

---

[10] Dla uproszczenia dalszych rozważań wpływ sił objętościowych został pominięty.

$$\int_{\Gamma^K} T_{ij}(x,y)\Delta u_j^K(y)d\Gamma^K(y) = \int_{\Gamma^K} U_{ij}(x,y)\Delta p_j^K(y)d\Gamma^K(y). \qquad (3.19)$$

$$K=A,B$$

Wszystkie wielkości w równaniu (3.19) odnoszą się do globalnego układu współrzędnych (x_i) z bazą (e_i). Natomiast do tej pory używano lokalnego układu współrzędnych (ζ_i^K) z bazą (e_i^K), $K=A,B$, (por. rys. 3.2). W lokalnym układzie współrzędnych jądra równań (3.19) transformują się następująco:

$$T^K_{i^\bullet j^\bullet}(x,y) = A^K_{i^\bullet i}(x)T_{ij}(x,y)A^K_{jj^\bullet}(y),$$

$$(3.20)$$

$$U^K_{i^\bullet j^\bullet}(x,y) = A^K_{i^\bullet i}(x)U_{ij}(x,y)A^K_{jj^\bullet}(y),$$

gdzie

$$A^K_{i^\bullet i} = e^K_{i^\bullet}\cdot e^K_{i}; \quad A^K_{ii^\bullet} = e^K_{i}\cdot e^K_{i^\bullet}; \quad A^K_{i^\bullet i}\cdot A^K_{ij^\bullet} = \delta_{i^\bullet j^\bullet}.$$

Uwzględniając w równaniach (3.19) brzegowe warunki kontaktu (3.15) oraz zależności (3.4) i (3.13) otrzymuje się[11]:

$$\int_{\Gamma^A-\Gamma^A_C} T^A_{ij}\Delta u^A_j d\Gamma^A + \int_{\Gamma^A_{Ca}} T^A_{ij}\Delta v_j d\Gamma^A + \int_{\Gamma^A_{Cs}} (T^A_{i1}\Delta v_1 + T^A_{i2}\Delta v^A_2 + T^A_{i3}\Delta v^A_3)d\Gamma^A$$

$$= \int_{\Gamma^A-\Gamma^A_C} U^A_{ij}\Delta p^A_j d\Gamma^A + \int_{\Gamma^A_{Ca}} U^A_{ij}\Delta p_j d\Gamma^A + \int_{\Gamma^A_{Cs}} (U^A_{i1} + \mu_2^{n-1}U^A_{i2} + \mu_3^{n-1}U^A_{i3})\Delta p_1 d\Gamma^A \qquad (3.21)$$

$$- \int_{\Gamma^A_C} \alpha^n T^A_{i1} u^{o,n-1} d\Gamma^A + \int_{\Gamma^A_{Cs}} (U^A_{i2}\Delta p_2^{\mu,n} + U^A_{i3}\Delta p_3^{\mu,n})d\Gamma^A,$$

oraz

$$\int_{\Gamma^B-\Gamma^B_C} T^B_{ij}\Delta u^B_j d\Gamma^B + \int_{\Gamma^B_{Ca}} T^B_{ij}\Delta v_j d\Gamma^B + \int_{\Gamma^B_{Cs}} (T^B_{i1}\Delta v_1 + T^B_{i2}\Delta v^B_2 + T^B_{i3}\Delta v^B_3)d\Gamma^B$$

$$= \int_{\Gamma^B-\Gamma^B_C} U^B_{ij}\Delta p^B_j d\Gamma^B + \int_{\Gamma^B_{Ca}} U^B_{ij}\Delta p_j d\Gamma^B + \int_{\Gamma^B_{Cs}} (U^B_{i1} + \mu_2^{n-1}U^B_{i2} + \mu_3^{n-1}U^B_{i3})\Delta p_1 d\Gamma^B \qquad (3.22)$$

---

[11] W celu uproszczenia dalszego zapisu we wskaźnikach i oraz j pominięto apostrofy.

$$- \int\limits_{\Gamma^B_C} (1 - \alpha^n) T^B_{i1} u^{0,n-1} d\Gamma^B + \int\limits_{\Gamma^B_{Cs}} (U^B_{i2} \Delta p^{\mu,n}_2 + U^B_{i3} \Delta p^{\mu,n}_3) d\Gamma^B ,$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\Delta v^A_1 = -\Delta v^B_1 = \Delta v_1 \ ; \qquad \Delta p^A_i = \Delta p^B_i = \Delta p_i \quad \text{na } \Gamma^K_{Ca} \cup \Gamma^K_{Cs}, \ i=1,2,3; \ K=A,B,$$

$$\Delta v^A_i = -\Delta v^B_i = \Delta v_i \quad \text{na } \Gamma^K_{Ca}; \ i=1,2; \quad K=A,B.$$

Równania (3.21) i (3.22) tworzą w sumie układ 6 równań całkowych zagadnienia kontaktu. Na każdej części brzegu wyróżnić można sześć niewiadomych, a mianowicie:

$$\bigcup_{K=A,B} (\Gamma^K / \Gamma^K_C) \ : \ \Delta v^K_i \text{ lub } \Delta p^K_i , \quad i=1,2,3, \quad K=A,B,$$

$$\Gamma^A_{Ca}, \Gamma^B_{Ca} \ : \ \Delta v_i \ \text{ i } \ \Delta p_i ,$$

$$\Gamma^A_{Cs}, \Gamma^B_{Cs} \ : \ \Delta v_1 \ \text{ i } \ \Delta p_1, \ \Delta v^K_2, \ \Delta v^K_3 .$$

Jeżeli powierzchnia kontaktu, a ściślej strefy: adhezyjna i poślizgu nie zmieniają się podczas przyrostu obciążenia, to uwzględniając fakt, że oba ciała są liniowo-sprężyste, można zastosować zasadę superpozycji. Wówczas rozwiązanie równań (3.21) i (3.22) złożyć można z dwóch części. Część pierwsza rozwiązania zależeć będzie od dwóch ostatnich całek w równaniach (3.21) i (3.22), natomiast druga część rozwiązania zależna będzie od przyrostów obciążenia zewnętrznego.

3.6. DYSKRETYZACJA ZAGADNIENIA KONTAKTU ELEMENTAMI BRZEGOWYMI

Problem dyskretyzacji brzegu został dokładnie omówiony w rozdziale 1 pracy. Jak wiadomo, istnieje wiele różnych kształtów elementów brzegowych. Doświadczenie numeryczne wskazuje jednak, że w zagadnieniu kontaktu nie wszystkie typy elementów brzegowych dają zadowalające wyniki. Zwykle żąda się, aby funkcje aproksymujące poszukiwane wielkości na brzegu były co najwyżej liniowe. Zastosowanie funkcji kształtu wyższego stopnia prowadzić może do pewnych niezgodności geometrycznych.

Powierzchnie Γ^A i Γ^B dyskretyzowane są za pomocą elementów brzegowych. Na każdym elemencie poszukiwane funkcje wyrażone są przez kombinację liniową wartości węzłowych i funkcji kształtu w sposób następujący:

$$\Delta u_i^{K}(\xi) = N^{w}(\xi)\Delta u_i^{Kw}, \tag{3.23a}$$

$$\Delta v_i^{K}(\xi) = N^{w}(\xi)\Delta v_i^{Kw}, \tag{3.23b}$$

$$\Delta p_i^{K}(\xi) = N^{w}(\xi)\Delta p_i^{Kw}, \tag{3.23c}$$

$K=A,B$
$i=1,2,3$
$w=1,2,\dots W$.

gdzie $N^{w}(\xi)$ jest funkcją kształtu w lokalnym układzie współrzędnych ξ.

W wyniku zastąpienia całek brzegowych w równaniach całkowych (3.21) i (3.22) przez sumę całek po elementach brzegowych i uwzględnieniu aproksymacji (3.23) otrzymuje się w rezultacie układ $3(W^{A}+W^{B})$ równań algebraicznych, w którym niewiadomymi są wartości przyrostów przemieszczeń i sił węzłowych. Układ ten przedstawić można w następującej postaci:

$$[G]\{X\} = \{Y^{\mu T}\} + [\hat{U}]\{\Delta P\}, \tag{3.24}$$

gdzie $\{X\}$ jest nieznaną macierzą kolumnową określoną następująco:

$$\{X\}=[\,\Delta u^{A},\Delta u^{B},\Delta v^{A}_{2e},\Delta v^{B}_{2e},\Delta v^{A}_{3e},\Delta v^{B}_{3e}\Delta p^{A},\Delta p^{B}\ \vdots$$

$$\vdots\ \Delta v_{1a},\Delta v_{2a},\Delta v_{3a},\Delta v_{1e},\Delta p_{1a},\Delta p_{1e},\Delta p_{2a},\Delta p_{3a}\,]^{T},$$

natomiast macierze $[G]$, $\{Y^{\mu T}\}$ i $\{\Delta P\}$ określone są następująco:

$$[G] = \left[\begin{array}{cccccccc|}
T^{A} & 0 & T^{A}_{2e} & 0 & T^{A}_{3e} & 0 & -U^{A} & 0 \\
\hline
0 & T^{B} & 0 & T^{B}_{2e} & 0 & T^{B}_{3e} & 0 & -U^{B}
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{|cccccccc}
T^{A}_{1a} & T^{A}_{2a} & T^{A}_{3a} & T^{A}_{1e} & -U^{A}_{1a} & -(U^{A}_{1e} + \mu_2 U^{A}_{2e} + \mu_3 U^{A}_{3e}) & -U^{A}_{2a} & -U^{A}_{3a} \\
\hline
T^{B}_{1a} & T^{B}_{2a} & T^{B}_{3a} & T^{B}_{1e} & -U^{B}_{1a} & -(U^{B}_{1e} + \mu_2 U^{B}_{2e} + \mu_3 U^{B}_{3e}) & -U^{B}_{2a} & -U^{B}_{3a}
\end{array}\right],$$

$$\{Y^{\mu T}\} = \left\{\begin{array}{c}
-\alpha^{n} T^{A}_{i} u^{o,n-1} + U^{A}_{2}\Delta p^{\mu,n}_{2} + U^{A}_{3}\Delta p^{\mu,n}_{3} \\
\hline
-(1-\alpha^{n}) T^{B}_{i} u^{o,n-1} + U^{B}_{2}\Delta p^{\mu,n}_{2} + U^{B}_{3}\Delta p^{\mu,n}_{3}
\end{array}\right\},$$

$$[\hat{U}] = \begin{bmatrix} \hat{U}^{A} & 0 \\ 0 & \hat{U}^{B} \end{bmatrix}, \qquad \{\Delta P\} = \begin{Bmatrix} \Delta p^{A} \\ \Delta p^{B} \end{Bmatrix},$$

przy czym Δp^{A} oraz Δp^{B} są macierzmi kolumnowymi sił zewnętrznych w węzłach elementów brzegowych.

Zamiast rozwiązywać układ równań (3.24), można rozpatrzyć dwa następujące układy równań:

$$[G]\{X_1\} = \{Y^{\mu T}\}, \tag{3.25}$$

$$[G]\{X_2\} = [\hat{U}]\{\Delta P\}, \tag{3.26}$$

przy czym rozwiązanie zagadnienia jest sumą rozwiązań równań (3.25) i (3.26), tzn. $\{X\} = \{X_1\} + \{X_2\}$.

Układy równań (3.25) i (3.26) rozwiązywane są w sposób opisany poniżej. Najpierw w n-tym kroku obliczeń rozwiązywany jest układ (3.25), którego prawa strona zależy od odległości $u^{o,n-1}$ między powierzchniami mającymi wejść w kontakt oraz od residualnych sił stycznych powstałych w wyniku nieuwzględnienia zmian współczynnika tarcia. Następnie rozwiązywany jest układ (3.26) przy dowolnym przyroście sił zewnętrznych $\{\Delta P\}$. Przyrost ten szacowany jest na podstawie obciążenia maksymalnego. W dalszym kroku postępowania tak dobierany jest przyrost $\{\Delta P\}$ (przez zwiększenie lub zmniejszenie), aby kolejne elementy brzegowe weszły w kontakt. Problem doboru przyrostów sił $\{\Delta P\}$, zwany skalowaniem, opisany jest w p. 3.7.

3.7. SKALOWANIE. DYSKRETNY ROZWÓJ KONTAKTU

Należy określić taki przyrost obciążenia $\{\Delta P\}$, aby kolejny element w sąsiedztwie strefy styku wszedł w kontakt. W tym celu można zaproponować następujący tok postępowania. Najpierw należy rozwiązać układ równań (3.25). W wyniku otrzymuje się $\Delta^o u_i^{K,n}$ oraz $\Delta^o p_i^{K,n}$, $K=A,B$, na powierzchni kontaktu. Następnie rozwiązywany jest układ równań (3.26) w następującej postaci:

$$[G]\beta\{X_2\} = [\hat{U}]\beta\{\Delta P\}, \tag{3.27}$$

gdzie przez $\beta\{\Delta P\}$ oznaczono dowolny przyrost obciążenia zewnętrznego, zwany dalej próbnym przyrostem obciążenia.

Na początku założyć można, że wielkość β jest równa np. 1.

Z rozwiązania równania (3.27) otrzymuje się $\beta\Delta^P u_i^{K,n}$ oraz $\beta\Delta^P p_i^{K,n}$.

Całkowitą wartość sił i przemieszczeń uzyskuje się sumując wyniki z poprzednich obliczeń:

$$u_i^{K,n} = \Delta^o u_i^{K,n} + \beta\Delta^P u_i^{K,n} + u_i^{K,n-1}, \tag{3.28}$$

$$p_i^{K,n} = \Delta^o p_i^{K,n} + \beta\Delta^P p_i^{K,n} + p_i^{K,n-1}. \tag{3.29}$$

Natomiast przyrost przemieszczeń jest równy:

$$\Delta u_i^{K,n} = \Delta^o u_i^{K,n} + \beta \Delta^P u_i^{K,n}. \tag{3.30}$$

Wystąpić mogą następujące trzy przypadki:

1). Współczynnik β dobierany jest w ten sposób, aby najmniejsza z różnych od zera odległości $u^{o,n}$ była równa zero. Odpowiada to takiemu obciążeniu, przy którym kolejny element wchodzi w kontakt. Korzystając z zależności (3.4) otrzymuje się następujący warunek:

$$\Delta u_1^{A,n} + \Delta u_1^{B,n} = u^{o,n-1} \tag{3.31}$$

Jeśli teraz w zależności (3.31) uwzględni się związek (3.30), to otrzymuje się wzór na poszukiwaną wartość współczynnika β:

$$\beta = \frac{u^{o,n-1} - (\Delta^o u_1^{A,n} + \Delta^o u_1^{B,n})}{\Delta^P u_1^{A,n} + \Delta^P u_1^{B,n}} \tag{3.32}$$

2). Po obciążeniu układu próbnym przyrostem $\{\Delta P\}$ okazuje się, że powierzchniowe siły normalne na pewnym elemencie brzegowym, będącym poprzednio w kontakcie, są większe od zera. Należy więc zmniejszyć $\{\Delta P\}$ tak, aby siły normalne na tym elemencie były równe zero. Wykorzystuje się w tym celu równanie (3.29). Bezpośrednio z niego wynika, że

$$\beta = - \frac{p_1^{K,n-1} + \Delta^o p_1^{K,n}}{\Delta^P p_1^{K,n}} \tag{3.33}$$

Oczywiście w następnym kroku należy założyć, że elementy te nie są już w kontakcie, a więc że leżą na powierzchni $\Gamma_c^K \backslash (\Gamma_{ca}^K \cup \Gamma_{ca}^K)$.

3). Po obciążeniu układu próbnym przyrostem obciążenia $\{\Delta P\}$ okazuje się, że w pewnym elemencie siła styczna przekracza dopuszczalną wartość, tzn.

$$p_T = \sqrt{(p_2^n)^2 + (p_3^n)^2} \geq \mu p_1^n. \tag{3.34}$$

Należy więc zmniejszyć próbny przyrost obciążenia tak, aby $p_T = \mu p_1^n$. Uwzględniając zależność (3.29) otrzymuje się kwadratowe równanie ze względu na β:

$$\beta^2[(\Delta^P p_2^n)^2 + (\Delta^P p_3^n)^2] + 2\beta[(\Delta^o p_2^n + p_2^{n-1})\Delta^P p_2^n + (\Delta^o p_3^n + p_3^{n-1})\Delta^P p_3^n]$$

$$+ (\Delta^o p_2^n + p_2^{n-1})^2 + (\Delta^o p_3^n + p_3^{n-1})^2 - \mu^2 (p_1^n)^2 = 0. \tag{3.35}$$

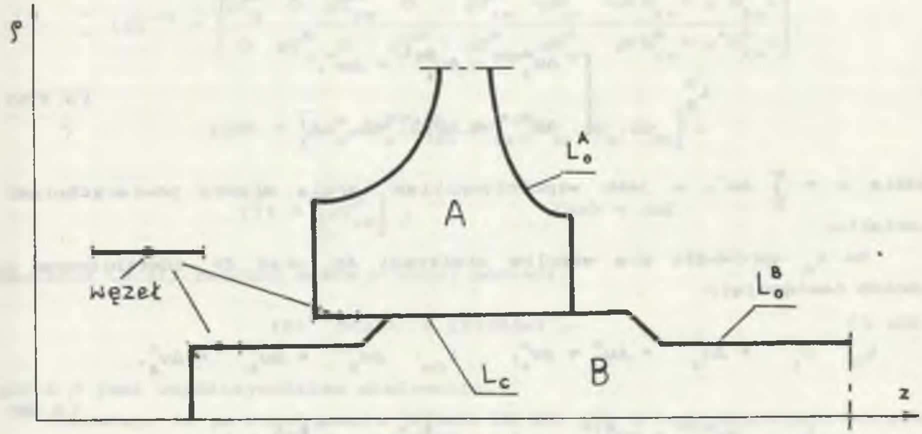
Oczywiście w następnym kroku obciążenia przyjmuje się, że na tym elemencie występuje poślizg.

Po obliczeniu współczynnika skalowania β rozwiązuje się jeszcze raz układ równań (3.27).

3.8. MODELOWANIE POŁĄCZENIA WTŁACZANEGO CIAŁ OBROTOWO-SYMETRYCZNYCH JAKO ZADANIA KONTAKTU

Rozważane są dwa ciała liniowo-sprężyste A i B o symetrii obrotowej, które mają tworzyć połączenie wciskowe. Przed zmontowaniem takiego układu ciało A posiada otwór o promieniu wewnętrznym mniejszym o pewną wartość w od promienia zewnętrznego ciała B. Wielkość w nazywana będzie dalej wciskiem.

Ciała A i B zajmują w $\mathscr{E}^3$ obszary Ω^A i Ω^B, które są ograniczone powierzchniami Γ^A i Γ^B. Powierzchnie Γ^A i Γ^B otworzone są przez obrót tworzących L^A i L^B wokół osi $z(x_3)$, tzn. $\Gamma^A=L^A\times[-\pi,\pi]$ i $\Gamma^B=L^B\times[-\pi,\pi]$ (rys. 3.4).



Rys. 3.4 Połączenie wtłaczane dwóch ciał osiowo-symetrycznych

Fig. 3.4 The forced-in join of two axisymmetric bodies

Jak pokazano w p. 1.2.4, w przypadku ciał o symetrii obrotowej zagadnienie przestrzenne redukuje się do jednowymiarowego. Wprowadza się układ współrzędnych cylindrycznych (ρ,Θ,z). W rozważanym przypadku zarówno przemieszczenia, jak i siły są niezależne od kąta Θ i brzegowe równania całkowe dla obu ciał można przedstawić w następującej postaci przyrostowej:

$$\int_{L^K} T_{ij}(\hat{x},\hat{y})\Delta u_j^K(\hat{y})\rho(\hat{y})dL(\hat{y}) = \int_{L^K} U_{ij}(\hat{x},\hat{y})\Delta p_j^K(\hat{y})\rho(\hat{y})dL(\hat{y}), \qquad i,j=\rho,z \quad K=A,B \tag{3.36}$$

gdzie

$$T_{ij}(x,\hat{y}) = P_{ij}(\hat{x},\hat{y}) + c_{ij}(\hat{y})\delta(\hat{x}-\hat{y}).$$

$U_{ij}(x,\hat{y})$ i $P_{ij}(\hat{x},y)$ są rozwiązaniami podstawowymi statycznej teorii sprężystości we współrzędnych cylindrycznych (por. wzór (1.73) dla n=0), Δu^K_j i Δp^K_j są przyrostami przemieszczeń i sił powierzchniowych; przyjęto także, że $x_1=\rho$ i $x_2=z$.

Zakłada się, że na powierzchni kontaktu utworzonej przez tworzącą L_c wyróżnić można dwie strefy: adhezyjną L_{Ca} i poślizgu L_{Cs}, oczywiście zachodzi następujący związek $L_C = L_{Ca} \cup L_{Cs}$. Te części tworzących, które nie wchodzą w strefę kontaktu, oznaczono przez L^K_o, $K=A,B$.

Problem analizy procesu wtłaczania rozważany będzie od momentu, gdy już pewna część ciała B wtłoczona jest w otwór ciała A. Wówczas warunki kontaktu obu ciał w strefie styku mają następującą postać:

$$L^A_o \text{ i } L^B_o \quad : \Delta p^{K,n}_i = 0, \qquad L^K_{Cs} \quad : \quad \Delta p^{K,n}_2 = \mu \Delta p^{K,n}_1, \tag{3.37a}$$

$$L^K_C : \quad \begin{cases} \Delta u^{A,n}_1 - \Delta u^{B,n}_1 = \Delta w^n, \\ \Delta p^{A,n}_i + \Delta p^{B,n}_i = 0, \end{cases} \tag{3.37b}$$

gdzie $w = \sum_n \Delta w^n$, μ jest współczynnikiem tarcia między powierzchniami kontaktu.

Na L_C wprowadza się wspólne wielkości Δp_i oraz Δv_i zdefiniowane w sposób następujący:

$$L_C: \quad u^{A,n}_1 = \Delta u^{B,n}_1 + \Delta w^n = \Delta v^n_1, \qquad L_{Ca}: \quad \Delta u^{A,n}_2 = \Delta u^{B,n}_2 = \Delta v^n_2,$$
$$L_{Cs}: \quad \Delta u^{K,n}_2 = \Delta v^{K,n}_2, \qquad L_C: \quad \Delta p^{A,n}_i = -\Delta p^{B,n}_i = \Delta p_i. \tag{3.38}$$

Uwzględniając wzory (3.37) i (3.38) w równaniach całkowych (3.36) otrzymuje się:

$$\int_{L^A_o} T_{ij}\Delta u^{A,n}_j dL^A + \int_{L^{A,n}_{Ca}} T_{ij}\Delta v^n_j \rho dL^A + \int_{L^{A,n}_{Cs}} (T_{i1}\Delta v^n_1 + T_{i2}\Delta v^{A,n}_2)\rho dL^A =$$
$$\int_{L^{A,n}_{Ca}} U_{ij}\Delta p^n_j \rho dL^A + \int_{L^{A,n}_{Cs}} (U_{i1} + \mu^n U_{i2})\Delta p^n_1 \rho dL^A, \tag{3.39}$$

oraz

$$\int_{L_o^B} T_{ij}\Delta u_j^{B,n} dL^B + \int_{L_{Ca}^{B,n}} T_{ij}\Delta v_j^n \rho dL^B + \int_{L_{Cs}^{B,n}} (T_{i1}\Delta v_1^n + T_{i2}\Delta v_2^{B,n})\rho dL^B =$$

$$- \int_{L_{Ca}^{B,n}} U_{ij}\Delta p_j^n \rho dL^B - \int_{L_{Cs}^{B,n}} (U_{i1} + \mu^n U_{i2})\Delta p_1^n \rho dL^B + \int_{L_C} T_{i1}\rho\Delta w^n dL^B, \tag{3.40}$$

$$i,j=1,2\ ,\ x_1=\rho,\ x_2=z,$$

gdzie $\mu^n=\mu\ \mathrm{sgn}(\Delta p_2^{n-1})$, $L_{Cs}^{K,0} = \emptyset$, $K=A,B$.

W wyniku dyskretyzacji L^A i L^B za pomocą elementów brzegowych w postaci odcinków liniowych (rys. 3.4) i aproksymacji funkcji brzegowych na każdym elemencie otrzymuje się układ równań algebraicznych:

$$[G]^{n-1}\{\Delta X\}^n = [\hat{T}]\{\Delta w\}^n, \tag{3.41}$$

gdzie

$$[G]^{n-1} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \rho T_o^A & 0 & \rho T_{2s}^A & 0 & \rho T_{1s}^A & -\rho U_a^A & -\rho(U_{1s}^A + \mu^n U_{2s}^A) \\ \hline 0 & \rho T_o^B & 0 & \rho T_{2s}^B & \rho T_{1s}^B & \rho U_a^B & \rho(U_{1s}^B + \mu^n U_{2s}^B) \end{array}\right],$$

$$\{\Delta X\} = \left[\Delta u_o^A, \Delta u_o^B, \Delta v_{2s}^A, \Delta v_{2s}^B \,\middle|\, \Delta v_{1s}, \Delta p_a, \Delta p_{1s}\right]^T,$$

$$[\hat{T}] = \left[\rho T_{1C}^B\right], \qquad \{\Delta w\} = \Delta w I.$$

Równanie (3.41) zapisać można w innej postaci:

$$[G]^{n-1}\beta\{\Delta X\}^n = [\hat{T}]\beta\{\Delta w\}^n, \tag{3.42}$$

gdzie β jest współczynnikiem skalowania.

Załóżmy, że po rozwiązaniu układu (3.42) dla n-tego przyrostu wcisku Δw^n okazało się, że na elemencie brzegowym, który leżał w strefie adhezyjnej ("a"), zachodzi nierówność:

$$|p_2^n| > |\mu p_1^n|, \qquad p_i^n = \beta\Delta p_i^n + p_i^{n-1}. \tag{3.43}$$

Oznacza to, że element ten powinien leżeć w strefie poślizgu ("s") oraz że wcisk Δw^n jest zbyt duży. Przyrost wcisku Δw^n należy więc zmniejszyć β-razy, aby zachodził warunek:

$$|p_2^n| = |\mu p_1^n|, \tag{3.44}$$

a w następnym kroku należy przyjąć, że rozważany element leży już w strefie poślizgu.

Wykorzystując wzór (3.43) współczynnik β oblicza się z relacji:

$$\beta = \left| \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu^{j-1} \Delta p_1^j - \sum_{j=1}^{n-1} \Delta p_2^j}{\Delta p_2^n} \right| \tag{3.45}$$

Na podstawie opracowanej i przedstawionej wyżej oryginalnej metodyki modelowania połączeń wciskowych za pomocą metody elementów brzegowych skonstruowany został numeryczny algorytm analizy wytrzymałościowej połączenia wtłaczanego koła kolejowego z osią (por. [3.11, 3.12]).

LITERATURA

[3.1] Abdul-Mihsin M.J.A., Bakr A.A. and Paker A.P.: A boundary integral equation method for axisymmetric elastic contact problems. Computer and Structures, Vol. 23, No 6, pp.787-793, 1986.

[3.2] Adamczyk T., Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych w zagadnieniu kontaktu ciał stałych. Mat. VII Konferencji Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, t. 1, s.16-25, Gdynia 1985.

[3.3] Adamczyk T., Burczyński T.: The boundary element method for nonlinear axisymetric contact problems. Proc. 24 Symposium PTMTS nt. Modelowanie w mechanice, s.143-146, Beskid Śląski 1985.

[3.4] Adamczyk T., Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych w zagadnieniach przestrzennego kontaktu z tarciem. Zeszyt Naukowy Pol. Sl., s. Mechanika, nr 83, s.7-20, Gliwice 1986.

[3.5] Andersson T.: The boundary element method applied to two-dimensional contact problems with friction. Proc. Third Int. Sem. on Recent Advances in Boundary Element Methods (Ed. C.A. Brebbia), Springer-Verlag, Berlin 1981.

[3.6] Andersson T.: The second generation boundary element contact program. Proc. Fourth Int. Sem. on Boundary Element Methods (Ed. C.A. Brebbia), Springer-Verlag, Berlin 1982.

[3.7] Andersson T.: Boundary elements in two-dimensional contact and friction. Linköping Studies in Science and Technology. Disertations, No 85, Linköping 1982.

[3.8] Andersson T., Fredriksson B. and Person B.A.: The boundary element method applied to two-dimensional contact problems. In: New developments in boundary element methods (Ed. C.A. Brebbia), CML Publications, Southampton 1980.

[3.9] Andersson T., Person B.: The boundary element method to two-dimensional contact problems. Chapter 5 in: Progress in boundary elements, Vol. II, Pentech Press, London 1982.

[3.10] Burczyński T., Adamczyk T.: Zagadnienie kontaktu w mechanice kolejowego zestawu kołowego w ujęciu metody brzegowych równań całkowych. Zadanie 2.3, Temat 1.5: Racjonalne projektowanie kolejowych zestawów kołowych, Problem węzłowy PAN 05.12, Prace IMiPKM Pol. Sl., NB-305/RMK/81, (kier. pracy R. Bąk), Gliwice 1983.

[3.11] Burczyński T., Adamczyk T.: Algorytmy numeryczne metody brzegowych równań całkowych w analizie stereomechanicznej kolejowego zestawu kołowego. Zadanie 2.4, Temat 1.5: Racjonalne projektowanie kolejowych zestawów kołowych, Problem węzłowy PAN 05.12, Prace IT Pol. Sl., NB-305/RMK/81, (kier. pracy R. Bąk), Katowice 1984.

[3.12] Burczyński T. and Adamczyk T.: The boundary element formulation for contact problems of wheelset. Proc. 8th International Wheelset Congress, Vol. 1, pp.II.5/1-II.5/14, Madrid 1985.

[3.13] Fredriksson B.: Finite element solution of surface nonlinearities in structural mechanics. Computer and Structures, Vol. 6, pp.281-290, 1976.

[3.14] Jin H., Runesson G. and Samuelsson A.: Application of the boundary element method to contact problems in elasticity with a nonclassical friction law. In: Boundary elements IX (Eds. C.A. Brebbia, W.L. Wendland and G. Kuhn), Vol. 2: Stress analysis applications, pp.397-415, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1987.

[3.15] Jodko Z.: Metoda elementów brzegowych w płaskich zagadnieniach kontaktu sprężystego z tarciem. Mat. VIII Konf. Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, t. 1, s.353-360, Warszawa 1987.

[3.16] Karami G. and Fenner R.T.: A two-dimensional BEM for thermo-elastic body forces contact problems. In: Boundary elements IX (Eds. C.A. Brebbia, W.L. Wendland and G. Kuhn), Vol. 2: Stress analysis applications, pp.417-437, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1987.

[3.17] Kuich G.: Application of the boundary element method to contact problems. In: BETECH/86 (Eds. J.J. Connor and C.A. Brebbia), pp.499-515, CMP 1986.

[3.18] Margenov S., Georgiev K., Kadjicov L. and Novakova M.A.: An effective approach for BEM application to friction contact problem. In: Boundary elements IX (Eds. C.A. Brebbia, W.L. Wendland and G. Kuhn), Vol. 2: Stress analysis applications, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1987.

[3.19] Panagiotopoulos P.D.: Boundary integral equation methods for the friction problems. Engineering Analysis, Vol.4, pp.100-105, 1987.

[3.20] Paris F. and Garrido J.A.: On the use of discontinuous elements in two dinensional contact problems. In: Boundary elements VII (Eds.C.A. Brebbia and G. Maier), Vol. II, pp.13/37-13/39, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[3.21] Paris F. and Garrido J.A.: Friction multicontact problems with BEM. In: Boundary elements X (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 3: Stress analysis, pp.305-319, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[3.22] Selvaduri A.P.S.: Non-linear material interfaces: a boundary element approach. In: Advanced boundary element methods (Ed. T.A. Cruse), pp.389-396, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[3.23] Takahashi S. and Brebbia C.A.: Analysis of contact problems in elastic bodies using a BEM flexibity approach. In: Boundary elements X (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 3: Stress analysis, pp.353-379, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[3.24] Tralli A. and Alessandri C.: On BEM solutions of elastic frictionless contact problems. In: Boundary elements X (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 3: Stress analysis, pp.337-350, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[3.25] Tsuta T. and Yamaji S.: BE analysis of contact thermoelastoplastic problems with creep and the numerical technique. In: Boundary element techniques (Eds. C.A. Brebbia, T. Futugami and M. Tanaka), Springer-Verlag, Berlin 1983.

[3.26] Witkowski J.: Zagadnienie kontaktu ciał odkształcalnych. Prace naukowe Pol. Warszawskiej, s. Mechanika, z. 53, Warszawa 1978.

4. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ANALIZIE ZAGADNIEŃ STOCHASTYCZNYCH

4.1. UWAGI WSTĘPNE

Rozwiązania deterministyczne wielu zagadnień z zakresu mechaniki ciał odkształcalnych stanowią w wielu przypadkach modelowania rzeczywistych układów mechanicznych zbyt dużą idealizację i nie odzwierciedlają złożonej struktury zjawisk fizycznych. Zgodnie więc ze współczesną tendencją stosuje się w tego typu przypadkach opis stochastyczny.

Modele stochastyczne są lepszym przybliżeniem rzeczywistości niż modele deterministyczne, ponieważ w modelowaniu stochastycznym można lepiej wykorzystać posiadane informacje o badanym układzie lub zjawisku uwzględniając jednocześnie niewiedzę i niepewność w jego ocenie.

Opis stochastyczny znalazł szerokie zastosowanie w analizie ciągłych układów sprężystych, takich jak struna, pręt, płyta, powłoka oraz w badaniach rozprzestrzeniania się fal stochastycznych w ośrodkach nieograniczonych lub półograniczonych. (por. np. [4.2, 4.18, 4.19, 4.28, 4.31, 4.32, 4.33]).

W przypadku ciał o złożonej geometrycznej postaci konstrukcyjnej, z którymi najczęściej spotykamy się w budowie maszyn, jedynie zastosowanie metod numerycznych pozwala na uzyskanie efektywnych rozwiązań zagadnień stochastycznych.

Sposób analizy losowo odkształconych układów w postaci tzw. stochastycznej metody elementów skończonych stał się w ostatnich latach nowym narzędziem badania układów mechanicznych w warunkach niepewości (por. np. [4.24, 4.25, 4.29, 4.30, 4.35, 4.36]).

Również metoda elementów brzegowych umożliwia formułowanie zagadnień probabilistycznych mechaniki, uwzględniając zarówno stochastyczną naturę obciążeń (statycznych i dynamicznych) działających na układ, losowe własności materiału, jak i stochastyczny kształt brzegu układu. Stochastyczna metoda elementów brzegowych staje się nowym i obiecującym wariantem metody elementów brzegowych w zagadnieniach losowych.

Pierwszą próbę sformułowania stochastycznych zagadnień brzegowych statycznej teorii sprężystości w ujęciu metody elementów brzegowych podjął Burczyński w pracy [4.3]. Problematyka ta rozszerzona o sprężyste i lepko-sprężyste zagadnienia dynamiczne kontynuowana była przez Burczyńskiego w pracach [4.4, 4.5, 4.6, 4.8, 4.12], a także w pracach z Adamczykiem [4.13] i Johnem [4.15, 4.16, 4.17].

Stochastyczne zagadnienia teorii potencjału rozpatrywane były przez Burczyńskiego [4.7], a problemy związane z przewodnictwem cieplnym rozważał Drewniak [4.20].

Metoda elementów brzegowych stosowana była także przez Burczyńskiego w analizie rozprzestrzeniania się fal w ośrodkach stochastycznych [4.10].

Osobną ciekawą klasą zagadnień, w której metoda elementów brzegowych może być użytecznym narzędziem numerycznym, są zadania z losowym brzegiem. Problemy takie rozpatrywane były przez Nakagiri, Suzuki i Hisada [4.26], Burczyńskiego [4.9, 4.11], Burczyńskiego i Fedelińskiego [4.14] oraz Drewniaka i Pawickiego [4.21].

Zagadnienia stochastyczne mechaniki układów odkształcalnych formułuje się następująco: znając charakterystyki probabilistyczne takich wielkości, jak warunki brzegowe, warunki początkowe i siły objętościowe należy wyznaczyć odpowiednie charakterystyki probabilistyczne wielkości opisujących zachowanie się układu, a więc np. przemieszczeń i naprężeń. Z matematycznego punktu widzenia należy więc rozwiązać stochastyczne zagadnienie brzegowe lub stochastyczne zagadnienie początkowo-brzegowe.

Podstawową rolę w aksjomatyzacji zagadnień stochastycznych odgrywa pojęcie przestrzeni probabilistycznej. Pod tym pojęciem rozumie się trójkę uporządkowaną $(\mathcal{G},\mathcal{F},\mathcal{P})$, gdzie $\mathcal{G}$ jest zbiorem zdarzeń elementarnych i przedstawia wszystkie możliwe elementarne wyniki doświadczenia związanego z danym zjawiskiem losowym, $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę zdarzeń losowych będącą σ-ciałem, natomiast $\mathcal{P}$ jest miarą probabilistyczną określoną na $\mathcal{F}$.

Stochastyczne zagadnienia brzegowe badał po raz pierwszy Kampe de Feriet [4.23]. Podał on definicję losowego rozwiązania problemu dla prawie wszystkich realizacji[12].

Istotą prezentowanego w rozdziale niniejszym ujęcia jest sprowadzenie stochastycznego zadania brzegowo-początkowego lub brzegowego, opisanego układem losowych cząstkowych równań różniczkowych wraz z przynależnymi mu losowymi warunkami brzegowymi i początkowymi, do układu stochastycznych osobliwych równań całkowych określonych tylko na brzegu rozważanego układu. Dyskretyzacja tych równań techniką elementów brzegowych prowadzi do układu losowych równań algebraicznych, które są podstawą do określania charakterystyk probabilistycznych (momentów) nieznanych na brzegu ciała przemieszczeń i sił, a w następnej kolejności obliczania przemieszczeń i naprężeń wewnątrz układu mechanicznego.

4.2. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ZAGADNIENIACH STOCHASTYCZNYCH ELASTOSTATYKI

Rozpatrywane jest jednorodne , izotropowe ciało sprężyste o stałych materiałowych λ i μ zajmujące w przestrzeni $\mathcal{E}^d$ (d=2 lub 3) obszar Ω z brzegiem Γ. Na brzegu ciała dane są stochastyczne warunki brzegowe w

---

[12] Stochastyczne zagadnienie brzegowe sprowadzić można także do problemu deterministycznego (por. [4.32]) w przypadku gdy dla każdego ustalonego $\gamma_o \in \mathcal{G}-\Lambda$, gdzie $\mathcal{P}(\Lambda)=0$, rozkład miary jest jednopunktowy, tj. $\mathcal{P}(\{\gamma_o\})=1$ i $\mathcal{P}(\mathcal{G}-\{\gamma_o\})=0$.

postaci:

- stochastycznego pola przemieszczeń:

$$u(x,\gamma) = u^{o}(x,\gamma), \quad x\in\Gamma_1, \tag{4.1}$$

- stochastycznego pola sił powierzchniowych:

$$p(x,\gamma) = p^{o}(x,\gamma), \quad x\in\Gamma_2, \tag{4.2}$$

przy czym $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset$, γ jest zdarzeniem elementarnym i należy do zbioru zdarzeń elementarnych $\mathfrak{F}$, tj. $\gamma\in\mathfrak{F}$.

Stan układu opisany jest operatorowym równaniem różniczkowym:

$$L_e u(x,\gamma) = b(x,\gamma), \tag{4.3}$$

gdzie L_e jest operatorem deterministycznym i ma postać: (1.10).

Zakłada się, że znane są charakterystyki probabilistyczne warunków brzegowych i siły objętościowej w postaci pierwszych dwóch momentów:

- wartości przeciętne:

$$m_u(x) = \mathbb{E}u^{o}(x,\gamma), \quad x\in\Gamma_1 \tag{4.4a}$$

$$m_p(x) = \mathbb{E}p^{o}(x,\gamma), \quad x\in\Gamma_2 \tag{4.4b}$$

$$m_b(x) = \mathbb{E}b(x,\gamma), \quad x\in\Omega, \tag{4.4c}$$

- tensory korelacyjne $K_u(x_1,x_2)=\left[K_{u_iu_j}(x_1,x_2)\right]$, $K_p(x_1,x_2)=\left[K_{p_ip_j}(x_1,x_2)\right]$ i $K_b(x_1,x_2)=\left[K_{b_ib_j}(x_1,x_2)\right]$, których elementy zdefiniowane są następujące:

$$K_{u_iu_j}(x_1,x_2) = \mathbb{E}u_i^{o}(x_1,\gamma)u_j^{o}(x_2,\gamma), \quad x_1,x_2\in\Gamma_1, \tag{4.5a}$$

$$K_{p_ip_j}(x_1,x_2) = \mathbb{E}p_i^{o}(x_1,\gamma)p_j^{o}(x_2,\gamma), \quad x_1,x_2\in\Gamma_2, \tag{4.5b}$$

$$K_{b_ib_j}(x_1,x_2) = \mathbb{E}b_i(x_1,\gamma)b_j(x_2,\gamma), \quad x_1,x_2\in\Omega, \tag{4.5c}$$

gdzie $\mathbb{E}$ jest operatorem wartości oczekiwanej.

Odnośnie do pól losowych $u^{o}(x,\gamma)$, $p^{o}(x,\gamma)$ i $b(x,\gamma)$ zakłada się, że są one generowane przez niezależne źródła. Jeśli pola te są jednorodne, to tensory korelacyjne (4.5) zależą tylko od różnicy argumentów.

Sformułowane stochastyczne zagadnienie brzegowe sprowadzić można do postaci całkowej korzystając z zasady wzajemności prac Bettiego (1.18). Otrzymuje się wówczas układ stochastycznych osobliwych równań całkowych, który w postaci wektorowej ma postać (por. Burczyński [4.12]):

$$c(x)u(x,\gamma) + \int_{\Gamma} P(x,y)u(y,\gamma)d\Gamma(y) = \int_{\Gamma} U(x,y)p(y,\gamma)d\Gamma(y) + \int_{\Omega} U(x,y)b(y,\gamma)d\Omega(y), \quad x\in\Gamma. \tag{4.6}$$

gdzie $U(x,y)$ i $P(x,y)$ są rozwiązaniami podstawowymi statycznej teorii sprężystości i opisane są wzorami (1.29)-(1.32), natomiast $c(x)$ określone jest zależnością (1.39).

Gdy $x\in\Omega$, to zależność (4.6) jest analogonem stochastycznym formuły Somigliany.

Stochastyczne pole naprężeń wewnątrz ciała określone jest równaniem:

$$\sigma_{ij}(x,\gamma) = \int_{\Gamma} D_{ijk}(x,y)p_k(y,\gamma)d\Gamma(y) - \int_{\Gamma} S_{ijk}(x,y)u_k(y,\gamma)d\Gamma(y) + \int_{\Omega} D_{ijk}(x,y)b_k(y,\gamma)d\Omega(y), \quad x\in\Omega. \tag{4.7}$$

gdzie tensory D_{ijk} i S_{ijk} określone są wzorami (1.24) i (1.25).

Wektorowe stochastyczne równanie całkowe (4.6) rozwiązać można efektywnie techniką elementów brzegowych. W tym celu, podobnie jak w zagadnieniach deterministycznych, brzeg ciała Γ dyskretyzuje się za pomocą elementów brzegowych Γ^e, $e=1,2,\ldots,E$, a współrzędne prostokątne $x=(x_k)$ dowolnego punktu elementu brzegowego wyrażają się przez współrzędne punktów węzłowych $x=(x_k^v)$, podobnie jak w (1.43).

Stochastyczne brzegowe pola przemieszczeń $u(x,\gamma)$ i sił powierzchniowych $p(x,\gamma)$ są na każdym elemencie brzegowym Γ^e aproksymowane w lokalnym układzie współrzędnych $\xi=(\xi_i)$ za pomocą funkcji kształtu $N(\xi)$ i losowych wartości węzłowych $u^{ev}(\gamma)$ i $p^{ev}(\gamma)$ w sposób następujący[19]:

$$u^e(x(\xi),\gamma) = N(\xi)u^{ev}(\gamma), \tag{4.8}$$

$$p^e(x(\xi),\gamma) = N(\xi)p^{ev}(\gamma). \tag{4.9}$$

---

[19] Skończenie wymiarowa dyskretyzacja losowych pól przemieszczeń i sił brzegowych powoduje, że wartości węzłowe tych wielkości są zmiennymi losowymi, otrzymanymi w wyniku lokalnego uśredniania rozważanych pól na każdym elemencie brzegowym. W konsekwencji można oczekiwać, że stochastyczny charakter wartości węzłowych zależeć będzie od wyboru geometrii siatki elementów brzegowych, podobnie jak w metodzie stochastycznych elementów skończonych (por. Vanmarcke *et al.* [4.35, 4.36]).

W wyniku opisanej w rozdziale 1 skończenie wymiarowej aproksymacji równania całkowego równanie (4.6) przyjmuje następującą postać algebraiczną:

$$[H]\{u(\gamma)\} = [G]\{p(\gamma)\} + \{B(\gamma)\}, \tag{4.10}$$

gdzie macierze nielosowe $[H]$ i $[G]$ określone są identycznie z zagadnieniem deterministycznym (por. roz. 1) natomiast macierze kolumnowe $\{u(\gamma)\}$ i $\{p(\gamma)\}$ zawierają losowe wartości węzłowe przemieszczeń i sił brzegowych; losowa macierz kolumnowa $\{B(\gamma)\}$ zależy od sił objętościowych.

Uwzględniając warunki brzegowe (4.1) i (4.2) równanie (4.9) przyjmuje postać układu losowych równań algebraicznych, który w postaci macierzowej można przedstawić następująco:

$$[A]\{X(\gamma)\} = [F]\{Y(\gamma)\} + \{B(\gamma)\}, \tag{4.11}$$

gdzie macierz kolumnowa $\{X(\gamma)\}$ zawiera nieznane losowe wartości węzłowe przemieszczeń i sił brzegowych, macierz kolumnowa $\{Y(\gamma)\}$ zależy od danych losowych warunków brzegowych, natomiast deterministyczne macierze kwadratowe $[A]$ i $[F]$ utworzone są z elementów macierzy $[H]$ i $[G]$.

Jesli macierz $[A]$ jest nieosobliwa, to rozwiązanie równania (4.11) przedstawić można następująco:

$$\{X(\gamma)\} = [A]^{-1}[F]\{Y(\gamma)\} + [A]^{-1}\{B(\gamma)\}, \tag{4.12}$$

gdzie $[A]^{-1}$ jest macierzą odwrotną do $[A]$.

Rozwiązanie w postaci (4.12) służy do określania momentów nieznanych wielkości losowych przemieszczeń i sił brzegowych.
Wartość przeciętną oblicza się ze wzoru:

$$\{m_X\} = [A]^{-1}[F]\{m_Y\} + [A]^{-1}\{m_B\}. \tag{4.13}$$

Macierz korelacyjna określona jest wzorem:

$$\begin{aligned}[K_X] = \mathbb{E}\left[\{X(\gamma)\}\{X(\gamma)\}^T\right] &= [A]^{-1}[F][K_Y][F]^T[A]^{-1T} + [A]^{-1}[F]\{m_Y\}\{m_B\}^T[A]^{-1T} \\ &+ [A]^{-1}[K_B][A]^{-1T} + [A]^{-1}\{m_B\}\{m_Y\}^T[F]^T[A]^{-1T},\end{aligned} \tag{4.14}$$

gdzie znak ^{T} oznacza transpozycję macierzy.

Przy określaniu momentów losowych pól przemieszczeń i naprężeń wewnątrz ciała potrzebna jest znajomość macierzy korelacji wzajemnej $[K_{XY}]$ i $[K_{YX}]$. Macierze te oblicza się ze wzorów:

$$[K_{XY}] = \mathbb{E}\left[\{X(\gamma)\}\{Y(\gamma)\}^T\right] = [A]^{-1}[F][K_Y] + [A]^{-1}\{m_B\}\{m_Y\}^T, \tag{4.15}$$

oraz

$$[K_{YX}] = \mathbb{E}\left[\{Y(\gamma)\}\{X(\gamma)\}^T\right] = [K_Y][F]^T[A]^{-1T} + \{m_Y\}\{m_B\}^T[A]^{-1T} \tag{4.16}$$

Warto zauważyć, że wszystkie momenty wyrażają się przez $[A]^{-1}$ lub $[A]^{-1T}$. Wystarczy zatem tylko raz odwrócić macierz $[A]$. Można tego dokonać rozważając układ deterministycznych równań algebraicznych w postaci:

$$[A]\{X_l\} = \{I_l\}, \tag{4.17}$$

gdzie rozwiązanie $\{X_l\}$ jest l-tą kolumną macierzy odwrotnej $[A]^{-1}$, $\{I_l\}$ jest macierzą kolumnową, w której w l-tym wierszu jest 1, a pozostałe elementy są równe zero.

Losowe przemieszczenia i naprężenia określone są równaniami:

$$\{u(x,\gamma)\} = [G(x)]\{p(\gamma)\} - [H(x)]\{u(\gamma)\} + \{B(x,\gamma)\}, \quad x\in\Omega \tag{4.18}$$

$$\{\sigma(x,\gamma)\} = [D(x)]\{p(\gamma)\} - [S(x)]\{u(\gamma)\} + \{\underline{B}(x,\gamma)\}, \quad x\in\Omega \tag{4.19}$$

Momenty przemieszczeń i naprężeń mają następującą postać:

- wartości przeciętne:

$$\{m_u(x)\} = [G(x)]\{m_p\} - [H(x)]\{m_u\} + \{m_B(x)\}, \quad x\in\Omega \tag{4.20}$$

$$\{m_\sigma(x)\} = [D(x)]\{m_p\} - [S(x)]\{m_u\} + \{m_{\underline{B}}(x)\}, \quad x\in\Omega \tag{4.21}$$

- macierze korelacyjne:

$$[K_u(x_1,x_2)] = \mathbb{E}\left[\{u(x_1,\gamma)\}\{u(x_2,\gamma)\}^T\right] = \tag{4.22}$$

$$[G(x_1)][K_p][G(x_2)]^T - [G(x_1)]\{m_p\}\{m_u\}^T[H(x_2)]^T + [G(x_1)]\{m_p\}\{m_B(x_2)\}^T$$

$$- [H(x_1)]\{m_u\}\{m_p\}^T[G(x_2)]^T + [H(x_1)][K_u][H(x_2)]^T - [H(x_1)]\{m_u\}\{m_B(x_2)\}^T$$

$$+ \{m_B(x_1)\}\{m_p\}^T[G(x_2)]^T - \{m_B(x_1)\}\{m_u\}^T[H(x_2)]^T + [K_B(x_1,x_2)], \quad x_1,x_2\in\Omega,$$

oraz

$$[K_{\sigma}(x_1,x_2)] = \mathbb{E}\left[\{\sigma(x_1,\gamma)\}\{\sigma(x_2,\gamma)\}^T\right] = \tag{4.23}$$

$$[D(x_1)][K_p][D(x_2)]^T - [D(x_1)]\{m_p\}\{m_u\}^T[S(x_2)]^T + [D(x_1)]\{m_p\}\{m_{\underline{B}}(x_2)\}^T$$

$$- [S(x_1)]\{m_u\}\{m_p\}^T[D(x_2)]^T + [S(x_1)][K_u][S(x_2)]^T - [S(x_1)]\{m_u\}\{m_{\underline{B}}(x_2)\}^T$$

$$+ \{m_{\underline{B}}(x_1)\}\{m_p\}^T[D(x_2)]^T - \{m_{\underline{B}}(x_1)\}\{m_u\}^T[S(x_2)]^T + [K_{\underline{B}}(x_1,x_2)],$$

$$x_1, x_2 \in \Omega.$$

Wzory (4.12), (4.18) i (4.19) służyć mogą do obliczania momentów wyższych rzędów. Wówczas wychodząc z rozwinięcia Grama-Charliera można określić rozkład prawdopodobieństwa stochastycznych pól przemieszczeń $u(x,\gamma)$ i naprężeń $\sigma(x,\gamma)$.

4.3. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W STOCHASTYCZNYCH ZAGADNIENIACH DYNAMIKI

Rozważane jest jednorodne izotropowe ciało sprężyste, o stałych λ, μ i gęstości ρ zajmujące obszar Ω w $\mathbb{R}^d$ (d=2 lub 3) z brzegiem Γ, poddane działaniu sił objętościowych w postaci przestrzenno-czasowego pola losowego $b(x,t,\gamma)$ oraz warunków brzegowych w postaci:

- przestrzenno-czasowego stochastycznego pola przemieszczeń:

$$u(x,t,\gamma) = u^o(x,t,\gamma), \qquad x \in \Gamma_1, \tag{4.24}$$

- przestrzenno-czasowego stochastycznego pola sił powierzchniowych:

$$p(x,t,\gamma) = p^o(x,t,\gamma), \qquad x \in \Gamma_2, \tag{4.25}$$

gdzie $t \in \mathcal{T} = [0,T]$, $\gamma \in \mathcal{G}$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ oraz $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Warunki początkowe mogą mieć także naturę stochastyczną:

$$u(x,0,\gamma) = u_o(x,\gamma), \qquad \dot{u}(x,0,\gamma) = \dot{u}_o(x,\gamma), \qquad x \in \Omega. \tag{4.26}$$

Stan rozważanego układu opisany jest operatorowym równaniem różniczkowym:

$$L_d u(x,t,\gamma) = \hat{b}(x,t,\gamma), \tag{4.27}$$

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in \Omega,$$

gdzie operator L_d ma postać :

$$L_d = L_s + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{4.28}$$

Operator L_s opisany jest przez (1.10).

Pole stochastyczne $\hat{b}(x,t,\gamma)$ określone jest następująco:

$$\hat{b}(x,t,\gamma) = b(x,t,\gamma) + \rho[u_o(x,\gamma)\delta'(t) + \dot{u}_o(x,\gamma)\delta(t)]. \tag{4.29}$$

Zakłada się, że znane są charakterystyki probabilistyczne stochastycznych warunków brzegowych, początkowych i sił objętościowych.

Nie zmniejszając ogólności dalszych rozważań zakłada się dalej, że wartości przeciętne tych wielkości są równe zeru. Przyjmuje się także, że pola losowe $u^o(x,t,\gamma)$, $p^o(x,t,\gamma)$, $u_o(x,\gamma)$, $\dot{u}_o(x,\gamma)$ oraz $b(x,t,\gamma)$ są generowane przez niezależne źródła.

Znane są macierze korelacji warunków początkowych $K_{u_o}(x_1,x_2)$ i $K_{\dot{u}_o}(x_1,x_2)$.

Stochastyczne warunki brzegowe i siły objętościowe scharakteryzowane są przez macierze uogólnionych gęstości widmowych $S_u(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2)$, $S_p(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2)$ i $S_b(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2)$, których elementy zdefiniowane są następująco:

$$S_{u_iu_j}(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2) = \mathbb{E}\left[\tilde{u}_i^o(x_1,\omega_1,\gamma)\tilde{u}_j^o(x_2,\omega_2,\gamma)\right], \tag{4.30}$$

$$S_{p_ip_j}(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2) = \mathbb{E}\left[\tilde{p}_i^o(x_1,\omega_1,\gamma)\tilde{p}_j^o(x_2,\omega_2,\gamma)\right], \tag{4.31}$$

$$S_{b_ib_j}(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2) = \mathbb{E}\left[\tilde{b}_i(x_1,\omega_1,\gamma)\tilde{b}_j(x_2,\omega_2,\gamma)\right], \tag{4.32}$$

gdzie

$$\tilde{\alpha}(x,\omega_1,\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x,t,\gamma)\exp(-i\omega_1 t)dt, \tag{4.33}$$

$$\alpha = u_i^o, p_i^o, b_i$$

$$\tilde{\alpha}(x,\omega_2,\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x,t,\gamma)\exp(i\omega_2 t)dt, \tag{4.34}$$

$$\alpha = u_j^o, p_j^o, b_j$$

Wzór (4.33) określa transformatę Fouriera, natomiast wzór (4.34) wyraża sprzężoną transformatę Fouriera.

Gęstości widmowe: $S_u(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2)$, $S_p(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2)$ i $S_b(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2)$ są charakterystykami probabilistycznymi niejednorodnych w dziedzinie współrzędnych przestrzennych i niestacjonarnych w dziedzinie czasu pól losowych. Tak zdefioniowane momenty drugiego rzędu są w dziedzinie czasu uogólnieniem gęstości spektralnej procesów stacjonarnych na procesy niestacjonarne (por. [4.18, 4.31]).

Uogólniona gęstość widmowa przebiegów stacjonarnych jest dodatnim masywem dystrybucyjnym skoncentrowanym na prostej $\omega_1=\omega_2$ i wyraża się zależnością:

$$S(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2) = 2\pi S(x_1,x_2,\omega_1)\delta(\omega_1-\omega_2). \tag{4.35}$$

Charakterystyki widmowe pól losowych są równoważne czasowym funkcjom korelacyjnym $K(x_1,x_2,t_1,t_2)$ przez podwójne przekształcenie Fouriera:

$$S(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int K(x_1,x_2,t_1,t_2)\exp[-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)]dt_1 dt_2. \tag{4.36}$$

Brzegowe równania całkowe dla stochastycznego zagadnienia dynamicznego otrzymać można wychodząc z zasady wzajemności prac Bettiego (1.92). Uwzględniając stochastyczną naturę warunków brzegowych, warunków początkowych i sił objętościowych otrzymuje (por. Burczyński [4.12]):

$$c(x)u(x,t,\gamma) + \int_\Gamma P(x,y,t)*u(y,t,\gamma)d\Gamma(y) = \int_\Gamma U(x,y,t)*p(y,t,\gamma)d\Gamma(y) = \tag{4.37}$$
$$\int_\Omega U(x,y,t)*\hat{b}(y,t,\gamma)d\Omega(y), \qquad x\in\Gamma,$$

gdzie symbol $*$ oznacza splot czasowy, natomiast deterministyczne jądra określone są przez rozwiązania podstawowe dynamicznej teorii sprężystości $U(x,y,t)$ i $P(x,y,t)$, których postać wyznaczona jest przez (1.98), (1.99) i (1.94).

Wektorowe stochastyczne równanie całkowe (4.37) opisuje dynamiczne zachowanie się ośrodka sprężystego poddanego oddziaływaniu przestrzenno-czasowych pól losowych. W przypadku gdy $x\in\Omega$ $c(x)=I$ równanie (4.37) jest formułą Somigliany dla stochastycznych zagadnień dynamicznych.

Stochastyczne pole naprężeń wewnątrz ciała określone jest równaniem:

$$\sigma_{ij}(x,t,\gamma) = \int_\Gamma D_{ijk}(x,y,t)*p_k(y,t,\gamma)d\Gamma(y) - \int_\Gamma S_{ijk}(x,y,t)*u_k(y,t,\gamma)d\Gamma(y) \tag{4.38}$$
$$+ \int_\Omega D_{ijk}(x,y,t)*\hat{b}_k(y,t,\gamma)d\Omega(y), \qquad x\in\Omega,$$

gdzie tensory D_{ijk} i S_{ijk} określone są przez (1.96) i (1.97).

Do rozwiązania (4.37) wygodnie jest zastosować metodę transformacji całkowych Fouriera. Otrzymuje się wtedy:

$$c(x)\tilde{u}(x,\omega,y) + \int_{\Gamma} \tilde{P}(x,y,\omega)\tilde{u}(y,\omega,y)d\Gamma(y) = \int_{\Gamma} \tilde{U}(x,y,\omega)\tilde{p}(y,\omega,y)d\Gamma(y) = \tag{4.39}$$

$$\int_{\Omega} \tilde{U}(x,y,\omega)\tilde{\tilde{b}}(y,\omega,y)d\Omega(y). \qquad x\in\Gamma.$$

$\tilde{U}(x,y,\omega) = \left[\tilde{U}_{ij}(x,y,\omega)\right]$ jest rozwiązaniem podstawowym operatora:

$$L_d^{\omega} = L_s - \rho\omega^2, \tag{4.40}$$

i ma postać:

$$U_{ij}(x,y,\omega) = \frac{1}{\varkappa\pi\rho c_2^2}(\psi\delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}), \tag{4.41}$$

gdzie $\varkappa=4$ dla zagadnień przestrzennych i $\varkappa=2$ dla zagadnień płaskich.
Funkcje ψ i χ określone są następująco:

$$\psi = \frac{\exp(-i\omega r/c_2)}{r} + \left(\frac{c_2}{i\omega r} - \frac{c_2^2}{\omega^2 r^2}\right)\frac{\exp(-i\omega r/c_2)}{r} - \tag{4.42}$$

$$\frac{c_2^2}{c_1^2}\left(\frac{c_1}{i\omega r} - \frac{c_1^2}{\omega^2 r^2}\right)\frac{\exp(-i\omega r/c_1)}{r},$$

$$\chi = \left(1 + \frac{3c_2}{i\omega r} - \frac{3c_2^2}{\omega^2 r^2}\right)\frac{\exp(-i\omega r/c_2)}{r} - \tag{4.43}$$

$$\frac{c_2^2}{c_1^2}\left(\frac{3c_1}{i\omega r} - \frac{3c_1^2}{\omega^2 r^2} + 1\right)\frac{\exp(-i\omega r/c_1)}{r},$$

dla zagadnień przestrzennych oraz

$$\psi = K_0\left(\frac{i\omega r}{c_2}\right) \frac{c_2}{i\omega r}\left[K_1\left(\frac{i\omega r}{c_2}\right) - \frac{c_2}{c_1}K_1\left(\frac{i\omega r}{c_1}\right)\right], \tag{4.44}$$

$$\chi = K_2\left(\frac{i\omega r}{c_2}\right) - \frac{c_2^2}{c_1^2}K_2\left(\frac{i\omega r}{c_1}\right)\Big], \tag{4.45}$$

dla zagadnień płaskich.

K_o, K_1 i K_2 są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela trzeciego rodzaju odpowiednio zerowego, pierwszego i drugiego rodzaju, natomiast $c_1=[(\lambda+2\mu)/\rho]^{1/2}$ jest prędkością fali dylatacyjnej, a $c_2=(\mu/\rho)^{1/2}$ jest prędkością fali skrętnej.

Równanie (4.39) zachowuje swoją ważność także dla ośrodków lepko-sprężystych, opisanych równaniem stanu (1.108), jeśli w miejsce stałych Lamego λ i μ wstawić wielkości λ_v i μ_v zależne od parametru przekształcenia Fouriera ω:

$$\mu_v(i\omega) = F(i\omega)/[2P(i\omega)], \qquad \lambda_v(i\omega) = \lambda + (2/3)[\mu - \mu_v(i\omega)], \tag{4.46}$$

gdzie F i P są operatorami różniczkowymi określonymi wzorami (1.109).

Wielkości $\mu_v(i\omega)$ i $\lambda_v i\omega)$ wyrazić można także przez zespolone moduły przy ścinaniu $Y_s(i\omega)$ i dylatacji $Y_v(i\omega)$ w sposób następujący (por. [4.27]):

$$\mu_v(i\omega) = Y_s(i\omega)/2, \qquad \lambda_v(i\omega) = [Y_v(i\omega) - Y_s(i\omega)]/3. \tag{4.47}$$

Jeśli ω potraktować jako parametr, to równanie (4.39) podobne jest do stochastycznego brzegowego równanie całkowego (4.6), opisującego zagadnienie statyczne. Dlatego do rozwiązania równania (4.39) zastosować można podobny tok postępowania.

Brzeg układu dyskretyzowany jest za pomocą elementów brzegowych Γ^e, $e=1,2,\ldots,E$. Transformaty całkowe przestrzenno-czasowych pól losowych przemieszczeń $\tilde{u}(x,\omega,\gamma)$ i sił brzegowych $\tilde{p}(x,\omega,\gamma)$ aproksymowane są na każdym elemencie Γ^e przez funkcje kształtu i losowe wartości węzłowe $\tilde{u}^{ev}(\omega,\gamma)$ i $\tilde{p}^{ev}(\omega,\gamma)$ w następujący sposób:

$$\tilde{u}^e(x(\xi),\omega,\gamma) = N(\xi)\tilde{u}^{ev}(\omega,\gamma), \tag{4.48}$$

$$\tilde{p}^e(x(\xi),\omega,\gamma) = N(\xi)\tilde{p}^{ev}(\omega,\gamma). \tag{4.49}$$

Jeśli całkę objętościową, występującą w równaniu (4.39), nie da się obliczyć analitycznie lub sprowadzić do całki brzegowej (por. p.1.2.3), to także obszar Ω należy podzielić na komórki wewnętrzne Ω^q, $q=1,2,\ldots Q$, (por. p.1.2.2).

W wyniku dyskretyzacji równania (4.39) otrzymuje się następującą postać algebraiczną:

$$[\tilde{H}(\omega)]\{\tilde{u}(\omega,\gamma)\} = [\tilde{G}(\omega)]\{\tilde{p}(\omega,\gamma)\} + \{\tilde{B}(\omega,\gamma)\}, \Big|_{\omega=(\omega^l),\ l=1,2,\ldots l_{max}} \tag{4.50}$$

gdzie elementy nielosowych macierzy zespolonych $[\tilde{H}(\omega)]$ i $[\tilde{G}(\omega)]$ są określone przez całki brzegowe z rozwiązań podstawowych $\tilde{U}(x,y,\omega)$ i $\tilde{P}(x,y,\omega)$ i obliczone dla ciągu wartości ω^l, $l=1,2,\ldots,l_{max}$.

Macierze kolumnowe $\{\tilde{u}(\omega,\gamma)\}$ i $\{\tilde{p}(\omega,\gamma)\}$ zawierają transformaty losowych wartości węzłowych przemieszczeń i sił brzegowych.

Po uwzględnieniu warunków brzegowych równanie (4.50) przekształcić można do układu zespolonych losowych równań algebraicznych:

$$[\tilde{A}(\omega)]\{\tilde{X}(\omega,\gamma)\} = [\tilde{F}(\omega)]\{\tilde{Y}(\omega,\gamma)\} + \{\tilde{B}(\omega,\gamma)\}, \qquad \omega=(\omega^l), \quad l=1,2,\ldots l_{max} \tag{4.51}$$

gdzie macierz kolumnowa $\{\tilde{X}(\omega,\gamma)\}$ zawiera nieznane transformaty losowych przemieszczeń i sił brzegowych, natomiast w macierzy kolumnowej $\{\tilde{Y}(\omega,\gamma)\}$ znajdują się wielkości dane w warunkach brzegowch.

Jeśli dla ciągu wartości parametru ω^l, $l=1,2,\ldots,l_{max}$, macierz $[\tilde{A}(\omega)]$ jest nieosobliwa, to rozwiązanie równania (4.51) przyjmuje postać:

$$\{\tilde{X}(\omega,\gamma)\} = [\tilde{A}(\omega)]^{-1}[\tilde{F}(\omega)]\{\tilde{Y}(\omega,\gamma)\} + [\tilde{A}(\omega)]^{-1}\{\tilde{B}(\omega,\gamma)\}, \qquad \omega=(\omega^l), \quad l=1,2,\ldots l_{max} \tag{4.52}$$

Rozwiązanie (4.52) umożliwia określanie gęstości widmowych nieznanych przemieszczeń i sił brzegowych. Otrzymuje się następujące wyrażenia na poszukiwane charakterystyki spektralne:

$$\begin{aligned}[S_X(\omega_1,\omega_2)] &= \mathbb{E}\left[\{\tilde{X}(\omega_1,\gamma)\}\{\tilde{X}(\omega_2,\gamma)\}^H\right] = \\ &[\tilde{A}(\omega_1)]^{-1}[\tilde{F}(\omega_1)][S_Y(\omega_1,\omega_2)][\tilde{F}(\omega_2)]^H[\tilde{A}(\omega_2)]^{-1H} + \\ &[\tilde{A}(\omega_1)]^{-1}[S_B(\omega_1,\omega_2)][\tilde{A}(\omega_2)]^{-1H}, \\ &\omega_i=(\omega_i^l), \quad l=1,2,\ldots l_{max}, \quad i=1,2\end{aligned} \tag{4.53}$$

oraz wzajemne gęstości widmowe:

$$[S_{XY}(\omega_1,\omega_2)] = \mathbb{E}\left[\{\tilde{X}(\omega_1,\gamma)\}\{\tilde{Y}(\omega_2,\gamma)\}^H\right] = [\tilde{A}(\omega_1)]^{-1}[\tilde{F}(\omega_1)][S_Y(\omega_1,\omega_2)], \tag{4.54}$$

$$\omega_i=(\omega_i^l), \quad l=1,2,\dots l_{max}, \quad i=1,2$$

$$[S_{YX}(\omega_1,\omega_2)] = \mathbb{E}\left[\{\tilde{Y}(\omega_1,\gamma)\}\{\tilde{X}(\omega_2,\gamma)\}^H\right] = [S_Y(\omega_1,\omega_2)][\tilde{F}(\omega_2)]^H[\tilde{A}(\omega_2)]^{-1H}, \tag{4.55}$$

$$\omega_i=(\omega_i^l), \quad l=1,2,\dots l_{max}, \quad i=1,2$$

gdzie przez ^{H} oznaczono sprzężenie i transpozycję macierzy zespolonych.

W przypadku gdy drgania układu wymuszone są stacjonarnym polem losowym, to wzory (4.53)-(4.55) przybierają prostszą postać:

$$[S_X(\omega)] = [\tilde{A}(\omega)]^{-1}[\tilde{F}(\omega)][S_Y(\omega)][\tilde{F}(\omega)]^H[\tilde{A}(\omega)]^{-1H} + [\tilde{A}(\omega)]^{-1}[S_B(\omega)][\tilde{A}(\omega)]^{-1H}, \tag{4.56}$$

$$\omega=(\omega^l), \quad l=1,2,\dots l_{max}$$

$$[S_{XY}(\omega)] = [\tilde{A}(\omega)]^{-1}[\tilde{F}(\omega)][S_Y(\omega)], \tag{4.57}$$

$$\omega=(\omega^l), \quad l=1,2,\dots l_{max}$$

$$[S_{YX}(\omega)] = [S(\omega)][\tilde{F}(\omega)]^H[\tilde{A}(\omega)]^{-1H} \tag{4.58}$$

$$\omega=(\omega^l), \quad l=1,2,\dots l_{max}$$

Znajomość macierzy gęstości widmowych pól przemieszczeń i sił brzegowych umożliwia wyznaczenie charakterystyk spektralnych przemieszczeń i naprężeń wewnątrz ciała. W ogólnym przypadku pól niejednorodnych i niestacjonarnych otrzymuje się następujące wzory:

$$[S_u(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2)] = [\tilde{G}(x_1,\omega_1)][S_p(\omega_1,\omega_2)][\tilde{G}(x_2,\omega_2)]^H +$$

$$[\tilde{H}(x_1,\omega_1)][S_u(\omega_1,\omega_2)][\tilde{H}(x_2,\omega_2)]^H + [S_B(\omega_1,\omega_2)], \qquad (4.59)$$

$$x_1,x_2 \in \Omega,$$

$$\omega_i = (\omega_i^l), \quad l=1,2,\dots l_{max}, \quad i=1,2$$

oraz

$$[S_\sigma(x_1,x_2,\omega_1,\omega_2)] = [\tilde{D}(x_1,\omega_1)][S_p(\omega_1,\omega_2)][\tilde{D}(x_2,\omega_2)]^H +$$

$$[\tilde{S}(x_1,\omega_1)][S_u(\omega_1,\omega_2)][\tilde{S}(x_2,\omega_2)]^H + [S_B(\omega_1,\omega_2)], \qquad (4.60)$$

$$x_1,x_2 \in \Omega,$$

$$\omega_i = (\omega_i^l), \quad l=1,2,\dots l_{mx}, \quad i=1,2$$

gdzie macierze $[\tilde{H}(x,\omega)]$, $[\tilde{G}(x,\omega)]$, $[\tilde{D}(x,\omega)]$ i $[\tilde{S}(x,\omega)]$ zależą od całek brzegowych opowiednio o jądrach $\tilde{P}(x,y,\omega)$, $\tilde{U}(x,y,\omega)$, $\tilde{D}_{ijk}(x,y,\omega)$ i $\tilde{S}_{ijk}(x,y,\omega)$.

Warto zwrócić uwagę, że w odróżnieniu od zagadnień deterministycznych, zastosowanie gęstości widmowych jako charakterystyk probabilistycznych losowych pól przemieszczeń, sił powierzchniowych i naprężeń nie wymaga przeprowadzania pracochłonnego numerycznie odwracania transformat całkowych. Jest to oryginalną cechą i dużą zaletą prezentowanego ujęcia, które zostało sformułowane po raz pierwszy przez Burczyńskiego w pracy [4.4].

Istnieje możliwość alternatywnego sformułowania zagadnienia analizy drgań stochastycznych ciągłych układów sprężystych wykorzystująca, przedstawione w p. 1.3.5, rozwinięcie nieznanego pola przyśpieszeń $\ddot{u}(y,t,\gamma)$, $y\in\Omega$, w postaci (1.120). W pracy Burczyńskiego [4.6] oraz w pracach Burczyńskiego z Adamczykiem [4.13] i Johnem [4.16] przedstawiono zastosowanie tego ujęcia, które prowadzi do układu stochastycznych równań całkowych Volterry II rodzaju (por. [4.1]) względem nieznanych przyśpieszeń węzłowych punktów brzegowych[14].

---

[14] Zastosowanie stochastycznych równań całkowych Volterry do badania dyskretnych układów losowych rozważał Szopa w pracy [4.34].

4.4. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W PROBLEMACH ROZPRZESTRZENIANIA SIĘ FAL W OŚRODKACH STOCHASTYCZNYCH

Do tej pory rozważane były zagadnienia, w których stochastyczną naturę miały warunki brzegowe, siły objętościowe i warunki początkowe, natomiast operator różniczkowy opisujący własności ośrodka był deterministyczny. Jeśli ośrodek jest losowy, to operator opisujący jego zachowanie jest stochastyczny i równanie stanu ma postać:

$$L(\gamma)u = b, \tag{4.61}$$

gdzie $L(\gamma)$ jest operatorem różniczkowym o losowych współczynnikach.

Typowym przykładem równania typu (4.61) jest w analizie stochastycznych zagadnień falowych równanie Helmholtza. Wówczas operator losowy ma następującą postać:

$$L(\gamma) = \nabla^2 + k_o^2 N^2(x,\gamma), p \tag{4.62}$$

gdzie k_o liczbą falową ośrodka jednorodnego, $N(x,\gamma)$ jest funkcją losową opisującą niejednorodności ośrodka.

Rozpatrzmy nieskończony obszar sprężysty w $\mathbb{R}^d$, ($d=2$ lub 3), składający się z obszaru wewnętrznego Ω^+, ograniczonego brzegiem Γ, i obszaru zewnętrznego Ω^-.

Problem rozprzestrzeniania się fali harmonicznej o amplitudzie $\tilde{u}$ w ośrodku stochastycznym opisany jest równaniem Helmoltza:

$$\nabla^2\tilde{u} + k_o^2 N^2(x,\gamma)\tilde{u} = \tilde{b}(x), \tag{4.63}$$

gdzie $\tilde{b}(x)$ jest daną funkcją charakteryzującą źródło fali harmonicznej.

Jeśli źródło jest umiejscowione w punkcie x^o, to $\tilde{b}(x)=\delta(x-x^o)$. W przypadku ogólnym funkcja $b(x)$ może mieć charakter losowy.

Jeśli $|x|\to\infty$, to amplituda harmoniczna $\tilde{u}(x,\gamma)$ powinna spełniać warunek wypromieniowania Sommerfelda (por. [4.22]):

$$\lim_{|x|\to\infty} |x| \left[\frac{\partial \tilde{u}(x,\gamma)}{\partial |x|} - i k_o N(x,\gamma)\tilde{u}(x,\gamma) \right] = 0. \tag{4.64}$$

Zakładamy, że losowość ośrodka jest ograniczona do pewnego skończonego obszaru $R\subset\Omega^-$ oraz że $N^2(x,\gamma)$ jest w tym obszarze jednorodnym i izotropowym polem losowym o skończonych momentach. Jeśli losowe fluktuacje ośrodka są małe, to współczynnik załamania $N(x,\gamma)$ przedstawić można następująco:

$$N^2(x,\gamma) = 1 + \varepsilon V(x,\gamma), \quad \varepsilon \ll 1, \tag{4.65}$$

gdzie $V(x,\gamma)$ reprezentuje losowe fluktuacje własności ośrodka, ε jest małym parametrem.

Zakładamy, że $V(x,\gamma)$ jest jednorodnym i izotropowym polem losowym o wartości przeciętnej równej zero:

$$m_V = \mathbb{E}V(x,\gamma) = 0, \tag{4.66}$$

i funkcji korelacyjnej $K_V(x_1,x_2)$ określonej zależnością:

$$K_V(x_1,x_2) = \mathbb{E}[V(x_1,\gamma)V(x_2,\gamma)] = \sigma_V^2 \exp(-|x_1-x_2|/a^2), \tag{4.67}$$

gdzie σ_V^2 jest wariancją, natomiast a jest promieniem korelacji losowego pola $V(x,\gamma)$.

Przy powyższych założeniach rozwiązanie równania (4.63) przedstawić można w postaci:

$$\tilde{u}(x,\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{u}_k(x,\gamma). \tag{4.68}$$

Wstawiając (4.68) do (4.63) i przyrównując wyrażenia tego samego rzędu przy ε otrzymuje się układ różniczkowych równań rekurencyjnych (por. [4.33]):

$$\nabla^2\tilde{u}_o + k_o^2\tilde{u}_o = \tilde{b}(x), \tag{4.69}$$

$$\nabla^2\tilde{u}_k + k_o^2\tilde{u}_k = -k_o^2 V(x,\gamma)\tilde{u}_{k-1}, \tag{4.70}$$

$$k=1,2,\ldots$$

Stosując tożsamość Greena do układu równań różniczkowch (4.69) i (4.70) oraz przechodząc z punktem x do brzegu Γ otrzymuje się równoważny układ brzegowych równań całkowych:

$$c(x)\tilde{u}_o(x) = \int_\Gamma [U(x,y)\tilde{p}_o(y) - P(x,y)\tilde{u}_o(y)]d\Gamma(y) + \int_{\Omega^+} U(x,y)b(y)d\Omega^+, \tag{4.71}$$

$$c(x)\tilde{u}_k(x) = \int_\Gamma [U(x,y)\tilde{p}_k(y) - P(x,y)\tilde{u}_k(y)]d\Gamma(y) + k_o\int_R U(x,y)V(y,\gamma)\tilde{u}_{k-1}dR, \tag{4.72}$$

$$k=1,2,\ldots$$

gdzie $U(x,y)$ jest rozwiązaniem podstawowym operatora deterministycznego $L=\nabla^2 + k_o^2$ i ma postać:

$$U(x,y) = \frac{\exp(i k_o |x-y|}{-4\pi|x-y|}, \quad \text{dla } d=3, \tag{4.73}$$

$$U(x,y) = -\frac{1}{4i} H_o^{(2)}(k_o|x-y|), \quad \text{dla } d=2. \tag{4.74}$$

$H_o^{(2)}$ jest funkcją Hankela drugiego rodzaju zerowego rzędu.

Funkcje $P(x,y)$ i $\tilde{p}_k(y)$ wyrażają się następującymi zależnościami:

$$P(x,y) = \partial U(x,y)/\partial n(y), \tag{4.75}$$

$$\tilde{p}_k(y) = \partial \tilde{u}_k(y)/\partial n(y), \tag{4.76}$$

gdzie $n(y)$ jest jednostkowym wektorem normalnym do Γ.

Funkcja $c(x)$ zależy od położenia punktu x na brzegu Γ. Na brzegu Γ dane są warunki brzegowe, które mogą dotyczyć $\tilde{u}$ lub $\tilde{p}$.

Rozwiązaniem równania całkowego (4.71) jest deterministyczna funkcja $\tilde{u}_o(x)$, która opisuje falę pierwotną w ośrodku jednorodnym. Stochastyczne pole $\tilde{u}_k(x,\gamma)$, $k=1,2,..$, jest wygenerowane w ośrodku przez falę pierwotną $\tilde{u}_o$ i pole rozproszone $\tilde{u}_{k-1}$, $k=2,3,..$

Stochastyczny proces rozprzestrzeniania się fali, opisany szeregiem (4.68), może być interpretowany jako kolejne wielokrotne rozpraszanie.

W celu rozwiązania brzegowych równań całkowych (4.71) i (4.72) należy znaleźć wiele kolejnych przybliżeń $\tilde{u}_k$, ($k=0,1,2,..$). Jeśli rozpatruje się przypadek rozpraszania słabego[15], to wystarczy jedynie znaleźć $\tilde{u}_o(x)$ i $\tilde{u}_1(x,\gamma)$. Wówczas wartość przeciętna i funkcja korelacji pola losowego $\tilde{u}(x,\gamma)$ mają postać:

$$m_{\tilde{u}}(x) = \mathbb{E}\tilde{u}(x,\gamma) = \tilde{u}_o(x), \tag{4.77}$$

$$K_{\tilde{u}}(x_1,x_2) = \mathbb{E}[\tilde{u}(x_1,\gamma)\tilde{u}(x_2,\gamma)] = K_{\tilde{u}_1}(x_1,x_2). \tag{4.78}$$

W celu określenia momentów (4.77) i (4.78) należy rozwiązać brzegowe równania całkowe (4.71) i (4.72) dla $k=1$. Brzeg Γ dzielony jest na elementy brzegowe Γ^e, $e=1,2,..,E$, tak że współrzędne prostokątne dowolnego

---

[15] W tym przypadku rozważane jest rozpraszanie jednokrotne. Takie przybliżone rozwiązanie nazywa się przybliżeniem Borna. Nakłada ono mocne ograniczenia odnośnie do małości $\mathbb{E}(V^2)$ (por. Sobczyk [4.33]).

punktu elementu brzegowego wyrażają się przez współrzędne węzłowe za pomocą zależności (1.43). Deterministyczne pola $\tilde{u}_o(x)$ i $\tilde{p}_o(x)$ są aproksymowane w lokalnym układzie współrzędnych $\zeta=(\zeta_i)$ na każdym elemencie przez wartości węzłowe i funkcje kształtu $N(\zeta)$ w sposób następujący:

$$\tilde{u}_o(x(\zeta)) = N^v(\zeta)\tilde{u}_o^v, \tag{4.79}$$

$$\tilde{p}_o(x(\zeta)) = N^v(\zeta)\tilde{p}_o^v. \tag{4.80}$$

W wyniku skończenie wymiarowej aproksymacji równania całkowego (4.71) otrzymuje się układ równań algebraicznych:

$$[A]\{X_o\} = [F]\{Y_o\} + \{B_o\}, \tag{4.81}$$

gdzie macierze kwadratowe $[A]$ i $[F]$ zależą od całek brzegowych z rozwiązań podstawowych $U(x,y)$ i $P(x,y)$ i funkcji kształtu, macierz kolumnowa $\{X_o\}$ zawiera nieznane wartości węzłowe $\tilde{u}_o$ i $\tilde{p}_o$, w macierzy kolumnowej $\{Y_o\}$ znajdują się znane wartości $\tilde{u}_o$ i $\tilde{p}_o$ dane prze warunki brzegowe, natomiast macierz $\{B_o\}$ zależy od funkcji $b(x)$. Znając wszystkie wartości funkcji $\tilde{u}_o(x)$ i $\tilde{p}_o(x)$ na brzegu Γ, można z równania (4.71) obliczyć $\tilde{u}_o(x)$ wewnątrz obszaru R dla $c(x)=1$. To umożliwia określenie stochastycznego pola $\tilde{u}_1(x,\gamma)$ przy zastosowaniu równania całkowego (4.72). W tym celu losowe pola $\tilde{u}_1(x,\gamma)$ i $\tilde{p}_1(x,\gamma)$ są aproksymowane na każdym elemencie brzegowym Γ^e przez funkcje kształtu i losowe wartości węzłowe:

$$\tilde{u}_1(x(\zeta),\gamma) = N^v(\zeta)\tilde{u}_1^v(\gamma), \tag{4.82}$$

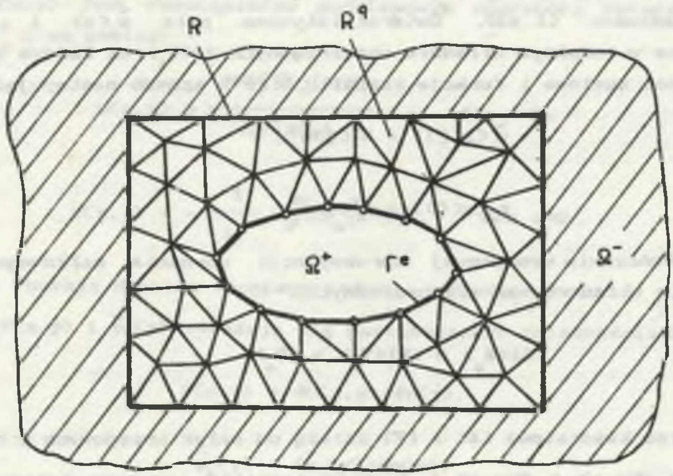
$$\tilde{p}_1(x(\zeta),\gamma) = N^v(\zeta)\tilde{p}_1^v(\gamma). \tag{4.83}$$

Obszar R jest dzielony na komórki wewnętrzne R^q, $q=1,2,..Q$, (rys.4.1) i wówczas losowe pole $V(x,\gamma)$ jest aproksymowane[10] w lokalnym układzie współrzędnych $\eta=(\eta_i)$ każdej komórki przez funkcje kształtu $\phi(\eta)$ i losowe wartości węzłowe $V^v(\gamma)$:

$$V(x(\eta),\gamma) = \phi^v(\eta)V^v(\gamma). \tag{4.84}$$

---

[10] Ten sposób dyskretyzacji skończenie wymiarowej stochastycznej fluktuacji własności ośrodka poprzez losowe wartości węzłowe jest taki jak w stochastycznej metodzie elementów skończonych (por. [4.35, 4.36, 4.24, 4.25, 4.29, 4.30]).



Rys. 4.1 Dyskretyzacja brzegu elementami brzegowym Γ^e i obszaru komórkami wewnętrznymi R^q

Fig. 4.1 Discretization by means of boundary elements Γ^e and internal cells R^q

Również fala pierwotna $\tilde{u}_o(x)$ jest aproksymowana na każdej komórce przez funkcje kształtu i wartości węzłowe:

$$\tilde{u}_o(x(\eta)) = \phi^v(\eta)\tilde{u}_o^v. \tag{4.85}$$

Dyskretną postać stochastycznego brzegowego równania całkowego (4.72) przedstawić teraz można w postaci losowego układu równań algebraicznych:

$$[A]\{X_i(\gamma)\} = [F]\{Y_i\} + [R][U_o]\{V(\gamma)\}, \tag{4.86}$$

gdzie macierze $[A]$ i $[F]$ określone są identycznie do równania (4.81), macierz kolumnowa $\{X_i(\gamma)\}$ zawiera nieznane losowe wartości węzłowe funkcji $\tilde{u}_i(x,\gamma)$ i $\tilde{p}_i(x,\gamma)$ na brzegu Γ, w macierzy $\{Y_i\}$ znajdują się dane wartości funkcji $\tilde{u}_i$ i $\tilde{p}_i$, elementy macierzy kwadratowej $[R]$ zależą od całki po obszarze R z rozwiązania podstawowego i funkcji kształtu, $[U_o]$ jest macierzą diagonalną, która zawiera wartości funkcji $\tilde{u}_o$ w węzłach komórek wewnętrznych R^q, $\{V(\gamma)\}$ jest macierzą kolumnową zawierającą losowe wartości funkcji $V(x,\gamma)$ w węzłach komórek wewnętrznych R^q.

Macierz korelacji losowego wektora $\{X_i(\gamma)\}$ ma postać:

$$[K_{x_1}] = [A]^{-1}[F]\{Y_1\}\{Y_1\}^T[A]^{-1T} + [A]^{-1}[R][U_o][K_V][U_o]^T[R]^T[A]^{-1T}, \qquad (4.87)$$

gdzie elementy macierzy $[K_V]$ zależą od funkcji korelacyjnej (4.67).

Jeśli funkcja opisująca losowe fluktuacje ośrodka $V(x,\gamma)$ ma rozkład normalny, wtedy stochastyczne pole falowe $\tilde{u}(x,\gamma)$ jest także normalne i określone jest przez wartość przeciętną równą $\tilde{u}_o(x)$ i funkcję korelacji określoną przez $K_u(x_1,x_2)$.

4.5. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ANALIZIE CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH UKŁADÓW SPRĘŻYSTYCH Z LOSOWYM BRZEGIEM

Kształt powierzchni elementów maszyn z uwagi na niedoskonałość procesów wytwarzania nigdy nie jest idealnie zgodny z geometryczną postacią konstrukcyjną zaprojektowaną przez konstruktora. Praktycznie problem granic elementów maszyn, w sensie makrostruktury zewnętrznej, jest dotychczas rozwiązywany przy użyciu pojęcia tolerancji jako odchyłki wymiarowej lub błędu kształtu. Wydaje się, że adekwatnym modelem niedoskonałości kształtu jest model probabilistyczny. Stochastyczne własności struktury zewnętrznej ujawnić można dzięki stwierdzeniu, że miara położenia poszczególnych punktów brzegu jest wielkością losową. Powierzchnie takie będziemy nazywali brzegami stochastycznymi (losowymi).

Jest rzeczą oczywistą, że stan odkształcenia, naprężenia lub częstości drgań własnych takich układów mają także naturę stochastyczną.

Metoda elementów brzegowych jest wyjątkowo naturalną techniką numeryczną w badaniu losowych fluktuacji składowych stanu naprężenia, odkształcenia lub częstości drgań własnych spowodowanych stochastyczną strukturą zewnętrzną elementów maszyn.

Prezentowana niżej metoda badania wpływu losowej fluktuacji kształtu brzegu układu sprężystego na częstości drgań własnych oparta jest na oryginalnych pracach autora [4.9, 4.11, 4.14], w których zastosowano aparat analizy wrażliwości.

Zakładamy, że stochastyczny kształt brzegu układu Γ^* (ograniczający obszar Ω^*) o współrzędnych $x^*(\gamma)$, $\gamma\in\mathcal{G}$, można otrzymać w wyniku nałożenia na uśredniony (deterministyczny) brzeg Γ (ograniczający obszar Ω) o współrzędnych x losowej fluktuacji w postaci ciągłego i różniczkowalnego pola losowego $\delta g(x,\gamma)=(\delta g_k(x,\gamma))$ tak, że zachodzi następująca relacja:

$$x^*(\gamma) = x + \delta g(x,\gamma), \qquad \mathbb{E}\delta g(x,\gamma) = 0. \qquad (4.88)$$

Przyjmujemy, że znana jest funkcja korelacyjna pola $\delta g(x,\gamma)$ zdefiniowana następująco:

$$K_{\delta g}(x_1,x_2)=[K_{\delta g_k \delta g_l}(x_1,x_2)]=\mathbb{E}[\delta g_k(x_1,\gamma)\delta g_l(x_2,\gamma)]. \tag{4.89}$$

Ponieważ brzeg Γ doznaje małych fluktuacji losowych, więc stochastyczną częstość drgań własnych $\omega(\gamma)$ można wyrazić w postaci:

$$\omega(\gamma) = \omega_o + \delta\omega(\gamma), \qquad \mathbb{E}\delta\omega(\gamma) = 0, \tag{4.90}$$

gdzie wielkość ω_o identyfikowana jest z wartością średnią częstości drgań obliczoną dla układu zajmującego obszar Ω z brzegiem Γ, natomiast wielkość $\delta\omega(\gamma)$ reprezentuje losowe fluktuacje częstości.

Wartość oczekiwaną częstości $m_\omega=\mathbb{E}\omega(\gamma)=\omega_o$ można obliczyć przy zastosowaniu alternatywnego ujęcia metody elementów brzegowych (por. p. 1.3.5). Po dyskretyzacji brzegu elementami brzegowymi otrzymujemy wówczas następujące równanie:

$$[H'] \{u_2\} = \omega_o^2 [M'] \{u_2\}, \tag{4.91}$$

gdzie macierze $[H']$ i $[M']$ określone są następująco:

$$\begin{aligned} [H'] &= [H_{22}] - [G_{21}][G_{11}]^{-1} [H_{12}] \\ [M'] &= [M_{22}] - [G_{21}][G_{11}]^{-1} [M_{12}]. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Macierze $[M_{ij}]$ i $[H_{ij}]$, $i,j=1,2$, są podmacierzami macierzy bezwładności $[M]$ (por. (1.125)) oraz macierzy $[H]$, znanej z zagadnienia statycznego, natomiast wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do części brzegu Γ_1, na którym $u(x)=0$, i Γ_2, na którym $p(x)=0$. Macierz kolumnowa $\{u_2\}$ zawiera wartości węzłowe amplitud przemieszczeń na brzegu Γ_2.

Wariancja stochastycznej częstości określona jest zależnością:

$$\mathrm{Var}(\omega) = \mathbb{E}[\omega(\gamma) - \omega_o]^2 = \mathbb{E}[\delta\omega(\gamma)]^2 \tag{4.93}$$

Stochastyczną fluktuację częstości $\delta\omega(\gamma)$ obliczymy rozpatrując zagadnienie własne dla obszaru Ω^* w postaci wariacyjnej:

$$\int_{\Omega^*} a(u,v)d\Omega^* = \omega^2(\gamma)\int_{\Omega^*} b(u,v)d\Omega^*, \tag{4.94}$$

gdzie

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \sigma(u)\cdot\varepsilon(v), \\ b(u,v) &= \rho u\cdot v. \end{aligned} \tag{4.95}$$

Pole v spełnia takie same warunki brzegowe, jak amplituda (funkcja własna) u, natomiast ρ jest gęstością.

Wariacje pola przemieszczeń $u=(u_i)$ i elementu obszaru $d\Omega^*$ określone są następująco:

$$\delta u_i = \delta \bar{u}_i + u_{i,k}\delta g_k, \tag{4.96}$$

$$\delta(d\Omega^*) = \delta g_{k,k} d\Omega, \tag{4.97}$$

gdzie $\delta \bar{u}_i$ oznacza wariację przemieszczeń dla ustalonej konfiguracji ciała.

Obliczając wariację obu stron zależności (4.94) oraz zakładając, że u=v, można całkowanie po obszarze Ω^* z brzegiem Γ^* transformować do całkowania po ustalonym obszarze Ω z brzegiem Γ. Otrzymujemy wtedy

$$2\int_\Omega a(u,\delta\bar{u})d\Omega + \int_\Gamma a(u,u)n\cdot\delta g d\Gamma = \delta(\omega^2)\int_\Omega b(u,u)d\Omega + \omega^2\left[2\int_\Omega b(u,\delta\bar{u})d\Omega + \int_\Gamma b(u,u)n\cdot\delta g d\Gamma\right], \tag{4.98}$$

gdzie n jest jednostkowym wektorem normalnym do brzegu Γ.

Wariacja częstości jest teraz równa

$$\delta\omega(\gamma) = \frac{1}{2\omega\int_\Omega b(u,u)d\Omega}\left\{2\left[\int_\Omega a(u,\delta\bar{u})d\Omega - \omega^2\int_\Omega b(u,\delta\bar{u})d\Omega\right] + \int_\Gamma [a(u,u) - \omega^2 b(u,u)]n\cdot\delta g d\Gamma\right\}. \tag{4.99}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\int_\Omega a(u,\delta\bar{u})d\Omega - \omega^2\int_\Omega b(u,\delta\bar{u})d\Omega = 0, \tag{4.100}$$

oraz przyjmując warunek normalizacyjny

$$\int_\Omega b(u,u) = 1, \tag{4.101}$$

otrzymuje się ostatecznie

$$\overset{*}{\delta\omega}(\gamma) = \frac{1}{2\omega_o}\int_\Gamma W[u(x),\omega_o]n(x)\cdot\delta g(x,\gamma)d\Gamma, \tag{4.102}$$

gdzie

$$W[u(x),\omega_o] = a[u(x),u(x)] - \omega_o^2 b[u(x),u(x)]. \tag{4.103}$$

Z zależności (4.102) widać, że losowa fluktuacja częstości określona jest przez całkę brzegową zależną od wartości i funkcji własnej dla obszaru z ustalonym brzegiem Γ oraz od stochastycznej modyfikacji tego brzegu. Ma to kluczowe znaczenie w obliczeniach numerycznych przy zastosowaniu metody elementów brzegowych, ponieważ redukuje problem tylko do analizy wielkości określonych na brzegu.

Wariancja częstości określona jest teraz zależnością:

$$\mathrm{Var}(\omega)=\frac{1}{4\omega_o^2}\int_\Gamma\int_\Gamma W[u(x_1),\omega_o]W[u(x_2),\omega_o]n_k(x_1)n_l(x_2)K_{\delta g_k\delta g_l}(x_1,x_2)d\Gamma(x_1)d\Gamma(x_2). \tag{4.104}$$

Stochastyczny kształt brzegu wygodnie jest opisać za pomocą układu losowych parametrów kształtu $a(\gamma)=(a_r(\gamma))$, $r=1,2,\ldots,R$. Wówczas wariację losowego pola $g(x,\gamma)=g[x;a(\gamma)]$ przedstawić można następująco:

$$\delta g_k = \frac{\partial g_k}{\partial a_r}\delta a_r, \tag{4.105}$$

gdzie wielkość $\delta a_r(\gamma)$ przedstawia losowe fluktuacje parametrów kształtu.

Zakładamy, że $\mathbb{E}[\delta a_r(\gamma)]=0$ oraz przyjmujemy, że znana jest macierz korelacji $[K]=[k_{rs}]$, $k_{rs}=\mathbb{E}[\delta a_r(\gamma)\delta a_s(\gamma)]$. Wówczas losową fluktuację częstości wyrazić można następująco:

$$\delta\omega(\gamma) = \{S\}^T\{\delta a(\gamma)\}, \tag{4.106}$$

gdzie

$$\{\delta a(\gamma)\} = [\delta a_1(\gamma),\delta a_2(\gamma),\ldots,\delta a_r(\gamma),\ldots\delta a_R(\gamma)]^T, \tag{4.107}$$

oraz

$$\{S\} = \left[S_1, S_2,\ldots,S_r,\ldots S_R\right]^T \tag{4.108}$$

Elementy macierzy kolumnowej $\{S\}$ określone są następująco:

$$S_r = \frac{1}{2\omega_o}\int_\Gamma W(u,\omega_o)n_k(\partial g_k/\partial a_r)d\Gamma. \tag{4.109}$$

Teraz wariancja częstości określona jest wyrażeniem:

$$\mathrm{Var}(\omega) = \{S\}^T[K]\{S\}. \tag{4.110}$$

Za parametry kształtu przyjąć można współrzędne węzłów elementów brzegowych. Brzeg układu dzielony jest na elementy brzegowe Γ^e, $e=1,2,\ldots,E$, których zbiór przedstawić można za pomocą sumy podzbiorów elementów $\{\Gamma_p^e\}$:

$$\langle\Gamma^e\rangle = \bigcup_{p=1}^{P}\langle\Gamma^e_p\rangle, \tag{4.111}$$

które łączą się w P węzłach.

Elementy macierzy $\langle S\rangle$ wyrazić można następująco:

$$S_{dp-v} = \sum_{e=1}^{E_p} \int_{\Gamma^e_p} W^e[u(\xi),\omega_o] n^e_{d-v} M^e_p(\xi) d\Gamma^e_p(\xi), \tag{4.112}$$

$p=1,2,\dots P,$
$v=2,1,0$ for $d=3$
$v=1,0$ for $d=2$,

gdzie $W^e[u(\xi),\omega_o]$ jest określone na każdym elemencie Γ^e_p przez funckje i wartości własne określone dla obszaru Ω z brzegiem Γ, E_p określa liczbę elementów brzegowych, które łączą się w węźle p ($p=1,2,\dots,P$).

Funkcja $M^e_p(\xi)$ zależy od sposobu aproksymacji pola losowego $g[x;a(\gamma)]$ na elemencie brzegowym Γ^e_p. W przypadku zastosowania liniowej interpolacji otrzymujemy:

- dla zagadnień trójwymiarowych ($d=3$) (elementy trójkątne):

$$M^e_p(\xi) = 1 - (1/L^e_{1p})\xi_1 - (1/L^e_{2p})\xi_2, \tag{4.113}$$

- dla zagadnień dwuwymiarowych ($d=2$):

$$M^e_m(\xi) = 1 - (1/L^e_p)\xi, \tag{4.114}$$

gdzie $\xi=(\xi_j)$, $j=1,\dots,d-1$, jest lokalnym układem współrzędnych związanym z elementem brzegowym Γ^e_p umiejscowionym w węźle p, natomiast L^e_{1p} i L^e_{2p} są długościami boków trójkątnego elementu brzegowego (dla $d=3$), L^e_p jest długością elementu brzegowego (dla $d=2$) (por. rys. 5.7).

4.6. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA

Przykład 4.1

Rozważane było stochastyczne zagadnienie zewnętrzne w przestrzeni nieskończonej z pustką walcową o promieniu $r=0,25$[m] (rys. 4.2). Przyjęto, że wewnątrz pustki panuje losowe ciśnienie opisane przez proces stacjonarny $p(t,\gamma)$ o gęstości widmowej:

$$S_p(\omega) = \frac{2\sigma_p^2}{\pi}\,\frac{\alpha(\beta^2+\alpha^2)}{(\omega^2-\beta^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\omega^2}, \tag{4.115}$$

jest przez całkę brzegową zależną od wartości i funkcji własnej dla obszaru z ustalonym brzegiem Γ oraz od stochastycznej modyfikacji tego brzegu. Ma to kluczowe znaczenie w obliczeniach numerycznych przy zastosowaniu metody elementów brzegowych, ponieważ redukuje problem tylko do analizy wielkości określonych na brzegu.

Wariancja częstości określona jest teraz zależnością:

$$\mathrm{Var}(\omega)=\frac{1}{4\omega_o^2}\int_\Gamma\int_\Gamma W[u(x_1),\omega_o]W[u(x_2),\omega_o]n_k(x_1)n_l(x_2)K_{\delta g_k\delta g_l}(x_1,x_2)d\Gamma(x_1)d\Gamma(x_2). \tag{4.104}$$

Stochastyczny kształt brzegu wygodnie jest opisać za pomocą układu losowych parametrów kształtu $a(\gamma)=(a_r(\gamma))$, $r=1,2,\dots,R$. Wówczas wariację losowego pola $g(x,\gamma)=g[x;a(\gamma)]$ przedstawić można następująco:

$$\delta g_k = \frac{\partial g_k}{\partial a_r}\delta a_r, \tag{4.105}$$

gdzie wielkość $\delta a_r(\gamma)$ przedstawia losowe fluktuacje parametrów kształtu.

Zakładamy, że $\mathbb{E}[\delta a_r(\gamma)]=0$ oraz przyjmujemy, że znana jest macierz korelacji $[K]=[k_{rs}]$, $k_{rs}=\mathbb{E}[\delta a_r(\gamma)\delta a_s(\gamma)]$. Wówczas losową fluktuację częstości wyrazić można następująco:

$$\delta\omega(\gamma) = \{S\}^T\{\delta a(\gamma)\}, \tag{4.106}$$

gdzie

$$\{\delta a(\gamma)\} = [\delta a_1(\gamma),\delta a_2(\gamma),\dots,\delta a_r(\gamma),\dots\delta a_R(\gamma)]^T, \tag{4.107}$$

oraz

$$\{S\} = \left[S_1, S_2,\dots,S_r,\dots S_R\right]^T \tag{4.108}$$

Elementy macierzy kolumnowej $\{S\}$ określone są następująco:

$$S_r = \frac{1}{2\omega_o}\int_\Gamma W(u,\omega_o)n_k(\partial g_k/\partial a_r)d\Gamma. \tag{4.109}$$

Teraz wariancja częstości określona jest wyrażeniem:

$$\mathrm{Var}(\omega) = \{S\}^T[K]\{S\}. \tag{4.110}$$

Za parametry kształtu przyjąć można współrzędne węzłów elementów brzegowych. Brzeg układu dzielony jest na elementy brzegowe Γ^e, $e=1,2,\dots,E$, których zbiór przedstawić można za pomocą sumy podzbiorów elementów $\{\Gamma_p^e\}$:

$$\{\Gamma^e\} = \bigcup_{p=1}^{P} \{\Gamma_p^e\}, \tag{4.111}$$

które łączą się w P węzłach.
Elementy macierzy $\{S\}$ wyrazić można następująco:

$$S_{dp-v} = \sum_{e=1}^{E_p} \int_{\Gamma_p^e} W^e[u(\xi),\omega_o] n_{d-v}^e M_p^e(\xi) d\Gamma_p^e(\xi), \tag{4.112}$$

$p=1,2,\ldots P,$
$v=2,1,0$ for $d=3$
$v=1,0$ for $d=2,$

gdzie $W^e[u(\xi),\omega_o]$ jest określone na każdym elemencie Γ_p^e przez funckje i wartości własne określone dla obszaru Ω z brzegiem Γ, E_p określa liczbę elementów brzegowych, które łączą się w węźle p $(p=1,2,\ldots,P)$.

Funkcja $M_p^e(\xi)$ zależy od sposobu aproksymacji pola losowego $g[x;a(\gamma)]$ na elemencie brzegowym Γ_p^e. W przypadku zastosowania liniowej interpolacji otrzymujemy:
- dla zagadnień trójwymiarowych ($d=3$) (elementy trójkątne):

$$M_p^e(\xi) = 1 - (1/L_{1p}^e)\xi_1 - (1/L_{2p}^e)\xi_2, \tag{4.113}$$

- dla zagadnień dwuwymiarowych ($d=2$):

$$M_m^e(\xi) = 1 - (1/L_p^e)\xi, \tag{4.114}$$

gdzie $\xi=(\xi_j)$, $j=1,\ldots,d-1$, jest lokalnym układem współrzędnych związanym z elementem brzegowym Γ_p^e umiejscowionym w węźle p, natomiast L_{1p}^e i L_{2p}^e są długościami boków trójkątnego elementu brzegowego (dla $d=3$), L_p^e jest długością elementu brzegowego (dla $d=2$) (por. rys. 5.7).

4.6. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA

Przykład 4.1

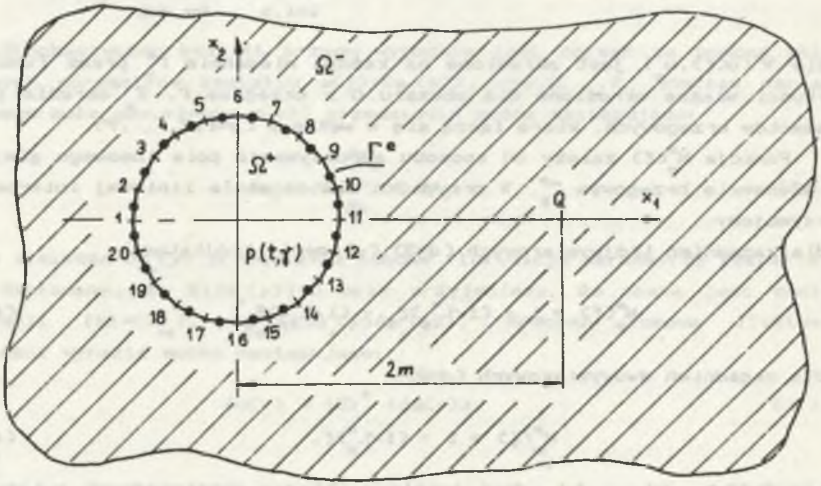
Rozważane było stochastyczne zagadnienie zewnętrzne w przestrzeni nieskończonej z pustką walcową o promieniu $r=0{,}25$[m] (rys. 4.2). Przyjęto, że wewnątrz pustki panuje losowe ciśnienie opisane przez proces stacjonarny $p(t,\gamma)$ o gęstości widmowej:

$$S_p(\omega) = \frac{2\sigma_p^2}{\pi} \frac{\alpha(\beta^2 + \alpha^2)}{(\omega^2 - \beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \tag{4.115}$$

gdzie wariancja ciśnienia wynosiła $\sigma_p^2=10^{12}[N^2m^{-4}]$, natomiast parametry gęstości widmowej były równe $\alpha=0,2[s^{-1}]$ i $\beta=10[s^{-1}]$.

Założono, że warunki początkowe i siły objętościowe są równe zero.

Zagadnienie zostało rozwiązane dla trzech modeli ośrodka: dla modelu sprężystego (E), modelu Maxwella (M) i modelu Kelvina (K). Ośrodek był scharakteryzowany przez następujące wielkości: stałe Lamego $\lambda=1,2\cdot10^{11}[Nm^{-2}]$, $\mu=7,7\cdot10^{10}[Nm^{-2}]$, gęstość $\rho=7844,2[Ns^2m^{-4}]$ i dodatkowo współczynnik lepkości $\eta=3,845\cdot10^{10}[Nsm^{-2}]$ dla ośrodków lepkich.



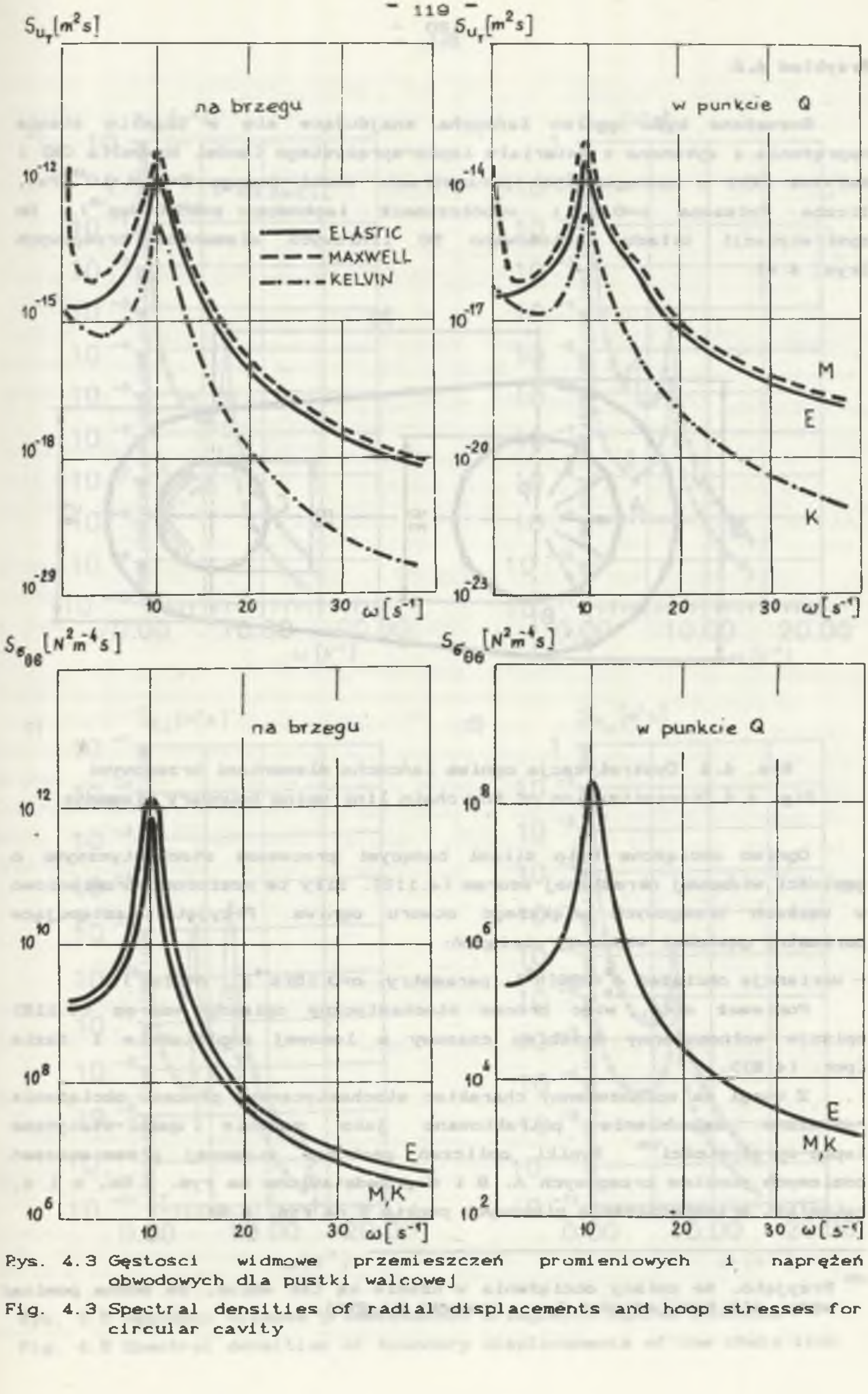
Rys. 4.2 Pustka walcowa w nieograniczonej przestrzeni z losowym ciśnieniem wewnętrznym

Fig. 4.2 Circular cavity under internal random pressure in an infinite medium

Brzeg pustki został podzielony na 20 stałych elementów brzegowych, na których przemieszczenia i siły brzegowe były aproksymowane funkcjami przedziałami stałymi.

Wyniki numeryczne w postaci gęstości widmowych przemieszczeń promieniowych $S_{u_r}(\omega)$ i naprężeń obwodowych $S_{\sigma_{\theta\theta}}(\omega)$ na brzegu i dla punktu Q przedstawione są na rys. 4.3.

Warto zwrócić uwagę, że metoda elementów brzegowych jest wyjątkowo dogodną techniką numeryczną w zagadnieniach dla obszarów nieskończonych, ponieważ dyskretyzacji podlega tylko brzeg pustki.

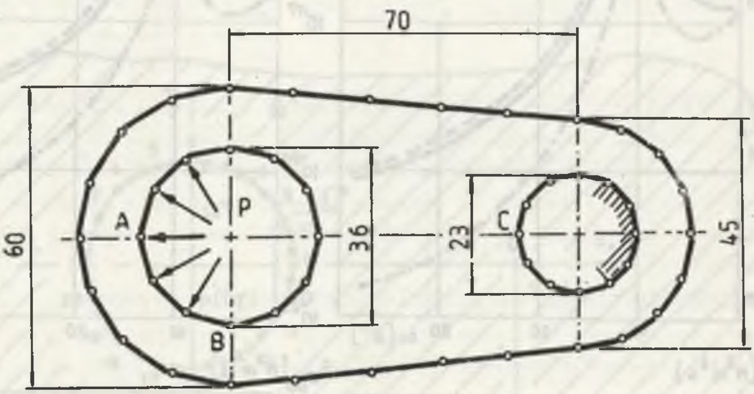


Rys. 4.3 Gęstosci widmowe przemieszczeń promieniowych i naprężeń obwodowych dla pustki walcowej

Fig. 4.3 Spectral densities of radial displacements and hoop stresses for circular cavity

Przykład 4.2

Rozważane było ogniwo łańcucha znajdujące się w płaskim stanie naprężenia i wykonane z materiału lepko-sprężystego (model Maxwella (M) i Kelvina (K)) o następujących parametrach: moduł Younga $E=0,21\cdot10^{12}$[Pa], liczba Poissona $\nu=0.3$ i współczynnik lepkości $\eta=2500$[Nsm^{-2}]. Do dyskretyzacji układu zastosowano 50 liniowych elementów brzegowych (rys. 4.4).



Rys. 4.4 Dyskretyzacja ogniwa łańcucha elementami brzegowymi

Fig. 4.4 Discretization of the chain link using boundary elements

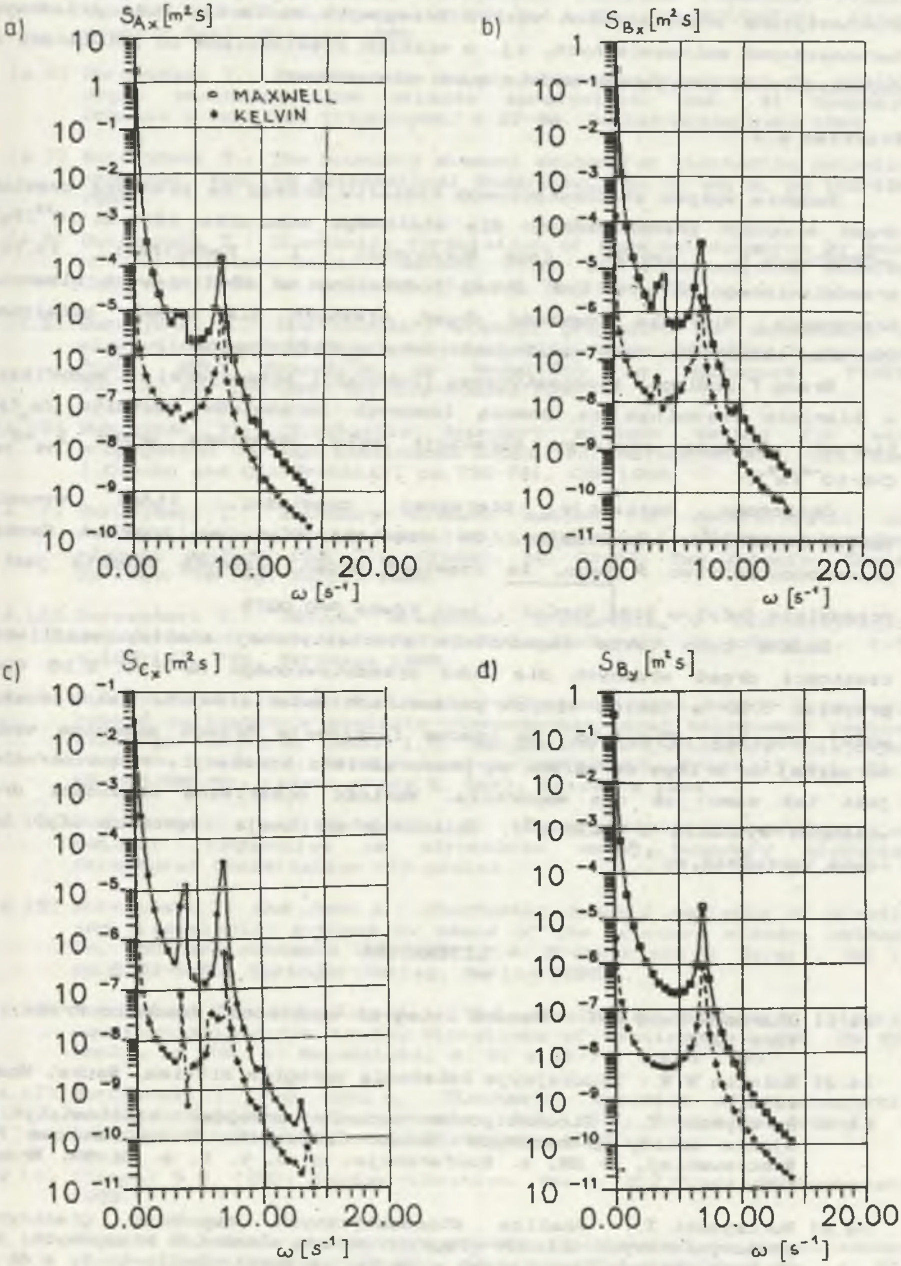
Ogniwo obciążone było siłami będącymi procesami stochastycznymi o gęstości widmowej określonej wzorem (4.115). Siły te rozłożono promieniowo w węzłach brzegowych większego otworu ogniwa. Przyjęto następujące parametry gęstości widmowej obciążeń:

- wariancja obciążeń σ_p^2=289[N^2], parametry: α=0.15[s^{-1}], β=7[s^{-1}].

Ponieważ $\alpha \ll \beta$, więc proces stochastyczny opisany wzorem (4.115) opisuje wolnozmienny przebieg czasowy o losowej amplitudzie i fazie (por. [4.2]).

Z uwagi na wolnozmienny charakter stochastycznego procesu obciążenia rozważane zagadnienie potraktowano jako zadanie quasi-statyczne lepko-sprężystości[17] Wyniki obliczeń gęstości widmowej przemieszczeń poziomych punktów brzegowych A, B i C przedstawiono na rys. 4.5a, b i c, natomiast przemieszczenia pionowych punktu B na rys. 4.5d.

[17] Przyjęto, że zmiany obciążenia w czasie są tak wolne, że można pominąć wpływ sił bezwładności (por. Nowacki [4.27]).



Rys. 4.5 Gęstości widmowe przemieszczeń brzegowych ogniwa łańcucha

Fig. 4.5 Spectral densities of boundary displacements of the chain link

Porównując wykresy z rys. 4.5 warto zauważyć, że procesy stochastyczne przemieszczeń węzłów brzegowych zawierają dużo składowych harmonicznych wolnozmiennych, tj. o niskich częstościach co potwierdza to dopuszczalność przyjętego modelu quasi-statycznego.

Przykład 4.3

Badanie wpływu stochastycznego kształtu brzegu na pierwszą częstość drgań własnych przeprowadzono dla stalowego wspornika ($E=0.21\cdot10^{12}$[Pa], $\rho=7860$[kg/m^3], $\nu=0.3$) (por. Burczyński i Fedeliński [4.14]) przedstawionego na rys. 1.9. Brzeg podzielono na 48 liniowych elementów brzegowych. Pierwsza częstość drgań własnych dla brzegu ustalonego (wartość oczekiwana częstości) jest równa $\omega_o=2122$ [rad/s].

Brzeg Γ podlegał stochastycznej fluktuacji polegającej na modyfikacji w kierunku normalnym za pomocą losowych parametrów kształtu $\delta a_n(\gamma)$, których elementy macierzy korelacji były określone przez $k_{rs}=\delta_{rs}C$, $C=9\cdot10^{-6}$[m^2].

Obliczono wariancję pierwszej częstości, która wynosiła $Var(\omega)=34.96$[s^{-2}]. Zakładając, że częstość $\omega(\gamma)$ ma rozkład Gaussa, prawdopodobieństwo $\mathcal{P}$ tego, że częstość drgań własnych zawarta jest w przedziale $|\omega(\gamma)-\omega_o|<3\sqrt{Var(\omega)}$, jest równa $\mathcal{P}=0,9973$.

Badane było także zagadnienie stochastycznej analizy wrażliwości częstości drgań własnych dla łuku przedstawionego na rys. 5.16 (por. przykład 5.5) o takich samych parametrach materiałowych, jak rozważany wyżej wspornik. Przyjęto, że losowe fluktuacje brzegu mierzone wzdłuż normalnej do brzegu określone są przez macierz korelacji, która określona jest tak samo jak dla wspornika. Wartość oczekiwana częstości drgań własnych wynosiła $\omega_o=3435$[s^{-1}]. Obliczona wariancja częstości $\omega(\gamma)$ była równa $Var(\omega)=42,4s^{-2}$.

LITERATURA

[4.1] Bharucha-Reid A.T.: Random integral equations. Academic Press, New York 1972.

[4.2] Bołotin W.W.: Słuczajnyje kolebania uprugich sistiem. Nauka, Moskwa 1979.

[4.3] Burczyński T.: Stochastyczne zadania brzegowe elastostatyki w ujęciu metody granicznych równań całkowych. Prace Naukowe Pol. Wrocławskiej, nr.28, s. Konferencje, nr 9, t. 1, s. 61-68, Wrocław 1981.

[4.4] Burczyński T.: Analiza stochastycznych zagadnień granicznych jednowymiarowych układów ciągłych metodą elementów brzegowych. Mat. VI Konf. Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, t. 1, s.61-66, Białystok 1983.

[4.5] Burczyński T.: Mechanika stochastyczna kolejowego zestawu kołowego w ujęciu metody brzegowych równań całkowych. Zad.2.2, Temat 1.5: Racjonalne projektowanie kolejowych zestawów kołowych, Problem węzłowy PAN 05.12, Prace IMiPKM Pol. Śl., NB-305/RMK/81, (kier. pracy R.Bąk), Gliwice 1983.

[4.6] Burczyński T.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do analizy drgań stochastycznych układów sprężystych. Mat. XI Sympozjum Drgania w układach fizycznych, s.97-98, Poznań-Błażejewko 1984.

[4.7] Burczyński T.: The boundary element method for stochastic potential problems. Applied Mathematical Modelling, Vol.9, No 3, pp.189-194, 1985.

[4.8] Burczyński T.: Stochastic formulation of wheelset dynamics by means of the boundary element method. Proc. 8th International Wheelset Congress, Vol. I, pp.II.3/1-II/3/15, Madrid 1985.

[4.9] Burczyński T.: The boundary element procedure for dependence of eigenvalues with respect to stochastic shape of elastic systems. Proc. 25th Symposium on Modelling in Mechanics. PTMTS, Vol. 2, pp. 235-238, Gliwice-Kudowa 1986.

[4.10] Burczyński T.: Stochastic boundary element method for wave propagation through continuous media. In: BETECH/86-MIT, USA,(Eds. J.Connor and C.A.Brebbia), pp.733-741, CMP 1986.

[4.11] Burczyński T.: Boundary element method for deterministic and stochastic shape design sensitivity analysis. In: Advanced boundary element methods (Ed. T.A. Cruse), pp. 73-80, San Antonio, Texas, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[4.12] Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych w stochastycznych zagadnieniach teorii sprężystości. Mechanika i komputer, t.7, s.125-147, PWN, Warszawa 1988.

[4.13] Burczyński T., Adamczyk T.: Algorytmy numeryczne metody brzegowych równań całkowych w analizie stereomechanicznej kolejowego zestawu kołowego. Zad.2.4, Temat 1.5: Racjonalne projektowanie kolejowych zestawów kołowych, Problem węzłowy PAN 05.12, Prace IT Pol. Śl., NB-305/RMK/81, (kier. pracy R. Bąk), Katowice 1984.

[4.14] Burczyński T. and Fedeliński P. Shape sensitivity analysis of natural frequencies of structures using boundary elements. Structural Optimization (in press).

[4.15] Burczyński T. and John A.: Stochastic dynamic analysis of elastic and viscoelastic systems by means of the boundary element method. In: Boundary elements VII (Eds. C.A. Brebbia and G. Maier), Vol I, pp.6/53-6/61, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[4.16] Burczyński T. and John A.: The stochastic boundary integral equation method for random vibrations of continuous media. ZN WSI Opole, nr 109, s. Matematyka, z. 9, s.61-74, Opole 1985.

[4.17] Burczyński T. and John A.: Stochastic dynamics of viscoelastic media using boundary elements. Mat. XII Sympozjum Drgania w układach fizycznych, Poznań-Błażejewko 1986.

[4.18] Crandal S.H. (Ed): Random vibration. Vol.2, MIT Press, Massachusets 1963.

[4.19] Czogała E.: Reakcja ciągłych układów dynamicznych na przestrzenno-czasowe pola losowe. ZN Pol. Śl., nr 430, s. Automatyka, z. 29, Gliwice 1974.

[4.20] Drewniak J.: Boundary elements for random heat conduction problems. Engineerig Analysis, Vol. 2, No. 3, pp. 168-170, 1985.

[4.21] Drewniak J., Pawicki Z.: Model numeryczny tarczy ze szczeliną o losowym kształcie. Mat. 25 Sympozjonu PTMTS Modelowanie w mechanice, t. II, s. 243-246, Gliwice-Kudowa 1986.

[4.22] Frish R.: Wave propagation on random media. In: Probabilistic methods in applied mathematics (Ed. A.T. Bharuha-Reid), Vol. 1, Academic Press, New York 1968.

[4.23] Kampé de Fériet J.: Random solutions of partial differential equations. Proc. Third Berkeley Symp. Math. statistics and probability, Vol. 3, pp. 199-208, 1955.

[4.24] Liu W.K., Belytschko T. and Mani A.: Random field finite elements. Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 23, pp 1831-1845, 1986.

[4.25] Liu W.K., Belytschko T. and Mani A.: Probabilistic finite elements for nonlinear structural dynamics. Comp. Meth. Appl. Mechanics and Eng., Vol. 56, pp. 61-81, 1986.

[4.26] Nakagiri S., Suzuki K. and Hisada T.: Stochastic boundary element method applied to stress analysis. In: Boundary elements V (Eds. C.A. Brebbia, T. Futugami and M. Tanaka), pp. 439-448, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[4.27] Nowacki W.: Teoria pełzania. Arkady, Warszawa 1963.

[4.28] Piszczek K. and Nizioł J.: Random vibration of mechanical systems. PWN, Warszawa 1986.

[4.29] Shinozuka M. and Deodatis G.: Response variability of stochastic finite element systems. J. Eng. Mechanics, Vol. 114, No 3, pp. 499-519, 1988.

[4.30] Shinozuka M. and Yamazaki F.: Stochastic finite element analysis: An introduction. In: Stochastic structural dynamics (Eds. S.T. Ariaratnam, G.I. Schuëller and I. Elishakoff), pp. 241-291, Elsevier Applied Science, London 1988.

[4.31] Skalmierski B., Tylikowski A.: Procesy stochastyczne w dynamice. PWN, Warszawa 1972.

[4.32] Sobczyk K.: Metody dynamiki stochastycznej. PWN, Warszawa 1973.

[4.33] Sobczyk K.: Fale stochastyczne. PWN, Warszawa 1982.

[4.34] Szopa J.: Metody badania i wrażliwość dynamicznych układów stochastycznych. ZN Pol. Śl., s. Matematyka-Fizyka, z. 45, Gliwice 1985.

[4.35] Vanmarcke E. and Grigoriu M.: Stochastic finite element analysis of simple beams. J. Eng. Mechanics, Vol. 109, No 5, pp. 1203-1214, 1983.

[4.36] Vanmarcke E., Shinozuka M., Nakagiri S., Schueller G. and Grigoriu M.: Random fields and stochastic finite elements. Structural Safety, Vol. 3, pp. 143-166, 1986.

5. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ANALIZIE WRAŻLIWOŚCI I OPTYMALIZACJI POSTACI KONSTRUKCYJNEJ

5.1. UWAGI WSTĘPNE

Zagadnienie określenia geometrycznej postaci konstrukcyjnej układów odkształcalnych odgrywa istotną rolę w procesie projektowo-konstrukcyjnym elementów maszyn i budowli. Metoda elementów brzegowych znalazła szerokie zastosowanie w problemach analizy, w których zarówno kształt brzegu, jak i sformułowane na nim warunki brzegowe są z góry dane.

Problem optymalizacji postaci konstrukcyjnej jest znacznie bardziej złożony. Kształt brzegu jest zmienną projektową i w trakcie procesu optymalizacji postać konstrukcyjna układu ulega zmianie. Wraz ze zmianą kształtu brzegu zmieniają się także warunki brzegowe. Ponadto problemy optymalizacyjne są, w przeciwieństwie do zagadnień analizy, zadaniami wielowartościowymi, ponieważ w wielu zadaniach nie istnieje jedno rozwiązanie.

W sytuacji gdy istnieją trudności w uzyskaniu rozwiązania problemów optymalizacji kształtu, szczególnego znaczenia nabrał problem analizy wrażliwości kształtu. Pod tym pojęciem rozumie się tutaj badanie wpływu zmian kształtu brzegu na funkcjonał jakości i ograniczenia układu. Tak sformułowane zagadnienie analizy wrażliwości kształtu posiada jednoznaczne rozwiązanie, które umożliwia znalezienie kierunku najlepszych zmian postaci konstrukcyjnej. Analiza wrażliwości dostarcza znacznie więcej informacji o zachowaniu się układu niż tradycyjna, konwencjonalna analiza, polegająca na określaniu naprężeń i przemieszczeń. Ponadto analizę wrażliwości traktować można jako etap wstępny optymalizacji, z którego uzyskuje się operator wrażliwości, określający gradient funkcjonału jakości i warunków ograniczających.

Badania prowadzone w ostatnich latach wskazują, że metoda elementów brzegowych jest wyjątkowo dogodną techniką numeryczną w problemach analizy wrażliwości kształtu i optymalizacji postaci konstrukcyjnej.

Pierwsze prace poświęcone zastosowaniu metody elementów brzegowych do zagadnień optymalizacji kształtu pojawiły się w 1983r.

W pracy Burczyńskiego i Adamczyka [5.12] został sformułowany problem optymalizacji kształtu sprężystych układów przestrzennych i dwuwymiarowych ze względu na maksymalną sztywność przy ograniczeniu na objętość układu. Do rozwiązania problemu zaproponowano procedurę iteracyjną Newtona-Raphsona.

Mota Soares, Rodrigues, Oliveira Faria i Haug [5.60] przedstawili problem optymalnego kształtowania przekrojów poprzecznych prętów skręcanych ze względu na maksymalną sztywność przy ograniczeniu na pole przekroju poprzecznego. Zagadnienie programowania nieliniowego rozwiązano metodą linearyzacji Pszenicznego.

Żochowski i Mizukami [5.75] stosowali metodę elemetów brzegowych do optymalizacji kształtu układu dwuwymiarowego ze względu na minimalizację ciężaru przy ograniczeniach przemieszczeniowych i geometrycznych. Wyniki obliczeń porównano z metodą elementów skończonych.

W latach następnych pojawiło się wiele prac związanych z zastosowaniem metody elementów brzegowych w problemach optymalizacji kształtu i analizy wrażliwości. Szerokie omówienie tych prac można znaleźć w artykule przeglądowym Burczyńskiego [5.10]. Warto tu wymienić następujące prace:

- z zakresu układów obciążonych statycznnie:

prace Burczyńskiego [5.4-5.6, 5.8], prace Burczyńskiego i Adamczyka [5.13-5.18], Burczyńskiego i Mrówczyńskiej [5.23], prace Mota Soaresa i jego współpracowników [5.58, 5.59, 5.61-5.63], , prace Eizadian i Trompette [5.37], Żochowskiego [5.76], Wilczyńskiego [5.71, 5.72], Grabackiego [5.42, 5.43], Kane [5.50], Kane i Saigal [5.51], Miyamoto, Iwasaki i Sugimoto [5.57], Meric [5.55, 5.56], Choi i Kwak [5.27], Defourny [5.28, 5.29], Kamiya i jego współpracownicy [5.48, 5.49], Chaudouet-Miranda i El Yafi [5.24, 5.25], Gracia i Doblare [5.44], Sandgren i Wu [5.67], Zhao i Adey [5.73], Krzesiński [5.54],m

- z zakresu układów obciążonych dynamicznie:

prace Burczyńskiego [5.7], Burczyńskiego i Fedelińskiego [5.19-5.22, 5.38-5.41].

W pracach autora [5.9, 5.11] podano ogólne sformułowanie metody elementów brzegowych do statycznych i dynamicznych zagadnień analizy wrażliwości i optymalizacji postaci konstrukcyjnej.

W rozdziale niniejszym przedstawiono w sposób ujednolicony, opierając się na własnych orginalnych pracach, zagadnienia analizy wrażliwości i optymalizacji kształtu w ujęciu metody elementów brzegowych uwzględniając statyczny i dynamiczny stan układu.

5.2. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ANALIZIE WRAŻLIWOŚCI

5.2.1. Metoda elementów brzegowych w analizie wrażliwości ciał obciążonych statycznie

5.2.1.1. Wariacja kształtu brzegu zewnętrznego

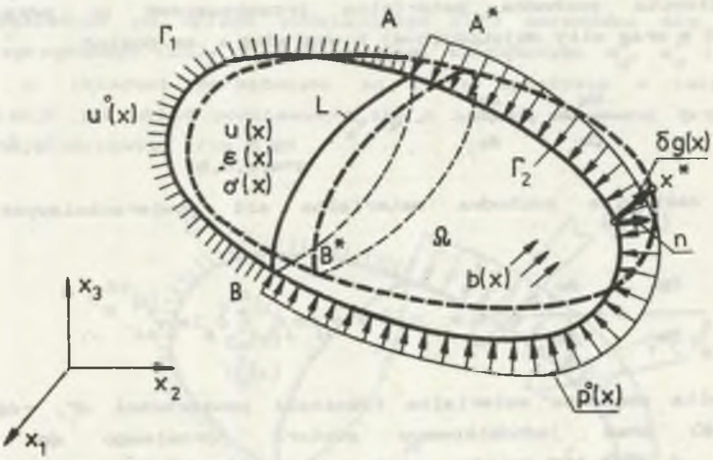
Rozważane jest ciało sprężyste zajmujące obszar Ω z brzegiem Γ w przestrzeni euklidesowej $\mathscr{E}^d$, (d=2 lub 3). Na brzegu Γ dane są warunki brzegowe w postaci pola przemieszczeń $u(x)=(u_j(x))=u^o(x)$, $x\in\Gamma_1$, i sił powierzchniowych $p(x)=(p_j(x))=p^o(x)$, $x\in\Gamma_2$, gdzie $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ i $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset$. W obszarze Ω mogą działać siły objętościowe $b(x)=(b_j(x))$, $x\in\Omega$. Rozważane ciało nazywane będzie dalej układem podstawowym *(UP)*. Zagadnienie analizy takiego układu opisane jest układem brzegowych równań całkowych (1.40).

Jest rzeczą oczywistą, że pola przemieszczeń u, odkształceń ε i naprężeń σ oraz pewne funkcjonały, określające charakterystyki mechaniczne układu i będące miarą jakości i ograniczeń narzuconych na działanie układu J_α, $(\alpha=0,1,..K-2)$, zależą od kształtu brzegu Γ. Interesujące jest zbadanie wpływu, jaki ma modyfikacja kształtu brzegu na przyjęte funkjonały J_α.

Rozważana jest infinitezymalna wariacja konfiguracji ciała określona przez ciągłe i różniczkowalne pole wektorowe[18] $\delta g=(\delta g_j)$, tak że (rys.5.1):

$$x^* = x + \delta g. \tag{5.1}$$

Pole transfomacji $g=g(x;a)$ modyfikuje kształt brzegu zewnętrznego Γ, gdzie $a=(a_r), r=1,2,..R$, jest zbiorem projektowych parametrów kształtu, które opisują zewnętrzną postać konstrukcyjną rozważanego układu. Zmienna x określona jest na obszarze nie podlegającym transformacji Ω z brzegiem Γ, natomiast zmienna x^* określona jest w obszarze transformowanym $\Omega^*=\Omega(a)$ z brzegiem $\Gamma^*=\Gamma(a)$.



Rys. 5.1 Układ podstawowy obciążony statycznie i transformacja jego brzegu

Fig. 5.1 The primary system loaded statically and shape transformation of its boundary

---

[18] Istnieje osobna, bardzo ważna klasa problemów, w których wariacja kształtu brzegu jest polem osobliwym lub quasi-osobliwym. Problemy takie występują np. w mechanice zniszczenia, gdzie propagacja szczeliny może być traktowana jako proces transformacji brzegu. Problemy te nie są rozważane w niniejszym opracowaniu.

Wariacja pola transformacji δg określona jest następująco:

$$\delta g_k = \frac{\partial g_k}{\partial a_r}\,\delta a_r = v_k^r\,\delta a_r, \qquad (5.2)$$

gdzie wielkość $v_k^r = \partial g_k / \partial a_r$ może być uważana za prędkość transformacji odpowiadającą parametrowi kształtu a_r.

Wygodnie jest traktować Ω jako ciągłe medium i zastosować ideę pochodnej materialnej [5.74, 5.46, 5.47]. Odwzorowanie (5.1) można teraz opisywać jako proces dynamiczny z δa_r odgrywającym rolę czasu i v_k^r pełniącym rolę prędkości.

Wariacja zmiennych stanu u, ε, σ i siły objętościowej b oraz sił powierzchniowych p może być wyrażona następująco:

$$\delta q = \frac{Dq}{Da_r}\,\delta a_r, \qquad q = u, \varepsilon, \sigma, b, p \qquad (5.3)$$

gdzie całkowita pochodna materialna przemieszczeń u, odkształceń ε, naprężeń σ oraz siły objętościowej b względem a_r ma postać:

$$\frac{Dq}{Da_r} = \frac{\partial q}{\partial a_r} + q_{,k} v_k^r, \qquad q = u, \varepsilon, \sigma, b \qquad (5.4)$$

natomiast całkowita pochodna materialna sił powierzchniowych jest równa:

$$\frac{Dp_i}{Da_r} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a_r} n_j + \sigma_{ij,k} n_j v_k^r + \sigma_{ij}(n_j n_l - \delta_{jl}) n_k v_{k,l}^r. \qquad (5.5)$$

Całkowita pochodna materialna różniczki powierzchni dΓ, różniczki obszaru dΩ oraz jednostkowego wektora normalnego do brzegu $n = (n_i)$, $i = 1, \ldots d$, mogą być wyrażone następująco (por. [5.35, 5.32, 5.64]):

$$\frac{D(d\Gamma)}{Da_r} = (\delta_{kl} - n_k n_l) v_{k,l}^r\, d\Gamma, \qquad (5.6a)$$

$$\frac{D(d\Omega)}{Da_r} = v_{k,k}^r\, d\Omega, \qquad (5.6b)$$

$$\frac{Dn_i}{Da_r} = (n_i n_l - \delta_{il}) n_k v_{k,l}^r. \qquad (5.6c)$$

gdzie δ_{kl} jest deltą Kroneckera.

Rozważany będzie problem określenia wrażliwości pierwszego rzędu dla zbioru dowolnych funkcjonałów J_α (α=0,1,2,..K-2) w postaci (por. Burczyński [5.9]):

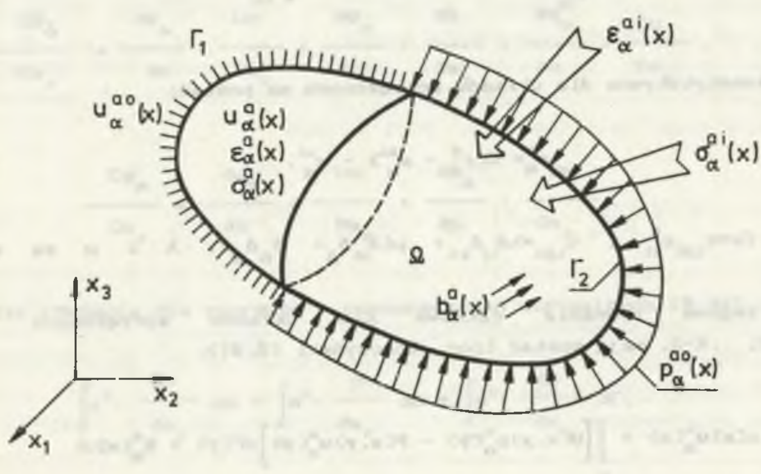
$$J_\alpha = \int\limits_{\Omega(a)} \Psi_\alpha(\sigma,\varepsilon,u)d\Omega + \int\limits_{\Gamma(a)} \phi_\alpha(u,p)d\Gamma \qquad \alpha=0,1,2,\dots K-2 \tag{5.7}$$

gdzie $\Psi_\alpha(\sigma,\varepsilon,u)$ są dowolnymi ciągłymi funkcjami naprężeń, odkształceń i przemieszczeń w obszarze Ω, $\phi_\alpha(u,p)$ są dowolnymi ciągłymi funkcjami przemieszczeń i sił powierzchniowych na brzegu Γ.

Funkcjonały J_α wyrażać mogą zarówno funkcję jakości (celu) optymalizacji jak i warunki ograniczające nałożone na rozpatrywany układ mechaniczny.

Zagadnienie znalezienia pierwszej wariacji funkcjonałów J_α może być rozwiązane przy zastosowaniu ujęcia bezpośredniego lub sprzężonego (por. [5.32, 5.35, 5.36, 5.64]). W pracy niniejszej zastosowano metodę układów sprzężonych.

Niezależnie od układu podstawowego *(UP)* wprowadza się koncepcję układu sprzężonego $(US)_\alpha$ z rozwiązaniami sprzężonymi u^a_α, ε^a_α i σ^a_α dla każdego α. Układami sprzężonymi są ciała sprężyste o takiej samej konfiguracji jak układ podstawowy, ale z innymi warunkami brzegowymi i siłami objętościowymi (rys.5.2).



Rys. 5.2 Układ sprzężony dla zagadnienia analizy wrażliwości w problemach statycznych

Fig. 5.2 The adjoint system for shape sensitivity analysis of statical problems

Na brzegu Γ układu sprzężonego $(US)_\alpha$ dane są następujące warunki brzegowe:

$$u_\alpha^{ao} = - \frac{\partial\phi_\alpha(u,p)}{\partial p} \quad \text{na } \Gamma_1, \tag{5.8a}$$

$$p_\alpha^{ao} = \frac{\partial\phi_\alpha(u,p)}{\partial u} \quad \text{na } \Gamma_2, \tag{5.8b}$$

a wewnątrz obszaru Ω dane jest pole odkształceń wstępnych ε_α^{ai}, pole naprężeń wstępnych σ_α^{ai} oraz siły objętościowe:

$$\varepsilon_\alpha^{ai} = \frac{\partial\Psi_\alpha(\sigma,\varepsilon,u)}{\partial\sigma} \quad \text{w } \Omega, \tag{5.9a}$$

$$\sigma_\alpha^{ai} = \frac{\partial\Psi_\alpha(\sigma,\varepsilon,u)}{\partial\varepsilon} \quad \text{w } \Omega, \tag{5.9b}$$

$$b_\alpha^{a} = \frac{\partial\Psi_\alpha(\sigma,\varepsilon,u)}{\partial u} \quad \text{w } \Omega. \tag{5.9c}$$

Prawo konstytutywne dla układów sprzężonych ma postać:

$$\sigma_\alpha^{a} = C(\varepsilon_\alpha^{a} - \varepsilon_\alpha^{ai}) - \sigma_\alpha^{ai}, \tag{5.10}$$

gdzie $C\varepsilon = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{a}$, $c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, λ i μ są stałymi Lamego.

Brzegowe równania całkowe dla układów sprzężonych $(US)_\alpha$, $\alpha=0,1,2,\ldots,K-2$, mają postać (por. Burczyński [5.9]):

$$c(x)u_\alpha^{a}(x) = \int_\Gamma \left[U(x,y)p_\alpha^{a}(y) - P(x,y)u_\alpha^{a}(y)\right]d\Gamma(y) + B_\alpha^{a}(x), \tag{5.11}$$

gdzie $B_\alpha^{a} = (B_{\alpha j}^{a})$ zależy od odkształceń wstępnych ε_α^{ai}, naprężeń wstępnych σ_α^{ai} i sił objętościowych b_α^{a} w sposób następujący:

$$B^{\alpha}_{\alpha j} = \int_{\Omega} U_{jk}\left[b^{\alpha}_{k} - c_{klsr}\varepsilon^{\alpha i}_{\alpha sr,l} - \sigma^{\alpha i}_{\alpha kl,l}\right]d\Omega. \tag{5.12}$$

Całkowite naprężenia w obszarze Ω dla układu sprzężonego $(US)_{\alpha}$ wynoszą $C\varepsilon^{\alpha i}_{\alpha} + \sigma^{\alpha i}_{\alpha}$.

Pierwsza wariacja fukcjonałów J_{α}, $\alpha=0,1,2,\ldots,K-2$, może być wyrażona następująco:

$$\delta J_{\alpha} = \frac{DJ_{\alpha}}{Da_{r}}\delta a_{r}, \tag{5.13}$$

gdzie całkowita pochodna materialna funkcjonału względem parametru kształtu a_{r} ma postać:

$$\frac{DJ_{\alpha}}{Da_{r}} = \int_{\Omega}\left[\frac{D\Psi_{\alpha}}{Da_{r}}d\Omega + \Psi_{\alpha}\frac{D(d\Omega)}{Da_{r}}\right] + \int_{\Gamma}\left[\frac{D\phi_{\alpha}}{Da_{r}}d\Gamma + \phi_{\alpha}\frac{D(d\Gamma)}{Da_{r}}\right]. \tag{5.14}$$

Pochodne materialne funkcji Ψ_{α} i ϕ_{α} określone są następująco[10]:

$$\frac{D\Psi_{\alpha}}{Da_{r}} = \frac{\partial\Psi_{\alpha}}{\partial\sigma}\cdot\frac{D\sigma}{Da_{r}} + \frac{\partial\Psi_{\alpha}}{\partial\varepsilon}\cdot\frac{D\varepsilon}{Da_{r}} + \frac{\partial\Psi_{\alpha}}{\partial u}\cdot\frac{Du}{Da_{r}}, \tag{5.15}$$

$$\frac{D\phi_{\alpha}}{Da_{r}} = \frac{\partial\phi_{\alpha}}{\partial u}\cdot\frac{Du}{Da_{r}} + \frac{\partial\phi_{\alpha}}{\partial p}\cdot\frac{Dp}{Da_{r}}. \tag{5.16}$$

Stosując równania dla naprężeń i przemieszczeń wirtualnych [5.32]:

$$\int_{\Omega}\varepsilon^{\alpha}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial a_{r}}d\Omega = \int_{\Omega}u^{\alpha}\cdot\frac{\partial b}{\partial a_{r}}d\Omega + \int_{\Gamma}u^{\alpha}\cdot\frac{\partial p}{\partial a_{r}}d\Gamma, \tag{5.17}$$

---

[10] Znak $\cdot$ między dwoma tensorami lub wektorami oznacza sumowanie względem ich wskaźników.

$$\int_{\Omega} \sigma^{a} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_r} d\Omega = \int_{\Omega} b^{a} \cdot \frac{\partial u}{\partial a_r} d\Omega + \int_{\Gamma} p^{a} \cdot \frac{\partial u}{\partial a_r} d\Gamma, \qquad (5.18)$$

oraz uwzględniając (5.4), (5.6) (5.8)-(5.10) otrzymuje się końcową postać dla wrażliwości funkcjonału J_α (por. Dems i Mróz [5.35], Dems i Haftka [5.32], Burczyński [5.9]):

$$\frac{DJ_\alpha}{Da_r} = \int_{\Gamma} \left[\left[\Psi_\alpha - \sigma \cdot \varepsilon^{a} + b \cdot u^{a} + (\phi_\alpha + p \cdot u^{a})_{,n} - 2(\phi_\alpha + p \cdot u^{a}) \mathcal{K} \right] n_k v_k^r d\Gamma \right.$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial u} - p^{a} \right) \cdot \left(\frac{Du^{o}}{Da_r} - u^{o}_{,k} v_k^r \right) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p} + u^{a} \right) \cdot \left(\frac{Dp^{o}}{Da_r} - p^{o}_{,k} v_k^r \right) d\Gamma_2 \qquad (5.19)$$

$$+ \int_{L} [\![\phi_\alpha + p \cdot u^{a}]\!] v_\nu^r dL,$$

gdzie wyrażenie podcałkowe $[\![\phi_\alpha + p \cdot u^{a}]\!] = \left(\phi_\alpha + p \cdot u^{a}\right)^{+} - \left(\phi_\alpha + p \cdot u^{a}\right)^{-}$ przedstawia skok wielkości $(\phi_\alpha + p \cdot u^{a})$ wzdłuż krzywej[20] L, która oddziela części brzegu Γ_1 od Γ_2, $\mathcal{K}$ jest średnią krzywizną brzegu.

Jeśli brzeg Γ jest utworzony przez zbiór regularnych powierzchni przecinających się na krawędziach L_k, to zależność (5.19) powinna być uzupełniona przez zależność (por. Mróz [5.64]):

$$\sum_k \int_{L_k} \left[\left(\phi_\alpha + p \cdot u^{a}\right)^{-} v_{\nu-}^r - \left(\phi_\alpha + p \cdot u^{a}\right)^{+} v_{\nu+}^r \right] dL_k \qquad (5.20)$$

gdzie $v_\nu^r = v \cdot \nu$ jest prędkością pola transformacji na L_k, $\nu^- = s \cdot n^-$ i $\nu^+ = -s \cdot n^+$, s jest jednostkowym wektorem stycznym do L_k, n^- i n^+ są jednostkowymi wektorami normalnymi do obu części brzegu.

Przy wyprowadzaniu równania (5.19) założono, że siły objętościowe b

---

[20] W przypadku zagadnień dwuwymiarowych krzywa L redukuje się do dwóch punktów.

są niezależne od parametrów kształtu a_r, $r=1,2,...R$.

Dla danych warunków brzegowych całkowite pochodne materialne Du^o/Da_r na Γ_1 i Dp^o/Da_r na Γ_2 są znane i mogą być wyrażone przez prędkość transformacji i gradienty danych warunków brzegowych u^o i p^o.

Z równania (5.19) widać, że wrażliwość fukcjonału J_α zależy tylko od brzegowych wartości zmiennych stanu układu podstawowego *(UP)* i układu sprzężonego $(US)_\alpha$. Ten fakt ma ważne znaczenie w obliczeniach numerycznych przy zastosowaniu metody elementów brzegowych.

Równanie (5.19) wraz z zależnością (5.20) opisuje ogólny przypadek wariacji brzegu zewnętrznego, odcinkami regularnego. Z równania tego można otrzymać różne szczególne przypadki wariacji brzegu.

Często występującym przypadkiem jest sytuacja, gdy wariacji podlega tylko brzeg obciążony Γ_2. Biorąc pod uwagę, że $\phi_\alpha=\phi_\alpha(u)$ na Γ_2, $\phi_\alpha=0$ na Γ_1 oraz że p^o jest polem sił zachowawczych ($Dp^o/Da_r=p^o_{,k}v^r_k$), równanie (5.19) dla brzegu regularnego przyjmuje postać (por. Burczyński [5.9]):

$$\frac{DJ_\alpha}{Da_r}=\int_{\Gamma_2}\Big[\Psi_\alpha-\sigma\cdot\varepsilon^a+b\cdot u^a+(\phi_\alpha+p\cdot u^a)_{,n}-2(\phi_\alpha+p\cdot u^a)\mathcal{K}\Big]n_kv^r_kd\Gamma_2. \qquad (5.21)$$

Załóżmy, że brzeg zewnętrzny Γ składa się z trzech części: części utwierdzonej Γ_1, częsci obciążonej Γ_2 i części swobodnej Γ_o, dla której $p^o=0$. Przyjmijmy dalej, że tylko częś swobodna brzegu Γ_o podlega transformacji, podczas gdy Γ_1 i Γ_2 pozostają niezmienione. Wówczas biorąc pod uwagę, że $\phi_\alpha(u,p)=0$ na Γ_o, wrażliwość funkcjonału J_α wyraża się zależnością:

$$\frac{DJ_\alpha}{Da_r}=\int_{\Gamma_o}\Big[\Psi_\alpha-\sigma\cdot\varepsilon^a+b\cdot u^a\Big]n_kv^r_kd\Gamma_o. \qquad (5.24)$$

Dyskretną wersję brzegowego równania całkowego (1.40), które opisuje układ podstawowy *(UP)*, i równania całkowego (5.11), które opisuje układ sprzężony $(US)_\alpha$, otrzymuje się dzieląc brzeg Γ za pomocą elementów brzegowych Γ^e (e=1,2,..E). Współrzędne kartezjańskie x dowolnego punktu na elemencie Γ^e, na którym wprowadzono lokalny układ współrzędnych $\xi=(\xi_i)$, wyrażają się za pomocą zależności (1.43). Na każdym elemncie Γ^e przemieszczenia i siły brzegowe aproksymowane są następująco:

$$q^e(x(\xi)) = N(\xi)q^{ev} \qquad (5.23)$$

$$q=u,p,u^a_\alpha,p^a_\alpha$$

Obszar Ω jest dzielony na komórki wewnętrzne Ω^q $(q=1,2,..Q)$ i w każdej komórce siły objętościowe oraz odkształcenia i naprężenia wstępne są aproksymowane za pomocą wartości węzłowych i funkcji kształtu $\phi(\eta)$:

$$r^q(x(\eta)) = \phi(\eta) r^{qv}, \qquad r=b, b^{\alpha}_{\alpha}, \varepsilon^{\alpha i}_{\alpha}, \sigma^{\alpha i}_{\alpha} \tag{5.24}$$

Ostatecznie otrzymuje się dyskretną postać brzegowych równań całkowych opisujących układ podstawowy (UP) i układy sprzężone $(US)_{\alpha}$, $\alpha=0,1,2,...K-2$,:

$$[H]\{u\}^s = [G]\{p\}^s + \{B\}^s, \qquad s=(UP),(US)_{\alpha} \tag{5.25}$$

gdzie $\{u\}^s$ i $\{p\}^s$ są macierzmi kolumnowymi przemieszczeń i sił węzłowych, $[H]$ i $[G]$ są macierzami kwadratowymi zależnymi od całek brzegowych (por. roz.1), $\{B\}^s$ jest macierzą kolumnową zależną od sił objętościowych b, w przypadku układu podstawowego, lub od sił objętościowych b^{α}_{α} oraz odkształceń $\varepsilon^{\alpha i}_{\alpha}$ i naprężeń $\sigma^{\alpha i}_{\alpha}$ wstępnych w przypadku układu sprzężonego.

Warto zwrócić uwagę, że macierze $[H]$ i $[G]$ są takie same zarówno dla układu podstawowego (UP), jak i układu sprzężonego $(US)_{\alpha}$ i dlatego wystarczy je obliczyć tylko jeden raz.

Uwzględniając warunki brzegowe równanie (5.25) można przekształcić w ten sposób, że wszystkie niewiadome będą znajdować się w macierzy kolumnowej $\{X\}^s$, natomiast wielkości dane w macierzy $\{Y\}^s$. Ostatecznie równanie (5.25) przyjmuje postać:

$$[A]\{X\}^s = [F]\{Y\}^s + \{B\}^s, \qquad s=(UP),(US)_{\alpha} \tag{5.26}$$

Rozwiązując układ równań (5.26) otrzymuje się zmienne stanu układu podstawowego i układu sprzężonego, które są przydatne w obliczeniach wrażliwości funkcjonału J_{α}.

Rozważania powyższe mogą znaleźć także zastosowanie, gdy zamiast funkcjonału globalnego J_{α} mamy do czynienia z ograniczeniami lokalnymi. Załóżmy, że w pewnym punkcie x_o leżącym wewnątrz lub na brzegu rozpatrywanego ciała dane są lokalne ograniczenia równościowe w postaci:

$$\chi_{\alpha}(x_o) = \chi_{\alpha}(\sigma, \varepsilon, u) \qquad \text{dla } x_o \in \Omega, \tag{5.27}$$

lub

$$\chi_\alpha(x_o) = \chi_\alpha(u,p) \quad \text{dla } x_o \in \Gamma. \tag{5.28}$$

Stosując fukcję Diraca $\delta(x_o-x)$ więzy (5.27) i (5.28) zastąpić można znanymi formułami całkowymi:

$$J_\alpha = \int_\Omega \Psi_\alpha(\sigma,\varepsilon,u)d\Omega, \tag{5.29}$$

lub

$$J_\alpha = \int_\Gamma \phi_\alpha(u,p)d\Gamma, \tag{5.30}$$

gdzie

$$\Psi_\alpha = \chi_\alpha(\sigma,\varepsilon,u)\ \delta(x-x_o), \tag{5.31}$$

$$\phi_\alpha = \chi_\alpha(u,p)\ \delta(x-x_o). \tag{5.32}$$

Funkcjonały (5.29) i (5.30) stanowią szczególną postać zbioru funkcjonałów (5.7) i dlatego wzór na pochodną materialną (5.19) ma także w tym przypadku zastosowanie.

5.2.1.2. Wariacja kształtu brzegu wewnętrznego

Rozważane jest ciało sprężyste składające się z dwóch jednorodnych obszarów Ω_1 i Ω_2, oczywiście $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$. Obszary Ω_1 i Ω_2 rozdzielone są brzegiem wewnętrznym Γ_I i ograniczone z zewnątrz brzegiem zewnętrznym Γ, na którym dane są warunki brzegowe w postaci przemieszczeń $u(x)=u^o(x)$, dla $x\in\Gamma_1$, i sił powierzchniowych $p(x)=p^o(x)$, dla $x\in\Gamma_2$.

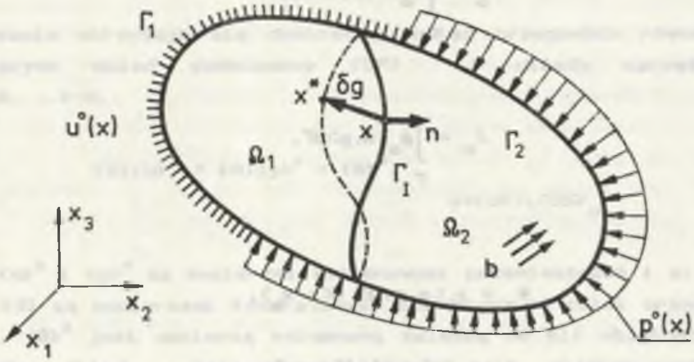
Zagadnienie analizy opisanego zagadnienia zostało przedstawione w p. 1.2.5.

Przemieszczenia u_I i siły p_I na brzegu wewnętrznym Γ_I są funkcjami ciągłymi, ale ich gradienty są nieciągłe:

$$[\![u_I]\!] = 0, \qquad [\![p_I]\!] = [\![\sigma]\!]\cdot n^I = 0,$$
$$[\![u_{I,k}]\!] = [\![u_{I,n}]\!]n_k^I, \qquad [\![p_{I,k}]\!] = [\![p_{I,n}]\!]n_k^I. \tag{5.33}$$

gdzie $[\![\ ]\!]$ oznacza skok na Γ_I obliczany jako różnica odpowiednich wielkości w podobszarach Ω_1 i Ω_2, tak że $[\![f]\!]=f_2-f_1$, oraz n^I jest jednostkowym wektorem normalnym do Γ_I.

Zakłada się, że brzeg zewnętrzny Γ jest ustalony, natomiast brzeg wewnętrzny[21] Γ_I podlega transformacji kształtu opisanej odwzorowaniem (5.1) z prędkością transformacji v_k^r odpowiadającą parametrowi kształtu a_r (rys. 5.3).



Rys. 5.3 Układ podstawowy dla ciała dwufazowego z brzegiem wewnętrznym i jego transformacja

Fig. 5.3 The primary system for the interface problem and its shape transformation

Problem analizy wrażliwości rozważany jest dla zbioru funkcjonałów J_α ($\alpha=0,1,..K-2$) w postaci (por. Burczyński [5.8]):

$$J_\alpha = \sum_{l=1}^{2} \int_{\Omega_l(a)} \Psi_\alpha^l(\sigma_l, \varepsilon_l, u_l)\, d\Omega_l. \tag{5.34}$$

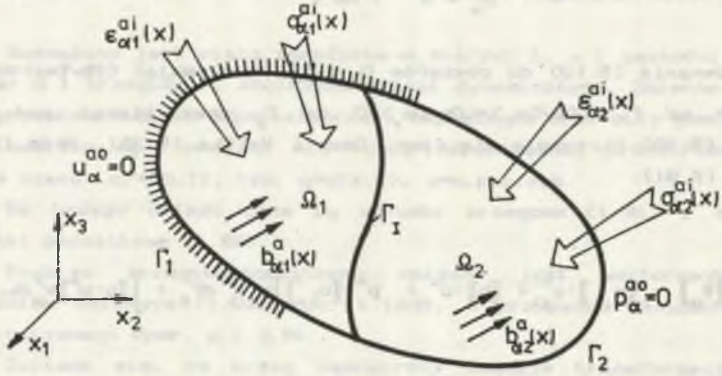
Wrażliwość funkcjonału J_α może być wyrażona następująco:

$$\frac{DJ_\alpha}{Da_r} = \sum_{l=1}^{2} \int_{\Omega_l} \left[\frac{\partial \Psi_\alpha^l}{\partial \sigma_l} \cdot \frac{D\sigma_l}{Da_r} + \frac{\partial \Psi_\alpha^l}{\partial \varepsilon_l} \cdot \frac{D\varepsilon_l}{Da_r} + \frac{\partial \Psi_\alpha^l}{\partial u_l} \cdot \frac{Du_l}{Da_r} + \Psi_\alpha^l \cdot v_{k,k}^r \right] d\Omega_l. \tag{5.35}$$

---

[21] W zagadnieniach płaskich brzeg wewnętrzny Γ_I może być identyfikowany nie tylko z granicą między różnymi materiałami, ale także jako element usztywniający lub skokowa zmiana grubości (por. [5.64, 5.33, 5.34]).

Pochodne materialne (Dq_l/Da_r), $q=\sigma,\varepsilon,u$, oblicza się stosując metodę stanów sprzężonych. W tym celu wprowadza się układy sprzężone $(US)_\alpha$, $\alpha=0,1,2,\ldots K-2$, (rys. 5.4).



Rys. 5.4 Układ sprzężony dla ciała dwufazowego z brzegiem wewnętrznym

Fig. 5.4 The adjoint system for shape sensitivity analysis of interface

W układach sprzężonych występują:

- odkształcenia wstępne:

$$\varepsilon^{\alpha i}_{\alpha l} = \frac{\partial \Psi^{l}_{\alpha}}{\partial \sigma_l} \qquad w\ \Omega_l, \tag{5.36}$$

- naprężenia wstępne:

$$\sigma^{\alpha i}_{\alpha l} = \frac{\partial \Psi^{l}_{\alpha}}{\partial \varepsilon_l} \qquad w\ \Omega_l, \tag{5.37}$$

- siły objętościowe:

$$b^{a}_{\alpha l} = \frac{\partial \Psi^{l}_{\alpha}}{\partial u} \qquad w\ \Omega_l, \tag{5.38}$$

a warunki brzegowe na Γ mają postać:

$$u_{\alpha}^{ao} = 0 \qquad \text{na } \Gamma_1, \tag{5.39}$$

$$p_{\alpha}^{ao} = 0 \qquad \text{na } \Gamma_2.$$

Stosując równanie (5.19) do obszarów Ω_1 i Ω_2, przyjmując $(Db/Da_r)=0$ w Ω, $\phi_{\alpha}=0$, $v_k^r=0$ na Γ, $(Du/Da_r)=(Dp/Da_r)=0$ na Γ_I oraz biorąc pod uwagę zależności (5.33) otrzymuje się (por. Dems i Haftka [5.32], Mróz [5.64], Burczyński [5.9]):

$$\frac{DJ_{\alpha}}{Da_r} = \int_{\Gamma_I}\Big[[\![\Psi_{\alpha}]\!] - [\![\sigma_{jl}]\!]\cdot\varepsilon_{jl}^{a} + [\![b]\!]\cdot u^{a} + p^{a}\cdot[\![u_{,n}]\!]\Big]n_k v_k^{Ir}\,d\Gamma_I + \int_L [\![p\cdot u^{a}]\!]v_{\nu}^{r}\,dL, \tag{5.40}$$

gdzie ostatnia całka określona jest na krzywej powstałej w wyniku przecięcia się Γ_I z brzegiem wewnętrznym, natomiast σ_{jl} i ε_{jl} są składowymi stanu naprężenia i odkształcenia wyznaczonymi w układzie współrzędnych, którego osie leżą w płaszczyźnie stycznej do Γ_I.

Warto zauważyć, że wrażliwość funkcjonału J_{α} zależy tylko od zmiennych stanu układu podstawowego *(UP)* i układu sprzężonego $(US)_{\alpha}$ określonych na brzegu wewnętrznym Γ_I.

Zmienne stanu dla układów *(UP)* i $(US)_{\alpha}$ otrzymuje się rozwiązując równania typu (5.25) dla każdego podobszaru Ω_l $(l=1,2)$, razem z warunkami zgodności i równowagi na brzegu Γ_I (1.79). Otrzymuje się wtedy następujący układ równań algebraicznych (por. wzór (1.80)):

$$\begin{bmatrix} [H_1] & [H_1^I] & -[G_1^I] & [0] \\ [0] & [H_2^I] & [G_2^I] & [H_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle u_1\rangle \\ \langle u^I\rangle \\ \langle p^I\rangle \\ \langle u_2\rangle \end{Bmatrix}^{s} = \begin{bmatrix} [G_1] & [0] \\ [0] & [G_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle p_1\rangle \\ \langle p_2\rangle \end{Bmatrix}^{s} + \begin{Bmatrix} \langle B_1\rangle \\ \langle B_2\rangle \end{Bmatrix}^{s}, \tag{5.41}$$

$$s = (UP),\ (US)_{\alpha},$$

gdzie $\langle B\rangle_l^s$, $l=1,2$, zależy od sił objętościowych $b(x)$, $x\in\Omega$, w przypadku układu podstawowego, lub od sił objętościowych $b_{\alpha l}^{a}(x)$, odkształceń wstępnych $\varepsilon_{\alpha l}^{al}(x)$ i naprężeń wstępnych $\sigma_{\alpha l}^{al}(x)$, $x\in\Omega_l$, w przypadku układu sprzężonego.

Uwzględniając warunki brzegowe, równanie (5.41) można przekształcić do postaci (5.26), w której nieznane wielkości na brzegu Γ_I znajdują się w macierzy kolumnowej $\langle X\rangle^s$.

5.2.2. Metoda elementów brzegowych w analizie wrażliwości ciał obciążonych dynamicznie

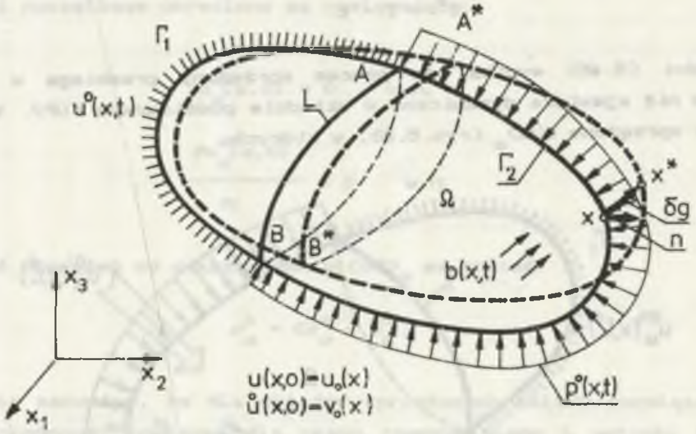
5.2.2.1. Analiza wrażliwości dla dynamicznych zagadnień nieustalonych

Rozważane jest ciało sprężyste o stałych λ, μ i gęstości ρ zajmujące obszar Ω i brzegiem Γ, obciążone siłami dynamicznymi. Zmienne stanu takie jak przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia oraz siły powierzchniowe i objętościowe są funkcjami nie tylko współrzędnej przestrzennej x, ale także czasu $t \in \mathcal{T}=[0,T]$, tzn. $q=q(x,t)$, $q=u,p,\varepsilon,\sigma,b$.

Na brzegu układu dane są warunki brzegowe (1.81) i określone są warunki początkowe (1.84).

Problem brzegowo-początkowy opisany jest wektorowym brzegowym równaniem całkowym (1.93) lub (1.123), w przypadku zastosowania ujęcia alternatywnego (por. p.1.3.5).

Zakłada się, że brzeg zewnętrzny doznaje transformacji (rys.5.5) opisanej równaniem (5.1) i parametry kształtu a_r $(r=1,2,..R)$ oraz prędkość pola transformacji v_k^r są niezależne od czasu.



Rys.5.5 Układ podstawowy obciążony dynamicznie i transformacja jego brzegu

Fig.5.5 The primary system loaded dynamically and shape transformation of its boundary

Rozważany jest problem określenia pierwszej wariacji zbioru funkcjonałów J_α, $\alpha=0,1,..K-2$, (por. Burczyński [5.9], Burczyński i Fedeliński [5.19]):

$$J_\alpha = \int_{\mathcal{T}} \int_{\Omega(a)} \Psi_\alpha(\varepsilon,u)\,d\Omega dt + \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma(a)} \phi_\alpha(u)\,d\Gamma dt, \tag{5.42}$$

gdzie Ψ_α są dowolnymi ciągłymi funkcjami odkształceń $\varepsilon(x,t)$ i przemieszczeń $u(x,t)$ w $\Omega\times\mathcal{T}$, natomiast ϕ_α są dowolnymi ciągłymi funkcjami przemieszczeń $u(x,t)$ w $\Gamma\times\mathcal{T}$.

Funkcjonały (5.42) można wyrazić w inny sposób:

$$J_\alpha = \int_{\mathcal{T}} I_\alpha(\varepsilon,u)dt, \tag{5.43}$$

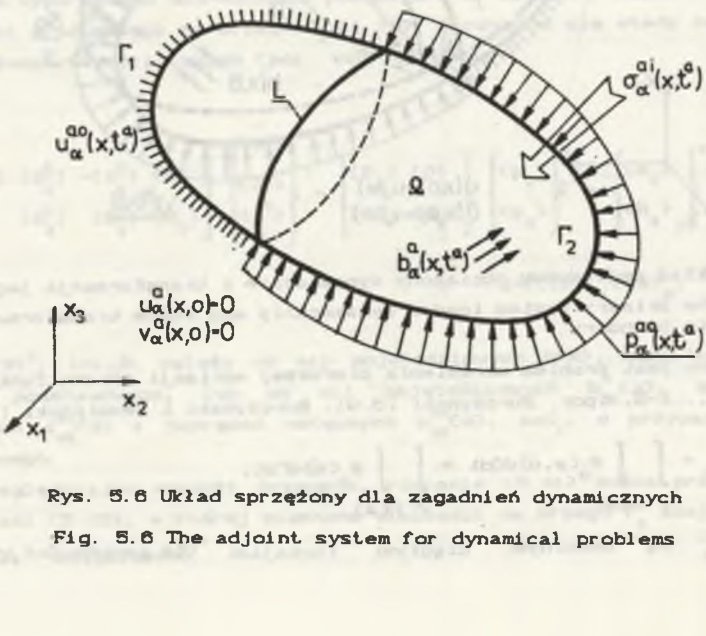
gdzie funkcjonały I_α mają następującą postać:

$$I_\alpha = \int_{\Omega(\alpha)} \Psi_\alpha(\varepsilon,u)d\Omega + \int_{\Gamma(\alpha)} \phi_\alpha(u)d\Gamma. \tag{5.44}$$

W celu obliczenia wariacji funcjonałów J_α, $\alpha=0,1,2,\ldots,K-2$, rozważa się nieustalone zagadnienia sprzężone, które są opisane w dziedzinie czasu $t^\alpha\in\mathcal{T}^\alpha$, $\mathcal{T}^\alpha=[0,T]$, przy czym t^α związane jest z t zależnością:

$$t^\alpha = T - t. \tag{5.45}$$

Z zależności (5.45) wynika, że proces sprzężony przebiega w kierunku przeciwnym niż zjawiska dynamiczne w układzie podstawowym *(UP)*. Wprowadza się układy sprzężone *(US)*$_\alpha$ (rys. 5.6), w których:



Rys. 5.6 Układ sprzężony dla zagadnień dynamicznych

Fig. 5.6 The adjoint system for dynamical problems

- naprężenia wstępne i siły objętościowe określone są przez zależności:

$$\sigma_{\alpha}^{ai}(x,t^{a}) = \frac{\partial\Psi_{\alpha}(\varepsilon(x,t),u(x,t))}{\partial\varepsilon} \quad \text{w } \Omega, \tag{5.46}$$

$$b_{\alpha}^{a}(x,t^{a}) = \frac{\partial\Psi_{\alpha}(x,t)}{\partial u} \quad \text{w } \Omega, \tag{5.47}$$

- warunki brzegowe mają postać:

$$u_{\alpha}^{ao}(x,t^{a}) = 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \tag{5.48}$$

$$p_{\alpha}^{ao}(x,t^{a}) = \frac{\partial\phi_{\alpha}(u(x,t))}{\partial u} \quad \text{na } \Gamma_2, \tag{5.49}$$

- warunki początkowe określone są następująco:

$$u_{\alpha}^{a}(x,0) = 0 \quad \text{w } \Omega, \tag{5.50a}$$

$$\frac{\partial u_{\alpha}^{a}(x,0)}{\partial\tau} = 0 \quad \text{w } \Omega. \tag{5.50b}$$

Zależność naprężeń od odkształceń w $(US)_{\alpha}$ ma postać:

$$\sigma_{\alpha}^{a} = C\varepsilon_{\alpha}^{a} - \sigma_{\alpha}^{ai}. \tag{5.51}$$

Warto zauważyć, że dla układów sprzężonych należy rozwiązać zadanie brzegowo-końcowe, ponieważ dla czasu rzeczywistego t warunki początkowe (5.50) są warunkami końcowymi, tj. kiedy $t^{a}=0$, to $t=T$.

Zmienne stanu dla układów sprzężonych obliczane są dla czasu t^{a} za pomocą brzegowych równań całkowych (por. Burczyński [5.9], Burczyński i Fedeliński [5.19]):

$$c(x)u_{\alpha}^{a}(x,t^{a}) = \int_{\Gamma}\left[U(x,y,t^{a})*p_{\alpha}^{a}(y,t^{a}) - P(x,y,t^{a})*u_{\alpha}^{a}(y,t^{a})\right]d\Gamma(y) + \hat{B}_{\alpha}^{a}(x,t^{a}), \tag{5.52}$$

gdzie

$$\hat{B}^{a}_{\alpha j}(x,t^{a}) = \int_{\Omega} U_{jk}(x,y,t^{a}) * \left[b^{a}_{k}(y,t^{a}) - \sigma^{a i}_{\alpha k l,l}(y,t^{a})\right] d\Omega(y),$$

lub stosując sformułowanie alternatywne:

$$c(x)u^{a}_{\alpha}(x,t^{a}) - \int_{\Gamma}\left[U(x,y)p^{a}_{\alpha}(y,t^{a}) + P(x,y)u^{a}_{\alpha}(y,t^{a})\right] d\Gamma(y) =$$

$$\rho\left\{-c(x)\Psi^{j}(x) + \int_{\Gamma}\left[U(x,y)\Sigma^{j}(y) - P(x,y)\Psi^{j}(y)\right] d\Gamma(y)\right\} \frac{d^{2}\alpha_{\alpha}(t^{a})}{dt^{a2}} + B^{a}_{\alpha}(x,t^{a}), \tag{5.53}$$

gdzie

$$\hat{B}^{a}_{\alpha j}(x,t^{a}) = \int_{\Omega} U_{jk}(x,y)\left[b^{a}_{\alpha k}(y,t^{a}) - \sigma^{a i}_{\alpha k l,l}(y,t^{a})\right] d\Omega(y).$$

Pierwsza wariacja δJ_{α} wyraża się następującą zależnością:

$$\delta J_{\alpha} = \frac{DJ_{\alpha}}{Da_{r}}\,\delta a_{r}, \tag{5.54}$$

gdzie całkowita pochodna materialna ma postać:

$$\frac{DJ_{\alpha}}{Da_{r}} = \int_{\mathcal{T}} \frac{DI_{\alpha}}{Da_{r}}\,dt. \tag{5.55}$$

Podobnie do zagadnień statycznych, wrażliwość funkcjonału I_{α} można obliczyć:

$$\frac{DI_{\alpha}}{Da_{r}} = \int_{\Omega}\left[\frac{\partial\Psi_{\alpha}}{\partial\varepsilon}\cdot\frac{D\varepsilon}{Da_{r}} + \frac{\partial\Psi_{\alpha}}{\partial u}\cdot\frac{Du}{Da_{r}} + \Psi_{\alpha}v^{r}_{k,k}\right] d\Omega$$

$$+ \int_{\Gamma}\left[\frac{\partial\phi_{\alpha}}{\partial u}\cdot\frac{Du}{Da_{r}} + \phi_{\alpha}(\delta_{kl} - n_{k}n_{l})v^{r}_{k,l}\right] d\Gamma. \tag{5.56}$$

Stosując zasadę prac wirtualnych otrzymuje się ostatecznie (por. Dems [5.31], Dems i Mróz [5.36]):

$$\frac{DI_\alpha}{Da_r} = \iint_\Gamma \Big[\Psi_\alpha - \sigma\cdot\varepsilon^a + b\cdot u^a - \rho\ddot{u}\cdot u^a + (\phi_\alpha + p\cdot u^a)_{,n} - 2(\phi_\alpha + p\cdot u^a)\mathcal{K}\Big] n_k v_k^r d\Gamma$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \Big\{\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial u} - p^a\Big\}\cdot\Big\{\frac{Du^o}{Da_r} - u^o_{,k} v^r_k\Big\} d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} u^a\cdot\Big\{\frac{Dp^o}{Da_r} - p^o_{,k} v^r_k\Big\} d\Gamma_2 \qquad (5.57)$$

$$+ \int_L \big[\phi_\alpha + p\cdot u^a\big] v_\nu^r dL \quad + \quad \frac{d}{dt}\iint_\Omega \Big[\rho(\dot{u}^a\cdot u_{,a_r} - u^a\cdot\dot{u}_{,a_r}\Big] d\Omega,$$

gdzie L jest krzywą, która oddziela Γ_1 i Γ_2, natomiast $(\dot{\ })$ oznacza pochodną względem czasu t.

Podstawiając (5.57) do (5.55) otrzymuje się następujące wyrażenie na wrażliwość funkcjonału J_α (por. Burczyński [5.9], Burczyński i Fedeliński [5.19]):

$$\frac{DJ_\alpha}{Da_r} = \int_{\mathcal{T}} \iint_\Gamma \Big[\Psi_\alpha - \sigma\cdot\varepsilon^a + b\cdot u^a - \rho\ddot{u}\cdot u^a + (\phi_\alpha + p\cdot u^a)_{,n} - 2(\phi_\alpha + p\cdot u^a)\mathcal{K}\Big] n_k v_k^r d\Gamma dt$$

$$+ \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma_1} \Big\{\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial u} - p^a\Big\}\cdot\Big\{\frac{Du^o}{Da_r} - u^o_{,k} v^r_k\Big\} d\Gamma_1 dt + \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma_2} u^a\cdot\Big\{\frac{Dp^o}{Da_r} - p^o_{,k} v^r_k\Big\} d\Gamma_2 dt \qquad (5.58)$$

$$+ \sum_k \int_{\mathcal{T}} \int_{L_k} \big[\phi_\alpha + p\cdot u^a\big] v_\nu^r dL_k dt.$$

Jak widać z powyższego wzoru, wrażliwości funkcjonałów J_α, $\alpha=0,1,2,..K-2$, (5.42) zależą tylko od brzegowych zmiennych stanu układu podstawowego *(UP)* i układów sprzężonych *(US)*$_\alpha$. Jeśli tylko regularna część brzegu Γ_2 podlega wariacji i pole sił powierzchniowych p^o jest niezależne od konfiguracji brzegu (konserwatywne pole sił) oraz $\phi_\alpha = \phi_\alpha(u)$ na Γ_2, $\phi_\alpha = 0$ na Γ_1, wtedy wzór (5.58) przyjmuje postać:

$$\frac{DJ_\alpha}{Da_r} = \int\limits_{\mathcal{T}} \iint\limits_{\Gamma_2} \left[\Psi_\alpha - \sigma\cdot\varepsilon^a + b\cdot u^a - \rho\ddot{u}\cdot u^a + (\phi_\alpha + p\cdot u^a)_{,n} - 2(\phi_\alpha + p\cdot u^a)\mathcal{K} \right] n_k v_k^r \, d\Gamma_2 \, dt. \qquad (5.59)$$

W przypadku gdy brzeg składa się z trzech części, tzn. $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_o$, gdzie część brzegu Γ_o jest wolna od obciążeń powierzchniowych (tj. $p(x,t)=0$), oraz tylko Γ_o podlega transformacji kształtu przy $\phi_\alpha=0$ na Γ_o, wtedy otrzymuje się:

$$\frac{DJ_\alpha}{Da_r} = \int\limits_{\mathcal{T}} \iint\limits_{\Gamma_o} \left[\Psi_\alpha - \sigma\cdot\varepsilon^a + b\cdot u^a - \rho\ddot{u}\cdot u^a \right] n_k v_k^r \, d\Gamma_o \, dt. \qquad (5.60)$$

W celu obliczenia zmiennych stanu układu podstawowego i układów sprzężonych dalsza uwaga będzie ograniczona do alternatywnego ujęcia metody elementów brzegowych.

Dyskretyzując brzeg elementami brzegowymi Γ^e, $e=1,\dots,E$, i aproksymując przemieszczenia, siły, pseudoprzemieszczenia i pseudosiły (por. p.1.3.5) za pomocą funkcji kształtu i wartości węzłowych otrzymuje się układ liniowych równań różniczkowych, który dla układu podstawowego ma postać (1.124), a dla układu sprzężonego przedstawić można następująco (por. Burczyński [5.9], Burczyński i Fedeliński [5.19]):

$$[M] \frac{d^2\{u_\alpha^a(t^a)\}}{dt^{a2}} + [H]\{u_\alpha^a(t^a)\} = [G]\{p_\alpha^a(t^a)\} + \{B_\alpha^a(t^a)\}, \qquad (5.61)$$

gdzie $\{u_\alpha^a(t^a)\}$ i $\{p_\alpha^a(t^a)\}$ są macierzami kolumnowymi przemieszczeń i sił węzłowych, macierze kwadratowe $[H]$ i $[G]$ są takie same, jak dla układu podstawowego, natomiast macierz masy $[M]$ określona jest wzorem (1.125). Macierz $\{B_\alpha^a(t^a)\}$ zależy od sił objętościowych i naprężeń wstępnych.

Rozważać można także problem określenia wrażliwości dla dynamicznych ograniczeń lokalnych określonych w punkcie x_o w chwili czasu t_o:

$$\chi_\alpha(x_o, t_o) = \chi_\alpha(\varepsilon, u), \qquad \text{dla } x_o \in \Omega, \; t \in \mathcal{T}, \qquad (5.62)$$

lub

$$\chi_\alpha(x_o, t_o) = \chi_\alpha(u), \qquad x_o \in \Gamma, \; t \in \mathcal{T}. \qquad (5.63)$$

Ograniczenia opisane zależnościami (5.62) i (5.63) mogą być wyrażone w postaci całkowej:

$$J_\alpha = \int_{\mathcal{T}} \int_{\Omega} \Psi_\alpha(\varepsilon, u) d\Omega dt, \tag{5.64}$$

lub

$$J_\alpha = \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma} \phi_\alpha(u) d\Gamma dt, \tag{5.65}$$

gdzie

$$\Psi_\alpha = \chi_\alpha(\varepsilon, u)\delta(x-x_o)\delta(t-t_o), \tag{5.66}$$

$$\phi_\alpha = \chi_\alpha(u)\delta(x-x_o)\delta(t-t_o). \tag{5.67}$$

Funkcjonały (5.64) i (5.65) wyrażają się zależnościami stanowiącymi szczególną postać funkcjonałów (5.42), których analiza wrażliwości była uprzednio rozważana.

5.2.2.2. Analiza wrażliwości dla wartości własnych

Rozpatrywany jest problem drgań swobodnych ciała sprężystego. W ujęciu alternatywnym jest on opisany równaniem (1.129).

Jest rzeczą oczywistą, że częstość drgań własnych zależy od kształtu brzegu Γ. Należy więc określić zależność częstości drgań od parametrów kształtu a_r, $r=1,2,\ldots,R$. Rozważany będzie przypadek prostych (tzn. niepowtarzających się) wartości własnych.

Zagadnienie własne opisać można także za pomocą równania wariacyjnego (por. [5.47, 5.66, 5.26, 5.68]):

$$\mathbb{A}(u, u) = \omega^2 \mathbb{B}(u, u), \tag{5.68}$$

gdzie

$$\mathbb{A}(u, u) = \int_{\Omega(a)} \sigma(u) \cdot \varepsilon(u) d\Omega, \tag{5.69}$$

$$\mathbb{B}(u, u) = \int_{\Omega(a)} \rho u \cdot u d\Omega. \tag{5.70}$$

$u(x)$ jest funkcją własną odpowiadającą wartości własnej ω^2, $\sigma(u)$ i $\varepsilon(u)$ są tensorami naprężeń i odkształceń.

Wariacja częstości drgań własnych ω dana jest zależnością:

$$\delta\omega = \frac{D\omega}{Da_r}\,\delta a_r, \tag{5.71}$$

gdzie wrażliwość $(D\omega/Da_r)$ może być obliczona jako pochodna materialna obu stron równania (5.68):

$$\frac{D\omega}{Da_r} = \frac{1}{2\omega\,\mathbb{B}(u,u)}\left[\frac{D\mathbb{A}(u,u)}{Da_r} - \omega^2\frac{D\mathbb{B}(u,u)}{Da_r}\right]. \tag{5.72}$$

Uwzględniając (5.3), (5.4) (5.6b) oraz warunek normalizacyjny $\mathbb{B}(u,u)=1$, otrzymuje się ostatecznie (por. Burczyński i Fedeliński [5.19, 5.22]):

$$\frac{D\omega}{Da_r} = (2\omega)^{-1}\int_\Gamma (\sigma(u)\cdot\varepsilon(u) - \omega^2\rho u\cdot u)n_k v_k^r d\Gamma. \tag{5.73}$$

Jak widać relacja między wariacją kształtu brzegu ciała sprężystego a wariacją częstości[22] zależy od wartości własnej i funkcji własnej określonej na brzegu układu.

W celu określenia częstości i postaci drgań należy rozwiązać zagadnienie własne opisane równaniem (1.129).

5.2.3. Dyskretyzacja całek brzegowych wrażliwości za pomocą metody elementów brzegowych

Analiza wrażliwości rozpatrywanych funkcjonałów J_α, $\alpha=0,1,..K-2$, zarówno dla zagadnień statycznych, nieustalonych problemów dynamicznych, jak i prostych częstości drgań własnych $J_{K-1} = \omega$ wskazuje, że zależność między wariacją kształtu brzegu oraz J_α, $\alpha=0,1,...K-1$, ma postać całki brzegowej, w której wyrażenie podcałkowe zależy, w przypadku ogólnym, od zmiennych stanu układu podstawowego i układów sprzężonych. Ten fakt ma ważne znaczenie w numerycznych obliczeniach wrażliwości metodą elementów brzegowych.

Zależność każdego funkcjonału J_α, $\alpha=0,1,..K-1$, względem zbioru parametrów kształtu $a=(a_r)$, $r=1,2,..R$, może być opisana następująco:

$$\delta J_\alpha = \{S_\alpha\}^T\{\delta a\}, \tag{5.74}$$

---

[22] Analiza wrażliwości dla powtarzających się częstości drgań własnych jest bardziej złożona (por. [5.26, 5.47, 5.66]) i nie jest tutaj rozpatrywana.

gdzie

$$\{S_\alpha\} = \left[S_{\alpha 1}, S_{\alpha 2}, .. S_{\alpha r}, .. S_{\alpha R}\right]^T \tag{5.75}$$

jest macierzą wrażliwości, której elementy (wrażliwości) opisane są za pomocą pochodnych materialnych funkcjonałów J_α względem a_r, mianowicie:

$$S_{\alpha r} = \frac{DJ_\alpha}{Da_r} \tag{5.76}$$

oraz

$$\{\delta a\} = [\delta a_1, \delta a_2, \dots \delta a_r, \dots \delta a_R]^T \tag{5.77}$$

jest macierzą wariacji parametrów kształtu.

Warto zauważyć, że macierz wrażliwości S_α przedstawia sobą gradienty funkcjonału J_α względem parametrów kształtu a_r ($r=1,2,..R$).

Znając $\{\delta a\}$ oraz mając obliczoną macierz wrażliwości $\{S_\alpha\}$ można ocenić stopień zmiany funkcjonałów J_α, $\alpha=1,2,\dots,K-1$, spowodowany zmianą kształtu brzegu.

W celu obliczenia macierzy wrażliwości $\{S_\alpha\}$ należy określić pole transformacji v_k^r, które odpowiada parametrowi kształtu a_r.

Wybór parametrów kształtu stanowi zasadniczy krok w analizie wrażliwości i optymalizacji kształtu. Najprostszym i najbardziej naturalnym sposobem opisu geometrycznej postaci brzegu jest przyjęcie położenia węzłów brzegowych za zmienne decyzyjne.

Niech zbiór wszystkich elementów brzegowych Γ^e, $e=1,2,..E$, będzie przedstawiony w postaci następującej sumy zbiorów:

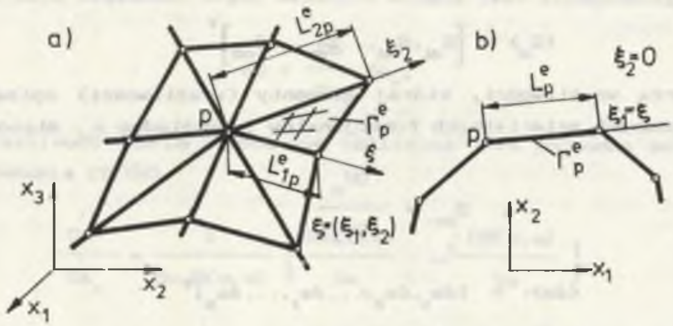
$$\{\Gamma^e\} = \bigcup_{p=1}^{P} \{\Gamma_p^e\}, \tag{5.78}$$

gdzie $\{\Gamma_p^e\}$ jest zbiorem tych wszystkich elementów brzegowych, które łączą się w p-tym wierzchołku ($p=1,2,\dots,P$).

W przypadku problemów przestrzennych elementy brzegowe Γ_p^e są reprezentowane przez czworokątne (rys.1.3a) lub trójkątne (rys.1.3b) płaty powierzchniowe. W problemach dwuwymiarowych elementy brzegowe Γ_p^e są krzywoliniowymi segmentami (rys.1.3c).

Dyskretyzacja brzegu Γ za pomocą elementów brzegowych powinna być przeprowadzona w ten sposób, aby krzywa L utworzona była przez krawędzie elementów Γ_p^e . W zagadnieniach płaskich L redukuje się do punktów, które powinny być identyfikowane z węzłami brzegowymi.

Wśród wielu typów elementów brzegowych, które można zastosować w obliczeniach analizy wrażliwości, elementy : liniowymi funkcjami kształtu dają wymaganą dokładność bez potrzeby długotrwałych obliczeń numerycznych. Zastosowanie tych elementów w parametryzacji brzegu będzie dalej szczegółowo omówione (rys.5.7).



Rys. 5.7 Dyskretyzacja za pomocą elementów brzegowych: a) dla zagadnień przestrzennych, b) dla zagadnień płaskich

Fig. 5.7 Discretization by means of boundary elements: a) for three-dimensional problems, b) for plane problems

Wektorowe pole transformacji kształtu g(x) można wyrazić na każdym elemencie brzegowym Γ_p^e w sposób następujący (por. Burczyński i Adamczyk [5.14-5.18]) :

$$g_p^e(\zeta) = M_p^e(\zeta)b^p + \underline{M}_p^e(\zeta)\underline{b}^p + \underline{\underline{M}}_p^e(\zeta)\underline{\underline{b}}^p, \tag{5.79}$$

gdzie

$$M_p^e(\zeta) = 1 - \frac{1}{L_{1p}^e}\zeta_1 - \frac{1}{L_{2p}^e}\zeta_2 , \tag{5.79a}$$

$$\underline{M}_p^e(\zeta) = \frac{1}{L_{1p}^e}\zeta_1 , \tag{5.79b}$$

$$\underline{\underline{M}}_p^e(\zeta) = \frac{1}{L_{2p}^e}\zeta_2 . \tag{5.79c}$$

$\zeta=(\zeta_j)$, $j=1,\dots d-1$, jest lokalnym układem współrzędnych umiejscowionym na elemencie brzegowym. L_{1p}^e i L_{2p}^e są długościami boków elementu Γ_p^e. W przypadku dwuwymiarowym $\zeta=\zeta_1$.

Wektorowe parametry kształtu b^p, $\underline{b}^p$ i $\underline{\underline{b}}^p$ zdefiniowane są następująco:

$$g_p^e(\zeta) = \begin{cases} b^p & \text{dla} \quad \zeta_1=\zeta_2=0 \\ \underline{b}^p & \text{dla} \quad \zeta_1=L_{1p}^e \quad \text{i} \quad \zeta_2=0 \\ \underline{\underline{b}}^p & \text{dla} \quad \zeta_1=0 \quad \text{i} \quad \zeta_2=L_{2p}^e . \end{cases} \tag{5.80}$$

Wektorowe parametry kształtu $b^p=(b_k^p)$, $k=1,...d$; $p=1,2,..P$, związane są z parametrami kształtu $a=(a_r)$, $r=1,2,..R$, w sposób następujący:
- dla zagadnień przestrzennych ($d=3$):

$$a_{3p-2} = b_1^p \ ; \ a_{3p-1} = b_2^p \ ; \ a_{3p} = b_3^p \ , \tag{5.81}$$

- dla zagadnień dwuwymiarowych ($d=2$):

$$a_{2p-1} = b_1^p \ ; \ a_{2p} = b_2^p \tag{5.82}$$

Liczba parametrów kształtu a_r równa R związana jest z liczbą punktów węzłowych P relacją: $R=mP$.

Pole transformacji kształtu v_k^r może być teraz wyrażone na każdym elemencie brzegowym Γ_p^e za pomocą funkcji $M_p^e(\zeta)$.

Pomijając dla prostoty zapisu całki określone na L, wrażliwości $S_{\alpha r}$ mogą być wyrażone w postaci:

- dla zagadnień statycznych i problemów własnych:

$$S_{\alpha r} = \int_\Gamma W_\alpha(u,u^a,p,p^a,\varepsilon,\varepsilon^a,\sigma,\sigma^a) n_k v_k^r d\Gamma, \tag{5.83a}$$

- dla zagadnień nieustalonych:

$$S_{\alpha r} = \int_{\mathcal{T}} \int_\Gamma W_\alpha(u,u^a,p,p^a,\varepsilon,\varepsilon^a,\sigma,\sigma^a;t) n_k v_k^r d\Gamma dt, \tag{5.83b}$$

gdzie W_α są pewnymi funkcjami zależnymi, w przypadku ogólnym, od zmiennych stanu układu podstawowego i układów sprzężonych.

Elementy macierzy wrażliwości mogą być obliczone przy wykorzystaniu następujących zależności:

$$S_{\alpha,dp-h} = \sum_{e=1}^{E_p} \int_{\Gamma_p^e} W_\alpha^e(\zeta) n_{d-h}^e M_p^e(\zeta) d\Gamma_p^e(\zeta), \tag{5.86a}$$

$$S_{\alpha,dp-h} = \sum_{e=1}^{E_p} \sum_{i=1}^{N_T} \left\{ w_i \int_{\Gamma_p^e} W_\alpha^e(\zeta,t_i) n_{d-h}^e M_p^e(\zeta) d\Gamma_p^e(\zeta) \right\}, \tag{5.86b}$$

$p=1,2,...P$

$h=2,1,0$ for $d=3$

$h=1,0$ for $d=2$

gdzie E_p oznacza liczbę elementów brzegowych, które łączą się w węźle p, $(t_i)_{i=1}^{N_T}$ i $(w_i)_{i=1}^{N_T}$ są punktami i wagami kwadratur całkowania w przedziale czasu $\mathcal{T}=[0,T]$.

Funkcje W_α^* są określane na każdym elemencie brzegowym Γ_p^* przez zmienne stanu układu podstawowego *(UP)* i układów sprzężonych $(US)_\alpha$, $\alpha=0,1,2,\ldots,K-2$.

Przedstawiony sposób parametryzacji brzegu wykorzystujący współrzędne węzłowe jest najprostszy. Ma on jednak pewne wady. Liczba parametrów kształtu jest w takim opisie zwykle dosyć duża, natomiast w procesie optymalizacji istnieje tendencja do generowania nierealistycznych i nieciągłych kształtów brzegu.

Ostatnio zostały zaproponowane do opisu kształtu brzegu funkcje giętne (funkcje Bezier, B-spliny)[29] (por [5.21]). B-spliny znalazły zastosowanie w optymalizacji kształtu metodą elementów brzegowych w pracy Sandgrena i Wu [5.67] oraz Krzesińskiego [5.54], natomiast funkcje Bezier były stosowane przez Burczyńskiego [5.21] oraz Wilczyńskiego [5.72].

Równanie parametryczne dla funckji Beziera ma formę:

$$\mathbf{x}(s) = \sum_{l=0}^{n} \mathbf{b}^l B_{l,n}(s), \qquad 0 \le s \le 1, \tag{5.85}$$

gdzie $B_{l,n}(s)$ jest zdefiniowane następująco:

$$B_{l,n}(s) = \frac{n!}{l!(n-l)!} s^l (1-s)^{n-l}. \tag{5.86}$$

Parametry krzywej $\mathbf{b}^l=(b_k^l)$, $l=0,1,\ldots,n$; $k=1,2,\ldots d$, są punktami kontrolnymi i wygodnie jest je traktować jako wektorowe parametry kształtu $\mathbf{a}=(a_r)$.

Dla zagadnień dwuwymiarowych zachodzi związek $b_k^l=a_{2l-k}$, $(l=0,1,2,\ldots n$; $k=1,2)$, i pole transformacji kształtu v_k^r może być wyrażone bezpośrednio przez funkcję $B_{l,n}(s)$ (por. Burczyński [5.21])

Dla zagadnień przestrzennych powierzchnia Beziera opisana jest przez dwa zbiory krzywych Beziera. Równanie parametryczne przyjmuje postać:

$$\mathbf{x}(s,r) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \mathbf{b}^{j,l} B_{j,m}(s) B_{l,n}(r), \qquad 0 \le s,r \le 1,$$

gdzie $\mathbf{b}^{j,l}$ określają położenie punktów kontrolnych traktowanych jako parametry kształtu.

---

[29] Funkcje te zdobyły szerokie zastosowanie w grafice komputerowej.

5.3. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W OPTYMALIZACJI POSTACI KONSTRUKCYJNEJ

5.3.1. Warunki stacjonarności

Zagadnienie optymalizacji geometrycznej postaci konstrukcyjnej polega na znalezieniu optymalnych parametrów kształtu $a_{op}=(a_r)$, $r=1,2,\ldots R$, $a\in E^R$, według założonego kryterium optymalizacji. Ogólnie wyróżnić można cztery grupy kryteriów optymalizacji (por. [5.1, 5.3, 5.53, 5.69]):

Pierwszą grupę stanowią kryteria maksymalnej sztywności lub minimalnej podatności.

Grupa druga zawiera kryteria wytrzymałościowe, które postulują wyrównanie lub minimalizację naprężeń w rozpatrywanym układzie odkształcalnym.

Do trzeciej grupy zaliczyć można kryteria żądające minimalnego kosztu układu. W grupie tej mieszczą się, jako szczególny przypadek, kryteria minimalnej objętości lub minimalnego ciężaru.

Kryteria czwartej grupy związane są ze specyficznymi problemami dynamicznymi.

Typowe kryteria optymalizacji oraz wyrażające je funkcjonały jakości przedstawione są w p.5.3.3

Problem optymalizacji kształtu sformułować można następująco:

zminimalizuj funkcjonał jakości $J_o(a)$ *z nałożonymi ograniczeniami w postaci funkcjonałów* J_α $(\alpha=1,2,\ldots K-1)$, *wyrażonych poprzez naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia lub częstości oraz w postaci ograniczenia na koszt ciała* $J_c=J_K$, *tak że*

$$J_o(a) \rightarrow \min_a, \tag{5.87}$$

przy ograniczeniach:

$$\bar{J}_\alpha = J_\alpha - c_\alpha \le 0, \qquad \alpha=1,2,\ldots K \tag{5.88}$$

gdzie c_α $(\alpha=1,2,\ldots K)$ *są danymi stałymi.*

Jeśli koszt ciała jest proporcjonalny do objętości lub ciężaru, to można napisać:

$$J_c = \int_\Omega C d\Omega, \tag{5.89}$$

gdzie C jest jest specyficznym kosztem materiału, z którego wykonany jest układ odkształcalny.

Problem opisany równaniami (5.87) i (5.88) może być zastąpiony zagadnieniem poszukiwania punktu stacjonarnego funkcjonału Lagrange'a $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = J_o + \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha (J_\alpha - c_\alpha), \tag{5.90}$$

gdzie λ_α (α=1,2,..K) są mnożnikami Lagrange'a ($\lambda_\alpha \geq 0$).
Warunek stacjonarności funkcjonału $\mathcal{L}$ wyraża się następująco:

$$\delta\mathcal{L} = \delta J_o + \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha \delta J_\alpha = 0, \tag{5.91}$$

$$\lambda_\alpha (J_\alpha - c_\alpha) = 0. \qquad \alpha=1,2,..K \tag{5.92}$$

Punkt stacjonarny funkcjonału $\mathcal{L}$ definiuje optymalne parametry kształtu a_{op}.

Pierwsze wariacje funkcjonałów δJ_α, α=0,1,...K-1, były prezentowane w punkcie 5.2, natomiast wariacja kosztu wyrażona być może następująco:

$$\delta J_c = \{S_c\}^T\{\delta a\}, \tag{5.93}$$

gdzie elementy macierzy wrażliwości $\{S_c\}$ są określone następująco:

$$S_{cr} = \int_\Gamma C n_k v_k^r d\Gamma. \tag{5.94}$$

W alternatywnym sformułowaniu problemu optymalizacji należy zminimalizować koszt J_o=J_c przy danych ograniczeniach wyrażonych przez funkcjonały J_α, α=1,2,...K-1.

Warunek stacjonarności (5.91) traktować można jako konieczne warunki optymalności zapewniające szukane minimum.

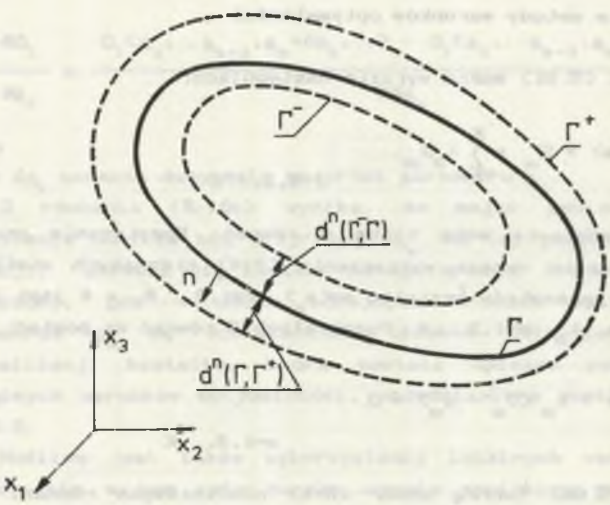
Dodatkowo można wprowadzić ograniczenia geometryczne zakładające, że brzeg Γ będzie leżał między dwoma dopuszczalnymi położeniami powierzchni Γ^+ i Γ^-, jak pokazano na rys.5.8. Spełnienie tego warunku wymaga, aby [5.46]:

$$d^n(\Gamma,\Gamma^+) \geq 0, \tag{5.95a}$$

oraz

$$d^n(\Gamma^-,\Gamma) \geq 0, \tag{5.95b}$$

gdzie d^n jest odległością między Γ i Γ^+ lub Γ^-, mierzoną wzdłuż normalnej do brzegu.



Rys. 5.8 Ograniczenia geometryczne nałożone na brzeg

Fig. 5.8 The pointwise constraints on the boundary

Często żąda się także, aby parametry kształtu były małe, tzn. aby

$$\{\delta a\}^T\ [W]\ \{\delta a\} \le \underline{\varepsilon}^2, \tag{5.96}$$

gdzie $\underline{\varepsilon}$ jest małym parametrem, $[W]$ jest dodatnio określoną macierzą wagową.

5.3.2. Metody iteracyjne w optymalizacji kształtu

W celu rozwiązania sformułowanego problemu optymalizacji postaci konstrukcyjnej zastosować można dwa podejścia:

- metodę warunków optymalności,
- metodę programowania matematycznego.

W metodzie warunków optymalności wyróżnić można dwa etapy [5.70]. Etap pierwszy polega na sformułowaniu koniecznych warunków optymalności, natomiast na etapie drugim konstruuje się efektywny proces iteracji, który pozwala spełnić te warunki. Stosując tę metodę zagadnienie redukuje się do wyznaczenia zmiennych stanu układu podstawowego i układów sprzężonych oraz określenia nieznanych parametrów kształtu $a=(a_r)$, $r=1,2,..R$, i mnożników Lagrange'a λ_α, $\alpha=1,2,..K$.

Przy zastosowaniu ujęcia drugiego wyznacza się iteracyjnie parametry kształtu $a=(a_r)$ stosując jedną z metod programowania nieliniowego. Opracowanych jest wiele różnych metod programowania matematycznego służących do rozwiązywania problemów ekstremalnych (por. [5.3, 5.53, 5.69, 5.65].

5.3.2.1. Zastosowanie metody warunków optymalności

Warunek optymalności (5.91) można wyrazić następująco:

$$Q_r(\mathbf{a}) = S_{or} + \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha S_{\alpha r}, \qquad r=1,2,..R \tag{5.97}$$

Warunek (5.97) przedstawia sobą tylko R równań. Rozwiązanie problemu optymalnego kształtowania wymaga wyznaczenia $(R+K)$ nieznanych wielkości, gdzie R jest liczbą parametrów kształtu $\mathbf{a}=(a_r)$, $r=1,2,..R$, a K jest liczbą mnożników Lagrange'a λ_α, $\alpha=1,2,..K$. Pozostałych K równań ma postać:

$$Q_{R+\alpha}(\mathbf{a}) = \lambda_\alpha (J_\alpha - c_\alpha) = 0, \qquad \alpha=1,2,..K \tag{5.98}$$

Warunki (5.97) i (5.98) tworzą zbiór $(R+K)$ nieliniowych równań, które można zapisać następująco:

$$Q_l(\mathbf{a}_s) = 0, \qquad l,s=1,2,..(R+K) \tag{5.99}$$

gdzie

$$\mathbf{a}_s = \begin{cases} a_s, & s=1,2,..R, \\ \lambda_{s-R}, & s=R+1,..R+K. \end{cases} \tag{5.100}$$

Układ równań nieliniowych (5.99) może być rozwiązany za pomocą iteracyjnej procedury Newtona:

$$\left[\frac{\partial Q_l^{(i)}}{\partial \mathbf{a}_s}\right] \{\Delta \mathbf{a}_s\} = -\left\{Q_l^{(i)}\right\}, \qquad i=1,2,\ldots \tag{5.101}$$

gdzie Δa_s jest przyrostem nieznanej wielkości $\mathbf{a}_s$.
Nowe wartości $\mathbf{a}_s$, $s=1,2,..(R+K)$, w $(i+1)$ kroku iteracji obliczane są z relacji:

$$\mathbf{a}_s^{(i+1)} = \mathbf{a}_s^{(i)} + \Delta \mathbf{a}_s. \tag{5.102}$$

Macierz pochodnych $[\partial Q_l / \partial \mathbf{a}_s]$ może być obliczona przez różniczkowanie warunków optymalności lub za pomocą bezpośredniego różniczkowania metodą różnic skończonych. Stosując drugie ujęcie otrzymuje się:

$$\frac{\delta Q_l}{\delta a_s} \approx \frac{Q_l(a_1,\ldots a_{s-1},a_s+\delta a_s,\ldots) - Q_l(a_1,\ldots a_{s-1},a_s-\delta a_s,\ldots)}{2\delta a_s}, \tag{5.103}$$

gdzie δa_s oznacza dany mały przyrost parametru a_s.

Z równania (5.101) wynika, że mając pewien początkowy brzeg odniesienia oblicza się przyrosty Δa_s. Na tej podstawie, w wyniku nowej iteracji, określa się kształt nowego brzegu. Proces optymalizacji jest zakończony, gdy w dwóch kolejnych krokach optymalizacji wartości parametrów a_s są dostatecznie bliskie. Wieloparametrowa procedura optymalizacji kształtu, która została opisana powyżej na podstawie globalnych warunków optymalności, przedstawiona została schematycznie na rys.5.9.

Możliwe jest także wykorzystanie lokalnych warunków optymalności. Rozważa się w tym celu bardzo często spotykany przypadek generowania optymalnego kształtu brzegu obciążonego Γ_2 z ograniczeniem na całkowity koszt.

Pierwsza wariacja funkcjonału jakości ma postać:

$$\delta J_o = S_{or}\delta a_r, \tag{5.104}$$

gdzie

$$S_{or} = \int_{\Gamma_2} W_o(u,u^a,p,p^a,\varepsilon,\varepsilon^a,\sigma,\sigma^a)n_k v_k^r d\Gamma_2, \tag{5.105}$$

dla zagadnień statycznych i problemu własnego, oraz

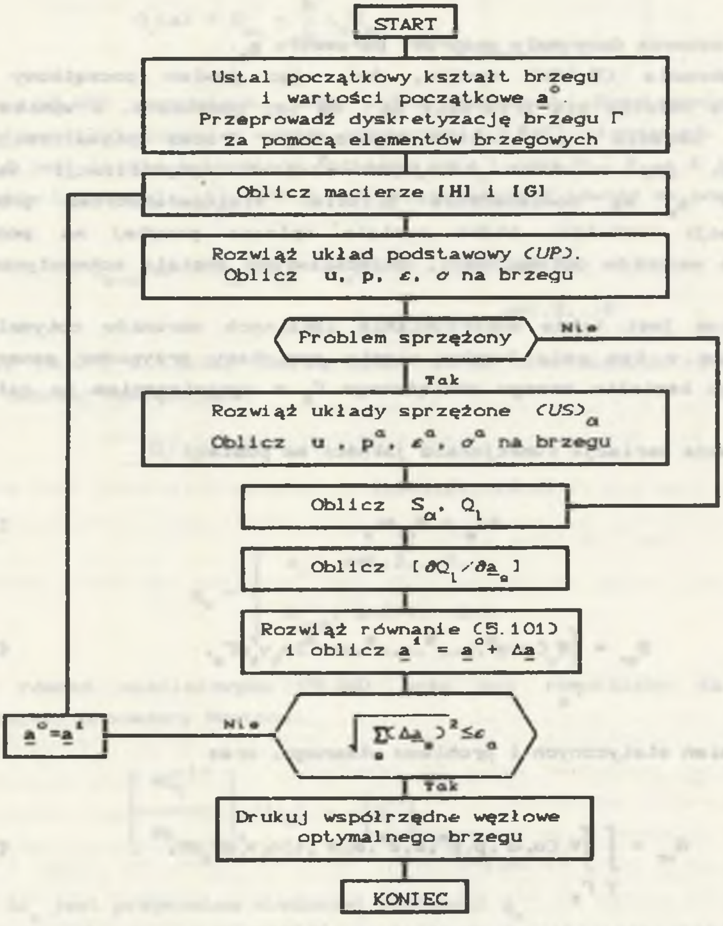
$$S_{or} = \int_T \int_{\Gamma_2} W_o(u,u^a,p,p^a,\varepsilon,\varepsilon^a,\sigma,\sigma^a;t)n_k v_k^r d\Gamma_2 dt, \tag{5.106}$$

dla zagadnień dynamicznych nieustalonych.

Uwzględniając (5.104)-(5.106) oraz (5.93), (5.94) w warunkach stacjonarności (5.91) otrzymuje się:

$$\int_{\Gamma_2} (W_o + \lambda_1 C)\delta g_n d\Gamma_2 = 0, \tag{5.107}$$

oraz



Rys. 5.9 Schemat blokowy iteracyjnej procedury Newtona generowania optymalnej geometrycznej postaci konstrukcyjnej ciała sprężystego

Fig. 5.9 The flow chart sketch of the shape optimization procedure using the Newton method

$$\int_{\Gamma_2}\left\{\int_T\left(W_o+\frac{\lambda_1}{t_F}C\right)\right\}\delta g_n\,dt\,d\Gamma_2=0, \tag{5.108}$$

gdzie $\delta g_n = n_k v_k^r \delta a_r$ jest składową normalną wariacji brzegu.

Ponieważ wielkość δg_n może być dowolna, więc równania (5.107) i (5.108) przyjmują postać lokalnych warunków optymalności:

$$W_o = -\lambda_1 C = \text{constant} \quad \text{na } \Gamma_2, \tag{5.109}$$

$$W_{oT} \equiv \int_T W_o\,dt = -\lambda_1 C = \text{constant} \quad \text{na } \Gamma_2. \tag{5.110}$$

Powyższe warunki mogą być bezpośrednio zastosowane w procesie generacji optymalnej postaci konstrukcyjnej brzegu Γ_2. Przesunięcie każdego węzła brzegowego p ($p=1,2,..P_2$) na Γ_2 w kierunku normalnym jest obliczane w $(i+1)$ kroku iteracji z następującej zależności (por. Mróz [5.64], Burczyński [5.9]):

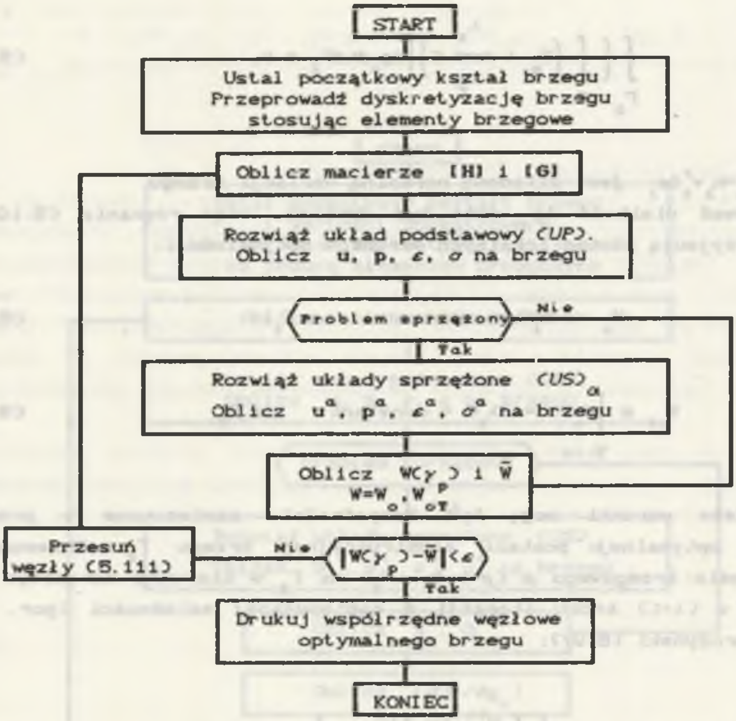
$$\delta g_n^{(i+1)}(\gamma_p) = f\left[\left(\frac{W^{(i)}(\gamma_p)}{\overline{W}^{(i)}}\right)^d - 1\right]_{W=W_o,\,W_{oT}}, \tag{5.111}$$

gdzie γ_p ($p=1,2,..P_2$) definiuje dyskretne rozmieszczenie węzłów brzegowych na Γ_2, f i d są danymi stałymi. $W^{(i)}(\gamma_p)$ jest wartością funkcji W ($W=W_o, W_{oT}$) w węźle p-tym w i-tej iteracji. $\overline{W}^{(i)}$ jest wartością średnią z $W^{(i)}(\gamma_p)$.

Gdy $W^{(i)}(\gamma_p)<\overline{W}^{(i)}$, to punkt p przesuwany jest na zewnątrz ciała, natomiast gdy $W^{(i)}(\gamma_p)>\overline{W}^{(i)}$, to punkt p przesuwany jest do wnętrza. Proces iteracyjny jest przerywany, gdy wielkość $|W^{(i)}(\gamma_p)-\overline{W}^{(i)}|$ jest dostatecznie mała.

Wadą w stosowaniu lokalnych warunków optymalności jest to, że nie zapewniają one zawsze znalezienia globalnego minimum.

Schemat blokowy opisanego procesu iteracyjnego optymalizacji kształtu przedstawiony jest na rys.5.10.



Rys. 5.10 Schemat blokowy generowania optymalnej postaci geometrycznej brzegu przy zastosowaniu lokalnych warunków optymalności

Fig. 5.10 The flow chart sketch of the shape optimization procedure using the local optimality conditions

5.3.2.2. Zastosowanie metod nieliniowego programowania matematycznego

Poszukiwanie optymalnych parametrów kształtu a_{op} w typowym zadaniu nieliniowego programowania polega na skonstruowaniu iteracyjnego procesu opisanego zależnością:

$$a^{(i+1)} = a^{(i)} + \beta^{(i)} h^{(i)}, \qquad i=0,1,2,\ldots \tag{5.112}$$

gdzie $h^{(i)}$ jest wektorem określającym kierunek procesu optymalizacji, biorącym za punkt wyjścia rozwiązanie $a^{(i)}$, natomiast $\beta^{(i)}$ jest czynnikiem, od którego zależy długość kroku w kierunku $h^{(i)}$.

W celu rozwiązania problemu optymalizacji kształtu należy wybrać metodę określania wektora $h^{(i)}$ oraz długości kroku $\beta^{(i)}$. Wektor $h^{(i)}$ określa ogólną zbieżność procesu optymalizacji, natomiast wybór $\beta^{(i)}$ ma decydujący wpływ na pracochłonność obliczeń w każdej iteracji.

Przedstawiona będzie efektywna metoda gradientu sprzężonego, w której wektor $h^{(i)}$ zależy od gradientów funkcjonału jakości i ograniczeń. W metodzie tej wykorzystane są wprost wrażliwości funkcjonałów wyprowadzone uprzednio.

Zależność (5.97) w zapisie macierzowym ma postać:

$$Q(a) = S_o + S\Lambda = 0, \tag{5.113}$$

gdzie $\Lambda=[\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_K]^T$, S zawiera wrażliwości S_α odpowiadające zbiorowi więzów aktywnych.

Eliminując z (5.113) mnożniki Lagrange'a otrzymuje się (por. [5.52]):

$$Q(a) = \left[I - \frac{SS^T}{S^TS}\right]S_o, \tag{5.114}$$

gdzie Q jest rzutem gradientu funkcjonału jakości J_o na zbiór ograniczeń aktywnych.

Równanie (5.114) jest podstawą sformułowania metody gradientu sprzężonego.

Jeśli $Q\neq0$, wtedy optimum nie jest osiągnięte i procedura iteracyjna przebiega przez wykorzystanie najszybszego spadku, w którym $h^{(i)}=-Q$

$$a^{(i+1)} = a^{(i)} - \beta Q, \tag{5.115}$$

gdzie β jest obliczane w wyniku minimalizacji $J_o(a-\beta Q)$ względem β. Jeśli natomiast $Q=0$ oraz $\lambda_\alpha\geq0$, $\alpha=1,2,..K$, wtedy znaleziono optymalne parametry kształtu.

Praktycznie parametrów kształtu szuka się w postaci $a=a^o+\delta a$, gdzie a^o jest zbiorem nominalnych parametrów kształtu w danej iteracji, tak aby zminimalizować J_o podczas spełnienia ograniczeń:

$$\delta J_\alpha = S_\alpha^T \delta a \leq \Delta J_\alpha, \quad \alpha=1,2,..K \tag{5.116}$$

dla wszystkich α takich, że $J_\alpha\geq-\varepsilon$, gdzie ε jest dodatnim małym parametrem, który definiuje te nierównościowe ograniczenia, które są traktowane jako ε-aktywne, ΔJ_α jest żądaną korekcją w spełnieniu ograniczeń.

Ograniczenia wynikłe z przyjęcia ograniczeń (5.95) można przedstawić następująco:

$$-d^n(\Gamma(\gamma_p),\Gamma^+) \le \delta g_n(\gamma_p) \le d^n(\Gamma^-,\Gamma(\gamma_p)). \tag{5.117}$$

$$p=1,2,..P$$

Ograniczenia geometryczne opisane przez (5.96) są także brane pod uwagę. Dla dalszej wygody ograniczenia (5.95) można przedstawić w równoważnej postaci:

$$J_{K+p+1} = -d^n(\Gamma(\gamma_p),\Gamma^+) \le 0, \tag{5.118a}$$

$$J_{K+p+2} = -d^n(\Gamma^-,\Gamma(\gamma_p)) \le 0, \tag{5.118b}$$

$$p=1,2,..P$$

dla których biorąc pod uwagę (5.117), można pierwszą wariację wyrazić następująco:

$$\delta J_{K+p+1} = S^T_{K+p+1}\delta a = -n_k(\gamma_p)v^r_k(\gamma_p)\delta a_r \le d^n(\Gamma(\gamma_p),\Gamma^+), \tag{5.119a}$$

$$\delta J_{K+p+2} = S^T_{K+p+2}\delta a = n_k(\gamma_p)v^r_k(\gamma_p)\delta a_r \le d^n(\Gamma^-,\Gamma(\gamma_p)). \tag{5.119b}$$

$$p=1,2,..P$$

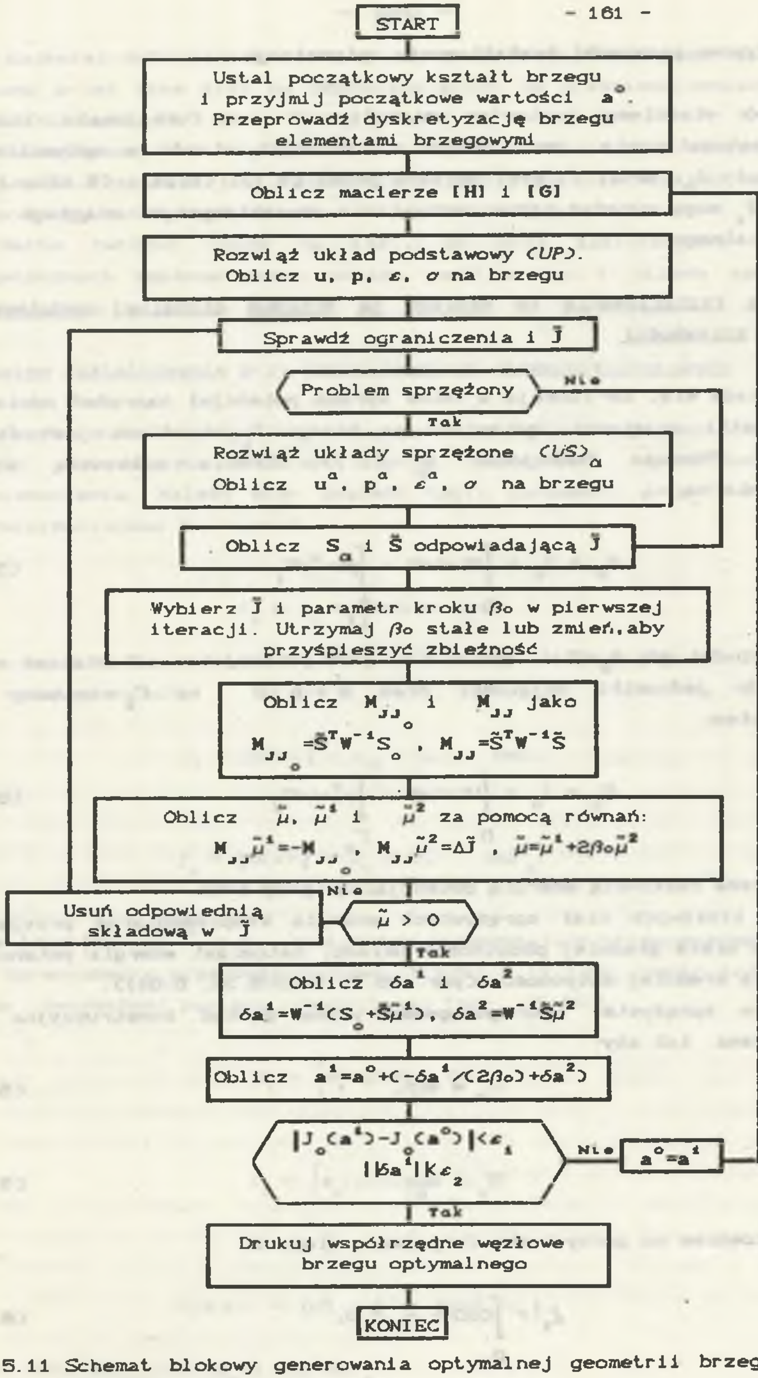
Wprowadza się także zbiór wskaźników A:

$$A = \langle\, \alpha : \text{dla których } J_\alpha(a^0) \ge -\varepsilon \,\rangle, \tag{5.120}$$

oraz macierz kolumnową $\tilde{J}$ z elementami $\alpha\in A$

$$\tilde{J} = \begin{Bmatrix} J_\alpha \\ \alpha\in A \end{Bmatrix} \tag{5.121}$$

Schemat blokowy iteracyjnej procedury wykorzystującej metodę gradientu sprzężonego przedstawiono na rys.5.11 (por. [5.45, 5.46]).



Rys. 5.11 Schemat blokowy generowania optymalnej geometrii brzegu metodą gradientu sprzężonego

Fig. 5.11 The flow chart sketch of the shape optimization by means of the gradient projection method

5.3.3. Typowe przypadki kształtowania optymalnego

Wybór właściwego kryterium optymalizacji oraz funkcjonału, który go wyraża matematycznie, jest jednym z istotnych etapów w optymalizacji. Funkcjonały J_{α}, $\alpha=0,1,\ldots K-2$, opisane przez (5.7), (5.34), (5.42), $J_{K-1}=-\omega$ oraz $J_{K}=J_{c}$ mogą wyrażać różne mechaniczne charakterystyki ciągłego układu odkształcalnego.

<u>Optymalne kształtowanie ze względu na minimum globalnej podatności i maksimum sztywności</u>

Zakłada się, że funkcja $\Psi_{o}=W(\sigma)$ wyraża potencjał naprężeń odniesiony do jednostki objętości, natomiast na brzegu Γ_{1} określona jest funkcja $\phi_{o}=-p\cdot u^{o}$ Wówczas funkcjonał J_{o} (5.7) określa całkowitą energię komplementarną:

$$\Pi_{\sigma} = J_{o} = \int_{\Omega} W(\sigma)d\Omega - \int_{\Gamma_{1}} p\cdot u^{o}d\Gamma_{1}. \tag{5.122}$$

Przypadek gdy $\Psi_{o}=U(\varepsilon)$, gdzie $U(\varepsilon)$ jest potencjałem odkształceń odniesionym do jednostki objętości oraz $\phi_{o}=-p^{o}\cdot u$ na Γ_{2} opisany jest funkcjonałem:

$$\Pi_{u} = J_{o} = \int_{\Omega} U(\varepsilon)d\Omega - \int_{\Gamma_{2}} p^{o}\cdot u d\Gamma_{2} \tag{5.123}$$

który wyraża całkowitą energię potencjalną (przy b=0).

Dla liniowych ciał sprężystych energia komplementarna przyjmowana jest jako miara średniej podatności układu, natomiast energia potencjalna jako miara średniej sztywności (por. [5.3, 5.33-5.35, 5.64]).

Ciało sprężyste, którego geometryczna postać konstrukcyjna jest kształtowana tak aby:

$$\Pi_{\sigma} \rightarrow \min_{a}, \tag{5.124}$$

lub

$$\Pi_{u} \rightarrow \max_{a}, \tag{5.125}$$

z ograniczeniem na górny koszt (objętość, ciężar):

$$J_{1} = \int_{\Omega} C d\Omega - c_{c} \leq 0, \tag{5.126}$$

jest najmniej odkształcalne wśród dopuszczalnych rozwiązań, tzn. praca wykonana przez dane siły na odpowiadających im przemieszczeniach osiąga wartość minimalną.

Kształtowanie ze względu na minimum podatności przy stałym koszcie (objętości, ciężarze) jest równoważne kształtowaniu ze względu na minimum kosztu (objętości, ciężaru) przy stałej średniej podatności.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że przy zastosowaniu kryteriów energetycznych zmienne stanu układu podstawowego i układu sprzężonego pokrywają się.

Optymalne kształtowanie przy ograniczeniach przemieszczeniowych

Często można się spotkać z zagadnieniem optymalnego kształtowania ze względu na minimu objętości przy nałożonych ograniczeniach na przemieszczenia. Należy więc znaleźć takie parametry $a=(a_r)$, $r=1,2,..R$, aby zminimalizować funkcjonał:

$$J_o \equiv J_c = \int_\Omega C d\Omega \rightarrow \min_a \tag{5.127}$$

przy ograniczeniach

$$J_1 = |u(x)| - u_o \le 0, \quad x\in\Omega, \tag{5.128}$$

lub

$$J_1 = |u(x)| - u_o \le 0, \quad x\in\Gamma_2, \tag{5.129}$$

gdzie $|u(x)|\equiv(u\cdot u)^{1/2}$, a u_o jest danym dopuszczalnym przemieszczeniem.

Ograniczenia przemieszczeniowe (5.128) i (1.129) często transformuje się do równoważnej postaci równościowej (por. [5.46]):

$$J_1 = \int_\Omega \Psi_1(u) d\Omega = 0, \tag{5.130}$$

lub

$$J_2 = \int_{\Gamma_2} \phi_2(u) d\Gamma_2 = 0, \tag{5.131}$$

gdzie

$$\Pi(u(x)) = |u| - u_o + ||u| - u_o|, \tag{5.132}$$

i $\Psi_1=\Pi$ dla $x\in\Omega$, oraz $\phi_2=\Pi$ dla $x\in\Gamma_2$

Zamiast warunków (5.128) i (5.129) można także minimalizować funkcjonał:

$$J_o = \int_\Omega \Psi_o(u)d\Omega \rightarrow \min_a, \tag{5.133}$$

lub

$$J_o = \int_{\Gamma_2} \phi_o(u)d\Gamma_2 \rightarrow \min_a, \tag{5.134}$$

przy ograniczeniach (5.126).

Funkcje Ψ_o i ϕ_o kreślone są następująco:

$$\Psi_o(u) = \left[\frac{|u(x)|}{u_o}\right]^{\varkappa}, \quad \text{dla} \quad x\in\Omega, \ \varkappa \rightarrow \infty, \tag{5.135}$$

$$\phi_o(u) = \left[\frac{|u(x)|}{u_o}\right]^{\varkappa}, \quad \text{dla} \quad x\in\Gamma_2, \ \varkappa \rightarrow \infty. \tag{5.136}$$

Funkcjonały (5.133) i (5.134) przedstawiają lokalne przemieszczenia opisane przez warunki (5.128) (5.129) dla $\varkappa \rightarrow \infty$.

Optymalne kształtowanie dla kryteriów naprężeniowych

Warunki wytrzymałościowe należą do podstawowych ograniczeń, jakie należy uwzględnić w trakcie procesu optymalnego kształtowania. Więzy te mają najczęściej charakter lokalny i zależą od zmiennych stanu $\sigma=(\sigma_{ij})$. Głównym celem stosowania kryteriów wytrzymałościowych jest obniżenie koncentracji naprężeń lub wyrównanie naprężeń.

Kryterium wytrzymałościowe przedstawić można następująco:

$$\varphi(\sigma) = \theta(\sigma) - \sigma_o \leq 0, \tag{5.137}$$

gdzie θ jest pewną funkcją określoną na podstawie przyjętej hipotezy wytrzymałościowej, σ_o jest przyjętym dopuszczalnym poziomem naprężeń. Przypadek szczególny, gdy $\theta=\sigma_o$=const jest związany z kształtowaniem ze względu na równomierną wytrzymałość.

Najprostszym i najefektywniejszym sposobem uwzględniania warunków wytrzymałościowych jest zamiana ograniczeń lokalnych na ograniczenia globalne w postaci całkowej. Wówczas optymalnego kształtu brzegu szuka się, przy ograniczeniu na objętość ciała, minimalizując funkcjonał:

$$J_o = \int_\Omega \Psi_o(\sigma) d\Omega \rightarrow \min_a, \tag{5.138}$$

gdzie

$$\Psi_o(\sigma) = \left[\frac{\theta(\sigma)}{\sigma_o} \right]^{\varkappa}, \quad \varkappa \rightarrow \infty. \tag{5.139}$$

Istnieją także inne sposoby przedstawienia funkcjonału jakości, np. w postaci:

$$J_o = \begin{cases} \int_\Omega \left(\frac{\theta}{\sigma_o} - 1 \right)^{\mu} d\Omega & \text{dla } \theta > \sigma_o, \\ 0 & \text{dla } \theta < \sigma_o, \end{cases} \tag{5.140}$$

lub przez rozważenie średniego naprężenia w pewnej objętości Ω_k, takiej że $\Omega_k \in \Omega$,

$$J_o = \int_\Omega \varphi(\sigma) m_k d\Omega, \tag{5.141}$$

gdzie m_k jest funkcją charakterystyczną, która jest dodatnia w Ω_k oraz równa zeru na zewnątrz Ω, i z której całka jest równa 1 (por. [5.47]).

Szczególnym, ale ważnym przypadkiem optymalnego kształtowania jest zagadnienie wyrównania naprężeń brzegowych wyrażonych przez wektor naprężenia (sił powierzchniowych) p na brzegu podpartym Γ_1. Szuka się wówczas optymalnego brzegu Γ_2, przy przyjętym ograniczeniu na koszt, tak aby spełniony był warunek:

$$|p(x)| - p_o \leq 0, \quad \text{dla } x \in \Gamma_1, \tag{5.142}$$

gdzie p_o jest średnią wartością sił brzegowych na Γ_1.

Sformułowany problem może być zastąpiony przez minimalizację funkcjonału:

$$J_o = \int_{\Gamma_1} \phi_o(p) d\Gamma_1 \rightarrow \min_a, \tag{5.143}$$

gdzie

$$\phi_o(p) = \left[\frac{|p(x)|}{p_o} \right]^{\varkappa}, \quad \varkappa \rightarrow \infty, \tag{5.144}$$

przy warunkach ograniczających (5.128).

Optymalne kształtowanie w zagadnieniach dynamicznych

Opisane wyżej kryteria i wyrażające je funkcjonały mogą być uogólnione na zagadnienia dynamiczne. Zagadnienie znalezienia optymalnego kształtu ze względu na minimalizację kosztu może być sformułowane następująco:

$$J_o = J_c = \int_\Omega C d\Omega = \int_{\mathcal{T}} \int_\Omega \frac{C}{t_F} d\Omega dt \rightarrow \min_\Omega, \qquad (5.145)$$

przy ograniczeniu w postaci przemieszczeń:

$$J_1 = |u(x,t)| - u_o \le 0, \quad \text{w } \Omega\times T. \qquad (5.146)$$

Ograniczenia (5.146) można przekształcić do równoważnej postaci:

$$J_1 = \int_{\mathcal{T}} \int_\Omega \Psi_1(u(x,t)) d\Omega dt = 0 \qquad (5.147)$$

gdzie

$$\Psi_1(u) = |u(x,t)| - u_o + \left| |u(x,t)| - u_o \right|. \qquad (5.148)$$

Możliwe jest także sformułowanie alternatywne. Minimalizowany jest funkcjonał zależny od przemieszczeń:

$$J_o = \int_{\mathcal{T}} \int_\Omega \Psi_o(u(x,t)) d\Omega dt \rightarrow \min_\Omega, \qquad (5.149)$$

gdzie

$$\Psi_o(u) = \left[\frac{|u(x,t)|}{u_o} \right]^{\varkappa}, \quad \varkappa \rightarrow \infty, \ x\in\Omega. \qquad (5.150)$$

przy ograniczeniach na koszt:

$$J_1 = \int_{\mathcal{T}} \int_\Omega \frac{C}{t_F} d\Omega dt - c_o \le 0. \qquad (5.151)$$

Ograniczenie w postaci $|u(x,t)| - u_o \le 0$ można także sformułować dla przemieszczeń na brzegu Γ_2. Wówczas funkcjonał jakości można przedstawić następująco.

$$J_o = \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma_2} \phi_o(u(x,t))d\Gamma_2 dt \to \min_a, \tag{5.152}$$

gdzie

$$\phi_o(u) = \left[\frac{|u(x,t)|}{u_o} \right]^{\varkappa}, \qquad \varkappa \to \infty, \ x \in \Gamma_2, \tag{5.153}$$

przy ograniczeniu w postaci (5.151).

Specyficzne kryteria optymalizacji związane są z ciałami wykonywującymi drgania swobodne. W wielu problemach optymalnego kształtowania należy zmaksymalizować pierwszą podstawową częstość drgań własnych przy ograniczeniu na koszt. Wówczas problem znalezienia optymalnych parametrów kształtu $a=(a_r)$, $r=1,2,\ldots R$, polega na minimalizacji wyrażenia:

$$J_o = -\omega \to \min_a, \tag{5.154}$$

przy ograniczeniu w postaci (5.126).

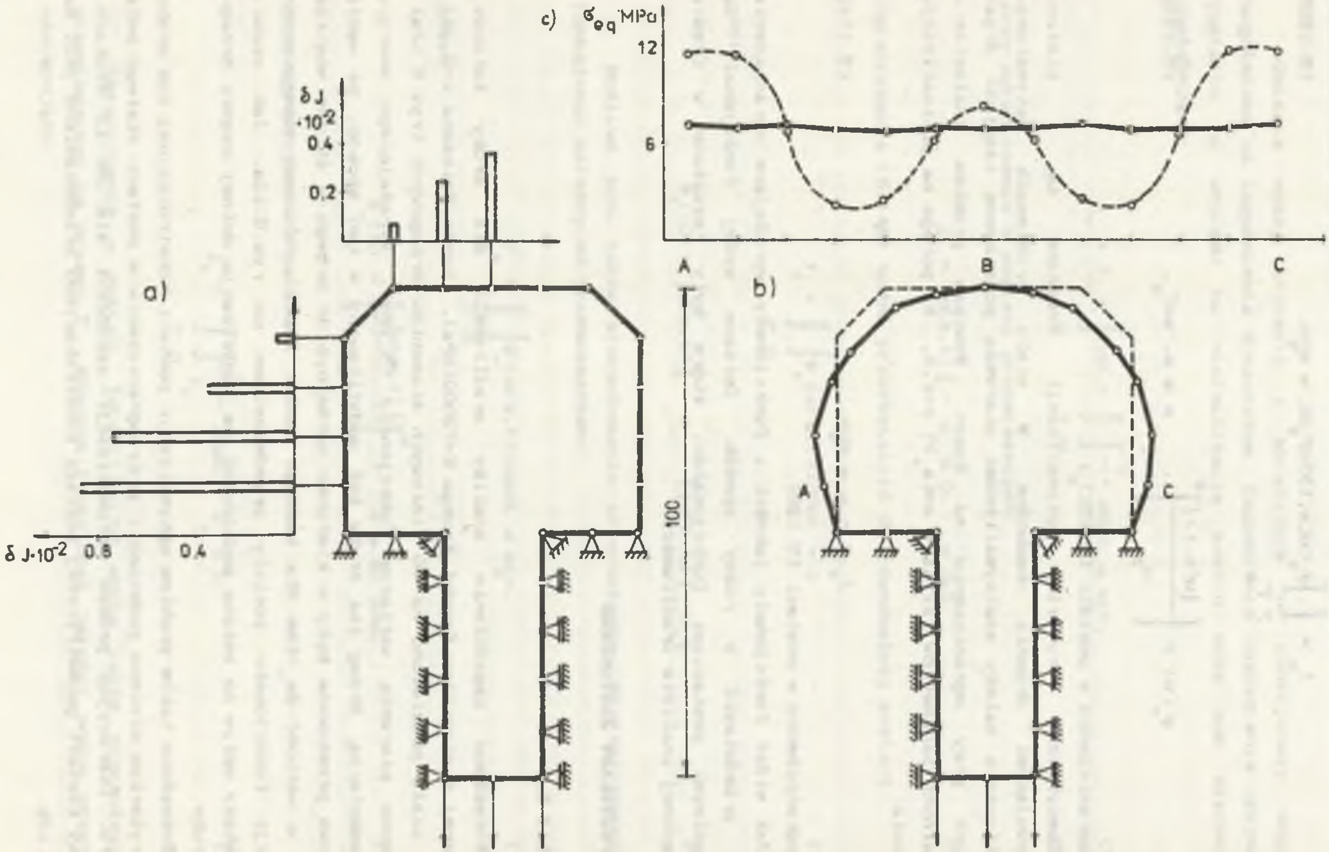
Jak widać funkcjonały jakości i funkcjonały wyrażające ograniczenia można przedstawić w różny sposób. Opisane wyżej funkcjonały są szczególnymi postaciami funkcjonałów, które były rozważane w części poświęconej analizie wrażliwości.

5.4. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

Przykład 5.1

Rozważono zagadnienie analizy wrażliwości dla śruby kotwowej wykonanej z aluminium (moduł Younga E=73000[MPa], liczba Poissona ν=0,34). Brzeg ciała podzielono na 30 liniowych elementów brzegowych (rys.5.12a). Obliczono pierwszą wariację funkcjonału (5.122), wyrażającego energię komplementarną. Brzeg łba śruby był modyfikowany w ten sposób, że węzły brzegowe przesuwane były w kierunku normalnym do brzegu w stronę wnętrza ciała o wartość δa_n=1mm dla każdego węzła. Wyniki obliczeń numerycznych wariacji funkcjonału zostały przedstawione na rys.5.12a. Jak widać, największy wpływ na zmianę podatności ma modyfikacja dolnej części brzegu łba śruby.

Rozważono także problem optymalizacji postaci konstrukcyjnej łba śruby dla kryterium minimum podatności przy ograniczeniu w postaci stałego pola obszaru. Iteracyjny proces optymalizacji zakończył się po 13 krokach. Końcowy kształt geometrycznej postaci konstrukcyjnej przedstawiony jest na rys.5.12b.



Rys. 5.12 Analiza wrażliwości i optymalne kształtowanie śruby kotwowej

Fig. 5.12 Shape sensitivity analysis and optimal design of an anchor bolt

Przedstawiono także rozkład naprężeń redukowanych, obliczonych wg hipotezy Hubera, przed i po optymalizacji. Warto zauważyć, że w wyniku optymalizacji ze względu na minimum globalnej podatności nastąpiło wyrównanie naprężeń redukowanych na optymalizowanym brzegu.

Przykład 5.2

Rozważono stalową stopę (E=210000[MPa], ν=0,3) obciążoną i podpartą w sposób przedstawiony na rys.5.13a. Model numeryczny składał się z 28 liniowych elementów brzegowych.

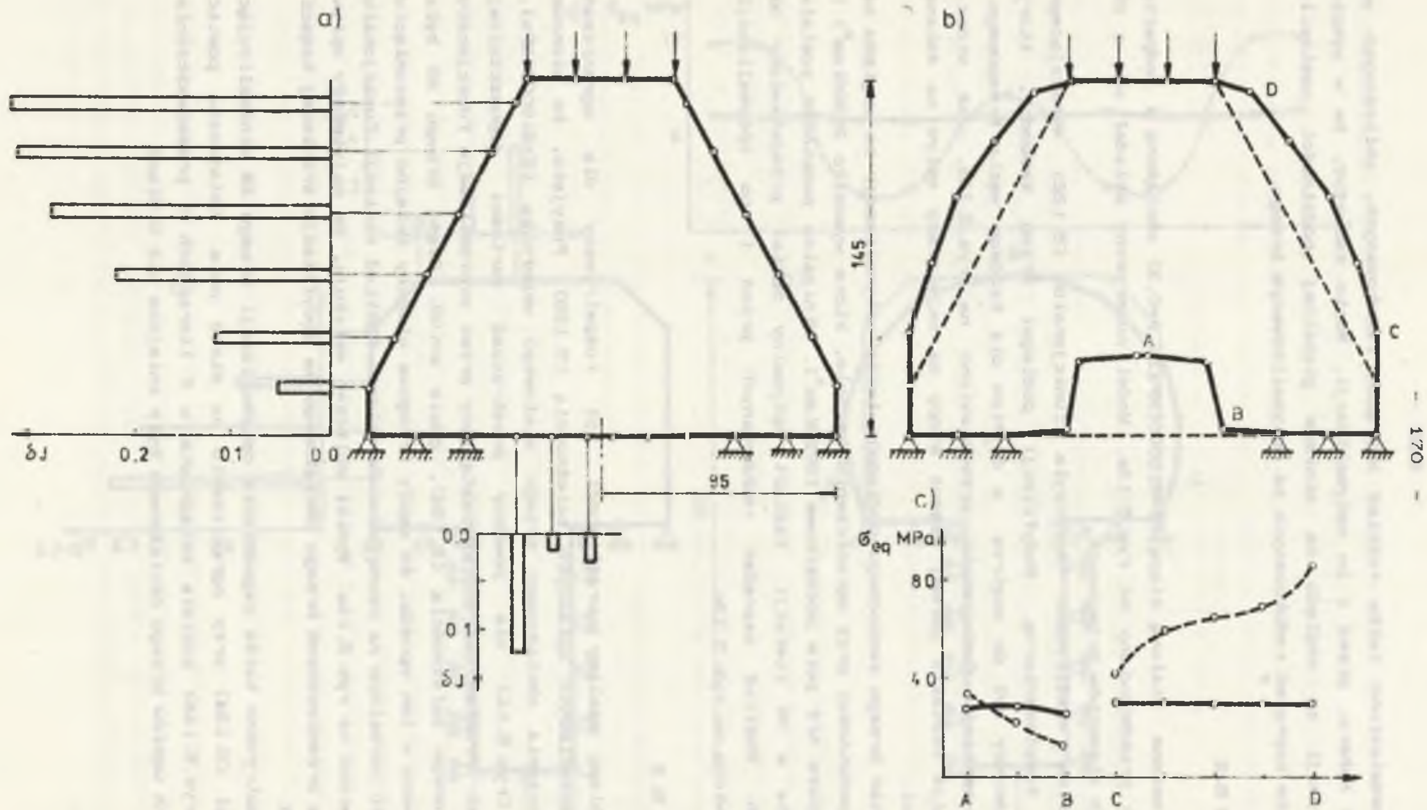
Analiza wrażliwości dotyczyła funkcjonału (5.122) wyrażającego energię komplementarną. Modyfikacji podlegał brzeg swobodny, który transformowany był do wnętrza o δa_n=1mm dla każdego węzła brzegowego. Rozkład wariacji funkcjonału przedstawiono na rys.5.13a. Jak widać, modyfikacja kształtu górnej części stopy ma największy wpływ na zmianę podatności.

Postać brzegu swobodnego podlegała także optymalizacji ze względu na minimum podatności przy ograniczeniu na pole, które wymosiło 21300[mm^2] i było większe niż pole początkowe 18725[mm^2]. Minimalna podatność została osiągnięta w 39 iteracji. Kształt optymalny został przedstawiony na rys.5.13b. Rozkład naprężeń redukowanych przed i po optymalizacji przedstawiono na rys.5.13c.

Przykład 5.3

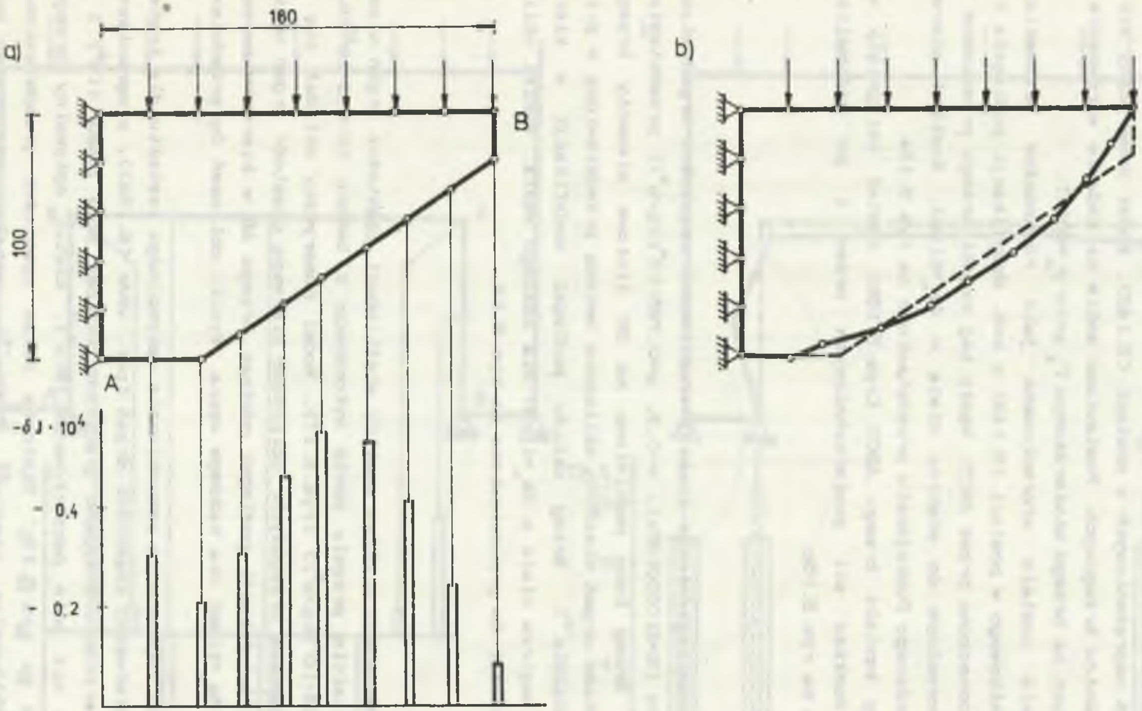
Problem analizy wrażliwości był rozpatrywany dla ograniczeń przemieszczeniowych opisanych zależnością (5.129). Przyjęto, że pionowe przemieszczenia obciążonego brzegu stalowego wspornika (E=210000[MPa], ν=0,3) (rys.5.14) nie powinny przekraczać wartości dopuszczalnej u_o=0,5[mm]. Problem ten został zastąpiony przez minimalizację funkcjonału J_o wyrażonego zależnością (5.134), gdzie $\varkappa$=100. Część brzegu AB była modyfikowana w ten sposób, że węzły brzegowe ulegały kolejno przesunięciu w kierunku normalnym na zewnątrz o δa_n=1[mm] Rozkład wariacji funkcjonału przedstawiono na rys.5.14a. Wyniki obliczeń wskazują, że największy wpływ na zmianę przemieszczeń brzegu obciążonego ma modyfikacja środkowej części brzegu AB.

Rozpatrywano także zagadnienie optymalizacji brzegu AB minimalizując funkcjonał (5.134) przy ograniczeniu na stałe pole. Ostateczna postać brzegu (rys.5.14b) została osiągnięta w 8 iteracjach i przemieszczenia wszystkich węzłów brzegu obciążonego były mniejsze niż 0,5[mm].



Rys. 5.13 Analiza wrażliwości i optymalne kształtowanie stopy

Fig. 5.13 Shape sensitivity analysis and optimal design of a column footing



Rys. 5.14 Analiza wrażliwości i optymalne kształtowanie wspornika

Fig. 5.14 Shape sensitivity analysis and optimal design of a bracket

Przykład 5.4

Zagadnienie analizy wrażliwości i optymalizacji kształtu układu w postaci stalowej ramy mostowej, przedstawionej na rys. 5.15a, było badane dla ograniczeń naprężeniowych w postaci (5.142). Model numeryczny składał się z 35 elementów brzegowych. Postawiono sobie za zadanie wyrównanie sił powierzchniowych na brzegu utwierdzonym Γ_1 przy p_o=90[N].

Zagadnienie zostało sformułowane jako równoważne minimalizacji funkcjonału całkowego w postaci (5.143) z $\varkappa$=6. Modyfikacji podlegała tylko część brzegu oznaczona przez ABCD. Węzły tej części brzegu przesuwane były w kierunku normalnym do wnętrza ciała o δa_n=1[mm]. Rozkład pierwszej wariacji rozważanego funkcjonału przedstawiono na rys.5.15a.

Optymalny kształt brzegu ABCD (rys.5.15b) został osiągnięty w 29 iteracjach. Rozkład sił powierzchniowych przed i po optymalizacji przedstawiono na rys.5.15c.

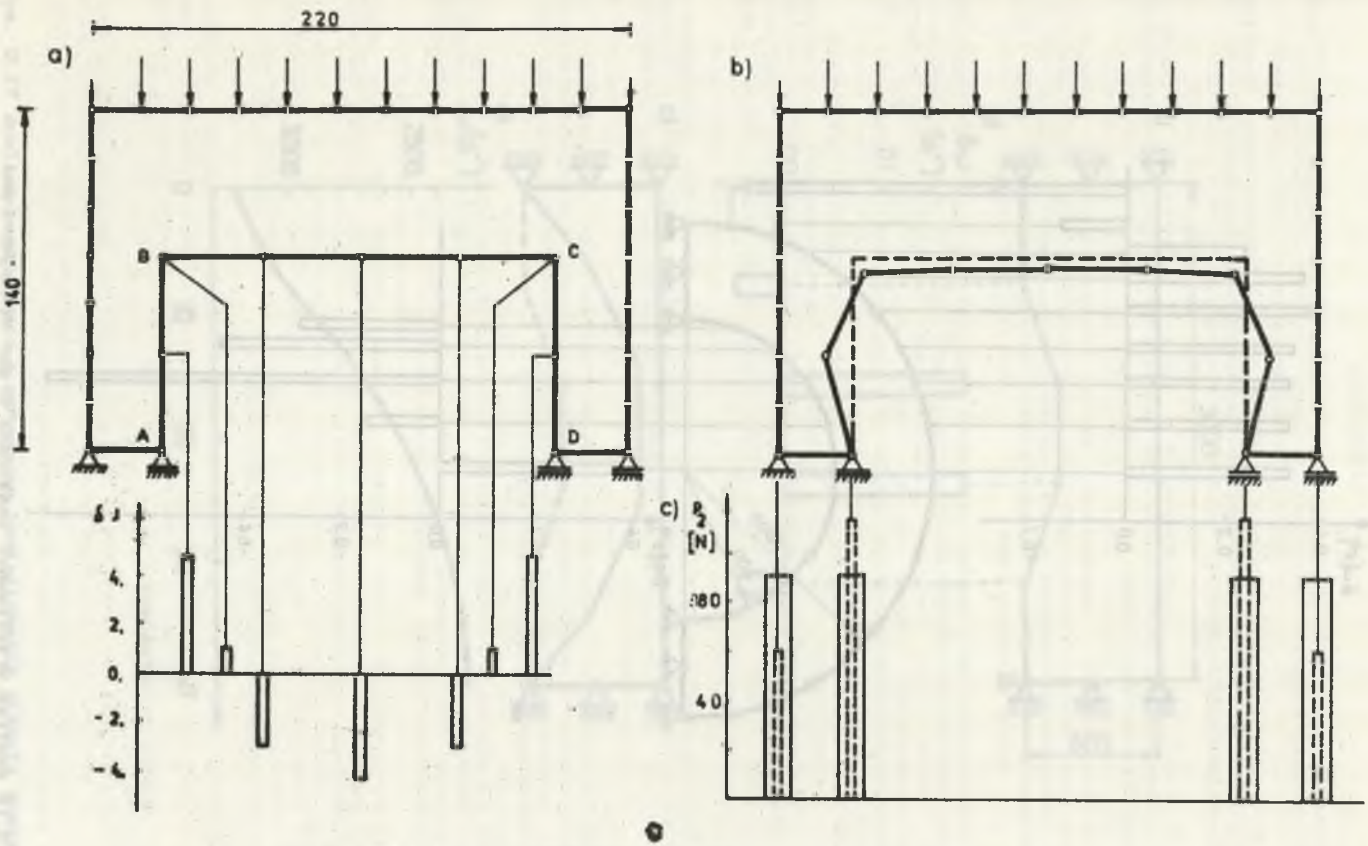
Przykład 5.5

Rozpatrzono zagadnienie analizy wrażliwości częstości drgań własnych stalowego łuku (E=210000[MPa], ν=0,3, ρ=0,786$\cdot 10^4$[kg/m^3]) przedstawionego na rys.5.16. Brzeg łuku podzielono na 32 liniowe elementy brzegowe. Pierwsza częstość drgań własnych obliczona metodą przedstawioną w p.1.3.5 wynosiła ω_o=3435[s^{-1}]. Brzeg układu podlegał modyfikacji w kierunku normalnym do wnętrza ciała o δa_n=1[mm] dla każdego węzła. Wyniki obliczeń wariacji częstości $\delta\omega$ przedstawiono na rys.5.16.

Przykład 5.6

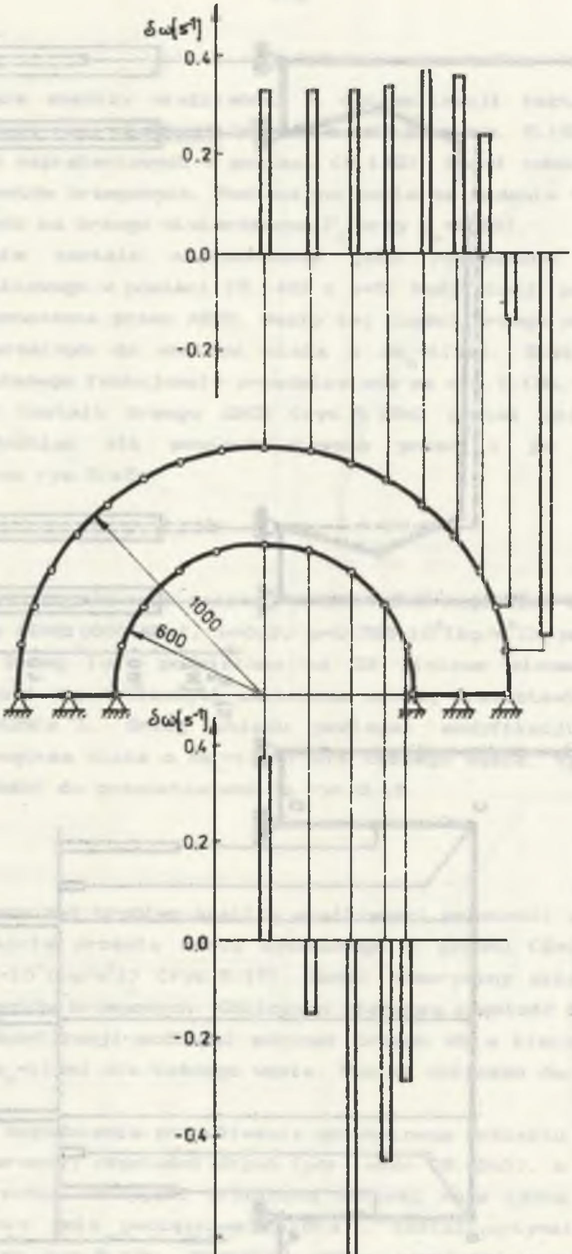
Rozpatrywany był problem analizy wrażliwosci częstości drgań własnych układu w kształcie przęsła mostu wykonanego z betonu (E=0,3$\cdot 10^{11}$[N/m^2], ν=0,17, ρ=0,18$\cdot 10^4$[kg/m^3]) (rys.5.17). Model numeryczny składał się z 14 liniowych elementów brzegowych. Obliczono pierwszą częstość drgań własnych ω_o=1789[s^{-1}]. Modyfikacji podlegał odcinek brzegu AB w kierunku normalnym do wnętrza o δa_n=1[mm] dla każdego węzła. Wyniki obliczeń $\delta\omega$ przedstawiono na rys.5.17b.

Rozważono zagadnienie poszukiwania optymalnego kształtu dla kryterium maksymalnej pierwszej częstości drgań (por. wzór (5.154)), z ograniczeniem na pole powierzchni. Przyjęto graniczną wartość pola równą 1[m^2] i była ona mniejsza niż pole początkowe 2,16[m^2]. Kształ optymalny brzegu AB przedstawiono na rys.5.17c. Historię zmian częstości przedstawiono na rys.5.17d. Maksymalna częstość 2709[s^{-1}] została osiągnięta po 40 iteracjach.



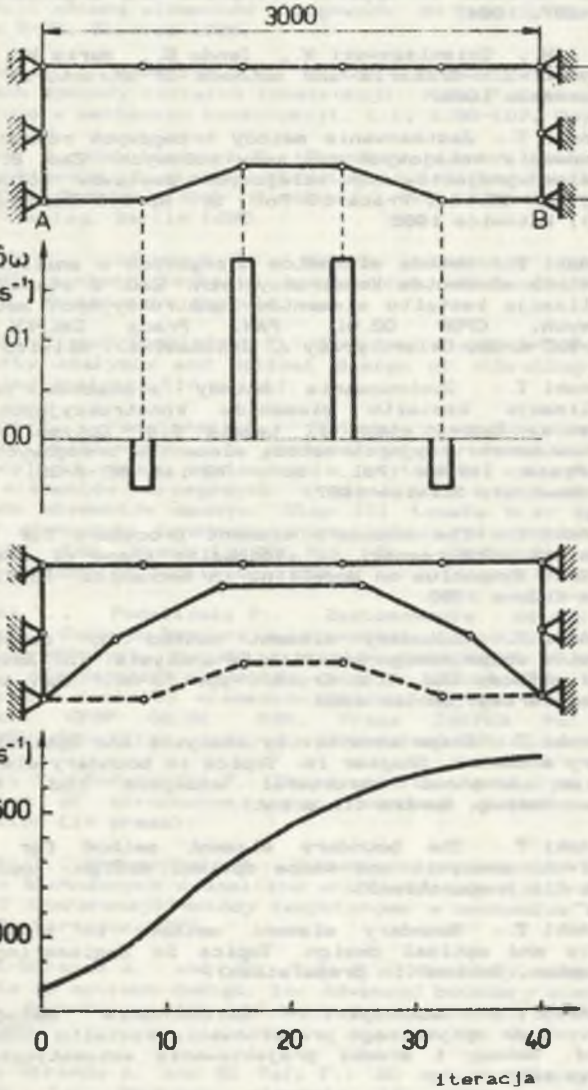
Rys. 5.15 Analiza wrażliwości i optymalne kształtowanie ramy

Fig. 5.15 Shape sensitivity analysis and optimal design of a frame



Rys. 5.16 Analiza wrażliwości częstości drgań własnych łuku

Fig. 5.16 Shape sensitivity analysis of natural frequency for an arch



Rys. 5.17 Analiza wrażliwości i optymalne kształtowanie przęsła mostu

Fig. 5.17 Shape sensitivity analysis and optimal design of a bridge span

LITERATURA

[5.1] Baniczuk N.W.: Wwiedienije w optimizacyju konstrukcyj. Nauka, Moskwa 1986.

[5.2] Braibant V. and Fleury C.: Shape optimal design using B-splines. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 44, pp.247-267, 1984.

[5.3] Brandt A.M., Dzieniszewski W., Jendo S., Marks W., Owczarek S., Wasiutyński Z.: Criteria and methods of structural optimization. PWN, Warszawa 1984.

[5.4] Burczyński T.: Zastosowanie metody brzegowych równań całkowych do konstruowania kolejowych zestawów kołowych. Zad. 2.5 tematu 1.5: Racjonalne projektowanie kolejowych zestawów kołowych, Problem węzłowy PAN 05.12., Praca IT Pol. Śl. NB-305/RMK/81, (kier. pracy R. Bąk), Katowice 1985.

[5.5] Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych w analizie wrażliwości sprężystych elementów konstrukcyjnych. Zad. 2 etapu I tematu 6.4: Optymalizacja kształtu elementów konstrukcyjnych metodą elementów brzegowych, CPBP 02.01. PAN, Praca IMiPKM Pol. Śl., NB-148/RMT-4/86, (kier. pracy A. Jakubowicz), Gliwice 1986.

[5.6] Burczyński T.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do optymalizacji kształtu elementów konstrukcyjnych obciążonych statycznie. Zad. 1 etapu II tematu 6.4: Optymalizacja kształtu elementów konstrukcyjnych metodą elementów brzegowych, CPBP 02.01. PAN, Praca IMiPKM Pol. Śl., NB-148/RMT-4/86, (kier. pracy A. Jakubowicz), Gliwice 1987.

[5.7] Burczyński T.: The boundary element procedure for dependence of eigenvalues with respect to stochastic shape of elastic systems. Proc. 25th Symposium on Modelling in Mechanics, PTMTS, pp.235-238, Gliwice-Kudowa 1986.

[5.8] Burczyński T.: Boundary element method for deterministic and stochastic shape design sensitivity analysis. In: Advanced boundary element methods (Ed. T.A. Cruse), pp. 73-80, San Antonio, Texas, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[5.9] Burczyński T.: Shape sensitivity analysis and optimal design using boundary elements. Chapter in: Topics in boundary element research, Vol. on Advanced structural analysis (Ed. C.A. Brebbia), Springer-Verlag, Berlin (in print).

[5.10] Burczyński T.: The boundary element method for shape design sensitivity analysis and shape optimal design. Applied Mechanics Reviews (in preparation).

[5.11] Burczyński T.: Boundary element methods in shape sensitivity analysis and optimal design. Topics in Engineering Series, CMP Southampton, Boston (in preparation).

[5.12] Burczyński T., Adamczyk T.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do optymalnego projektowania kształtu konstrukcji. Mat. IV Konf. Metody i środki projektowania automatycznego, s.83-92, Warszawa 1983.

[5.13] Burczyński T., Adamczyk T.: Wieloparametrowa optymalizacja kształtu przekroju poprzecznego pręta skręcanego przy zastosowaniu metody elementów brzegowych. Zb. ref. 23 Sympozjonu PTMTS Modelowanie w mechanice, s.37-44, Gliwice-Szczyrk 1984.

[5.14] Burczyński T., Adamczyk T.: The boundary element formulation for multiparameter structural shape optimization. Applied Mathematical Modelling, Vol. 9, No 3, pp.195-200, 1985.

[5.15] Burczyński T., Adamczyk T.: Generowanie optymalnego kształtu konstrukcji metodą elementów brzegowych. ZN Pol. Śl., s. Mechanika, nr 82, s.5-22, Gliwice 1985.

[5.16] Burczyński T., Adamczyk T.: Metoda elementów brzegowych w problemach syntezy kształtu konstrukcji. Mat. 7 Konferencji Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, t.1, s.98-107, Gdynia 1985.

[5.17] Burczyński T. and Adamczyk T.: Boundary element method for shape design synthesis of elastic structures. In: Boundary elements VII (Eds. C.A. Brebbia and G. Maier), Vol. II, pp.12/93-12/106, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[5.18] Burczyński T., Adamczyk T.: Metoda elementów brzegowych w problemach syntezy kształtu konstrukcji. Mechanika i komputer, t. 8, PWN, Warszawa (w druku).

[5.19] Burczyński T. and Fedeliński P.: Boundary elements in shape design sensitivity analysis and optimal design of vibrating structures. Engineering Analysis (in print).

[5.20] Burczyński T., Fedeliński P.: Metoda elementów brzegowych w analizie wrażliwości i optymalizacji kształtu elementów konstrukcyjnych przy zastosowaniu kryteriów wytrzymałościowych. Metoda elementów brzegowych w analizie wrażliwości kształtu drgających elementów maszyn. Etap III tematu 6.4: Optymalizacja kształtu elementów konstrukcyjnych metodą elementów brzegowych, CPBP 02.01. PAN, Praca IMiPKM Pol. Śl., NB-148/RMT-4/86, (kier. pracy A. Jakubowicz), Gliwice 1988.

[5.21] Burczyński T., Fedeliński P.: Zastosowanie metody elementów brzegowych i funkcji Beziera w optymalizacji postaci kosntrukcyjnej układów sprężystych. Metoda elementów brzegowych w optymalizacja kształtu drgających elementów maszyn. Etap IV tematu 6.4: Optymalizacja kształtu elementów konstrukcyjnych metodą elementów brzegowych, CPBP 02.01. PAN, Praca IMiPKM Pol. Śląskiej, NB-148/RMT-4/86, (kier. pracy A. Jakubowicz), Gliwice 1989.

[5.22] Burczyński T., Fedeliński P.: Shape sensitivity analysis of natural frequencies of structures using boundary elements. Structural Optimization (in press).

[5.23] Burczyński T., Mrówczyńska B.: Zastosowanie elementów brzegowych i elementów skończonych w analizie wrażliwości kształtu konstrukcji. Mat. VIII Konferencji Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, s.103-110, Warszawa 1987.

[5.24] Chaudouet-Miranda A. and El Yafi F.: Boundary element method applied to 3D optimum design. In: Advanced boundary element methods (Ed. T.A. Cruse), pp. 101-108, San Antonio, Texas, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[5.25] Chaudouet-Miranda A. and El Yafi F.: 3D optimum design using BEM technique. In: Boundary elements IX, (Eds. C.A. Brebbia, W.L. Wendland and G. Kuhn), Vol. II, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1987.

[5.26] Choi K.K. and Haug E.J.: Shape design sensitivity analysis of elastic structures. J. Struct. Mech., 11(2), pp.231-269, 1983.

[5.27] Choi J.H. and Kwak B.M.: Boundary integral equation method for shape design sensitivity analysis. Proc. NATO ASI on Computer aided optimal design (Ed. C.A. Mota Soares), Vol. 2, pp.186-214, Troia, Portugal, 1986.

[5.28] Defourny M.: Boundary element method and design optimization. In: Boundary elements IX, (Eds. C.A. Brebbia, W.L. Wendland and G. Kuhn), Vol.II, pp.463-472, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1987.

[5.29] Defourny M.: Optimization techniques and boundary element method. In: Boundary elements X, Vol. 3: Stress analysis, (Ed. C.A. Brebbia), pp.479-490, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[5.30] Dems K.: Wieloparametrowa optymalizacja kształtu konstrukcji. ZN Pol. Łódzkiej, nr 371, Rozprawy naukowe nr 29, Łódz 1980.

[5.31] Dems K.: Analiza wrażliwości dla konstrukcji obciążonej statycznie i dynamicznie. Sprawozdanie naukowe z pracy badawczej, Pol. Łódzka, Łódz 1985.

[5.32] Dems K. and Haftka R.T.: Two approaches to sensitivity analysis for shape variation of structures. Mechanics of Structures and Machines (in press).

[5.33] Dems K. and Mróz Z.: Multiparameter structural shape optimization by the finite element method. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol.13, pp.247-263, 1979.

[5.34] Dems K. and Mróz Z.: Optimal shape design of multicomposite structures. J. Struct. Mech., Vol. 8(3), pp.309-329, 1980

[5.35] Dems K. and Mróz Z.: Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis-II. Structure shape variation. Int. J. Solids Structures, Vol. 20, No 6, pp.527-552, 1984.

[5.36] Dems K. and Mróz Z.: Variational approach to sensitivity analysis in thermoelasticity. J. of Thermal Stresses, Vol. 10, pp.283-306, 1987.

[5.37] Eizadian D. and Trompette M.: Shape of bidimensional structures by the boundary element method. Proc.Conference on CAD/CAM, robotics and automation in design, Tuscon, Arizona, 1985.

[5.38] Fedeliński P. and Burczyński T.: Shape sensitivity analysis of eigenvalues using boundary elements. Proc. 13 Symposium on vibrations in physical systems, pp.77-78. Poznań-Błażejewko 1988.

[5.39] Fedeliński P. and Burczyński T.: The boundary element method for shape design sensitivity analysis of natural frequencies. Prac. Nauk. Inst. Konstrukcji i Ekspl. Maszyn Pol. Wroc., nr 55, s.138-141, Wrocław 1988.

[5.40] Fedeliński P. and Burczyński T.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do analizy wpływu kształtu na częstości drgań własnych układu. ZN Pol. Śl., s. Mechanika, Nr 91, s.57-63, Gliwice 1989.

[5.41] Fedeliński P. and Burczyński T.: The boundary element method for shape design sensitivity analysis and optimal design of vibrating structural elements. Mat. IX Konf. Metody komputerowe w mechanice, t. I, s.227-234, Kraków 1989.

[5.42] Grabacki J.: Sterowanie więzami ciała odkształcalnego. Roz.6 w:

Sterowanie w mechanice, Mat. PTMTS, Warszawa 1985.

[5.43] Grabacki J.: Analiza wrażliwości w problemach kontaktowych z więzami jednostronnymi. Zb. ref. 27 Sympozjonu PTMTS Modelowanie w mechanice, s.185-190, Gliwice-Wisła 1988.

[5.44] Gracia L. and Doblare M.: Shape optimization by using BEM. In: Boundary elements X, Vol. 3: Stress analysis, (Ed. C.A. Brebbia), pp.491-514, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[5.45] Haug E.J.: A gradient projecton method for structural optimization. In: Optimization of distributed parameter structures (Eds. E.J. Haug and J. Cea), pp.446-473, Sijthoff and Noordhoff, Aphen aan den Rijn, Netherlands 1981.

[5.46] Haug E.J., Choi K.K., Hou J.W. and Yoo Y.M.: A variational method for shape optimal design of elastic structures. Proc. Int. Symp. on Optimum structural design, Tuscon, Arisona 1981.

[5.47] Haug E.J., Choi K.K. and Komkov V.: Design sensitivity analysis of structural systems. Academic Press, New York 1986.

[5.48] Kamiya N. and Kita E.: Shape optimization by coupled finite and boundary elements. In: Boundary elements IX, (Eds. C.A. Brebbia, W.L. Wendland and G. Kuhn), Vol.II, pp.473-482, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1987.

[5.49] Kamiya N., Nagai T. and Abe J.: Design boundary elements. In: BETECH 87, (Eds. C.A. Brebbia and W.S. Venturini), CMP, 1987.

[5.50] Kane J.H.: Shape optimization utilizing a boundary element formulation. In: BETECH 86, (Eds. J.J. Connor and C.A. Brebbia), pp.781-803, MIT, Cambridge, CMP, 1986.

[5.51] Kane J.H. and Saigal S.: Design sensitivity analysis of solids BEM. J. Engineering Mechaqnics, Vol. 114, pp.1703-1722, 1989.

[5.52] Kelly D.W., Morris A.J., Bartholomew P. and Stafford R.O.: A review of techniques for automated structural design. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 12(2), pp.219-242, 1987.

[5.53] Kirsch U.: Optimum structural design. McGraw-Hill, New York, 1981.

[5.54] Krzesiński G.: Zagadnienia optymalizacji kształtu dwuwymiarowych konstrukcji sprężystych za pomocą metody elementów brzegowych. Mat. IX Konf. Metody komputerowe w mechanice, t.II, s.587-594, Kraków 1989.

[5.55] Meric R.A.: Boundary elements in shape design sensitivity analysis of thermoelastic solids. Proc. NATO ASI on Computer aided optimal design (Ed. C.A. Mota Soares), Vol. 2, pp.215-227, Troia, Portugal 1986.

[5.56] Meric R.A.: Shape design sensitivity analysis for non-linear anisotropic heat conducting solids and shape optimization by the BEM. Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.26, pp.109-120, 1988.

[5.57] Miyamato Y., Iwasaki S. and Sugimoto H.: On study of shape optimization o 2-dimensional elastic bodies by BEM. In: Boundary elements VIII (Eds. C.A. Brebbia and M. Tanaka), Springer-Verlag, Berlin 1986.

[5.58] Mota Soares C.A. and Choi K.K.: Boundary elements in shape optimal design of structures. In: The optimum shape-automated structural design (Eds. J.A. Bennet and M.E. Botkin), Plenum Press, pp.199-236, New York and London 1986.

[5.59] Mota Soares C.A. and Choi K.K.: Boundary elements in shape optimal design of structures. Proc. NATO ASI on Computer aided optimal design (Ed. C.A. Mota Soares), Vol. 2, pp.145-185, Troia, Portugal 1986.

[5.60] Mota Soares C.A., Rodrigues L.M., Oliveira Faria L.M. and Haug E.J.: Optimization of shape of solid and hollow shafts using boundary elements. In: Boundary elements (Ed. C.A. Brebbia), pp.883-889, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[5.61] Mota Soares C.A., Rodrigues L.M., Oliveira Faria L.M., and Haug E.J.: Optimization of of the geometry of shafts using boundary elements. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 106, pp.199-203, 1984.

[5.62] Mota Soares C.A., Rodrigues L.M., Oliveira Faria L.M. and Haug E.J.: Boundary elements in shape optimal design of shafts. In: Optimization in computer design (Ed. J.S. Gero), North-Holland, pp.155-175, 1985.

[5.63] Mota Soares C.A., Rodrigues L.M. and Choi K.K.: Shape optimal structural design using boundary elements and minimum compliance techniques. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 106, pp.518-523, 1984.

[5.64] Mróz Z.: Variational approach to shape sesnsitivity analysis and optimal design. In: The optimum shape-automated structural design (Eds. J.A. Bennet and M.E. Botkin), Plenum Press, pp.79-105, New York and London 1986.

[5.65] Pshenichny B.N. and Danilin Ju.M.: Numerical methods in extremal problems. Mir Publishers, Moscow 1978.

[5.66] Rousselet B., and Haug E.J.: Design sensitivity analysis in structural mechanics, III, Effect of shape variation. J. Struct. Mech. 10(3), pp.273-310, 1982-83.

[5.67] Sandgren E. and Wu S.J.: Shape optimization using the boundary element method with substructuring. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol.26, No.9, pp.1913-1924, 1988.

[5.68] Szefer G.: Analiza wrażliwości i optymalizacja układów dynamicznych z rozłożonymi parametrani. Kwartalnik AGH, s. Mechanika, t.1, z. 4, s.5-36, Kraków 1983.

[5.69] Vanderplaats G.N.: Numerical optimization techniques for engineering design: with application. McGraw-Hill, New York 1984.

[5.70] Venkayya V.B.: Structural optimization: a reviev and some recommendations. Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol.13, pp.203-228, 1978.

[5.71] Wilczyński B.: Optimum hole shape in plates modelled by boundary elements. Proc. 5th Congress Mechanics, Varna, pp.26-31, 1985.

[5.72] Wilczyński B.: Optymalizacja kształtu tarcz. Mat. IX Konf. Metody komputerowe w mechanice, s.1125-1132, Kraków 1989.

[5.73] Zhao Z. and Adey R.A.: Shape design sensitivity analysis using the boundary element method. In: Boundary elements X, Vol. 3: Stress analysis, (Ed. C.A.Brebbia), pp.515-531, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[5.74] Zolesio J.P.: The material derivative (or speed) method for shape optimization. In: Optimization of distributed parameter structures (Eds. E.J. Haug and J. Cea), pp.1089-1151, Sijthoff and Noordhoff, Aphen aan den Rijn, Netherlands 1981.

[5.75] Żochowski A. and Mizukami K.: A comparison of BEM and FEM in minimum weight design. In: Boundary elements (Ed. C.A. Brebbia), pp.901-911, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[5.76] Żochowski A.: Shape optimization in two-dimensional elasticity. In: Constructive aspects of optimization (Eds. K. Malanowski and K. Mizukami), pp. 183-218, PWN, Warszawa 1985.

6. UWAGI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono zastosowanie metody elementów brzegowych w wybranych problemach *analizy*, *analizy wrażliwości* i *optymalizacji* odkształcalnych układów mechanicznych.

W rozdziale 1, który pełni rolę wprowadzenia do metody elementów brzegowych, przedstawiono sposób formułowania brzegowych równań całkowych zadań brzegowych i brzegowo-początkowych teorii sprężystości oraz ich dyskretyzację skończenie wymiarową.

Rozdziały następne, tzn. 2, 3, 4 i 5, oparte są na oryginalnych pracach własnych i dotyczą zastosowania metody elementów brzegowych do następujących zagadnień:

1) Dynamika nieliniowych układów odkształcalnych z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznych, fizycznych i nieliniowych warunków brzegowych. Jest to próba ogólnego sformułowania problemów nieliniowych dynamiki ośrodka ciągłego w opisie całkowym. Przedmiotem rozważań są trójwymiarowe zagadnienia dynamiczne przedstawione w opisane materialnym i przestrzennym.

3) Kontakt układów trójwymiarowych i obrotowo-symetryczne połączenia wtłaczane z uwzględnieniem tarcia w strefie styku. Jest to próba uogólnienia wcześniejszych prac dotyczących kontaktu dwuwymiarowego.

4) Stochastyczne zagadnienia statyczne i dynamiczne z uwględnieniem losowych obciążeń, losowych własności materiału i stochastycznego kształtu brzegu. Jest to próba stworzenia tzw. *stochastycznej metody elementów brzegowych*, która umożliwia analizowanie ciągłych układów mechanicznych w warunkach niepewności.

5) Analiza wrażliwości uwzględniająca wariację brzegów zewnętrznych i wewnętrznych (w przypadku ciał przedziałami niejednorodnych) obciążonych statycznie i dynamicznie. Jest to nowa dziedzina zastosowań metody umożliwiająca efektywne badanie wpływu zmian geometrycznej postaci konstrukcyjnej na charakterystyki mechaniczne (statyczne i dynamiczne) układów odkształcalnych.

6) Optymalizacja postaci konstrukcyjnej układów pracujących w warunkach statycznych i dynamicznych. Jest to także nowy obszar zastosowań metody umożliwijący optymalne kształtowanie przy różnych kryteriach optymalizcji.

Prezentacja powyższych zagadnień, będąca rezultatem prowadzonych badań własnych, miała na celu rozwinięcie i uogólnienie dotychczasowych zastosowań metody do zagadnień nieliniowych i kontaktowych oraz zastosowanie do nowych dziedzin, takich jak zagadnienia stochastyczne, analiza wrażliwości i optymalizacja postaci konstrukcyjnej. Jest to także, wg rozeznania autora, pierwsza próba jednoczesnego i spójnego przedstawienia zagadnień analizy i syntezy odkształcalnych układów mechanicznych w ujęciu metody elementów brzegowych.

Charakteryzując zastosowanie metody do wymienionych zagadnień warto zwrócić uwagę na następujące jej cechy:

- w zagadnieniach nieliniowych geometrycznie i fizycznie, rozwiązywanych metodami przyrostowymi, niewiadome, podobnie jak w problemach liniowych, występują tylko na brzegu, z tym że w każdym kroku iteracji należy wyznaczyć pole odkształceń lub naprężeń wewnątrz ciała stosując podział obszaru na komórki wewnętrzne. W zagadnieniach dynamicznych z uwagi na nieliniowe zachowanie się ośrodka możliwy jest tylko opis w dziedzinie czasu (a nie w dziedzinie transformat całkowych) i do rozwiązania problemu zaproponowano metodę kroków czasowych,
- metoda szczególnie nadaje się do zagadnień kontaktowych, ponieważ wszystkie niewiadome potrzebne do rozwiązania zagadnienia znajdują się na powierzchniach kontaktujących się ciał. Wyraźna korzyść wypływa z zastosowania metody do ciał o obrotowej symetrii. Uwzględnienie tarcia między kontaktującymi się powierzchniami wymaga zastosowania metod przyrostowych,
- w rozwiązywaniu stochastycznych zagadnień dynamiki układów sprężystych oraz dynamiki i quasi-statyki układów lepko-sprężystych nie ma potrzeby odwracania transformat całkowych Fouriera, jeśli do opisu zachowania się układów stosowane są charakterystyki spektralne procesów losowych w postaci gęstości widmowych. Jest to niewątpliwa zaleta zapropnowanego sposobu rozwiązania tej klasy zagadnień,
- metoda szczególnie nadaje się do zagadnień, w których brzeg ma naturę stochastyczną, ponieważ losowa wariacja brzegu jest uwzględniania bezpośrednio w całkowo-brzegowym wyrażeniu na fluktuację zmiennych stanu, np. częstości drgań własnych,
- analiza wrażliwości dowolnego funkcjonału, opisującego kryterium optymalizacji lub warunki ograniczające, prowadzi do wyrażenia w postaci całki brzegowej zależnej od brzegowych zmiennych stanu układu podstawowego i układu sprzężonego,
- dyskretyzacja całek brzegowych wrażliwości elementami brzegowymi umożliwia numeryczne określenie gradientu funkcjonału jakości i warunków ograniczających,
- w iteracyjnym procesie optymalizacji postaci konstrukcyjnej niewiadome występują tylko na modyfikowanym brzegu.

Przedstawiony w pracy tok postępowania, opierający się na sekwencyjno-iteracyjnym rozwiązywaniu kolejnych zagadnień analizy, analizy wrażliwości i optymalizacji, stanowi podstawę procesu syntezy postaci konstrukcyjnej układów odkształcalnych.

W pracy starano się wykazać, ze metoda elementów brzegowych może być użyteczną techniką numeryczną w rozwiązywaniu wielu zagadnień z zakresu analizy i syntezy układów odkształcalnych. Charakteryzując zastosowanie metody do wymienionych zagadnień warto zwrócić uwagę na następujące jej wady i zalety:

Zalety metody elementów brzegowych:

1) Jest to ogólna metoda numeryczna o szerokich zastosowaniach w mechanice. Metoda ma ugruntowane podstawy matematyczne i jest efektywnym narzędziem numerycznym. MEB może być stosowana zarówno do zagadnień deterministycznych, jak i stochastycznych, liniowych i nieliniowych (w tym drugim przypadku pod warunkiem, że zagadnienie może być aproksymowane jako przyrostowo-liniowe).
2) Metoda wymaga zwykle dyskretyzacji brzegu ciała, a nie jego wnętrza, jak to jest w innych metodach numerycznych, np. w MES lub MRS. Ta redukcja wymiaru zadania o jeden rząd przyczynia się do ułatwienia przygotowywania danych wejściowych i prowadzi do układu równań algebraicznych znacznie mniejszego niż przy MES lub MRS.
3) Przy tym samym poziomie dyskretyzacji co MES, metoda daje zwykle dokładniejsze wyniki obliczeń, co jest szczególnie ważne w problemach z dużymi gradientami naprężeń. Dokładność ta może znacznie się zwiększyć w wyniku zastosowania specjalnych elementów brzegowych i specjalnych technik całkowania.
4) Zastosowanie osobliwych rozwiązań fundamentalnych lub funkcji Greena powoduje możliwość rozpatrywania zagadnień dla obszarów nieskończonych lub półnieskończonych bez potrzeby wprowadzania sztucznych granic jak to występuje w MES.
5) Powyższe zalety MEB nad MES są szczególnie widoczne w trójwymiarowych problemach liniowych (szczególnie dla nieograniczonych lub półograniczonych ośrodków jednorodnych i izotropowych).
6) MEB umożliwia obliczanie nieznanych wielkości wewnątrz obszaru bez potrzeby dyskretyzacji tego obszaru i tylko w tych punktach, w których te wielkości nas interesują.
7) MEB może być zastosowana do budowania macierzy sztywności dla jednorodnych bardzo dużych (także nieskończonych) elementów skończonych (tzw. superelementów), co powoduje radykalną redukcję liczby niewiadomych w sformułowaniu za pomocą MES.

Wady metody elementów brzegowych:

1) W wyniku aproksymacji skończenie wymiarowej brzegowych równań całkowych otrzymuje się układ równań algebraicznych z pełną i niesymetryczną macierzą współczynników. Obiecującym kierunkiem rozwoju metody wydaje się być sformułowanie symetryczne.
2) Jest niezmiernie trudne lub często nawet niemożliwe otrzymanie rozwiązania fundamentalnego dla niektórych zagadnień, takich jak np. anizotropia, niejednorodność. Problemy takie można rozwiązać za pomocą MEB, ale należy stosować przybliżone rozwiązania podstawowe z jednoczesnym iteracyjnym ujęciem.

3) MEB jest nieefektywna dla ciał, w których jeden lub dwa wymiary są małe w stosunku do pozostałych. Podobne trudności występują także dla powłok.

4) Istnienie sił objętościowych o znanym rozkładzie (w zagadnieniach liniowych), pseudo-sił w przyrostowym ujęciu zagadnień nieliniowych lub członów objętościowych zależnych od niejednorodności stochastycznych ośrodka powoduje pojawienie się całek objętościowych, których obliczenie wymaga dyskretyzacji obszaru, jakie zajmuje ciało. Jednakże całkowanie to jest prostsze niż w MES i może być ograniczone tylko do części obszaru, w którym te siły występują. Nie prowadzi to także do zwiększenia rzędu końcowego układu równań algebraicznych.

5) Jest niewiele ogólnych profesjonalnych programów i systemów komputerowych MEB w porównaniu z MES. Jest to sytuacja przejściowa, ponieważ nad programami pracuje wiele renomowanych ośrodków.

Wydaje się, że MEB i MES można uznać za metody komplementarne w tym sensie, że ich wady i zalety wzajemnie się kompensują. Intensywne prace nad połączeniem obu metod powoduje powstanie technik hybrydowych, które łączą zalety obu metod.

Metoda elementów brzegowych jest w ciągłym rozwoju i znajduje zastosowanie w rozwiązywaniu coraz to nowych problemów fizycznych. Szczególnie interesująca wydaje się kontynuacja przedstawionych w pracy problemów w dwóch kierunkach.

Pierwszy kierunek to dalszy rozwój stochastycznej metody elementów brzegowych z jednoczesnym uwzględnieniem nieliniowości fizycznych i geometrycznych. Jest to ogólny przypadek własności ośrodka, a możliwość jednoczesnego analizowania nieliniowych i stochastycznych własności materiału wynika ze stosowania takiej samej procedury postępowania, która powoduje, że nieliniowe i losowe aspekty są uwzględnione w członach objętościowych brzegowych równań całkowych. Numeryczne rozwiązanie tak ogólnie postawionego problemu, wymaga, co prawda, dyskretyzacji obszaru gdzie występują nieliniowości i losowe niejednorodności materiału, ale nie zwiększa to wymiaru końcowego układu równań algebraicznych.

Drugi kierunek badań obejmuje zagadnienia analizy wrażliwości problemów osobliwych i quasi-osobliwych, w których wariacja brzegu jest funkcją nieciągłą i ma postać szczeliny lub karbu ostrokątnego. Jest to technicznie bardzo ważna klasa zagadnień umożliwiająca analizę wrażliwości elementów maszyn przy występowaniu pęknięć. Metoda elementów brzegowych szczególnie nadaje się do rozwiązywania tych problemów, ponieważ w sposób naturalny radzi sobie z osobliwościami na brzegu i umożliwia precyzyjne obliczenie naprężeń przy dużych gradientach naprężeń.

Przedstawiona w pracy problematyka i zarysowane kierunki rozwoju nie obejmują, oczywiście, wszystkich możliwych zastosowań MEB. Wiele ważnych i interesujących zastosowań metody wiąże się z takimi dziedzinami, jak mechanika zniszczenia, problemy termo-mechaniczne oraz zagadnienia związane z adaptacyjnym ujęciem metody.

DODATEK

Wykaz prac monograficznych i specjalistycznych, serii wydawniczych i materiałów konferencji naukowych poświęconych metodzie elementów brzegowych

A. Prace monograficzne i specjalistyczne

[1] Antes H.: Anwendung der Randelementmethode in der Elasto- und Fluiddynamik. Teubner-Verlag, Stuttgart 1987.

[2] Bakr A.A.: The Boundary Integral Equation Method in Axisymmetric Stress Analysis Problems. Lecture Notes in Engineering, Springer-Verlag, Berlin 1986.

[3] Banerjee P.K. and Butterfield R.: Boundary Element Methods in Engineering Science. McGraw-Hill, London 1981.

[4] Bausinger R. and Kuhn G.: Boundary Element Methode - Theorie und Industrielle Anwendung . Expert Verlag, Stuttgart 1987.

[5] Beskos D.E.(Ed.): Boundary Element Methods in Mechanics. North-Holland, Amsterdam 1987.

[6] Brebbia C.A.: The Boundary Element Method for Engineers. Pentech Press, London 1978.

[7] Brebbia C.A. and Dominguez J.: Boundary Elements - An Introductory Course. CMP, Southampton, McGraw-Hill, New York 1989.

[8] Brebbia C.A., Telles J.C.F. and Wrobel L.C.: Boundary Element Techniques. Springer-Verlag, Berlin 1984.

[9] Brebbia C.A. and Walker S.: Boundary Element Techniques in Engineering. Newnes-Butterworths, London 1980.

[10] Burczyński T., Grabacki J., Orkisz J.: Metoda elementów brzegowych. Cz. IV. W: Komputerowe metody mechaniki ciał stałych (red. M.Kleiber), Mechanika Techniczna, Tom XI, PWN, Warszawa (w przygotowaniu).

[11] Burczyński T.: Boundary Element Methods in Shape Sensitivity Analysis and Optimal Design. Topics in Engineering Series. CMP, Southampton, Boston (in preparation).

[12] Crouch S.L. and Starfield A.M.: Boundary Element Methods in Solid Mechanics.George Allen and Unwin, London 1983.

[13] Cruse T.A.: Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics. Kluwert Academic Publishers, Dordrecht 1988.

[14] Gipson G.S.: Boundary Element Fundamentals. Topics in Engineering Series, Vol. 2, CMP, Southampton, Boston 1987.

[15] Hartmann F.: Methode der Randelemente. Boundary Elements in der Mechanik auf dem PC. Springer-Verlag, Berlin 1987.

[16] Herrera I.: Boundary Methods. An Algebraic Theory. Pitman Publ. Co., London 1984.

[17] Hromadka T.V.: The Complex Variable Boundary Element Method. Lecture Notes in Engineering, Springer-Verlag, Berlin 1984.

[18] Hromadka T.V. and Chintu L.: Complex Variable Boundary Element Method in Engineering Analysis. Springer-Verlag, Berlin 1987.

[19] Ingham D.B. and Kelmanson M.A.: Boundary Integral Equation Analyses of Singular, Potential, and Biharmonic Problems. Springer-Verlag, Berlin 1984.

[20] Jaswon M.A. and Symm G.T.: Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics. Academic Press, London 1977.

[21] Kitahara M: Boundary Integral Equation Methods in Eigenvalue Problems of Elastodynamics and Thin Plates. Elsever Science Publ., London 1986.

[22] Kupradze B.D.: Mietody potencyjała w tieorii uprugosti. Fizmatgiz, Moskwa 1963.

[23] Kupradze B.D. (red): Triechmiernyje zadaczi matiematiczeskoj tieorii uprugosti i termouprugosti. Nauka, Moskwa 1976.

[24] Lefeber D.: Solving Problems with Singularities using Boundary Elements. Topics in Engineering Series, Vol.4, CMP, Southampton, Boston 1988.

[25] Liggett J. and Liu P.L.F.: The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow. George Allen & Unvin, London 1983.

[26] Mackerle J. and Brebbia C.A.: The Boundary Element Reference Book. CMP, Southampton 1987.

[27] Manolis G.D. and Beskos D.E.: Boundary Element Methods in Elastodynamics. Unvin Hyman, 1988.

[28] Mukherjee S.: Boundary Element Methods in Creep and Fracture. Elsevier Applied Science Publishers, London 1982.

[29] Parton W.Z., Perlin P.N.: Intiegralnyje urawnienia tieorii uprugosti. Nauka, Moskwa 1977.

[30] Stain E. and Wendland W. (Eds.): Finite Element and Boundary Element Techniques from Mathematical and Engineering Point of View. CISM. Springer-Verlag, Berlin, N.Y. 1988.

[31] Tang W.: Transformation Domain into Boundary Integrals in BEM: Generalized Approach. Lecture Notes in Engineering. Springer-Verlag, Berlin 1988.

[32] Telles J.C.F.: The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems. Lecture Notes in Engineering, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[33] Ugodczikow A.G., Hutorjanskij N.M.: Mietod granicznych elemientow w miechanikie deformirujemogo twierdogo tiela. Izd Kazanskogo Uniwersiteta, Kazań 1986.

[34] Umetani S.: Adaptive Boundary Element Methods in Elastostatics. Topics in Engineering Series, CMP, Southampton, Boston 1987.

[35] Venturini W.S.: Boundary Element Method in Geomechanics. Springer-Verlag, Berlin 1983.

[36] Werjużskij J.W.: Czislennyje mietody potenjała w niekotorych zadaczach prikładnoj miechaniki. Wysszaja Szkoła, Kiew, 1978.

B. Serie wydawnicze

[37] Banerjee P.K. and Butterfield R. (Eds.): Developments in Boundary Element Method-1. Elsevier Applied Science Publishers, London 1979.

[38] Banerjee P.K. and Shaw R.P. (Eds.): Developments in Boundary Element Method-2. Elsevier Applied Science Publishers, London 1982.

[39] Banerjee P.K. and Mukherjee S. (Eds.): Developments in Boundary Element Method-3. Elsevier Applied Science Publishers, London 1984.

[40] Banerjee P.K. and Watson J.O. (Eds.): Developments in Boundary Element Method-4. Elsevier Applied Science Publishers, London 1986.

[41] Brebbia C.A. (Ed.): Progress in Boundary Element Methods, Vol.1, Pentech Press, London 1981.

[42] Brebbia C.A. (Ed.): Progress in Boundary Element Methods, Vol.2, Pentech Press, London 1983.

[43] Brebbia C.A. (Ed.): Topics in Boundary Element Research. Vol 1, Basic Principles and Applications. Springer-Verlag, Berlin 1984.

[44] Brebbia C.A. (Ed.): Topics in Boundary Element Research. Vol.2, Time-dependent and Vibration Problems. Springer-Verlag, Berlin 1985.

[45] Brebbia C.A. (Ed.): Topics in Boundary Element Research. Vol.3, Computational Aspects. Springer-Verlag, Berlin 1987.

[46] Brebbia C.A. (Ed.): Topics in Boundary Element Research. Vol.4, Applications in Geomechanics. Spinger-Verlag, Berlin 1987.

C. Materiały konferencyjne

[47] Brebbia C.A.(Ed.): Recent Advances in Boundary Element Methods. Proc. 1st Int. Seminar on Boundary Element Methods, Southampton University, Pentech Press, London 1978.

[48] Brebbia C.A.(Ed.): New Developments in Boundary Element Methods. Proc. 2nd Int. Seminar on Boundary Element Methods, Southampton University. CML Publications, Southampton 1980.

[49] Brebbia C.A.(Ed.): Boundary Element Methods.Proc. 3rd Int. Seminar on Boundary Element Methods, California. Springer-Verlag, Berlin 1981.

[50] Brebbia C.A.(Ed.): Boundary Element Methods in Engineering. Proc. 4th Int. Conference on Boundary Element Methods, Southampton University. Springer-Verlag, Berlin 1982.

[51] Brebbia C.A.(Ed.): Boundary Elements VI. Proc. 6th Int. Conference on Boundary Element Methods, on board the Queen Elizabeth II,Southampton-New York, Springer-Verlag, Berlin 1984.

[52] Brebbia C.A.: Boundary Elements X. Proc. 10th Int. Conference on BEM in Engineering, Southampton, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[53] Brebbia C.A. and Connor J,J.(Eds.): BETECH 86. Proc. 2nd Int. Conference on Boundary Element Technology, Cambridge MIT, USA, CML Publications, Southampton 1986.

[54] Brebbia C.A. and Connor J.J. (Eds.): Advances in Boundary Elements. Proc. 11th Int. Conference on Boundary Element Methods, Cambridge, USA, CMP, Springer-Verlag, Berlin 1989.

[55] Brebbia C.A., Futugami T. and Tanaka M.(Eds.): Boundary Elements V. Proc. 5th Int. Conference on Boundary Element Methods, Hiroshima. Springer-Verlag, Berlin 1983.

[56] Brebbia C.A. and Maier G.(Eds.): Boundary Elements VII. Proc. 7th Int. Conference, Como, Italia. Springer-Verlag, Berlin 1985.

[57] Brebbia C.A. and Noe J. (Eds.): BETECH 85.Proc. 1st Int. Conference on Boundary Element Technology,Adelaide. CML Publications, Southampton 1985.

[58] Brebbia C.A. and Tanaka M. (Eds.): Boundary Elements VIII. Proc. 8th Int. Conference, Tokyo, Japan. Springer-Verlag, Berlin 1986.

[59] Brebbia C.A. and Venturini W.S. (Eds.), Boundary Element Techniques. Proc. 3rd Int. Conference on BETECH'87 in Rio de Janeiro, CM Publications, Southamton 1987.

[60] Brebbia C.A., Wendland W.L. and Kuhn G.(Eds.): Boundary Elements IX. Proc. 9th Int. Conference, Stuttgart. Springer-Verlag, Berlin 1987.

[61] Brebbia C.A. and Zamani N.G. (Eds.): Boundary Element Techniques: Applications in Engineering. Proc. BETECH'89 in Windsor, Canada, CMP, Southampton 1989.

[62] Cruse T.A. (Ed.): Advanced Boundary Element Methods. Proc. IUTAM Symposium in San Antonio, Texas, USA, 1987, Springer-Verlag, Berlin 1988.

[63] Cruse T.A. and Rizzo F.J. (Eds.): Boundary-Integral Equation Method: Computational Applications in Applied Mechanics. ASME AMD11. Proc. Conference, Troy, New York 1975.

[64] Qinghua Du (Ed.): Boundary Elements. Proc. Int. Conference in Beijing, China, Pergamon Press, Oxford 1986.

[65] Tanaka M. and Cruse T.A. (Eds.): Boundary Element Methods in Applied Mechanics. Proc. 1st Joint Japan/USA Symp. on Boundary Element Methods. Pergamon Press, Oxford 1988.

[66] Tanaka M. and Qing Huadu (Eds.):Theory and Applications of Boundary Element Methods. Proc. 1st Japan/China Symposium in Karuizawa, Japan, Pergamon Press, Oxford 1987.

METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W WYBRANYCH ZAGADNIENIACH ANALIZY I OPTYMALIZACJI UKŁADÓW ODKSZTAŁCALNYCH

Streszczenie

W pracy przedstawiono zastosowanie metody elementów brzegowych do rozwiązywania wybranych zagadnień z zakresu analizy, analizy wrażliwości i optymalizacji postaci konstrukcyjnej układów odkształcalnych.

Omówiono podstawy metody elementów brzegowych na przykładzie zagadnień liniowych statycznej i dynamicznej teorii sprężystości.

Pokazano sposób formułowania dynamicznych problemów nieliniowych mechaniki ośrodków ciągłych w ujęciu metody elementów brzegowych, z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznych, nieliniowości fizycznych oraz nieliniowych warunków brzegowych.

Sformułowano zagadnienie kontaktu ciał przestrzennych i obrotowo-symetrycznych z uwzględnieniem zjawiska tarcia w strefie styku.

Przedstawiono zastosowanie metody elementów brzegowych do analizy stochastycznych zagadnień brzegowych, propagacji fal w ośrodkach stochastycznych oraz analizy częstosci drgań własnych układów sprężystych z losowym brzegiem.

Pokazano zastosowanie metody elementów brzegowych do zagadnień analizy wrażliwości i optymalizacji postaci konstrukcyjnej układów sprężystych poddanych obciążeniom statycznym i dynamicznym.

Pracę zilustrowano przykładami numerycznymi.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ИЗБРАННЫХ ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА И ОПТИМИЗАЦИИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Резюме

В настоящей работе представлено применение метода граничных элементов для решения избранных задач по анализу, анализу чувствительности и оптимизации конструкционной формы деформируемых систем.

Обсуждены основы метода граничных элементов на примере линейных задач статической и динамической теории упругости.

Указан способ формулирования динамических нелинейных задач механики сплошной среды с точки зрения метода граничных элементов, с учётом геометрических и физических нелинейностей а также нелинеяных граничных условий.

Сформулирован вопрос контакта пространственных и осесимметричных тел с учётом явления трения в зоне стыка.

Представлено применениение метода граничных элементов для анализа стохастических краевых задач, распространения волн в стохастических средах а также для анализа собственных значений систем со случайной границей.

Представлено применение метода граничных элементов для задач анализа чувствительности и оптимизации конструкционной формы упругих систем, подвергаемых статическим и динамическим нагрузкам.

Работа проиллюстрирована численными примерами.

THE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR SELECTED ANALYSIS AND OPTIMIZATION PROBLEMS OF DEFORMABLE SYSTEMS

Summary

The application of the boundary element method to solving selected analysis, shape sensitivity analysis and shape optimization problems of deformable systems is presented.

The foundations of the boundary element method for linear static and dynamic theory of elasticity is described.

The boundary element formulation of dynamic nonlinear problems for geometrical and physical nonlinearities and nonlinear boundary conditions is presented.

The three-dimensional and axisymmetric contact problems with friction are considered by means of the boundary element method

The applications of the boundary element method to stochastic boundary value problems, wave propagation in stochastic media and eigenvalue problems of elastic bodies with random boundaries are presented.

Shape sensitivity analysis and shape optimal design of elastic structures loaded statically and dynamically are considered.

Numerical implementations of described problems are presented.