ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: MECHANIKA z.103 Nr kol. 1112

Andrzej Wawrzynek

Instytut Mechaniki Teoretycznej
Politechnika Śląska

MODELOWANIA PROCESU KRZEPNIĘCIA ODLEWU ZA POMOCĄ R-FUNKCJI

Streszczenie. W pracy opisano sposób modelowania procesu krzepnięcia odlewu za pomocą dotychczas rzadko stosowanej metody R-funkcji. Metoda ta pozwala uwzględnić w rozwiązaniu, w sposób ścisły, kształt brzegu i warunki na nim postawione.

1. WSTĘP

W latach 1960 - 1980 powstała i rozwinęła się teoria R-funkcji. Opublikowano cały szereg monografii poświęconych teorii i zastosowaniom funkcji Rvaceva w zagadnieniach mechaniki i teorii wymiany ciepła (por. [3],[4]).

Analityczno-numeryczna metoda oparta na pojęciu R-funkcji jest dwuetapowa. Na pierwszym, analitycznym etapie, należy wyprowadzić postać całego brzegu i poszczególnych jego części, na których zadano różne warunki brzegowe. Następnie tworzymy tzw. ogólną strukturę rozwiązania, czyli poszukujemy klasę funkcji spełniających na zadanym brzegu określone warunki brzegowe. Struktura ta w swej budowie zawiera nieznane współczynniki rozwinięcia poszukiwanej funkcji wewnątrz obszaru. Współczynniki te wyznaczamy na etapie drugim, np. poprzez wyznaczenie warunku stacjonarności odpowiedniego funkcjonału.

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Niech przekrój poprzeczny odlewu zajmuje obszar $\Omega = \Omega(x,y)$, zaś brzeg można podzielić na n części $\partial\Omega_i$ ($i = 1,2,...,n$) takich, że $\partial\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^{n} \partial\Omega_i$ i $\bigcap_{\alpha=1}^{n} \partial\Omega_i = \emptyset$.

Poszukiwać będziemy rozkładu temperatury $T = T(x,y,t)$ w odlewie, która musi spełniać następujące równanie

$$\lambda(T) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = c(T)\, \varrho(T) \frac{\partial T}{\partial t}, \qquad (1)$$

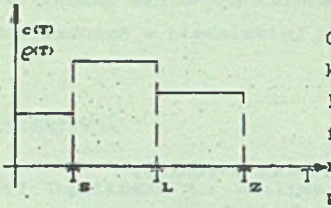
$$(x,y)\in\Omega,\ t\in(0,\infty);$$

przy nastepujących warunkach brzegowych

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} + h_i T \right)\Big|_{\partial\Omega_i} = f_i, \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad (x,y)\in\partial\Omega_i; \tag{2}$$

oraz warunek początkowy

$$T(x,y,t)\Big|_{t=0} = T_0(x,y), \quad (x,y) \in \Omega. \tag{3}$$

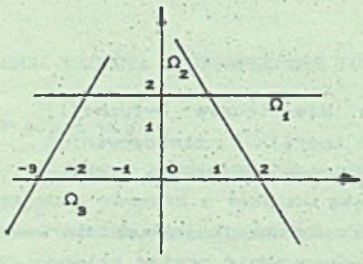


Rys. 1.

O funkcjach materiałowych $c(T), \rho(T), \lambda(T)$ zakładamy, że są stałe (ale różne) w poszczególnych fazach procesu krzepnięcia (rys.1), zaś funkcja λ = const w całym procesie (Na rysunku T_Z, T_L, T_S – oznaczają odpowiednio temperatury: zalewania, likwidusu i solidusu).

2. ANALITYCZNE ROWNANIE BRZEGU

Niech badany obszar Ω określony będzie jako wynik działania na obszarach Ω_i, $i = 1,2,\ldots,n$, np. (por. rys.2) $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$, gdzie



Rys. 2.

$$\Omega_1 = \{ (x,y): x \in R, \ y \in \langle 0,2 \rangle \};$$

$$\Omega_2 = \{ (x,y): x \in R, \ y \le -2x + 4 \};$$

$$\Omega_3 = \{ (x,y): x \in R, \ y \le 2x + 6 \};$$

Każdy ze zbiorów Ω_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ można przedstawić w postaci funkcji logicznej takiej, że

$$\Omega_i = (\phi_i(x,y) \ge 0) = \begin{cases} 1 & \forall\ (x,y) \in \Omega_i - \partial\Omega_i \\ 0 & \forall\ (x,y) \in \partial\Omega_i \end{cases} . \tag{4}$$

Zastępując operacje na zbiorach ($\cup, \cap, (\bar{\ })$) operacjami logicznymi ($\vee, \wedge, (\bar{\ })$) otrzymamy logiczną postać obszaru Ω (w naszym przykładzie: $\Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \Omega_3 = 1$). Z kolei zastępując zupełny układ operacji logicznych zupełnym układem R-funkcji, np. postaci (por.[3],[4],[5]), uzyskamy analityczną postać brzegu obszaru Ω. W naszym przykładzie otrzymamy:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} + \omega_3 - \sqrt{(\omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} + \omega_3^2} = 0 \tag{5}$$

gdzie: $\omega_1 = y\,(2 - y)/2$; $\omega_2 = (-2x - y + 4)/5$; $\omega_3 = (2x - y + 6)/5$;

3. OGOLNA STRUKTURA ROZWIĄZANIA I FUNKCJONAŁ ZAGADNIENIA

Jak wykazano w [5], funkcja spełniająca na brzegu $\partial\Omega$ wszystkie warunki

brzegowe (2) ma postać

$$T(x,y)=\omega\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\omega_i^{-1}}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{-1}} - \omega D_1\Phi + \Phi - \omega\Phi\frac{\sum_{i=1}^{n} h_i\omega_i^{-1}}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{-1}}, \tag{6}$$

gdzie $\omega = \omega(x,y) = 0$ – znormalizowane równanie całego brzegu $\partial\Omega$; $\omega_i = \omega_i(x,w) = 0$ – znormalizowane równanie i-tej części brzegu; $\Phi = \Phi(x,y)$ – nieznana funkcja w postaci szeregu

$$\Phi = \sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}(x,y), \tag{7}$$

w której pozostają do wyznaczenia współczynniki rozwinięcia a_{ij}, zaś funkcje $f_{ij}(x,y)$ są elementami np. szeregu trygonometrycznego.

Dla rozwiązania zagadnienia czasowo-przestrzennego(1) zastosujemy dla zmiennych przestrzennych metodę R-funkcji, a zmienną czasową poddamy dyskretyzacji. Wówczas równanie problemu (1) przyjmie postać

$$T^{t+\Delta t} = T^t + a\,\Delta t\,(\,T^{t+\Delta t}_{,xx} + T^{t+\Delta t}_{,xx}\,)\,. \tag{8}$$

gdzie: Δt jest krokiem czasowym; $a = \lambda/c\varrho$; $(.)_{,x} = \partial(.)/\partial x$; $T(x,y,t+\Delta t)$ oraz $T(x,y,t)$ określone jest wzorem (6).

Nieznane współczynniki rozwinięcia a_{ij} (por.(7)) wyznaczamy z warunku stacjonarności następującego funkcjonału (por.[5])

$$\begin{aligned} J[v] &= \frac{1}{2}\,a(v,v) - [f,v] = \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_{\Omega} v^2\,d\Omega + a\,\Delta t\int_{\Omega}(\,v^2_{,x} + v^2_{,y}\,)\,d\Omega\right\} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} a\,\Delta t\left\{\int_{\partial\Omega_i} h_i\,v^2\,d\partial\Omega_i - \int_{\partial\Omega_i} f_i\,v\,d\partial\Omega_i\right\} - \int_{\Omega} u_o\,v\,d\Omega = f(a_{ij}); \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie przyjęto oznaczenia: $u_o = T(x,y,t)$; $v = T(x,y,t+\Delta t)$.

4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Dla rozwiązania nieliniowego problemu (1) – (3) zastosujemy procedurę opisaną np. w [1],[2], składającą się z dwóch etapów (dla każdego kroku czasowego): najpierw wyznaczamy rozkład temperatury dla parametrów jak dla fazy ciekłej, a następnie obliczamy z bilansu cieplnego poprawkę uwzględniającą fakt, że w niektórych podobszarach odlewu występuje już faza przejściowa bądź stała. W ten sposób rozwiązanie nieliniowego problemu sprowadza się do dwukrotnego rozwiązania problemu liniowego.

Rozwiązanie zagadnienia (1) + (3) polega na wyznaczeniu warunku stacjonrności funkcjonału (9) ze względu na nieznane współczynniki rozwinięcia a_{ij} .

Spośród wszystkich dopuszczalnych pól temperatury , określonych wzorem (6) , tylko dla rzeczywistego pola funkcjonał (9) przyjmuje wartość stacjonarną. Tak więc współczynniki a_{ij} wyznaczamy z warunku

$$\frac{\partial f(a_{ij})}{\partial a_{ij}} = 0 \ , \ i,j = 1,\dots,n \tag{10}$$

Warunek (11) stanowi układ N^2 równań algebraicznych (z N^2 niewiadomymi) postaci

$$\sum_{i,j} A_{ijkl}\, a_{ij} = B_{kl} \tag{11}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &= \Delta t \int_{\Omega} \left(X_{ij,x}\, X_{kl,x} + X_{ij,y}\, X_{kl,y} \right) d\Omega + \\ &+ \frac{1}{a} \int_{\Omega} X_{ij}\, X_{kl}\, d\Omega + \Delta t \sum_{m=1}^{n} h_m \int_{\partial\Omega_m} X_{ij}\, X_{kl}\, d\Omega \ ; \\ B_{kl} &= -\Delta t \int_{\Omega} \left(X_{o,x}\, X_{kl,x} + X_{o,y}\, X_{kl,y} \right) d\Omega - \\ &- \frac{1}{a} \int_{\Omega} \left(X_o - u_o \right) X_{kl}\, d\Omega - \Delta t \sum_{m=1}^{n} \int_{\partial\Omega_m} \left(h_m\, X_o X_{kl} - f_m\, X_{kl} \right) d\partial\Omega_m . \end{aligned} \tag{12}$$

LITERATURA

[1] Majchrzak E.: Boundary Element Method in Thermal Theory of Foundary, Danish-German-Polish Workshop on "Application of Computer Methods in the Practice". Warsaw/Opole, 28-31 Oct. 1990.

[2] Majchrzak E.: Zastosowanie metody elementów brzegowych w teorii procesów odlewniczych. Praca habilitacyjna. ZN Pol. Sl., Mechanika, Gliwice, 1991 (w druku).

[3] Rwacew W.L.: Metody algebry logiki w fizyce matematycznej (w j. ros.). Naukowa Dumka, Kiew (1974

[4] Rwacew W.L.: Teoria R-funkcji i niektóre jej zastosowania. Kiew 1982

[5] Wawrzynek A.: Obliczanie numeryczne pól temperatury z wykorzystaniem R-funkcji. Sprawozdanie z CPBP 02.09, zad.04.15/90, Gliwice 1990.

MODELING OF THE CASTING SOLIDIFICATION PROCESS BY MEANS OF R-FUNCTIONS

S u m m a r y

In this paper the modeling of solidification process in casting volume by using R-function method is described. This method allows in approximate solution to take into account the complex shape of the boundary and the boundary conditions in exact way.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССАЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВКИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ R-ФУНКЦИИ

Р е з ю м е

Представлен метод моделирования процесса затвердевания отливки при использовании до сих пор редко применяемых R-функций. Метод позваляет учитывать в численном решении точную форму контура и соответсвующие граничные условия