ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: MECHANIKA z.103 Nr kol. 1112

Александр Шошитайшвили

Институт проблем управления

Профсоюзная, Москва, СССР

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МЕДЛЕЧНО МЕНЯЮЩЕГОСЯ МОМЕНТА

Резюме. На тело действует момент сил, меняющийся вдоль некоторой кривой $K \subset R^3$. Стабилизируются траектории, находящиеся в окрестности кривой $\omega(\mu)$ $(\mu \in K)$, состоящей из вращения $\omega(\mu)$, стационарных при действии постоянных моментов $\mu \in K$. Стабилизация осуществляется ветвящейся обратной связью u, где u корень уравнения $u^3 + \varphi_1(\omega - \omega(\mu))u + \varphi_0(\omega - \omega(\mu)) = 0$. В классе обычных обратных связей задача стабилизации не имеет решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим несимметричное твердое тело, вращение которого вокруг неподвижной точки описывается уравнением Эйлера

$$\Theta\dot{\omega} + \omega \times \Theta\omega = M + Bu, \tag{1}$$

где ω – вектор угловой скорости, Θ – тензор инерции, M – момент сил, приложенных к телу, u – управление, B –постоянная $3^{\times}m$ матрица.

Момент сил M медленно меняется во времени, описывая в R^3 некоторую гладкую кривую K. Причем для радиус-вектора μ любой точки этой кривой уравнение

$$\Theta\dot{\omega} + \omega^{\times}\Theta\omega = \mu \tag{2}$$

имеет удовлетворяющее соотношению

$$\omega^{\times}\Theta\omega = \mu \tag{3}$$

стационарное вращение $\omega(\mu)$, гладко зависящее от μ.

Задача стабилизации заключается в том, чтобы синтезировать управление u^*, при котором у кривой $\omega(\mu)$ $(\mu \in K)$ существуют окрестности $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset R^3$ такие, что $\omega(t) \in \Omega_1$ при $t \geq T$ для всякого решения $\omega(t)$ $(t \geq 0)$ системы $\Theta\dot{\omega} + \omega^{\times}\Theta\omega = M + Bu^*$ с начальным условием $\omega(0) \in \Omega_2$. Причем T не зависит от $\omega(0)$, а диаметр $\Delta = \max\limits_{\mu \in K} \min\limits_{\omega \in \Omega_1} \rho(\omega, \omega(\mu))$ (где $\rho(a,b)$ –

расстояние между точками a,b) окрестности Ω_1 зависит от скорости изменения M если эта скорость стремится к нулю, то и диаметр d стремится к нулю.

2. ИЗУЧЕНИЕ ЛИНЕАРИЗАЦИИ СИСТЕМЫ В ТОЧКЕ $\omega(\mu)$

Пусть e_1, e_2, e_3 - орты в R^3, направленные по осям инерции тела в неподвижной точке, а I_1, I_2, I_3 - соответствующие моменты инерции, $I_1<I_2<I_3$. Пусть $\mu = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3$, $\mu_1\mu_2\mu_3 < 0$, $(\mu \in K)$.
Тогда система (3) имеет два решения, каждое из которых гладко зависит от μ. Кривая $\omega(\mu)$ совпадает с одним из них. Рассмотрим вектор $\delta = \omega - \omega(\mu)$. В силу (1) он удовлетворяет системе уравнения

$$\dot\delta + \delta^{\times}\omega(M) + \omega(M)^{\times}\delta + \delta^{\times}\delta + v(t) = Bu \qquad (4)$$

где $v(t) = \omega(M(t))$.

Обозначим через $A(M)$ матрицу линейного отображения.

Теорема 1. Если пара $A(\mu)$, B управляема в смысле Калмана [1], то задача стабилизации разрешима для M, принадлежащих некоторой окрестности точки μ,. в классе управления

$$u^* = u_\mu(\delta). \qquad (5)$$

Пусть $u \in R^1$. В этом случае матрица в есть столбец $(b_1, b_2, b_3)'$('- знак транспонирования).

Теорема 3. Пусть в принадлежит некоторой достаточно малой окрестности столбца (0,0,1). Пусть для $\mu = M(0)$ и $\hat\mu = M(T)$ при некотором T>0 выполнены неравенства $\omega_1(\mu)\mu_2\mu_3 < 0$,

$(\mu_1^2(I_2-I_1) - \mu_3^2(I_3-I_2))(\hat\mu_1^2(I_2-I_1) - \hat\mu_3^2(I_3-I_2)) < 0$. Тогда на кривой K имеется точка μ^*, б окрестности которой не существует гладкой обратной связи, дающей решение задачи стабилизации.

3. СТАБИЛИЗИРУЮЩАЯ ВЕТВЯЩАЯСЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ

Пусть выполнены условия теоремы 3. Рассматривается окрестность точки μ^*. Стабилизирующей обратной связи (5) (даже и не гладкой) здесь может и не быть. Поэтому применяется метод ветвящегося управления [2]. А именно, строятся функции

$$u^* = u(\delta, j),\ \alpha(\delta, j) \qquad (j = 1,2,3,\quad (\delta, j) \in \Delta \subset R^3 \times \{1,2,3\}) \qquad (6)$$

такие, что у системы

$$\Theta\dot{\omega} + \omega \times \Theta\omega = M + Bu(\delta, j), \quad j(t) = \alpha(\delta(t)), j(t - 0)), \tag{7}$$

где: $\delta = \delta - \omega(M)$, при любых $(\delta^*, j^*) \in \Delta$ существует решение

$$(\omega(t), j(t) \in \Delta.$$

Здесь $\omega(t)$ – гладкая функция, $j(t)$ – кусочнопостоянная непрерывная справа функция, $\delta(0) = \delta^*$, $j(0) = \alpha(\delta^*, j^*)$. Для любого достаточно малого δ^* существует j^* такое, что $(\delta^*, j^*) \in \Delta$. Для любого решения $\omega(t), j(t)$ системы (7), где $\omega(0) \in \Omega_2$, точка $\omega(t, \alpha(\delta^*, j^*))$. Для любого достаточно малого δ^* обратная связь решает задачу [illegible]

Функции $u(\delta, j)(j = 1,2,3)$ являются решениями уравнения

$$u^3 + \varphi_2(\delta, M)u^2 + \varphi_1(\delta, M)u + \varphi_0(u, M) = 0, \tag{8}$$

где: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ – некоторые гладкие функции.

Точки (u, δ), удовлетворяющие соотношению (9), образуют интегральное многообразие системы

$$\Theta\dot{\omega} + \omega \times \Theta\omega = M + Bu, \quad \dot{u} = -u/4. \tag{9}$$

функция α строится по расположению траектории системы (9) на многообразии (8).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М. Мир, 1971.

[2] Шошитаишвили А.Н. Метод ветвящегося управления, 11 Всесоюзное совещание по проблемам управления, Ташкент, сентябрь 1989, Тезисы докладов, М., 1989, 25 – 26.

STABILIZACJA RUCHU CIAŁA SZTYWNEGO PORUSZAJĄCEGO SIĘ POD DZIAŁANIEM WOLNO ZMIENIAJĄCEGO SIĘ MOMENTU

S t r e s z c z e n i e

Na ciało działa moment sił zmieniający się według pewnej krzywej $K \subset R^3$. Stabilizuje się tor znajdujący się w zakresie krzywej $\omega(\mu)$ $(\mu \in K)$, składającej się z obrotów $\omega(\mu)$, stacjonarnych przy działaniu stałych momentów $\mu \in K$. W klasie zwyczajnych sprzężeń zwrotnych stabilizacja nie ma rozwiązania.

MOVEMENT'S STABILIZATION OF SOLID BODY, ROTATED BY SLOWLY VARYING MOMENT

S u m m a r y

The moment is acting on solid bodys. It is changing slowly along the curve $K \subset R^n$. The trajectories which are near the curve $\omega(\mu)$ $(\mu \in K)$, where $\omega(\mu)$ is stationary rotation under the action of constant moment μ, are stabilized. We make it by means of finite ramified feedback, because in the set of ordinary feedback this problem cannot be solved.