ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

JAN CHOJCAN

NIEKTÓRE PROBLEMY WRAŻLIWOŚCI WYŻSZYCH RZĘDÓW UKŁADÓW ELEKTRONICZNYCH

AUTOMATYKA

Z. 88
GLIWICE
1987

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1009

JAN CHOJCAN

NIEKTÓRE PROBLEMY WRAŻLIWOŚCI WYŻSZYCH RZĘDÓW UKŁADÓW ELEKTRONICZNYCH

GLIWICE 1987

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Mgr Elżbieta Stinzing

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434–0760

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 160+85 Ark. wyd. 10,0 Ark druk. 7,875 Papier offsetowy kl.III, 70x100, 70g
Oddano do druku 10.02.87 Podpis. do druku 23.03.87 Druk ukończ. w kwietniu 1987
Zam 132/87 L-23 Cena zł 200,–

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

a_2, a_3, a_i, a_j	- współczynniki we wzorach na wrażliwości,
$\underline{A}$	- zredukowana macierz incydencji,
$\underline{B}$	- macierz cykli,
C, C_i	- pojemność,
CCT, CVT	- źródło prądowe i napięciowe sterowane prądem,
D	- obszar określoności funkcji jednorodnej,
$D = \det(\underline{Y})$	- wyznacznik macierzy admitancji węzłowych,
D	- mianownik złożonej funkcji układowej,
D_{rs}	- dopełnienie algebraiczne elementu a_{rs},
D_N, D_D	- wyznacznik licznika (mianownika) złożonej funkcji układowej,
E_j	- SEM w j-tej gałęzi,
$\underline{E}$	- wektor napięć (SEM),
f	- częstotliwość,
$f(.), f_{x_i}$	- funkcja jednorodna i jej pochodna,
$G_i = R_i^{-1}$	- przewodność,
I_j	- prąd j-tej gałęzi,
$\underline{I}_b$	- wektor prądów gałęziowych,
$\underline{I}, \underline{I}^o, \underline{I}^i$	- wektory węzłowych wydajności prądowych,
$\underline{J}$	- wektor prądów (SPM),
$k_{VV_i}, k_{VC_i}, k_{CC_i}, k_{CV_i}$	- współczynniki źródeł sterowanych,
K	- transmitancja napięciowa lub prądowa,
l	- liczba parametrów wielobiegunnika,
L	- indukcyjność,
m	- stopień funkcji jednorodnej,
M	- transmitancja napięciowo prądowa,
n	- liczba parametrów,
N, N^{ol}, N^o, N^i	- obwody podstawowe i dołączone,

N	- transmitancja prądowo napięciowa,
N_a, N_i	- liczba operacji przy obliczaniu wrażliwości metodą obwodów dołączonych i przyrostowych,
NC,NG,NL,NVC	- liczba pojemności, przewodności, indukcyjności i źródeł sterowanych w obwodzie,
$Q^T_{x_i} \overset{df}{=} x_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}$	- wrażliwość półwzględna 1-go rzędu fazy,
$Q^T_{x_i x_j}$, $Q^T_{x_i x_j x_k}$	- wrażliwość półwzględna fazy 2-go i 3-go rzędu,
R_i	- rezystor w i-tej gałęzi,
s	- operator,
$S^T_{x_i} \overset{df}{=} \frac{x_{io}}{T_o} \frac{\partial T}{\partial x_i}$	- wrażliwość względna 1-go rzędu,
$S^T_{x_i x_j}, S^T_{x_i x_j x_k}$	- wrażliwość względna 2-go i 3-go rzędu,
$S^{\lvert T \rvert}_{x_i} \overset{df}{=} \frac{x_{io}}{\lvert T_o \rvert} \frac{\partial \lvert T \rvert}{\partial x_i}$	- wrażliwość względna 1-go rzędu modułu funkcji układowej $T = \lvert T \rvert e^{j\Theta}$,
$S^T_{\underline{x}}$	- macierz współczynników wrażliwości 1-go rzędu na zmiany parametrów x_i,
S^T_f	- wrażliwość względna funkcji układowej na zmianę częstotliwości,
$SR^T_{x_i} \overset{df}{=} x_{io} \frac{\partial T}{\partial x_i}$	- półwzględna wrażliwość funkcji układowej na zmianę parametru x_i,
T, T_{x_i}, $T_{x_i x_j}$	- funkcja układowa i jej pochodne,
t_i	- tolerancja parametru x_i,
t_T, $t_T^{(i)}$	- odchyłka funkcji układowej,
u	- liczba funkcji układowych które należy obliczyć,
$\underline{U}$, $\underline{U}_b$	- wektor napięć i napięć gałęziowych,
$\underline{V}, \underline{V}^i, \underline{V}^{ii}, \underline{V}^{iii}$	- wektor potencjałów węzłowych,
$V_{1i}, V_{11i}, V_{2i}, V_{22i}$	- napięcia źródeł sterowanych,
VCT, VVT	- źródło prądowe i napięciowe sterowane napięciem,
w	- liczba niezerowych węzłów,
W_1, W_2	- wielobiegunniki,
x_i	- parametr,
$\underline{x}, \Delta \underline{x}$	- macierz parametrów i ich przyrostów,
y_j	- parametr,

Y_i - admitancja i-tego elementu,

$\underline{Y}$ - macierz admitancji węzłowych,

$\underline{Z}$ - macierz impedancji węzłowych,

Θ - parametr $(0 < \Theta < 1)$,

Θ - faza funkcji układowej,

$\underline{1}$ - macierz jednostkowa,

indeksy górne:

i - obwód dołączony lub pochodna podług x_i,

o - obwód dołączony,

o,i - obwód podstawowy z wymuszeniem w gałęzi i,

t - transpozycja,

x-y - obrót (o 90°) macierzy z płaszczyzny x0z do płaszczyzny y0z,

y-z - obrót (o 90°) macierzy z płaszczyzny y0x do płaszczyzny z0x,

z-x - obrót macierzy (o 90°) z płaszczyzny z0y do płaszczyzny x0y,

indeksy dolne:

b - gałąź,

C - obwód dołączony do obwodu z wyjściem prądowym,

D - odnosi się do mianownika funkcji układowej,

N - odnosi się do licznika funkcji układowej,

$\hat{i} \hat{=} (i_1+i_2)(i_3+i_4)$ - wiersze i kolumny na przecięciu których (w macierzy $\underline{Y}$) występuje element x_i,

V - obwód dołączony do obwodu z wyjściem napięciowym.

1. WSTĘP

1.1. Przedmiot, zakres i cel pracy

Przy małych zmianach parametrów do określenia rozrzutu wartości funkcji układowych, doboru nominalnych wartości parametrów i optymalizacji układów wykorzystuje się metody oparte na pojęciu wrażliwości małoprzyrostowych 1-go rzędu. Natomiast przy dużych zmianach parametrów do tych samych celów wykorzystywane jest pojęcie wrażliwości wielkoprzyrostowych. Wymagają one znacznie większych nakładów obliczeniowych niż wrażliwości małoprzyrostowe. Poza tym kłopotliwe jest oszacowanie czy zmiany parametrów są "małe" czy "duże". Pojęcie wrażliwości wyższych rzędów może być alternatywą dla wrażliwości wielkoprzyrostowych.

W pracy rozpatrywane są niektóre zagadnienia efektywnej analizy wrażliwości wyższych rzędów w układach elektronicznych. Przedstawiono algorytmy obliczania wrażliwości wyższych rzędów wykorzystujące metodę obwodów dołączonych w układach liniowych opisanych równaniami węzłowymi. Rozpatrywane są dwa typy wymuszeń - sinusoidalne i stałoprądowe.

Zwrócono uwagę na znaczny wzrost efektywności numerycznej przy dekompozycji układów. Dalej udowodniono istnienie ważniejszych niezmienników wrażliwości wyższych rzędów. Wyprowadzono też wzory na wrażliwości wyższych rzędów przy zmianie częstotliwości. Ponadto przedstawiono inne (np. do optymalizacji układów elektromagnetycznych) możliwości wykorzystania wrażliwości wyższych rzędów.

Jednolita i systematyczna prezentacja podstaw teoretycznych wrażliwości wyższych rzędów z uwzględnieniem efektywności algorytmów stanowi niezbędny krok na drodze badań nąd automatyzacją projektowania układów elektronicznych.

1.2. Przegląd literatury

Teoria wrażliwości jest już klasycznym działem teorii układów elektronicznych. Istnieją monografie poświęcone zastosowaniu analizy wrażliwościowej [34, 40, 64, 101, 117, 256, 307, 315, 330, 331]. Sporo miejsca poświęca się analizie wrażliwościowej we wszystkich nowych podręcznikach dotyczących projektowania układów elektronicznych z wykorzystaniem m.c. [16, 22, 23, 41, 49, 77, 80, 92, 105, 106, 118, 129-132, 154, 158, 166, 176, 178, 185, 196, 210, 218, 242, 243, 252, 261, 293, 294, 299, 317, 334, 355].

Rozwój teorii wrażliwości nie przebiega równomiernie. Metody, kierunki i zastosowania wzajemne przenikają się, trudno więc o zachowanie chronologii i precyzyjne podziały przy jej omawianiu.

Powszechnie przyjmuje się, że początki teorii wrażliwości wiążą się z pojawieniem podręczników - Bodego [27] w 1945 r. i Poliwanowa [257] w 1946 roku. Istotny wpływ na jej rozwój miały też książki Bychowskiego [40] (z 1958 roku) i Tomoviča [330] (z 1964 roku).

Bode podał sformalizowaną metodę określania wrażliwości względnych, na zmiany wartości parametrów układów elektronicznych i układów ze sprzężeniem zwrotnym [27, 179]. Wrażliwości są wyrażone przez wyznaczniki uzyskiwane z równań oczkowych lub węzłowych. Uogólnienie wyników Bodego podano w [180, 275]. Dalszy rozwój tego zasadniczego klasycznego nurtu teorii wrażliwości ilustrują kolejne prace [123, 126, 189, 273, 221, 247, 318, 38, 78, 9, 284, 26, 207, 139, 329, 32, 2, 51, 10, 311, 351, 301, 33, 307, 270, 163, 52, 312, 100, 304, 230, 54, 341, 5, 209, 101, 57, 58, 165, 175, 235, 170, 34, 64, 65, 14, 240, 187, 325].

Inny sposób analizy wrażliwości, wykorzystujący wprowadzoną w latach trzydziestych przez Fryzego [111] biliniową postać funkcji układowej [249, 305, 335, 11, 117], okazał się bardzo efektywny w połączeniu z metodami symbolicznymi i topologicznymi [309, 189].

Wyodrębniły się zastosowania teorii wrażliwości, wykorzystujące na początku metody algebraiczne i parametryczne, w automatyce i teorii sterowania. [213, 40, 275]. W krótkim czasie właśnie te zastosowania stały się, np. w zakresie teorii niezmienników, wiodące. Istnieje obszerna bibliografia prac z tego zakresu, oto niektóre ważniejsze: [177, 148, 234, 272, 211, 267, 295, 233, 268, 347, 160, 269, 25, 1].

Jeśli wrócimy do układów elektronicznych i elektrycznych, to początkowo przeprowadzano analizę wrażliwości zer i biegunów transmitancji na zmiany współczynników równań wielomianowych [245, 184]. Ten kierunek badań okazał się przydatny w analizie i syntezie filtrów aktywnych RC. Można tu właściwie mówić o wyodrębnionym dziale teorii wrażliwości i jej zastosowaniu [278, 179, 183, 151, 79, 215, 152, 266, 226, 302, 250, 20, 338, 221, 4, 19, 262, 283, 212, 337, 326, 21, 238, 345, 202, 182, 336].

Prace Belove [18] i Schoefflera [280] (obie z 1964 roku) zapoczątkowały rozwój teorii niezmienników wrażliwości i równoważności obwodów oraz ich wykorzystanie do minimalizacji wrażliwości i syntezy. Kolejne prace były uogólnieniem i rozszerzeniem fundamentalnych opracowań obu autorów [98, 231, 190, 173, 279, 124, 125, 181, 149, 143, 144, 265, 145, 146, 147, 291, 35, 354, 133, 300, 45, 115, 116, 117, 192, 172, 153, 319, 320, 47, 46, 84, 48, 227, 228, 229, 168, 128, 346, 219, 36, 95, 96, 73, 76].

Rozwój m.c. oraz powstanie efektywnej metody obliczania wrażliwości spowodowały wzrost zainteresowania różnym wykorzystaniem współczynników wpływu. Prace Directora i Rohrera [86, 87] z 1969 roku to początek metody obwodów dołączonych. Kolejne prace uściśliły, zweryfikowały i rozszerzyły za-

kres zastosowania tej metody [28, 327, 29, 255, 256, 30, 44, 288, 112, 141, 328, 225, 97, 82, 83, 357, 31, 208, 80, 77].

Równocześnie rozwijają się inne metody obliczania wrażliwości, zwłaszcza metoda obwodów przyrostowych [340, 99, 77] oraz metody symboliczne i topologiczne [17, 197, 117, 309]. Te ostatnie stają się niezwykle efektywne po zdekomponowaniu obwodów [169, 140, 164, 277, 136, 309].

Kolejne etapy rozwoju, to analiza wrażliwości wielkoprzyrostowych [39, 122, 113, 14, 194, 316, 281, 15, 138, 108, 236], analiza wrażliwościowa z wykorzystaniem metod statystycznych [342, 85, 199, 285, 43, 162, 193, 6, 195, 210, 314, 315], różne metody dyskretyzacji rozkładów [119, 120, 63, 64, 298, 198, 322, 68, 314] oraz obliczanie wrażliwości wyższych rzędów [222, 286, 287, 116, 289, 69, 72, 49, 315].

Wyniki analizy wrażliwościowej są wykorzystywane przy projektowaniu do wyznaczania optymalnych wartości znamionowych, określenia tolerancji, obszarów sprawności i uzysku produkcyjnego [93, 12, 3, 13, 210, 314, 315, 204, 205].

Wrażliwości wykorzystuje się też do identyfikacji uszkodzeń [306, 220, 333, 134, 159, 332, 24, 150, 254] oraz do projektowania układów SC [81, 309] i filtrów cyfrowych [97, 339].

1.3. Układ treści

W kolejnych rozdziałach pracy omawiane są problemy związane z obliczaniem wrażliwości wyższych rzędów, ze szczególnym uwzględnieniem metody obwodów dołączonych, dekompozycji obwodów i niezmienników wrażliwości wyższych rzędów.

W rozdziale 2 zdefiniowano współczynniki wrażliwości wyższych rzędów i zwrócono uwagę na ich wykorzystanie do oceny rozrzutu wartości funkcji układowych. Wyprowadzono wzory na wrażliwości modułu i fazy dla funkcji prostych i złożonych. Wykazano, że dla wrażliwości rzędów wyższych niż trzeci liczba członów w tych wzorach gwałtownie rośnie. Ponieważ często, np. przy obliczaniu wrażliwości na zmianę pulsacji, zachodzi potrzeba obliczania wrażliwości na zmianę odwrotności admitancji, a niektóre metody preferują parametry admitancyjne, wyprowadzono wzory wiążące wrażliwości na zmiany impedancji i admitancji.

Obliczaniu wrażliwości wyższych rzędów, metodą obwodów dołączonych, poświęcony jest rozdział 3. W tablicach zebrano wzory określające wrażliwości 2 i 3 rzędu. Metoda ta nie wymaga dodatkowych analiz do obliczania wrażliwości 3 rzędu i jest od innych metod efektywniejszą oraz może być wykorzystana w programach analizy wrażliwości. Zaproponowano schemat blokowy takiego programu.

Inne metody obliczania wrażliwości przedstawiono w rozdziale 4. Omówiono metodę obwodów przyrostowych, wyznacznikową, metody impedancyjne, metody obliczania wrażliwości z symbolicznej postaci funkcji układowych oraz

metodę analityczną dla prostych funkcji układowych. Dla wszystkich metod niesymbolicznych wyprowadzono (lub zebrano) wzory na wrażliwości wyższych rzędów.

W rozdziale 5 rozpatruje się analizę wrażliwości wyższych rzędów w obwodach z wielobiegunnikami oraz w obwodach zdekomponowanych. Zwrócono uwagę na układy łańcuchowe.

Ważną i pożyteczną cechą układów jest istnienie niezmienników wrażliwości 1 i wyższych rzędów. Problem ten przedstawiono w rozdziale 6. Rozpatrzono obwody z wieloma wejściami i wyjściami oraz podano wrażliwości funkcji układowych na zmianę częstotliwości (pulsacji).

Porównanie efektywności numerycznej algorytmów pozwala na porównanie metod. W rozdziale 7 porównano efektywność metody obwodów przyrostowych i obwodów dołączonych wykazując przewagę tej drugiej. Potwierdzono też dużą efektywność obliczeń współczynników wrażliwości obwodów zdekomponowanych.

Na niektóre zastosowania oraz możliwości wykorzystania wrażliwości wyższych rzędów zwrócono uwagę w rozdziale 8 i w dodatku.

2. WRAŻLIWOŚCI WYŻSZYCH RZĘDÓW

2.1. Wstęp

Interesujące nas funkcje układowe mogą być rzeczywistymi funkcjami zmiennych rzeczywistych (np. dla obwodów prądu stałego) lub zespolonymi funkcjami zmiennych zespolonych (dla wymuszeń sinusoidalnych).

W obydwu przypadkach przy spełnieniu warunków umożliwiających ich rozkład w szereg Taylora wokół nominalnego punktu pracy trudno jest, poza trywialnymi przykładami, określić promienie (kule) zbieżności [98, 191, 258, 259, 282, 343].

Wiadomo [98, 259], że jeśli funkcja rzeczywista f n zmiennych rzeczywistych $\underline{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^t$ ma w otoczeniu określonego punktu $M_o(x_{1o}, x_{2o}, \ldots, y_{no})$ ciągłe pochodne wszystkich rzędów do $(m+1)$ włącznie i nadamy zmiennym $\underline{x}_o = [x_{1o}, x_{2o}, \ldots, x_{no}]^t$ pewne przyrosty $\Delta \underline{x} = [\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n]^t$ tak, aby odcinek prostoliniowy łączący $M_o(\underline{x}_o)$ i $M(x)$ nie wyszedł poza rozpatrywane otoczenie punktu $\underline{x}_o$ wówczas zachodzi następująca równość

$$\Delta f(\underline{x}_o) = f(\underline{x}) - f(\underline{x}_o) = df(\underline{x}_o) + \frac{1}{2!} d^2 f(\underline{x}_o) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{m!} d^m f(\underline{x}_o) + \frac{1}{(m+1)!} d^{(m+1)} f(\underline{x}_o + \Theta \cdot \Delta \underline{x}) \quad (0 < \Theta < 1) \quad (2.1)$$

przy czym ostatni człon po prawej stronie jest resztą w postaci Lagrange'a.

Niech funkcją f będzie np. dowolna funkcja układowa T układu elektronicznego, złożonego z dwójników oraz źródeł niesterowanych i sterowanych, zależna od n parametrów $\underline{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^t$ którymi mogą być - w zależności od wybranej metody opisu układu - impedancje lub admitancje dwójników, współczynniki (lub ich odwrotności) źródeł sterowanych, wartości SEM (lub SPM) źródeł niesterowanych, pulsacja. Wówczas uzyskamy (na podstawie (2.1)), dzieląc obie strony przez $T_o = T(x_{1o}, x_{2o}, \ldots, x_{no})$ $(T_o \neq 0)$ i rozpisując różniczki zupełne, następującą równość

$$\frac{\Delta T}{T_o} = \sum_{i=1}^{n} T_{x_i}(\underline{x}_o) \frac{\Delta x_i}{T_o} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} T_{x_i x_j}(\underline{x}_o) \frac{\Delta x_i \cdot \Delta x_j}{T_o} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} T_{x_i x_j x_k}(\underline{x}_o) \frac{\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k}{T_o} + \ldots +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_{m+1}=1}^{n} T_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{m+1}}} (\underline{x}_o + \Theta \Delta \underline{x}) \cdot \frac{\Delta x_{i_1} \Delta x_{i_2} \dots \Delta x_{i_{m+1}}}{T_o} \quad (2.2)$$

w której oznaczono przez:

$T_{x_i}(\underline{x}_o) = \frac{\partial T}{\partial x_i}$ - pierwszą pochodną cząstkową funkcji układowej T podług parametru x_i dla zmiennych $\underline{x}_o$,

$T_{x_i x_j}(\underline{x}_o) = \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}$ - drugą pochodną cząstkową tej funkcji podług parametrów x_i oraz x_j,

$T_{x_i x_j x_k}(\underline{x}_o) = \frac{\partial^3 T}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ - trzecią pochodną cząstkową funkcji podług parametrów $x_i x_j$ oraz x_k,

$T_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{m+1}}}(\underline{x}_o + \Theta \cdot \Delta x) = \frac{\partial^{m+1} T}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{m+1}}}$ - $(m+1)$-szą pochodną cząstkową funkcji T podług parametrów $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m+1}}$ dla zmiennych $\underline{x}_o + \Theta \Delta \underline{x}$.

W wielu metodach obliczeniowych wygodniej jest wyrazić funkcje układowe $(K_U, K_I, M, N, Y_{wej}, Y_{wyj})$ przez napięcia i prądy $(U_{we}, U_{wy}, I_{we}, I_{wy})$ [64], szczegóły w rozdziale 3 i 4.

Dla obwodów liniowych pobudzanych sygnałami sinusoidalnymi, w stanie ustalonym, funkcja układowa T jest funkcją zespoloną zmiennych zespolonych. Jeżeli funkcja jest analityczna (holomorficzna) w otoczeniu punktu $\underline{x}_o$, to można ją rozłożyć w szereg Taylora w tym otoczeniu [191, 282, 343]

W rozwinięciu w szeregu Taylora (2.2) wyróżniamy człony zawierające pochodne cząstkowe funkcji układowej rzędu 1,2,3,...,m. Można je wykorzystać do zdefiniowania wrażliwości pierwszego i wyższych rzędów.

Dla ustalenia uwagi zajmiemy się głównie wrażliwościami względnymi [177, 77].

<u>Definicja</u>: <u>Wrażliwość względna pierwszego rzędu</u> (wrażliwość) funkcji układowej T na zmianę parametru x_i jest określona przez $\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{x_{io}}{T_o} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln x_i}$ (dla $T \neq 0$) i oznaczana przez $S^T_{x_i}$, czyli

$$S^T_{x_i} \overset{df}{=} \frac{\partial T}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{io}}{T_o} \qquad (i=1(1)n) \qquad (2.3)$$

Jeżeli w (2.2) (dla rzeczywistej funkcji układowej) uwzględnimy tylko człony objęte pierwszym pojedynczym sumowaniem, to można napisać, że

$$t_T^{(1)} = \frac{\Delta T}{T_o} \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{x_{io}}{T_o} \cdot \frac{\Delta x_i}{x_{i_o}} = \sum_{i=1}^{n} S_{x_i}^T \cdot t_i \tag{2.4}$$

przy czym t_i jest tolerancją wartości parametru x_i natomiast t_T - jest rozrzutem wartości funkcji układowej wywołanym odchyłkami (od wartości znamionowej) wartości parametrów x_i (indeks górny "(1)" oznacza, że uwzględniono tylko wrażliwości 1 rzędu).

Jeśli funkcja układowa jest funkcją zespoloną, tzn. gdy $T = |T|e^{j\theta}$ a $x_i (i=1(1)n)$ argumentem rzeczywistym, wówczas

$$S_{x_i}^T = \mathrm{Re}(S_{x_i}^T) + j\,\mathrm{Im}(S_{x_i}^T) \tag{2.5}$$

przy czym pierwszy człon (rzeczywisty) jest <u>wrażliwością względną modułu</u> funkcji układowej natomiast drugi (urojony) <u>wrażliwością półwzględną fazy</u> funkcji układowej, czyli

$$\mathrm{Re}(S_{x_i}^T) = S_{x_i}^{|T|} \overset{df}{=} \frac{\partial |T|}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{|T|} \tag{2.6}$$

oraz

$$I_m(S_{x_i}^T) = Q_{x_i}^T \overset{df}{=} x_i \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_i}. \tag{2.7}$$

Interpretację geometryczną i fizyczną tych wrażliwości podano w [315, 304].

Często zachodzi potrzeba obliczenia współczynnika wrażliwości względnej funkcji T na zmianę odwrotności parametru x_i, czyli na zmianę $y_i=(x_i)^{-1}$. Można wykazać, że

$$S_{y_i}^T = -S_{x_i}^T. \tag{2.8}$$

Jeśli funkcja układowa jest ilorazem prostych funkcji układowych N i D $(T = \frac{N}{D})$ to:

$$S_{x_i}^T = S_{x_i}^N - S_{x_i}^D \tag{2.9}$$

Uwzględnienie dalszych członów rozwinięcia szeregu Taylora (2.2) prowadzi do pojęcia wrażliwości wyższych rzędów oraz do określenia ich własności.

2.2. Wrażliwości drugiego rzędu

Wrażliwości względne drugiego rzędu funkcji układowej T na zmiany parametrów $x_i x_j$ można zdefiniować następująco:

$$S^T_{x_i x_j} \overset{df}{=} a_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \frac{x_{io} x_{jo}}{T_o} \qquad (i=1(1)n,\ j=1(1)n) \tag{2.10}$$

natomiast

$$a_2 \overset{df}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } i \neq j \\ \frac{1}{2} & \text{dla } i = j. \end{cases}$$

Aproksymując szereg Taylora (2.2) (dla T rzeczywistych) członami z pojedynczym i podwójnym sumowaniem uzyskamy przybliżony wzór na rozrzut funkcji układowej o postaci:

$$t_T^{(2)} = \frac{\Delta T}{T_o} \cong \sum_{i=1}^{n} T_{x_i}(\underline{x}_o) \frac{\Delta x_i}{T_o} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} T_{x_i x_j}(\underline{x}_o) \frac{\Delta x_i \Delta x_j}{T_o} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} S^T_{x_i} \cdot t_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 T(\underline{x}_o)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{io} \cdot x_{jo}}{T_o} \cdot \frac{\Delta x_i}{x_{io}} \cdot \frac{\Delta x_j}{x_{jo}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} S^T_{x_i} \cdot t_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} S^T_{x_i x_j} \cdot t_i \cdot t_j = t^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} S^T_{x_i x_j} \cdot t_i \cdot t_j. \tag{2.11}$$

Dla zespolonej funkcji układowej i rzeczywistych parametrów $x_i (i=1(1)n)$ uzyskamy [69, 71, 75] następujące związki między nimi a wrażliwościami modułu i półwzględnymi fazy:

- dla $i = j$

$$S^T_{x_i^2} \overset{df}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \frac{x_{io}^2}{T_o} = S^{|T|}_{x_i^2} - \frac{1}{2} (Q^T_{x_i})^2 + j(Q^T_{x_i^2} + S^{|T|}_{x_i} \cdot Q^T_{x_i}) =$$

$$= \mathrm{Re}(S^T_{x_i^2}) + j \cdot \mathrm{I_m}(S^T_{x_i^2}) \tag{2.12}$$

czyli

$$S^{|T|}_{x_i^2} = \mathrm{Re}(S^T_{x_i^2}) + \frac{1}{2}\,(Q^T_{x_i})^2 \tag{2.13}$$

oraz

$$Q^T_{x_i^2} = \mathrm{Im}(S^T_{x_i^2}) - S^{|T|}_{x_i} \cdot Q^T_{x_i} \tag{2.14}$$

przy czym wrażliwości drugiego rzędu - względne modułu i półwzględne fazy zdefiniowane są następująco

$$S^{|T|}_{x_i^2} \overset{df}{=} \frac{1}{2}\,\frac{x_{io}^2}{|T_o|}\,\frac{\partial^2 |T|}{\partial x_i^2} \tag{2.15}$$

oraz

$$Q^T_{x_i^2} \overset{df}{=} \frac{1}{2}\,x_{io}^2\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2}, \tag{2.16}$$

- dla $i \neq j$

$$S^T_{x_i x_j} \overset{df}{=} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{io} \cdot x_{jo}}{T_o} = \mathrm{Re}(S^T_{x_i x_j}) + j\,\mathrm{Im}(S^T_{x_i x_j}) =$$

$$= S^{|T|}_{x_i x_j} - Q^T_{x_i} \cdot Q^T_{x_j} + j(Q^T_{x_i x_j} + S^{|T|}_{x_i} \cdot Q^T_{x_j} + S^{|T|}_{x_j} \cdot Q^T_{x_i}) \tag{2.17}$$

czyli

$$S^{|T|}_{x_i x_j} = \mathrm{Re}(S^T_{x_i x_j}) + Q^T_{x_i} \cdot Q^T_{x_j} \tag{2.18}$$

oraz

$$Q^T_{x_i x_j} = \mathrm{Im}(S^T_{x_i x_j}) - S^{|T|}_{x_i} \cdot Q^T_{x_j} - S^{|T|}_{x_j} \cdot Q^T_{x_i}, \tag{2.19}$$

natomiast

$$S^{|T|}_{x_i x_j} \overset{df}{=} \frac{x_{io} \cdot x_{jo}}{|T_o|}\,\frac{\partial^2 |T|}{\partial x_i \partial x_j} \tag{2.20}$$

oraz

$$Q^T_{x_i x_j} \stackrel{df}{=} x_{io} x_{jo} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{2.21}$$

Dla odwrotności parametrów x_i oraz x_j, oznaczonych przez $y_i = x_i^{-1}$ i $y_j = x_j^{-1}$ można wykazać, przez proste przekształcenia, że zachodzi

$$S^T_{x_i^2} = S^T_{y_i^2} + S^T_{y_i} \tag{2.22}$$

$$S^T_{x_i x_j} = S^T_{y_i y_j} \tag{2.23}$$

$$S^T_{x_i y_j} = -S^T_{y_i y_j} = -S^T_{x_i x_j} = S^T_{y_j x_i}. \tag{2.24}$$

Jeśli funkcja układowa jest ilorazem funkcji prostych N i D wówczas po rozpisaniu i prostych przekształceniach uzyskujemy następujące zależności:

$$S^T_{x_i^2} = S^{\frac{N}{D}}_{x_i^2} = S^N_{x_i^2} - S^D_{x_i^2} - S^N_{x_i} \cdot S^D_{x_i} + (S^D_{x_i})^2 \tag{2.25}$$

oraz

$$S^T_{x_i x_j} = S^{\frac{N}{D}}_{x_i x_j} = S^N_{x_i x_j} - S^D_{x_i x_j} - S^N_{x_i} \cdot S^D_{x_j} - S^N_{x_j} \cdot S^D_{x_i} +$$

$$+ 2 \cdot S^D_{x_i} \cdot S^D_{x_j}, \tag{2.26}$$

a dla ich modułu i fazy, jeśli są to funkcje zespolone, zachodzi

$$S^{|T|}_{x_i^2} = S^{|N|}_{x_i^2} - S^{|D|}_{x_i^2} - S^{|N|}_{x_i} \cdot S^{|D|}_{x_i} + (S^{|D|}_{x_i})^2 =$$

$$= \mathrm{Re}(S^T_{x_i^2}) + \frac{1}{2} (Q^N_{x_i} - Q^D_{x_i})^2, \tag{2.27}$$

$$Q^T_{x_i^2} = Q^N_{x_i^2} - Q^D_{x_i^2} = \mathrm{Im}(S^T_{x_i^2}) - (S^{|N|}_{x_i} - S^{|D|}_{x_i}) \cdot (Q^N_{x_i} - Q^D_{x_i}) \tag{2.28}$$

oraz

$$S^{|T|}_{x_i x_j} = S^{|N|}_{x_i x_j} - S^{|D|}_{x_i x_j} - S^{|N|}_{x_i} \cdot S^{|D|}_{x_j} - S^{|D|}_{x_i} \cdot S^{|N|}_{x_j} + 2\, S^{|D|}_{x_i} \cdot S^{|D|}_{x_j} =$$

$$= \mathrm{Re}(S^{T}_{x_i x_j}) + (Q^{N}_{x_i} - Q^{D}_{x_i}) \cdot (Q^{N}_{x_j} - Q^{D}_{x_j}), \tag{2.29}$$

$$Q^{T}_{x_i x_j} = Q^{N}_{x_i x_j} - Q^{D}_{x_i x_j} = \mathrm{Im}(S^{T}_{x_i x_j}) - (S^{|N|}_{x_i} - S^{|D|}_{x_i}) \cdot (Q^{N}_{x_j} - Q^{D}_{x_j}) -$$

$$- (S^{|N|}_{x_j} - S^{|D|}_{x_j}) \cdot (Q^{N}_{x_i} - Q^{D}_{x_i}). \tag{2.30}$$

Analogicznie można zdefiniować wrażliwości rzędu trzeciego.

2.3. Wrażliwości trzeciego rzędu

Wrażliwości względne trzeciego rzędu funkcji układowej T na zmianę parametrów $x_i x_j x_k$ można zdefiniować następująco

$$S^{T}_{x_i x_j x_k} \overset{df}{=} a_3 \frac{\partial^3 T}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{x_{io} x_{jo} x_{ko}}{T_o} \quad (i=1(1)n,\ j=1(1)n,\ k=1(1)n) \tag{2.31}$$

natomiast

$$a_3 \overset{df}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i \neq j \neq k, \\ \frac{1}{6} & \text{dla} \quad i = j = k, \\ \frac{1}{2} & \text{dla pozostałych przypadków.} \end{cases}$$

Dodając do poprzednich aproksymacji szeregu Taylora (2.2) człony z potrójnym sumowaniem uzyskamy kolejny wzór o postaci

$$t_T^{(3)} = \frac{\Delta T}{T_o} \cong t_T^{(2)} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} T_{x_i x_j x_k}(\underline{x}_o) \frac{\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k}{T_o} =$$

$$= t_T^{(2)} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=j}^{n} S^{T}_{x_i x_j x_k} \cdot t_i \cdot t_j \cdot t_k. \tag{2.32}$$

Dla zespolonych funkcji układowych zdefiniowano (i określono) wrażliwości modułu i fazy [69, 71, 75]:

$$S^{|T|}_{x_i x_j x_k} \overset{df}{=} a_3 \cdot \frac{\partial^3 |T|}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{x_{io} x_{jo} x_{ko}}{|T_o|} =$$

$$= \mathrm{Re}(S^{|T|}_{x_i x_j x_k}) + S^{|T|}_{x_i} \cdot Q^T_{x_j} \cdot Q^T_{x_k} + S^{|T|}_{x_j} \cdot Q^T_{x_i} \cdot Q^T_{x_k} +$$

$$+ S^{|T|}_{x_k} \cdot Q^T_{x_i} \cdot Q^T_{x_j} + Q^T_{x_i x_j} \cdot Q^T_{x_k} + Q^T_{x_i x_k} \cdot Q^T_{x_j} + Q^T_{x_j x_k} \cdot Q^T_{x_i} \tag{2.33}$$

natomiast

$$Q^T_{x_i x_j x_k} \overset{df}{=} a_3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} x_{io} x_{jo} x_{ko} = \mathrm{Im}(S^T_{x_i x_j x_k}) -$$

$$- S^{|T|}_{x_i x_j} \cdot Q^T_{x_k} - S^{|T|}_{x_i x_k} \cdot Q^T_{x_j} - S^{|T|}_{x_j x_k} \cdot Q^T_{x_i} - S^{|T|}_{x_i} \cdot Q^T_{x_j x_k} -$$

$$- S^{|T|}_{x_j} \cdot Q^T_{x_i x_k} \cdot S^{|T|}_{x_k} \cdot Q^T_{x_i x_j} + Q^T_{x_i} \cdot Q^T_{x_j} \cdot Q^T_{x_k} . \tag{2.34}$$

Dla złożonej funkcji układowej wrażliwość trzeciego rzędu określona jest zależnością:

$$S^T_{x_i x_j x_k} = S^{\frac{N}{D}}_{x_i x_j x_k} = S^N_{x_i x_j x_k} - S^D_{x_i x_j x_k} - S^N_{x_i x_j} \cdot S^D_{x_k} -$$

$$- S^N_{x_i x_k} \cdot S^D_{x_j} - S^N_{x_j x_k} \cdot S^D_{x_i} - S^N_{x_i} \cdot S^D_{x_j x_k} - S^N_{x_j} \cdot S^D_{x_i x_k} -$$

$$- S^N_{x_k} \cdot S^D_{x_i x_j} + 2 S^N_{x_i} \cdot S^D_{x_j} \cdot S^D_{x_k} + 2 S^N_{x_j} \cdot S^D_{x_i} \cdot S^D_{x_k} +$$

$$+ 2 S^N_{x_k} \cdot S^D_{x_i} \cdot S^D_{x_j} + 2 S^D_{x_i x_j} \cdot S^D_{x_k} + 2 S^D_{x_i x_k} \cdot S^D_{x_j} +$$

$$+ 2 S^D_{x_j x_k} \cdot S^D_{x_i} - 6 S^D_{x_i} \cdot S^D_{x_j} \cdot S^D_{x_k} . \tag{2.35}$$

Natomiast wrażliwość modułu i fazy tej funkcji, jeśli jest ona zespolona, opisana jest zależnościami

$$S^{|T|}_{x_i x_j x_k} = S^{|\overset{N}{D}|}_{x_i x_j x_k} = \mathrm{Re}(S^T_{x_i x_j x_k}) + (S^{|N|}_{x_i} - S^{|D|}_{x_i})(Q^N_{x_j} - Q^D_{x_j})(Q^N_{x_k} - Q^D_{x_k}) +$$

$$+ (S^{|N|}_{x_j} - S^{|D|}_{x_j})(Q^N_{x_i} - Q^D_{x_i})(Q^N_{x_k} - Q^D_{x_k}) +$$

$$+ (S^{|N|}_{x_k} - S^{|D|}_{x_k})(Q^N_{x_i} - Q^D_{x_i})(Q^N_{x_j} - Q^D_{x_j}) +$$

$$+ (Q^N_{x_i x_j} - Q^D_{x_i x_j})(Q^N_{x_k} - Q^D_{x_k}) + (Q^N_{x_i x_k} - Q^D_{x_i x_k})(Q^N_{x_j} - Q^D_{x_j}) +$$

$$+ (Q^N_{x_j x_k} - Q^D_{x_j x_k})(Q^N_{x_i} - Q^D_{x_i}) \qquad (2.36)$$

oraz

$$Q^T_{x_i x_j x_k} - Q^{\overset{N}{D}}_{x_i x_j x_k} = \mathrm{Im}(S^T_{x_i x_j x_k}) - (S^{|N|}_{x_i x_j} - S^{|D|}_{x_i x_j})(Q^N_{x_k} - Q^D_{x_k}) -$$

$$- (S^{|N|}_{x_i x_k} - S^{|D|}_{x_i x_k})(Q^N_{x_j} - Q^D_{x_j}) - (S^{|N|}_{x_i} - S^{|D|}_{x_i})(Q^N_{x_j x_k} - Q^D_{x_j x_k}) -$$

$$- (S^{|N|}_{x_j} - S^{|D|}_{x_j})(Q^N_{x_i x_k} - Q^D_{x_i x_k}) - (S^{|N|}_{x_k} - S^{|D|}_{x_k})(Q^N_{x_i x_j} - Q^D_{x_i x_j}) +$$

$$+ (Q^N_{x_i} - Q^D_{x_i})(S^{|N|}_{x_j} \cdot S^{|D|}_{x_k} + S^{|D|}_{x_j} \cdot S^{|N|}_{x_k} - 2\, S^{|D|}_{x_j} \cdot S^{|D|}_{x_k}) +$$

$$+ (Q^N_{x_j} - Q^D_{x_j})(S^{|N|}_{x_i} \cdot S^{|D|}_{x_k} + S^{|D|}_{x_i} \cdot S^{|N|}_{x_k} - 2\, S^{|D|}_{x_i} \cdot S^{|D|}_{x_k}) +$$

$$+ (Q^N_{x_k} - Q^D_{x_k})(S^{|N|}_{x_i} \cdot S^{|D|}_{x_j} + S^{|D|}_{x_i} \cdot S^{|N|}_{x_j} - 2\, S^{|D|}_{x_i} \cdot S^{|D|}_{x_j}) +$$

$$+ (Q^N_{x_i} - Q^D_{x_i})(Q^N_{x_j} - Q^D_{x_j})(Q^N_{x_k} - Q^D_{x_k}) -$$

$$- (S^{|N|}_{x_j x_k} - S^{|D|}_{x_j x_k})(Q^N_{x_i} - Q^D_{x_i}) \qquad (2.37)$$

Również dla wrażliwości 3 rzędu można podać wzory na wpływ zmian odwrotności parametrów x_i, x_j, x_k oznaczonych przez $y_i = x_i^{-1}$, $y_j = x_j^{-1}$ i $y_k = x_k^{-1}$. Po żmudnych przekształceniach uzyskujemy następujące zależności:

$$S^T_{x_i x_j x_k} = -S^T_{y_i y_j y_k} \tag{2.38}$$

$$S^T_{x_i^2 y_j} = -S^T_{y_i^2 x_j} - S^T_{y_i x_j} = S^T_{y_i^2 y_j} + S^T_{y_i y_j} = -S^T_{x_i^2 x_j} \tag{2.39}$$

$$S^T_{x_i x_j x_k} = + S^T_{y_i y_j y_k} = -S^T_{x_i x_j x_k} \tag{2.40}$$

$$S^T_{x_i y_j y_k} = -S^T_{y_i y_j y_k} \tag{2.41}$$

$$S^T_{x_i^3} = -S^T_{y_i^3} - 2\, S^T_{y_i^2} - S^T_{y_i} \tag{2.42}$$

$$S^T_{x_i y_j^2} = -S^T_{y_i y_j^2}. \tag{2.43}$$

Analogicznie można zdefiniować wrażliwości wyższych rzędów.

2.4. Wrażliwości wyższych rzędów

Wrażliwość względna k-go rzędu (k = 1,2,3,4,...) funkcji układowej T na zmianę parametrów można zdefiniować następująco:

$$S^T_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}} \overset{df}{=} a_k \cdot \frac{\partial^{(k)} T}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{ik}} \cdot \frac{x_{i_{1o}} x_{i_{2o}} \ldots x_{i_{ko}}}{T_o} \tag{2.44}$$

przy czym

$$a_k = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (k_i)!}$$

a k_i - liczba indeksów, ze zbioru $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, równych i.

Wzór aproksymacyjny przyjmie teraz (dla funkcji rzeczywistej) postać:

$$t_T^{(k)} \cong t_T^{(k-1)} + \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1}^{n} \dots \sum_{i_k=i_{k-1}}^{n} s^T_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}} \cdot t_{i_1} \cdot t_{i_2} \dots t_{i_k} \tag{2.45}$$

Ze wzrostem rzędu wrażliwości rośnie, zwłaszcza dla złożonych funkcji układowych oraz ich modułów i faz, liczba członów w określających je wzorach. W tablicy 2.1 podano te liczby dla wrażliwości kilku rzędów.

Tablica 2.1

Rząd wrażliwości	Liczba członów we wzorze na wrażliwość funkcji układowej				
	p r o s t e j		z ł o ż o n e j		
	modułu	fazy	w postaci ogólnej	modułu	fazy
1	1	1	2	2	2
2	2	3	5	5	9
3	7	8	15	37	40
4	28	25	52	149	178

Wynika z niej, że liczba członów gwałtownie rośnie dla wrażliwości powyżej trzeciego rzędu.

2.5. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale:

1° - przypomniano definicje wrażliwości względnych pierwszego i wyższych rzędów.

2° - zdefiniowano wrażliwość modułu i fazy zespolonej funkcji układowej rzeczywistych argumentów oraz podano wzory umożliwiające ich obliczenie, są to zależności: (2.6), (2.7), (2.13), (2.14), (2.18), (2.19), (2.33) i (2.34).

3° - przedstawiono też zależności dla złożonych funkcji układowych $T = \frac{N}{D}$.

4° - podano wzory na wrażliwości odwrotności argumentów: (2.8), (2.22) - - (2.24), (2.38) - (2.43). Są one bardzo przydatne przy obliczaniu, np. wrażliwości na zmiany częstotliwości (rozdział 6), np. metodą obwodów dołączonych (rozdział 3) lub przyrostowych (rozdział 4). Metody te bowiem umożliwiają obliczenie wrażliwości na zmiany, np. L_i^{-1} i C_i a do wyznaczenia wrażliwości na zmianę częstotliwości potrzebne są współczynniki wrażliwości na zmiany L_i i C_i.

5° - wykazano (tablica 2.1), że obliczanie wrażliwości rzędu wyższego niż trzeci staje się, bez względu na zastosowaną metodę, uciążliwe. Obliczenie wrażliwości 4-go rzędu, np. wzmocnienia napięciowego $K_U = \frac{U_2}{U_1}$ $(= T = \frac{N}{D})$ wymaga obliczenia 52 członów a wrażliwości modułu i fazy wymagają dodatkowego obliczenia około 150 członów.
W dalszej części pracy rozpatrzono dokładnie wrażliwości do rzędu trzeciego włącznie.

3. OBLICZANIE WRAŻLIWOŚCI WYŻSZYCH RZĘDÓW METODĄ OBWODÓW DOŁĄCZONYCH

3.1. Metoda obwodów dołączonych

Znaną od 1952 roku uogólnioną zasadę zachowania mocy chwilowej układu (Tellegen [327], można przedstawić następująco [64]:

Twierdzenie 3.1: m wymiarowe przestrzenie napięć i prądów gałęziowych - obwodów o identycznej strukturze (tzn. posiadających ten sam graf obwodu), zawierających m odbiornikowo zastrzałkowanych gałęzi - są ortogonalne, tzn.

$$(\underline{U}^i)^t \cdot \underline{I} = \underline{U}^t \cdot (\underline{I}^i) = 0 \quad , \tag{3.1}$$

gdzie:

$\underline{U}$, $\underline{I}$ - m wymiarowy wektor odpowiednio napięć i prądów gałęziowych obwodu N,

$\underline{U}^i$, $\underline{I}^i$ - analogiczne wielkości dla dowolnego obwodu N^i o identycznej z N strukturze.

Dowód podano w [256, 92, 64].

W 1965 roku Kokotovic i Rutman [234], a w 1969 roku Director i Rohrer [91, 86, 87] zwrócili uwagę na możliwość wykorzystania zasady Tellegens (3.1), a właściwie jej różniczkowej postaci

$$\sum_{j=1}^{m} (I_j^i \, d\, U_j - U_j^i \, d\, I_j) = 0, \tag{3.2}$$

oraz zasady międzywzajemności Bordewijka [28, 29, 30] do obliczania wrażliwości małoprzyrostowych pierwszego rzędu. Kolejne prace (bardzo liczne) pozwoliły na korektę wzorów [288], uogólnienie twierdzenia Tellegena [255, 256, 44, 82, 83] oraz wykazały, że można je wykorzystać nie tylko do obliczania wrażliwości obwodów liniowych (w stanie ustalonym i nieustalonym) [112, 141, 328, 357, 31, 53, 49, 131, 77, 64, 321], ale również do obwodów nieliniowych [247, 52, 57], ze skorelowanymi elementami [329, 163] oraz obwodów o stałych rozłożonych [78]. Z powodzeniem wykorzystuje się tę metodę do analizy wrażliwości układów z przełączanymi pojemnościami [81], filtrów cyfrowych [97, 339] oraz do obliczania wrażliwości wyższych rzędów [264, 116, 287, 290, 49, 315, 69, 71, 72, 75].

Inne zastosowania twierdzenia Tellegena w teorii obwodów przedstawiono w [256].

Po okresie burzliwego rozwoju i zachwytu zaczęto oceniać krytycznie przydatność tej drogi postępowania [225, 208, 315]. Zwrócono uwagę na niepotrzebne komplikacje pojęciowe przy tworzeniu algorytmów oraz nieefektywność numeryczną [208]. Zarzuty te (zwłaszcza ostatni) nie wydają się w pełni zasadne, zwłaszcza przy obliczaniu wrażliwości wyższych rzędów. Wyjaśnienia w rozdziale 7.

W tym rozdziale ograniczymy się do obwodów skupionych liniowych stacjonarnych (SLS) z dwójnikami pasywnymi i źródłami niesterowanymi i sterowanymi, w stanie ustalonym, opisanych macierzą admitancyjną $\underline{Y}$. Ten rodzaj opisu jest ekonomiczny w metodzie obwodów dołączonych ponieważ macierz admitancyjną obwodu dołączonego uzyskuje się przez transpozycję macierzy $\underline{Y}$. Tak nie jest, np. dla macierzy hybrydowych [77].

3.2. Obliczanie wrażliwości pierwszego rzędu

Jeśli tolerancja wartości wymuszenia w układzie jest równa zero wówczas wystarczy obliczyć wpływ zmian parametrów obwodu na zmiany napięcia i prądu na wejściu (U_i, I_i) i wyjściu (U_o, I_o) układu. Wtedy można mówić o, tzw. prostej funkcji układowej $T(T = U_i, I_i, U_o, I_o)$ [64].

Do obliczenia wrażliwości jednej prostej funkcji układowej $T(T=U_i, I_i, U_o, I_o)$ na zmiany wszystkich parametrów obwodu potrzebne są rozkłady napięć w analizowanym (podstawowym) obwodzie N oraz w sztucznym obwodzie N^d, dołączonym do niego, zasilanym ze źródła o jednostkowej wydajności [91, 77, 64]. Obwód dołączony uzyskuje się przez zwarcie wszystkich SEM i rozwarcie wszystkich SPM niesterowanych obwodu N oraz modyfikację źródeł sterowanych.

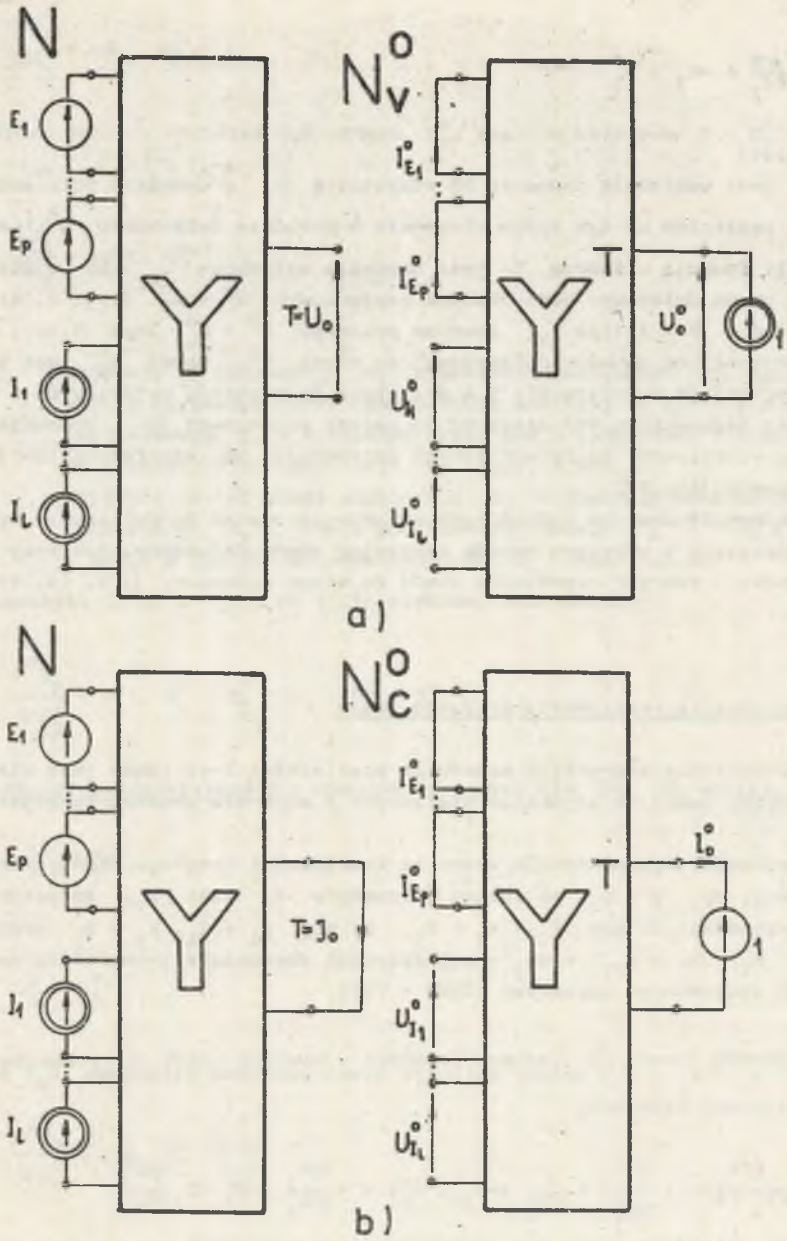
Na rys. 3.1 przedstawiono schematycznie zmiany dla $T = U_o$ i $T = I_o$.

Do opisu obwodów (podstawowego i dołączonego) można wykorzystać układy równań węzłowych, oczkowych, hybrydowych, tableau lub równań stanu. W pracy wybrano, jak już wspomniano, pierwszy z wymienionych sposobów opisu [186]. Analogiczne rezultaty można uzyskać dla pozostałych postaci równań. Przyjęcie opisu węzłowego powoduje, że łatwe jest obliczanie wrażliwości dowolnych funkcji układowych na zmiany admitancyjnych parametrów obwodu, tzn. G_j, L_j^{-1}, C_j oraz współczynników źródeł sterowanych i zmiany źródeł niesterowanych.

Wrażliwości złożonych funkcji układowych $(T = K_U, K_I, M, N, Y_{we}, Y_{wy}, K_p, \ldots)$ obliczane są pośrednio po obliczeniu wrażliwości odpowiednich prostych funkcji układowych $(T = U_o, I_o, U_i, I_i)$ [64].

Wrażliwość funkcji układowej T na zmianę, np. przewodności G_j obliczymy z zależności [64],

$$S_{G_j}^{T} = -U_j \cdot U_j^{o} \cdot \frac{G_j}{T} \tag{3.3}$$



Rys. 3.1. Obwód podstawowy N i dołączony dla a) $T = U_o(N_V^o)$ i b) $T = I_o(N_C^o)$

Fig. 3.1. Basic N and adjoint networks for a) $T = U_o(N_V^o)$ and b) $T = I_o(N_C^o)$

ponieważ

$$\frac{\partial T}{\partial G_j} = -U_j \cdot U_j^o \tag{3.4}$$

natomiast:

U_j jest wartością napięcia na rezystorze R_j w obwodzie podstawowym N,

U_j^o napięciem na tym samym elemencie w obwodzie dołączonym $N^d = N^o$.

Jeśli funkcją układową T jest napięcie wyjściowe U_o lub wejściowe U_i, to obwód dołączony jest obwodem napięciowym $N^o = N_V^o$ (rys. 3.1a), natomiast dla $T = I_o$ (lub I_i) obwodem prądowym $N^o = N_C^o$ (rys. 3.1b). Macierze admitancyjne obwodów dołączonych są równe $\underline{Y}^t$. Obwód N_V^o jest pobudzany przez SPM o wydajności 1 A dołączoną do zacisków wyjściowych a obwód N_C^o przez jednostkową SEM włączoną do gałęzi wyjściowej [64]. Podobnie oblicza się wrażliwości na zmiany innych parametrów, np. współczynników źródeł sterowanych [64, 92].

Ideę metody obwodów dołączonych można wykorzystać do obliczania wrażliwości drugiego i wyższych rzędów traktując obwód dołączony, jak nowy obwód podstawowy i tworząc odpowiedni obwód do niego dołączony [116, 49, 69, 71, 75].

3.3. Obliczanie wrażliwości drugiego rzędu

Wyprowadzenie wszystkich wzorów na wrażliwości 2-go rzędu jest niecelowe. Skupimy uwagę na uzyskaniu niektórych z nich dla prostej funkcji układowej.

Prześledźmy wyprowadzenie wzoru na wrażliwości drugiego rzędu, funkcji układowej, np. $T = U_o$ na zmianę parametrów x_i oraz x_j. Rozpatrzmy trzy przypadki: a) gdy $x_i = x_j = G_j$, b) gdy $x_i = G_i$, $x_j = G_j$ oraz c) gdy $x_i = x_j = k_{VV_j} = ws_j$ - współczynnik sterowania j-go źródła napięciowego sterowanego napięciem (ŹNSN - VVT).

Ad a)

Dla $x_i = x_j = G_j$ należy obliczyć drugą pochodną cząstkową U_o podług G_j. Uzyskamy zależność

$$\frac{\partial^2 U_o}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U_o}{\partial G_j^2} = \frac{\partial}{\partial G_j}(-U_j \cdot U_j^o) = -\frac{\partial U_j}{\partial G_j} \cdot U_j^o - U_j \frac{\partial U_j^o}{\partial G_j} \tag{3.5}$$

w której można jeszcze raz wykorzystać ideę obwodów dołączonych. Jeśli przyjmiemy, że funkcją układową w obwodzie podstawowym N będzie napięcie U_j, wówczas

$$\frac{\partial U_j}{\partial G_j} = -U_j \cdot U_j^j, \tag{3.6}$$

natomiast jeśli w obwodzie dołączonym N_V^o funkcja układowa $T = U_j^o$, wówczas

$$\frac{\partial U_j^o}{\partial G_j} = -U_j^o \cdot U_j^{o,j} \tag{3.7}$$

gdzie

U_j^j - napięcie na admitancji G_j w obwodzie dołączonym N_V^j, tzn. w obwodzie uzyskanym przez transpozycję macierzy $\underline{Y}$ ($\underline{Y}^j = \underline{Y}^t$) obwodu podstawowego N i zasilanym przez SPM o wydajności 1 A podłączoną równolegle do admitancji G_j (rys. 3.2c),

$U_j^{o,j}$ - napięcie na tej samej admitancji G_j w obwodzie dołączonym do dołączonego $N_V^{o,j}$, czyli podstawowym (bowiem $\underline{Y}^{o,j} = (\underline{Y}^t)^t = \underline{Y}$), z SPM 1 A podłączoną równolegle do G_j (rys. 3.2.d).

Podstawiając (3.6) i (3.7) do (3.5) uzyskamy wzór końcowy

$$\frac{\partial^2 U_o}{\partial G_j^2} = U_j \cdot U_j^o \cdot U_j^j + U_j \cdot U_j^o \cdot U_j^{o,j}. \tag{3.8}$$

Z <u>zasady międzywzajemności</u> obwodów liniowych [29, 30, 77] wynika, że

$$U_i^j = U_j^{o,i}, \tag{3.9}$$

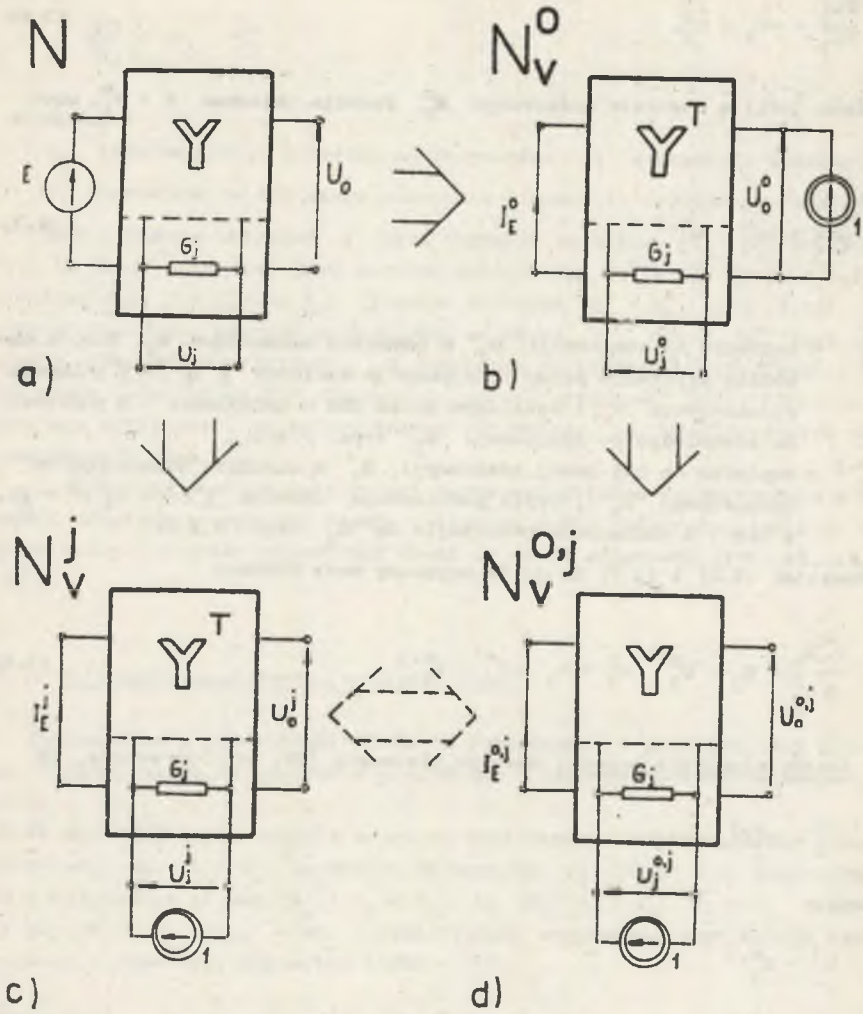
a więc

$$U_j^j = U_j^{o,j}$$

i zależność (3.8) można zapisać w bardziej zwartej, prostszej postaci

$$\frac{\partial^2 U_o}{\partial G_j^2} = 2\, U_j\, U_j^o\, U_j^{o,j}. \tag{3.10}$$

Ale nie tylko zapis jest tu istotny. Z zależności (3.8) wynika, że do obliczenia drugiej pochodnej napięcia U_o podług przewodności G_j należy znać wyniki analizy obwodów: N, N_V^o, N_V^j, $N_V^{o,j}$, natomiast z zależności (3.10) tylko trzech z nich bez N_V^j.



Rys. 3.2. Obwód podstawowy i dołączone wykorzystywane w zależnościach (3.6) i (3.7) do obliczania wrażliwości drugiego rzędu, napięcia U_o na zmianę wartości konduktancji G_j. Na rysunku a) przedstawiono obwód podstawowy N, na rys. b) - obwód dołączony N_V^o, na c) - obwód dołączony N_V^j, a na rys. d) - obwód podstawowy (dołączony do dołączonego) $N_V^{o,j}$

Fig. 3.2. Basic and adjoint networks used in relations (3.6) and (3.7) for computations of the second order sensitivities, voltage U_o for changes of the conductancy G_j. In figure a) the basic network is presented, in figure b) - the adjoint network N_V^o, in figure c) - the adjoint network N_V^j, in figure d) - the basic network (adjoint to the adjoint one) $N_V^{o,j}$

Przyjęto, że dolne indeksy określają numer elementu na zaciskach którego mierzone jest napięcie, a górne określają jaki jest to obwód, jeśli:

- bez indeksów, to obwód podstawowy N określony układem równań węzłowych scharakteryzowany przez macierz admitancji $\underline{Y}$ i wektor zastępczych SPM węzłowych $\underline{I}$ (rys. 3.2a),
- "o", to obwód dołączony N^o, określony przez transponowaną macierz admitancji $\underline{Y}^o = \underline{Y}^t$ zasilany 1) gdy $T = U_o$, przez SPM 1 A dołączoną do zacisków wyjściowych (rys. 3.2b) $N^o = N_V^o$, 2) gdy $T = I_o$, przez SPM 1 V włączoną do gałęzi wyjściowej $N^o = N_C^o$,
- "j", to obwód dołączony N^j o admitancji $\underline{Y}^j = \underline{Y}^t$ zasilany przez SPM 1 A (gdy $T = U_o$) dołączoną równolegle do admitancji G_j (rys. 3.2c), czyli $N^j = N_V^j$ (dla $T = U_o$) lub $N^j = N_C^j$ (dla $T = I_o$)
- "o,j", to obwód dołączony do dołączonego ($\underline{Y}^{o,j} = (\underline{Y}^t)^t = \underline{Y}$) czyli podstawowy zasilany (gdy $T = U_o$) przez SPM 1 A $\parallel G_j$ (rys. 3.2d) oznaczany przez $N^{o,j} = N_V^{o,j}$ (lub $N_C^{o,j}$ dla $T = I_o$).

Tak więc małoprzyrostową wrażliwość względną drugiego rzędu napięcia U_o na zmianę wartości admitancji G_j można obliczyć, po analizie obwodów N, N_V^o, $N_V^{o,j}$, z zależności:

$$S_{G_j^2}^{U_o} = \frac{1}{2}\frac{G_j^2}{U_o} \cdot \frac{\partial^2 U_o}{\partial G_j^2} = U_j\, U_j^o\, U_j^{o,j} \cdot \frac{G_j^2}{U_o} \tag{3.11}$$

gdzie G_j, U_o - przyjmują wartości znamionowe.

Ad b)

Dla $x_i = G_i$ oraz $x_j = G_j$ należy obliczyć drugą pochodną cząstkową U_o podług G_i oraz G_j. Uzyskamy zależność

$$\frac{\partial^2 U_o}{\partial G_i \partial G_j} = \frac{\partial}{\partial G_i}(-U_j\, U_j^o) = -\frac{\partial U_j}{\partial G_i} \cdot U_j^o - U_j \frac{\partial U_j^o}{\partial G_i} \tag{3.12}$$

w której pochodne cząstkowe można wyznaczyć wykorzystując odpowiednio dobrane obwody dołączone.

Dla $T = U_j$ (w obwodzie N)

$$\frac{\partial U_j}{\partial G_i} = -U_i\, U_i^j \tag{3.13}$$

natomiast dla $T = U_j^o$ (w obwodzie dołączonym N_V^o)

$$\frac{\partial U_j^o}{\partial G_i} = -U_i^o\, U_i^{o,j} \tag{3.14}$$

więc

$$\frac{\partial^2 U_o}{\partial G_i \partial G_j} = U_i\, U_i^j\, U_j^o + U_i^o\, U_i^{o,j} \cdot U_j. \tag{3.15}$$

Z zasady międzywzajemności $U_i^j = U_j^{o,i}$ więc wrażliwość napięcia U_o na zmiany G_i oraz G_j obliczana jest z zależności

$$S^{U_o}_{G_i G_j} = \frac{\partial^2 U_o}{\partial G_i \partial G_j} \cdot \frac{G_i G_j}{U_o} = (U_i\, U_j^o\, U_j^{o,i} + U_j\, U_i^o\, U_i^{o,j}) \cdot \frac{G_i \cdot G_j}{U_o}. \tag{3.16}$$

Należy więc znać wyniki analizy obwodów (oprócz N i N_V^o) $N_V^{o,i}$ oraz $N_V^{o,j}$ (rys. 3.3).

Ad c)

Jeśli w analizowanym obwodzie wystąpią inne, niż sterowane napięciem źródła prądowe (ŹPSN - VCT), źródła sterowane to należy, przed przystąpieniem do układania równań węzłowych, źródła te zmodyfikować. Modyfikacja polega na dodaniu dwóch rezystancji R i $-R$ w gałęzi sterującej lub sterowanej i-tego źródła [50, 142, 237, 64]. W wyniku uzyskamy zastępcze źródło prądowe sterowane napięciem. W źródle tym oznaczono przez U_{1i} (lub U_{11i}) zastępcze napięcie sterujące, a przez U_{2i} (lub U_{22i}) napięcie na sterowanej zastępczej sile prądomotorycznej (rys. 3.4).

Jeśli, np. parametrami x_i oraz x_j będzie współczynnik sterowania j-go źródła napięciowego sterowanego napięciem (ŹNSN - VVT) k_{VVj}, czyli $x_i = x_j = k_{VVj}$, wówczas [64]

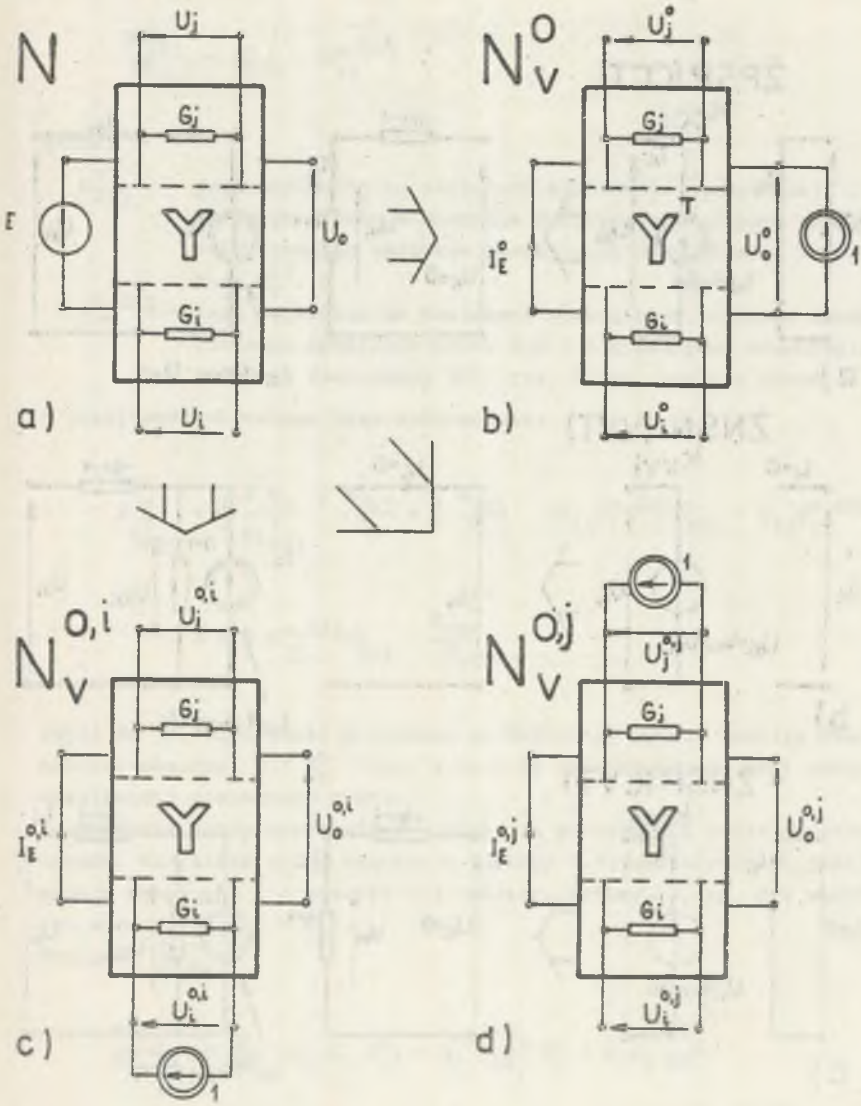
$$\frac{\partial U_o}{\partial k_{VVj}} = U_{1j} \cdot U_{22j}^o, \tag{3.17}$$

natomiast

$$\frac{\partial^2 U_o}{\partial k_{VVj}^2} = \frac{\partial U_{1j}}{\partial k_{VVj}} \cdot U_{22j}^o + U_{1j} \frac{\partial U_{22j}^o}{\partial k_{VVj}}. \tag{3.18}$$

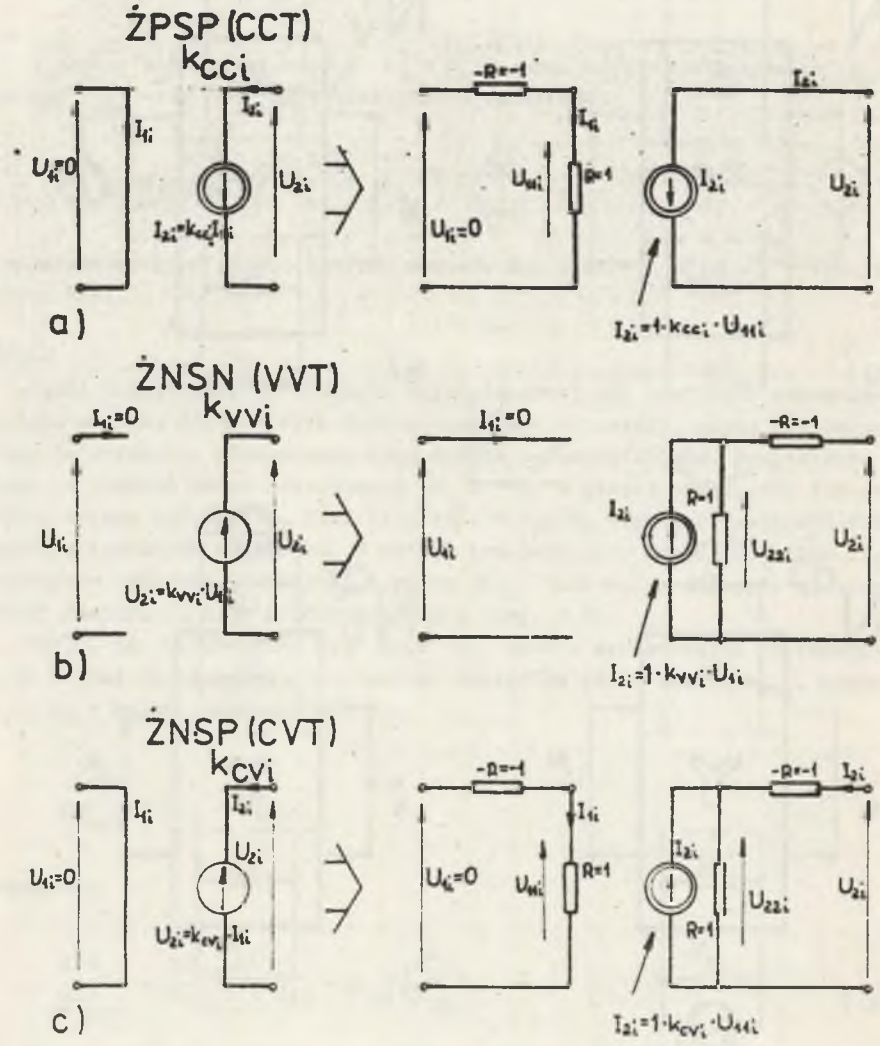
Jeśli przyjmiemy, że $T = U_{1j}$ w obwodzie podstawowym N i skorzystamy z zasady międzywzajemności, to

$$\frac{\partial U_{1j}}{\partial k_{VV_j}} = U_{1j} \cdot U_{22j}^{1j} = U_{1j} \cdot U_{1j}^{o,22j}, \tag{3.19}$$



Rys. 3.3. Obwody analizowane przy obliczaniu $S^{U_o}_{G_iG_j}$ (zależność (3.16))

Fig. 3.3. Networks analysed while $S^{U_o}_{G_iG_j}$ is computed (relation (3.16))



Rys. 3.4. Modyfikacja źródeł sterowanych (a) ŹPSP, b) ŹNSN, c) ŹNSP do postaci przydatnej przy układaniu równań węzłowych - tworzenie zastępczych ŹPSN

Fig. 3.4. Modification of controlled sources (a) ŹPSP b) ŹNSN c) ŹNSP) to the form useful for node equationdesign - creation of the substitutional ŹPSN

można wykazać, że dla $T = U^{o}_{22j}$ w obwodzie dołączonym N^{o}_{V} słuszna jest zależność:

$$\frac{\partial U^{o}_{22j}}{\partial k_{VVj}} = U^{o}_{22j} \cdot U^{o,22j}_{1j} \tag{3.20}$$

gdzie:

U^{1j}_{22j} - jest napięciem na zaciskach admitancji wewnętrznej G zmodyfikowanego źródła w obwodzie dołączonym zasilanym przez SPM 1 A podłączoną do zacisków sterujących tego źródła, czyli w obwodzie N^{1j}_{V}, a

$U^{o,22j}_{1j}$ - jest napięciem na zaciskach sterujących źródła w obwodzie podstawowym zasilanym przez SPM 1 A podłączoną równolegle do zastępczej sterowanej SPM (rys. 3.5c), czyli w obwodzie $N^{o,22j}_{V}$.

A wrażliwość określona jest zależnością:

$$S^{U_o}_{k^2_{VVj}} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_o}{\partial k^2_{VVj}} \cdot \frac{k^2_{VVj}}{U_o} = \frac{1}{2}\frac{k^2_{VVj}}{U_o} \cdot (U_{1j}U^{o,22j}_{1j}U^{o}_{22j} + U_{1j}U^{o,22j}_{1j}U^{o}_{22j}) =$$

$$= U_{1j}\, U^{o,22j}_{1j} U^{o}_{22j} \cdot \frac{k^2_{VVj}}{U_o} \tag{3.21}$$

czyli do jej obliczenia potrzebne są dodatkowo wyniki analizy obwodu $N^{o,22j}_{V}$. Analizę obwodów N i N^{o}_{V} (rys. 3.5a i b) przeprowadzono przy obliczaniu wrażliwości pierwszego rzędu.

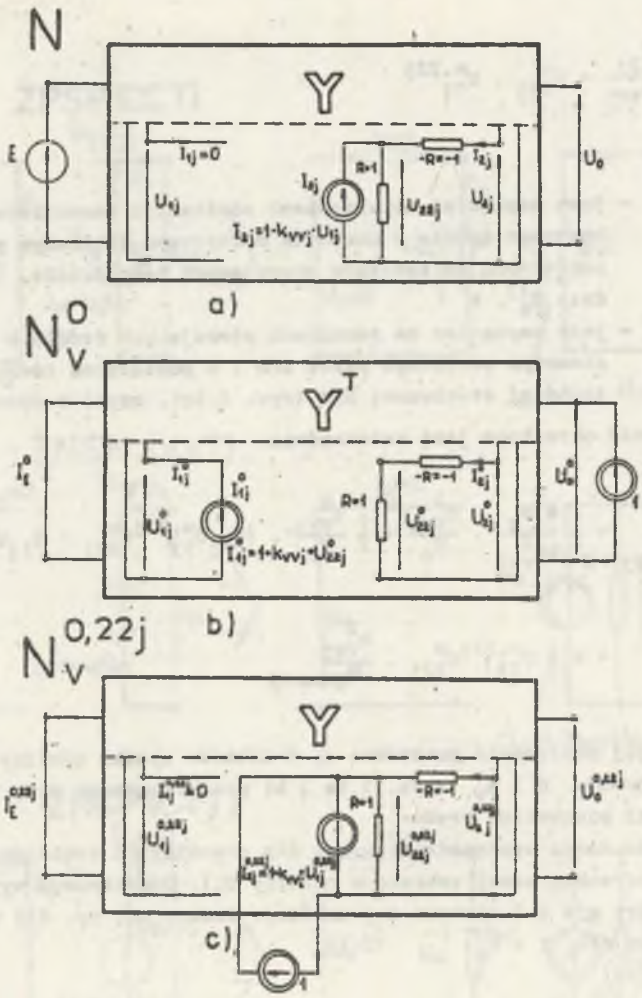
Podobnie można wyprowadzić wzory dla pozostałych rodzajów parametrów obwodu. Wszystkie wzory zebrano w tablicy 3.1. Dodatkowego wyjaśnienia wymagają wzory w 4 i 7 wierszu tej tablicy. Zróbmy to, np. dla wzorów w czwartym wierszu dla $T = U_o$.

Ponieważ [64]

$$\frac{\partial^2 U_o}{\partial Y_i \partial E_j} = \frac{\partial}{\partial E_j}(a_i\, U_i\, U^{o}_{i}) = a_i \frac{\partial U_i}{\partial E_j} U^{o}_{i} + a_i U_i \frac{\partial U^{o}_{i}}{\partial E_j}$$

natomiast

$$\frac{\partial U_i}{\partial E_j} = -I^{i}_{j} = a_j I^{i}_{j}$$



Rys. 3.5. Obwody analizowane przy obliczaniu $S^{U_0^o}_{k^2_{VVj}}$ (zależność (3.21))

a) obwód podstawowy N, b) obwód dołączony N_V^o i c) obwód podstawowy zasilany przez SPM o wydajności 1A podłączoną równolegle do źródła sterowanego $N^{o,22j}$

Fig. 3.5. Networks analysed while $S^{U_0^o}_{k^2_{VVj}}$ is computed (relation (3.21))

a) the basic network N, b) the adjoint network N_V^o, c) the basic network supplied by SPM of 1A joined parallel to the controlled source $N^{o,22j}$

Tablica 3.1

Lp.	Element lub parametr x_i	Element lub parametr x_j	Analizowane oprócz N i N_C^o (dla T=I_o) i N_V^o (dla T=U_o) obwody:	$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}$ =
1	Y_i	Y_i	$N_V^{o,i}$	$2\, U_i\, U_i^o \,.\, U_i^{o,i}$
2	Y_i	Y_j	$N_V^{o,i}\ N_V^{o,j}$	$a_i a_j\ (U_i\, U_j^o\, U_j^{o,i} + U_j\, U_i^o\, U_i^{o,j})$
3	Y_i	k_j	$N_V^{o,i},\ N_V^{o,2j}$	$a_i a_j\ (U_i\, V_{2j}^i\, V_{1j}^{o,i} + V_{1j}\, U_i^o\, U_i^{o,2j})$
4	Y_i	E_j	$N_C^{o,j}$	$a_i a_j\, U_i^o\, U_i^{o,j}$
5	Y_i	I_j	$N_V^{o,j}$	$a_i a_j\, U_i^o\, U_i^{o,j}$
6	k_i	k_j	$N_V^{o,2i},\ N_V^{o,2j}$	$a_i a_j\ (V_{1i}\, V_{2j}^o\, V_{1j}^{o,2i} + V_{1j}\, V_{2i}^o\, V_{1i}^{o,2j})$
7	k_i	E_j	$N_C^{o,j}$	$a_i a_j\, V_{2i}^o\, V_{1i}^{o,j}$
8	k_i	I_j	$N_V^{o,j}$	$a_i a_j\, V_{2i}^o\, V_{1i}^{o,j}$

Przyjęte w tablicy oznaczenia

$a_i = \begin{cases} -1 & \text{dla admitancji, sterowanych źródeł prądowych i niesterowanych napięciowych,} \\ +1 & \text{dla niesterowanych źródeł prądowych i sterowanych napięciowych,} \end{cases}$

$k_i = \begin{cases} k_{VC_i} & \text{- dla ŹPSN,} \\ k_{CC_i} & \text{- dla ŹPBS,} \\ k_{VV_i} & \text{- dla ŹNSN,} \\ k_{CV_i} & \text{- dla ŹNSP,} \end{cases}$

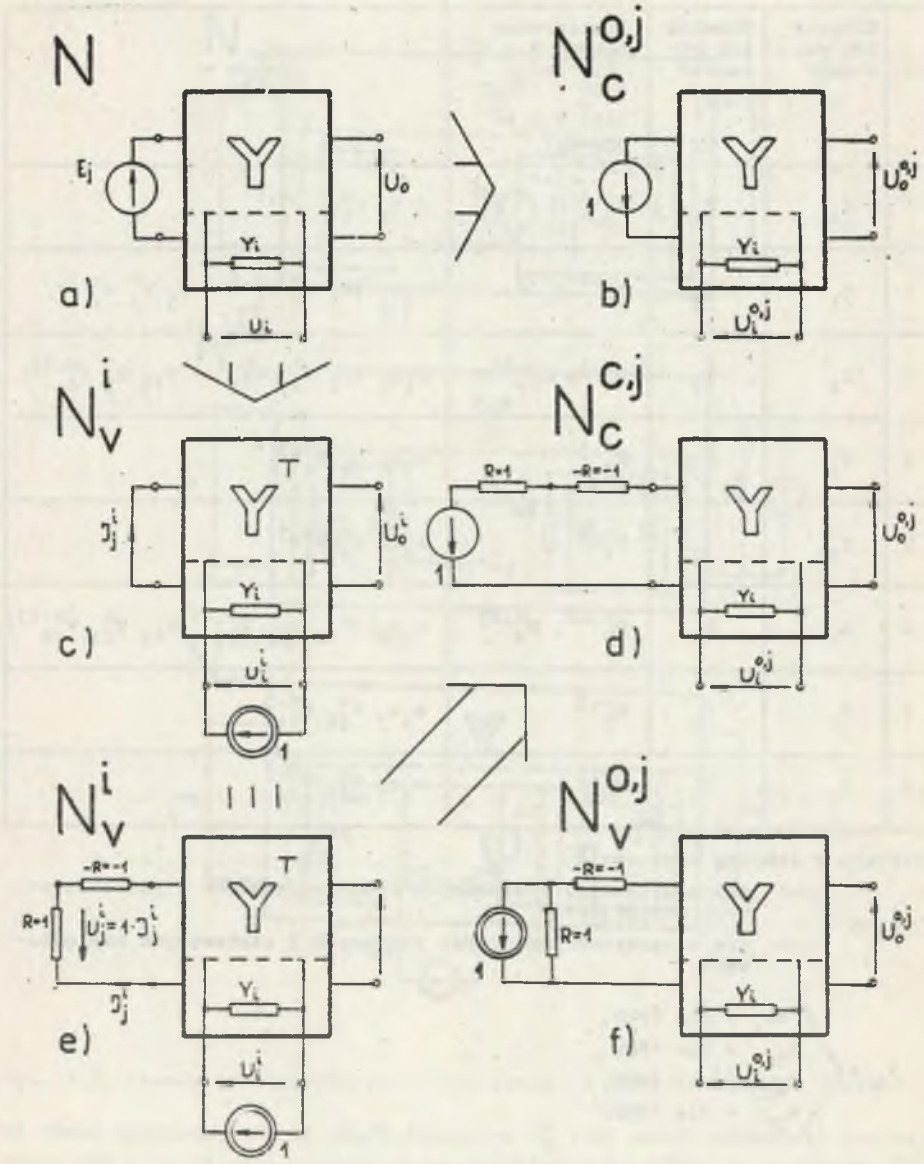
$V_{1i} = \begin{cases} U_{1i} & \text{- dla źródeł sterowanych napięciem,} \\ U_{11i} & \text{- dla źródeł sterowanych prądem,} \end{cases}$

$V_{2i} = \begin{cases} U_{2i} & \text{- dla sterowanych źródeł prądowych,} \\ U_{22i} & \text{- dla sterowanych źródeł napięciowych,} \end{cases}$

N_C - obwód z wyjściem prądowym (T=I),

N_V - obwód z wyjściem napięciowych (T=U),

$N^{o,2i} = \begin{cases} N^{o,2i} & \text{- dla źródeł sterowanych napięciem,} \\ N^{o,22i} & \text{- dla źródeł sterowanych prądem.} \end{cases}$



Rys. 3.6. Modyfikacja obwodów N_V^i oraz $N_C^{o,j}$ dla wykazania, że $I_j^i = 1 \cdot U_i^{o,j}$

Fig. 3.6. Modification of networks N_V^i and $N_C^{o,j}$ to show that $I_j^i = 1 \cdot U_i^{o,j}$

oraz

$$\frac{\partial U_i^o}{\partial E_j} = 0$$

więc

$$\frac{\partial^2 U_o}{\partial Y_i \partial E_j} = a_i a_j I_j^i U_i^o \tag{3.22}$$

gdzie: I_j^i - prąd j-tej gałęzi obwodu dołączonego N_V^i (rys. 3.6c). Obliczanie prądu I_j^i w j-tej gałęzi obwodu N_V^i można zastąpić obliczaniem napięcia i-tej gałęzi obwodu $N_C^{o,j}$. Można bowiem, korzystając z zasady międzywzajemności, wykazać słuszność (obok zależności (3.9)) lematu:

Lemat 3.1: Dla obwodów z rysunku 3.6 prąd j-tej gałęzi obwodu dołączonego N_V^i jest równy napięciu na i-tej gałęzi obwodu podstawowego $N_C^{o,j}$, czyli

$$I_{E_j}^i = I_j^i = 1 \cdot U_i^{o,j} \tag{3.23}$$

gdzie:

I_j^i - prąd j-tej gałęzi obwodu N_V^i, a

$U_i^{o,j}$ - napięcie na i-tej gałęzi obwodu $N_C^{o,j}$.

Dowód wynika z porównania zmodyfikowanych obwodów e) i f) na rysunku 3.6.

Z numerycznego punktu widzenia istotne jest to, że do obliczenia wrażliwości drugiego rzędu potrzebne są dodatkowe wyniki analizy obwodów podstawowych pobudzanych przez SPM podłączone równolegle do elementów na zmiany których wrażliwości te należy wyznaczyć.

Do czasochłonności obliczeń wrócimy jeszcze w rozdziale 7

Ideę obwodów dołączonych można też wykorzystać do obliczania wrażliwości rzędu trzeciego.

3.4. Obliczanie wrażliwości trzeciego rzędu

Podobnie jak dla wrażliwości drugiego rzędu, prześledźmy wyprowadzenie wzoru na wrażliwości trzeciego rzędu funkcji układowej np. $T = U_o$ na zmianę parametrów x_i, x_j oraz x_l. Przeanalizujmy dwa przypadki: a) gdy $x_i = x_j = x_l = Y_i = G_i$ oraz b) gdy $x_i = Y_i$, $x_j = k_j$, $x_l = E_l$.

Ad a)

Ponieważ $x_i = x_j = x_l = G_i$, więc należy obliczyć trzecią pochodną cząstkową napięcia U_o podług G_i.

Korzystając z równania (3.10) uzyskamy zależność:

$$\frac{\partial^3 U_o}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial^3 U_o}{\partial G_i^3} = \frac{\partial}{\partial G_i}\left(2\, U_i\, U_i^o\, U_i^{o,i}\right) =$$

$$= 2\,\frac{\partial U_i}{\partial G_i}\, U_i^o\, U_i^{o,i} + 2\, U_i\, \frac{\partial U_i^o}{\partial G_i}\, U_i^{o,i} + 2\, U_i\, U_i^o\, \frac{\partial U_i^{o,i}}{\partial G_i}.$$

Ponieważ

$$\frac{\partial U_i^{o,i}}{\partial G_i} = -\, U_i^{o,i}\, U_i^{o,i,i} = -U_i^{o,i}\,.\, U_i^i = -U_i^{o,i}\,.\, U_i^{o,i} \tag{3.24}$$

więc

$$\frac{\partial^3 U_o}{\partial G_i^3} = -2\, U_i\, U_i^i\, U_i^o\, U_i^{o,i} - 2\, U_i\, U_i^o\, U_i^{o,i}\, U_i^{o,i} - 2\, U_i\, U_i^o\, U_i^{o,i}\, U_i^{o,i} =$$

$$= -6 U_i U_i^o\, (U_i^{o,i})^2. \tag{3.25}$$

A wrażliwość względna 3 rzędu napięcia U_o na zmianę wartości przewodności G_i określona jest zależnością

$$S_{G_i^3}^{U_o} = \frac{1}{6}\,\frac{\partial^3 U_o}{\partial G_i^3}\,.\,\frac{G_i^3}{U_o} = -U_i\, U_i^o (U_i^{o,i})^2\,.\,\frac{G_i^3}{U_o}. \tag{3.26}$$

Do jej wyznaczenia potrzebne są napięcia na G_i w obwodzie podstawowym $N(U_i)$, dołączonym $N^o(U_i^o)$ oraz podstawowym z wymuszeniem prądowym równoległym do G_i $(N^{o,i}(U_i^{o,i})$. Obwody te analizowaliśmy przy obliczaniu wrażliwości pierwszego i drugiego rzędu.

Ad b)

Ponieważ trzecia pochodna cząstkowa funkcji układowej T równa się

$$\frac{\partial^3 T}{\partial Y_i \partial k_i \partial E_l} = \frac{\partial}{\partial E_l}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial Y_i \partial k_j}\right) = \frac{\partial}{\partial E_l}\left[a_i a_j\, (U_i\, V_{2j}^o\,.\, V_{1j}^{o,i} + V_{1j}\, U_i^o\, U_i^{o,2j})\right] =$$

$$= a_i a_j\, \frac{\partial U_i}{\partial E_l}\, V_{2j}^o\, V_{1j}^{o,i} + a_i a_j\, \frac{\partial V_{1j}}{\partial E_l}\, U_i^o\, U_i^{o,2j}$$

Tablica 3.2

Lp.	Element lub parametr x_i	Element lub parametr x_j	Element lub parametr x_l	$\frac{\partial^3 T}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} =$
1	Y_i	Y_i	Y_i	$-6\, U_i\, U_i^o\, (U_i^{o,i})^2$
2	Y_i	Y_j	Y_l	$a_i a_j a_l \big[U_i (U_j^o U_j^{o,l} U_l^{o,i} + U_l^o U_l^{o,j} U_j^{o,i}) + U_j (U_l^o U_l^{o,i} U_i^{o,j} + U_i^o U_i^{o,l} U_l^{o,j}) + U_l (U_i^o U_i^{o,j} U_j^{o,l} + U_j^o U_j^{o,i} U_i^{o,l})\big]$
3	Y_i	Y_j	k_l	$a_i a_j a_l \big[U_i U_j^o U_j^{o,2l} V_{1l}^{o,i} + U_j^{o,i} V_{2l}^o V_{1l}^{o,j}) + U_j (U_i^o U_i^{o,2l} V_{1l}^{o,j} + U_i^{o,j} V_{2l}^o V_{1l}^{o,i}) + V_{1l} (U_i^o U_i^{o,j} U_j^{o,2l} + U_j^o U_j^{o,i} U_i^{o,2l})\big]$
4	Y_i	Y_j	E_l	$-a_i a_j (U_i^o U_i^{o,j} U_j^{o,l} + U_j^o U_j^{o,i} U_i^{o,l})$
5	Y_i	Y_j	I_l	$a_i a_j (U_i^o U_i^{o,j} U_j^{o,l} + U_j^o U_j^{o,i} U_i^{o,l})$
6	Y_i	k_j	k_l	$a_i a_j a_l \big[U_i (V_{2j}^o V_{1j}^{o,2l} V_{1l}^{o,i} + V_{2l}^o V_{1l}^{o,2} V_{1j}^{o,i}) + V_{1j} (V_{2l}^o V_{1l}^{o,i} U_i^{o,2j} + U_i^o V_i^{o,2l} V_{1l}^{o,2j}) + V_{1l} (U_i^o U_i^{o,2j} V_{1j}^{o,2l} + V_{2j}^o V_{1j}^{o,i} V_i^{o,2l})\big]$
7	Y_i	k_j	E_l	$-a_i a_j (U_i^o U_i^{o,2j} V_{1j}^{o,l} + V_{2j}^o U_i^{o,l} V_{1j}^{o,i})$
8	Y_i	k_j	I_l	$a_i a_j (U_i^o U_i^{o,2j} V_{1j}^{o,l} + V_{2j}^o U_i^{o,l} V_{1j}^{o,i})$
9	k_i	k_j	k_l	$a_i a_j a_l \big[V_{1i} (V_{2j}^o V_{1j}^{o,2l} V_{1l}^{o,2i} + V_{2l}^o V_{1j}^{o,2i} V_{1l}^{o,2j}) + V_{1j} (V_{2l}^o V_{1l}^{o,2i} V_{1i}^{o,2j} + V_{2i}^o V_{1i}^{o,2l} V_{1l}^{o,2j}) + V_{1l} (V_{2i}^o V_{1i}^{o,2j} V_{1j}^{o,2l} + V_{2j}^o V_{1i}^{o,2l} V_{1j}^{o,2i})\big]$
10	k_i	k_j	E_l	$-a_i a_j (V_{2i}^o V_{1i}^{o,2j} V_{1j}^{o,l} + V_{2j}^o V_{1j}^{o,2i} V_{1i}^{o,l})$
11	k_i	k_j	I_l	$a_i a_j (V_{2i}^o V_{1i}^{o,2j} V_{1j}^{o,l} + V_{2j}^o V_{1j}^{o,2i} V_{1i}^{o,l})$

Przyjęto oznaczenia jak w tablicy 3.1.

natomiast pierwsze pochodne można wyznaczyć [64] z zależności:

$$\frac{\partial U_i}{\partial E_l} = -U_l^i = -U_i^{o,l}$$

i

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial E_l} = -U_l^{ij} = -V_{ij}^{o,l}$$

więc wrażliwość funkcji układowej na jednoczesną zmianę Y_i k_j E_l można obliczyć z zależności

$$S^T_{Y_i k_j E_l} = -a_i a_j \left(U_i^o U_i^{o,2j} V_{ij}^{o,l} + V_{2j}^o U_i^{o,l} V_{ij}^{o,i}\right) \frac{Y_i k_j E_l}{T}. \qquad (3.27)$$

Również w tym przypadku nie zachodzi potrzeba dodatkowych analiz bowiem obwody N^o, $N^{o,l}$, $N^{o,i}$ i $N^{o,2j}$ analizowano już przy obliczaniu wrażliwości niższych rzędów.

Jest to ogólna prawidłowość którą można przedstawić jako:

Lemat 3.2: Wrażliwość trzeciego rzędu (i wyższych) prostych funkcji układowych T można obliczyć korzystając z wyników analiz obwodów przeprowadzonych podczas określania wrażliwości niższych rzędów.

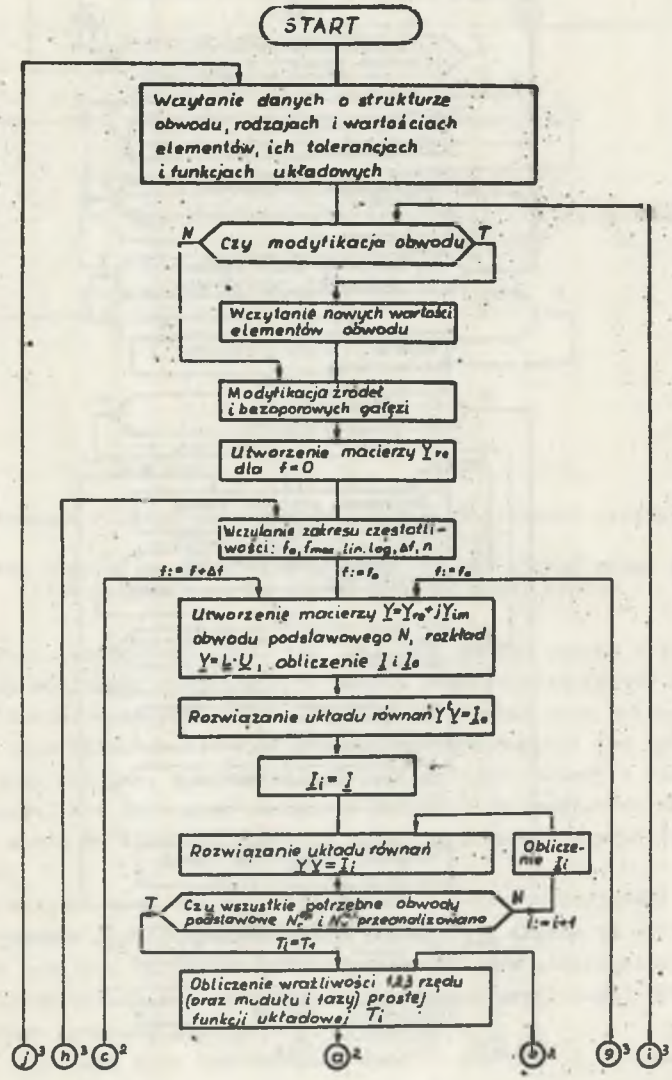
Dowód wynika z analizy tablicy 3.2 w której zebrano wszystkie wzory na wrażliwości 3 rzędu..

3.5. Podsumowanie

Zebrane, w [64] w rozdziale 2 oraz w tablicach 3.1 i 3.2 tego rozdziału, wzory pozwalają na obliczenie współczynników wrażliwości (oraz ich modułów i wrażliwości półwzględnych faz) wyższych rzędów wszystkich funkcji układowych na zmiany dowolnych parametrów obwodu. Na podkreślenie zasługuje fakt, że wzory te obejmują również obwody z wieloma wymuszeniami. Do ich wyprowadzenia wykorzystano też proste uogólnione zasady międzywzajemności (Lemat 3.1).

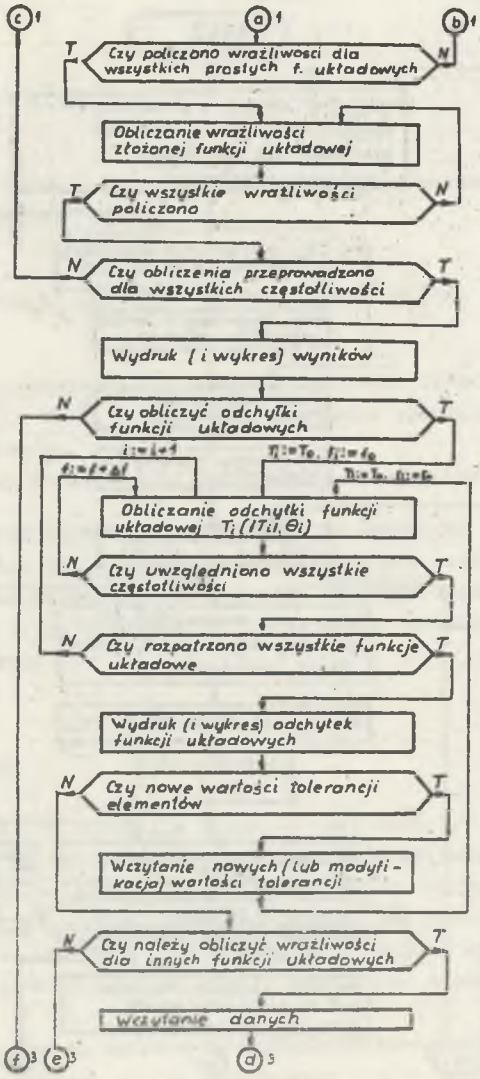
Przypomniano, że do obliczenia współczynników wrażliwości 3 i wyższych rzędów nie są potrzebne wyniki dodatkowych analiz obwodu.

Zauważmy, że w przedstawionych w tablicach 3.1 i 3.2 wzorach obwody dołączone występują tylko raz (dla prostej funkcji układowej). Można, korzystając z zasady międzywzajemności, zaproponować wzory dualne, w których tylko raz występowałby obwód podstawowy.



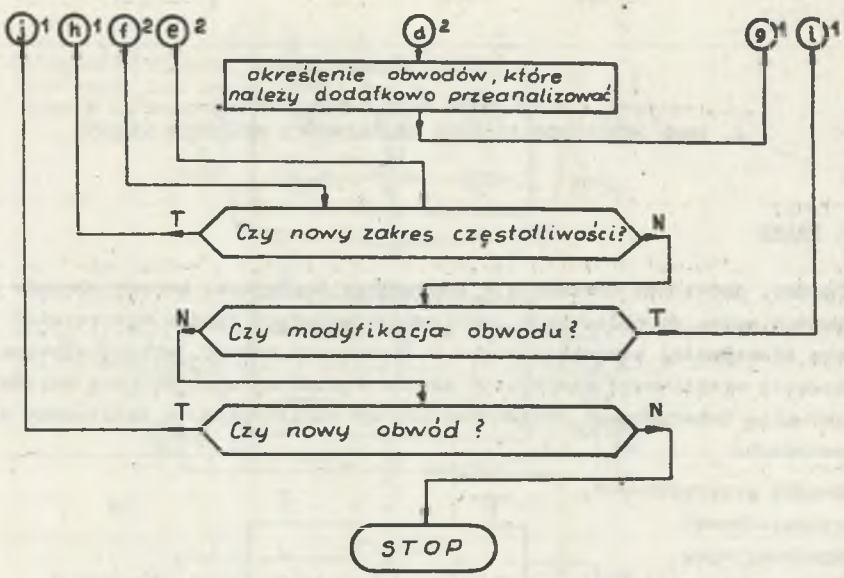
Rys. 3.7a. Schemat blokowy programu obliczania wrażliwości wyższych rzędów metodą obwodów dołączonych

Fig. 3.7a. The block diagram of the program for the higher order sensitivities computation by the adjoint networks method



Rys. 3.7b. Schemat blokowy programu obliczania wrażliwości wyższych rzędów metodą obwodów dołączonych

Fig. 3.7b. The block diagram of the program for the higher order sensitivities computation by the adjoint networks method



Rys. 3.7c. Schemat blokowy programu obliczania wrażliwości wyższych rzędów metodą obwodów dołączonych

Fig. 3.7c. The block diagram of the program for the higher order sensitivities computation by the adjoint networks method

W cytowanych już pracach [264, 116, 287-290] podano ogólne zależności wskazujące na możliwość wykorzystania metody obwodów dołączonych do obliczania wrażliwości wyższych rzędów. Intencją tych prac było pokazanie, że dla różnych form opisu obwodu (np. równaniami hybrydowymi) ten sposób postępowania jest możliwy. W rozważaniach tych pomijano obwody z większą liczbą wymuszeń. Nie spotkałem natomiast rozważań szczegółowych na podstawie których można by zbudować algorytm programu obliczania wrażliwości wyższych rzędów.

Powyższe wnioski oraz wniosek z rozdziału 7 o konkurencyjności numerycznej metody obwodów dołączonych wskazują, że warto i trzeba ją wykorzystać w programach analizy, optymalizacji i syntezy układów elektronicznych.

Program (podprogram) przeznaczony do obliczania wrażliwości wyższych rzędów powinien spełniać następujące założenia:

1. Zapewnić dialogowy tryb wprowadzania danych, poprawek i wymagań.
2. Zapewniać możliwość wykorzystania w programach optymalizacji i syntezy.
3. Uzyskane współczynniki wrażliwości powinny być wykorzystywane do określania np. rozrzutów funkcji układowych i doboru tolerancji.
4. Powinien być uniwersalny i łatwy w obsłudze.

Powyższe wymagania spełnia algorytm którego schemat blokowy (uproszczony), przedstawiono na rys. 3.7.

4. INNE METODY OBLICZANIA WRAŻLIWOŚCI WYŻSZYCH RZĘDÓW

4.1. Wstęp

Oprócz, omówionej dokładnie w poprzednim rozdziale, metody obwodów dołączonych można do obliczania wrażliwości wyższych rzędów wykorzystać (nie zawsze efektywnie) wszystkie znane z literatury metody, wykorzystywane do obliczania wrażliwości pierwszego rzędu. Pominiemy nieefektywną metodę różniczkowania numerycznego i niektóre metody analityczne, a zatrzymamy się na metodach:

- obwodów przyrostowych,
- wyznacznikowej,
- impedancyjnych,
- obliczania wrażliwości z symbolicznej postaci funkcji układowych,
- analitycznych dla prostych funkcji układowych.

4.2. Metoda obwodów przyrostowych [99, 340, 77, 315]

Ideę tej metody, zwanej też metodą układu przyrostowego, przedstawimy dla obwodu opisanego układem n równań potencjałów węzłowych postaci

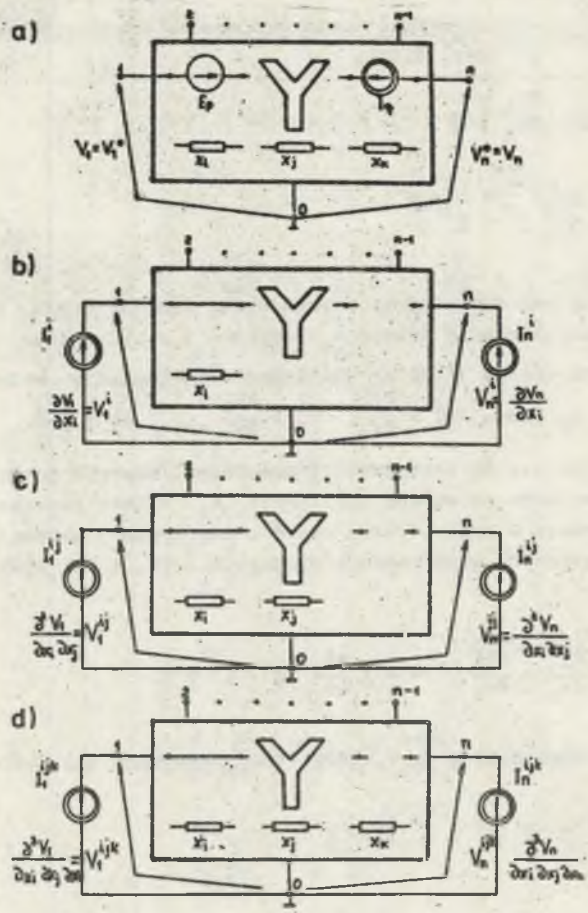
$$\underline{Y}\,\underline{V} = \underline{A}\,\underline{Y}_b\,\underline{A}^t\,\underline{V} = \underline{I} = \underline{A}\,(\underline{J} - \underline{Y}_b\,\underline{E}) \tag{4.1}$$

gdzie:

$\underline{Y}$ - macierz admitancji węzłowych,
$\underline{A}$ - zredukowana macierz incydencji,
$\underline{Y}_b$ - macierz admitancji gałęziowych,
$\underline{J}$ - wektor prądów (SPM),
$\underline{E}$ - wektor napięć (SEM),
$\underline{V} = \underline{V}^o$ - wektor napięć węzłowych,
$\underline{I} = I^o$ - wektor węzłowych wydajności prądowych.

Jeśli interesuje nas wpływ zmian, np. admitancji x_i na wszystkie potencjały węzłowe (rys. 4.1a), to różniczkujemy układ równań (4.1) podług parametru x_i; uzyskamy układ równań

$$\underline{Y}\,\frac{\partial \underline{V}^o}{\partial x_i} = \underline{Y}\,\underline{V}^i = \frac{\partial \underline{I}^o}{\partial x_i} - \frac{\partial \underline{Y}}{\partial x_i}\cdot \underline{V}^o = \underline{I}^i \tag{4.2}$$



Rys. 4.1. Obliczanie wrażliwości wyższych rzędów metodą obwodów przyrostowych

a) obwód podstawowy N do obliczenia wektora potencjałów $\underline{V} = \underline{V}^{o}$, b) obwód do obliczania $\frac{\partial \underline{V}}{\partial \underline{x}_i}$, c) obwód do obliczania $\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial x_i \partial x_j}$ i d) obwód do wyznaczenia $\frac{\partial^3 \underline{V}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$

Fig. 4.1. Calculation of the higher order sensitivities by the method of the incremental networks

a) the basic circuit N for the computations of the potential vector $\underline{V} = \underline{V}^{o}$, b) the circuit for the calculation of $\frac{\partial \underline{V}}{\partial \underline{x}_i}$, c) the circuit for the calculation of $\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial x_i \partial x_j}$, d) the circuit for the calculation of $\frac{\partial^3 \underline{V}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$

gdzie:

$\underline{V}^i = \frac{\partial V_o}{\partial x_i}$ - wektor napięć węzłowych obwodu pobudzanego wektorem węzłowym $\underline{I}^i$ (rys. 4.1b),

$$\frac{\partial \underline{I}^o}{\partial x_i} = -\underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{Y}_b}{\partial x_i} \cdot \underline{E}$$

$$\frac{\partial \underline{Y}}{\partial x_i} = \underline{A} \frac{\partial \underline{Y}_b}{\partial x_i} \underline{A}^t = \underline{Y}^i$$

$\underline{I}^i$ - nowy wektor wydajności prądowych, złożony z SPM $I_1^i, I_2^i, \ldots, I_n^i$ dołączonych między węzłem 0 i węzłami 1,2,...,n (rys. 4.1b).

Rozwiązaniem układu (4.2) są wrażliwości bezwzględne potencjałów na zmianę parametru x_i tzn. $V_1^i = \frac{\partial V_1}{\partial x_i}$, $V_2^i = \frac{\partial V_2}{\partial x_i}$, ..., $V_n^i = \frac{\partial V_n}{\partial x_i}$.

Można odwołać się do intepretacji obwodowej, wówczas do obliczenia wrażliwości potencjałów na zmianę admitancji x_i należy rozwiązać, oprócz obwodu podstawowego N (rys. 4.1a), obwód o identycznej macierzy admitancji $\underline{Y}$, ale o zewnętrznych wymuszeniach prądowych (rys. 4.1b) obliczonych z zależności

$$\underline{I}^i = \frac{\partial \underline{I}^o}{\partial x_i} - \frac{\partial \underline{Y}}{\partial x_i} \underline{V}^o = - \underline{A} \frac{\partial \underline{Y}_b}{\partial x_i} (\underline{E} + A^t \underline{V}^o). \tag{4.3}$$

Różniczkując podług x_j układ (4.2) otrzymamy układ równań

$$\underline{Y}\, \underline{V}^{ij} = -\underline{Y}^i\, \underline{V}^j - \underline{Y}^j\, \underline{V}^i = \underline{I}^{ij} \tag{4.4}$$

gdzie:

$\underline{V}^{ij} = \frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial x_i \partial x_j}$ - wrażliwości bezwzględne drugiego rzędu potencjałów węzłowych na zmiany parametrów x_i oraz x_j,

$\underline{V}^j = \frac{\partial \underline{V}^o}{\partial x_j}$ - wrażliwości bezwzględne potencjałów węzłowych na zmianę parametrów x_j (wynik rozwiązania obwodu z wektorem wymuszeń $\underline{I}_j = \frac{\partial \underline{I}^o}{\partial x_j} - \frac{\partial \underline{Y}}{\partial x_j} \underline{V}^o$),

$$\underline{Y}^j = \frac{\partial \underline{Y}}{\partial x_j} = \underline{A} \frac{\partial \underline{Y}_b}{\partial x_j} \underline{A}^t$$

rozwiązaniem którego są wrażliwości bezwzględne (drugiego rzędu) potencjałów węzłowych na zmiany parametrów x_i oraz x_j.

Wektor wymuszeń zewnętrznych (rys. 4.1c) $\underline{I}^{ij} = -\underline{Y}^i \cdot \underline{V}^j - \underline{Y}^j\, \underline{V}^i$ uzyskamy

Tablica 4.1

Lp.	Parametr			Układ równań węzłowych (przyrostowych)
	i	j	k	
1	-	-	-	$\underline{Y}\,\underline{V}^o = \underline{I}^o = \underline{A}\,\underline{Y}_b\underline{A}^t\underline{V}^o = \underline{A}(\underline{J} - \underline{Y}_b\,\underline{E})$
2	x_i	-	-	$\underline{Y}\,\frac{\partial \underline{V}}{\partial x_i} = \underline{Y}\,\underline{V}^i = \underline{I}^i = \frac{\partial \underline{I}}{\partial x_i} - \frac{\partial \underline{Y}}{\partial x_i}\,\underline{V}^o =$ $= -\underline{A}\,\frac{\partial \underline{Y}_b}{\partial x_i}\,(\underline{E} + \underline{A}^t\,\underline{V}^o) = \frac{\partial \underline{I}}{\partial x_i} - \underline{Y}^i \cdot \underline{V}^o$
3	E_i	-	-	$\underline{Y}\,\frac{\partial \underline{V}}{\partial E_i} = -\underline{A}\,\underline{Y}_b\,\frac{\partial \underline{E}}{\partial E_i}$
4	I_i	-	-	$\underline{Y}\,\frac{\partial \underline{V}}{\partial I_i} = \underline{A}\,\frac{\partial \underline{J}}{\partial I_i}$
5	x_i	x_i	-	$\underline{Y}\,\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial x_i^2} = \underline{Y}\,\underline{V}^{ii} = -2\,\underline{Y}^i\,\underline{V}^i$
6	x_i	x_j	-	$\underline{Y}\,\underline{V}^{ij} = -\underline{Y}^i\,\underline{V}^j - \underline{Y}^j\,\underline{V}^i = \underline{I}^{ij}$
7	x_i	E_j	-	$\underline{Y}\,\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial x_i \partial E_j} = -\underline{Y}^i(\underline{V}^j + \frac{\partial \underline{E}}{\partial E_j}) = -\underline{Y}^i(\underline{V}^j + \underline{E}^j)$
8	x_i	I_j	-	$\underline{Y}\,\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial x_i \partial I_j} = -\underline{Y}^i\,\frac{\partial \underline{V}}{\partial I_j}$
9	x_i	x_i	x_i	$\underline{Y}\,\frac{\partial^3 \underline{V}}{\partial x_i^3} = \underline{Y}\,\underline{V}^{iii} = -3\,\underline{Y}^i \cdot \underline{V}^{ii}$
10	x_i	x_j	x_k	$\underline{Y}\,\underline{V}^{ijk} = -\underline{Y}^i\underline{V}^{jk} - \underline{Y}^j\underline{V}^{ik} - \underline{Y}^k\underline{V}^{ij} = \underline{I}^{ijk}$
11	x_i	x_j	E_k	$\underline{Y}\,\frac{\partial^3 \underline{V}}{\partial x_i \partial x_j \partial E_k} = -\underline{Y}^i\,\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial x_j \partial E_k} - \underline{Y}^j\,\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial x_i \partial E_k}$
12	x_i	x_j	I_k	$\underline{Y}\,\frac{\partial^3 \underline{V}}{\partial x_i \partial x_j \partial I_k} = -\underline{Y}^i\,\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial x_j \partial I_k} - \underline{Y}^j\,\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial x_i \partial I_k}$

po rozwiązaniu obwodu z wymuszeniem $\underline{I}^j$, tzn. po obliczeniu wrażliwości bezwzględnych potencjałów węzłowych na zmianę parametru x_j.

Dla wrażliwości bezwzględnych trzeciego rzędu uzyskamy zależność

$$\underline{Y}\,\underline{V}^{ijk} = -\underline{Y}^i \cdot \underline{V}^{jk} - \underline{Y}^j - \underline{V}^{ik} - \underline{Y}^k\,\underline{V}^{ij} = \underline{I}^{ijk} \tag{4.5}$$

gdzie:

$\underline{V}^{ijk} = \dfrac{\partial^3 \underline{V}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ - wrażliwości bezwzględne trzeciego rzędu potencjałów węzłowych na zmiany parametrów x_i, x_j, x_k,

$\underline{V}^{ij}$, $\underline{V}^{ik}$, $\underline{V}^{jk}$ - wrażliwości bezwzględne (drugiego rzędu) potencjałów węzłowych na zmiany par parametrów odpowiednio (i,j), (i,k), (j,k),

którą można rozwiązać (rys. 4.1d), gdy znane są wrażliwości na zmiany par parametrów.

Analogicznie można wyprowadzić wzory na wrażliwość, gdy parametrami są wartości niesterowanych SEM i SPM. Wyniki zebrano w tablicy 4.1, a schematycznie przedstawiono na rys. 4.1.

4.3. Metoda wyznacznikowa

Wykorzystuje znaną własność wyznaczników [292, 293, 294, 64] : pochodna wyznacznika D podług elementu a_{rs} jest równa kofaktorowi A_{rs}, czyli

$$\frac{\partial D}{\partial a_{rs}} = A_{rs} = (-1)^{r+s} \cdot M_{rs} \tag{4.6}$$

gdzie:

$D = \det[a_{rs}]$ - wyznacznik stopnia n,

$A_{rs} = D_{rs}$ - kofaktor, podwyznacznik względny, dopełnienie algebraiczne elementu a_{rs},

M_{rs} - minor, podwyznacznik (n-1) stopnia uzyskany z wyznacznika D przez skreślenie r-go wiersza i s-tej kolumny.

Jeśli obwód opisany jest układem równań węzłowych o postaci (4.1) to, np. potencjał węzła i-go można obliczyć z zależności

$$V_i = \frac{D_i}{D}$$

gdzie:

$D = \det \underline{Y}$

D_i - wyznacznik macierzy uzyskany z $\underline{Y}$ przez zastąpienie i-tej kolimny składowymi wektora węzłowych wydajności prądowych $\underline{I}$,

a ogólnie funkcja układowa T jest równa ilorazowi wyznaczników licznika (D_N) i mianownika (D_D), czyli

$$T = \frac{D_N}{D_D}. \tag{4.7}$$

Ponieważ w analizie obwodów interesuje nas wpływ zmian parametrów, a nie elementów wyznacznika, to należy zmodyfikować zależność (4.6). Jeśli parametrem jest, np. admitancja x_i i-tego dwójnika lub parametr i-tego źródła sterowanego to może on wystąpić w czterech (lub mniej) elementach macierzy admitancyjnej $\underline{Y}$, na przecięciu np. wiersza i_1, i_2 z kolumnami i_3, i_4. Wówczas pochodna wyznacznika macierzy $\underline{Y}$ podług x_i może być policzona z zależności [292, 64]

$$\frac{\partial D(\underline{Y})}{\partial x_i} = \frac{\partial D}{\partial x_i} = D_{(i_1+i_2)(i_3+i_4)} = D_{\hat{i}} \tag{4.8}$$

ale funkcja układowa (4.7) jest złożoną funkcją wyznaczników, więc z (2.9) uzyskamy wzór na wrażliwość względną w postaci

$$S^T_{x_i} = S^{D_N}_{x_i} - S^{D_D}_{x_i} = \frac{x_i}{D_N} \cdot D_{N,(i_1+i_2)(i_3+i_4)} - \frac{x_i}{D_d} \cdot D_{D,(i_1+i_2)(i_3+i_4)} =$$

$$= \frac{x_i}{D_N} \cdot D_{N,\hat{i}} - \frac{x_i}{D_D} \cdot D_{D,\hat{i}} \tag{4.9}$$

gdzie

$$\hat{i} \triangleq (i_1+i_2)(i_3+i_4).$$

Dla wyznaczenia wrażliwości drugiego rzędu funkcji układowej T, na zmiany parametrów x_i oraz x_j, z zależności (2.26) należy obliczyć dodatkowo wrażliwości drugiego rzędu $S^{D_N}_{x_i x_j}$ oraz $S^{D_D}_{x_i x_j}$.
Jeśli admitancja x_j występuje w czterech elementach macierzy $\underline{Y}$, na przecięciu wierszy j_1, j_2 z kolumnami j_3, j_4, to stosując dwukrotnie wzór (4.8) otrzymamy wzory na drugie pochodne, a z nich na wrażliwości względne, D_N i D_D na zmiany parametrów x_i i x_j

$$S^{D_N}_{x_i x_j} = a_{ij} \frac{x_i x_j}{D_N} D_{N,(i_1+i_2)(i_3+i_4)(j_1+j_2)(j_3+j_4)} = a_{ij} \frac{x_i x_j}{D_N} D_{N,\hat{i}\hat{j}} \tag{4.10}$$

oraz

$$S^{D_D}_{x_i x_j} = a_{ij} \frac{x_i x_j}{D_D} D_{D,(i_1+i_2)(i_3+i_4)(j_1+j_2)(j_3+j_4)} = a_{ij} \frac{x_i x_j}{D_D} D_{D,\hat{i}\hat{j}} \tag{4.11}$$

gdzie

$$a_{ij} = \begin{cases} 0,5 & \text{dla} \quad i = j, \\ 1 & \text{dla} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Dla wrażliwości trzeciego rzędu (2.35) należy obliczyć dodatkowo trzecie pochodne D_N i D_D według x_i, x_j oraz x_k. Jeżeli x_k występuje na przecięciu wierszy k_1, k_2 z kolumnami k_3, k_4 macierzy $\underline{Y}$ to trzecia pochodna wyznacznika D_N określona jest zależnością

$$\frac{\partial^3 D_N}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = D_{N,(i_1+i_2)(i_3+i_4)(j_1+j_2)(j_3+j_4)(k_1+k_2)(k_3+k_4)} = D_{N,\hat{i}\,\hat{j}\,\hat{k}},$$

analogicznie określona jest trzecia pochodna D_D.
Nieco inaczej obliczana jest pochodna według E_j, pokażemy to dla $T = V_i$

$$\frac{\partial V_i}{\partial E_j} = \frac{\partial}{\partial E_j} \left(\frac{D_i}{D}\right) = y_j \frac{D_{i,\hat{j}}}{D} \tag{4.12}$$

gdzie

y_j - admitancja gałęzi w której występuje SEM E_j,
$\hat{j} \hat{=} (j_1+j_2)i$.

Analogicznie można wyprowadzić pozostałe wzory na wrażliwości pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu. W tablicy 4.2 zebrano wszystkie wzory dla $T=V_i$.

4.4. Metody impedancyjne

Wrażliwości wyższych rzędów elementów macierzy impedancji węzłowych na zmiany admitancji obwodów, można obliczyć rozwijając znane metody obliczania wrażliwości pierwszego rzędu. Metody te przedstawiono bardzo interesująco w [256], a ich rozwinięcie nie jest kłopotliwe.

Omówimy dwie metody zaprezentowane przez 1) Fidlera [101] i 2) Neilla [222]. Obie odnoszą się do obwodów opisanych układem równań węzłowych (4.1), których rozwiązanie można przedstawić w postaci

$$\underline{V} = \underline{Y}^{-1} \underline{I} = \underline{Z}\, \underline{I} \quad , \tag{4.13}$$

gdzie

$\underline{Z}$ - macierz impedancji węzłowych obwodu.

Z (4.13) wynika (jeśli istnieje rozwiązanie), że

$$\underline{Z}\,\underline{Y} = 1, \tag{4.14}$$

gdzie

$\underline{1}$ - jest macierzą jednostkową.

Różniczkując (4.14) podług admitancji (parametru) x_i obwodu otrzymamy zależność

$$\underline{Z}'_i = -\underline{Z}\,\underline{Y}'_i\,\underline{Z} \tag{4.15}$$

którą wykorzystano w metodach prezentowanych w pracach [101] i [222].

Tablica 4.2

Lp.	Parametr j	Parametr k	Parametr l	Wrażliwość względna dla $T = V_i$	Uwagi
1	2	3	4	5	6
1	Y_j	-	-	$\frac{\partial V_i}{\partial Y_j} = \frac{D_{i,\hat{j}}}{D} - \frac{D_i D_{\hat{j}}}{D^2}$	$\hat{j} \hat{=} (j_1+j_2) \cdot (j_3+j_4)$
2	E_j	-	-	$\frac{\partial V_i}{\partial E_j} = Y_j \frac{D_{i,\hat{j}}}{D}$	$\hat{j} \hat{=} (j_1+j_2)i$
3	I_j	-	-	$\frac{\partial V_i}{\partial I_j} = \frac{D_{i,\hat{j}}}{D}$	$\hat{j} \hat{=} (j_1+j_2)i$
4	Y_j	Y_k	-	$\frac{\partial^2 V_i}{\partial Y_j \partial Y_k} = \frac{D_{i,\hat{j}\hat{k}}}{D} - \frac{D_{i,\hat{j}} D_{\hat{k}}}{D^2} - \frac{D_{i,\hat{k}} D_{\hat{j}}}{D^2} - \frac{D_i D_{\hat{j}\hat{k}}}{D^2} + 2\frac{D_i D_{\hat{j}} D_{\hat{k}}}{D^3}$	
5	Y_j	E_k	-	$\frac{\partial^2 V_i}{\partial Y_j E_k} = \frac{Y_k}{D^2}(D.D_{i,\hat{j}\hat{k}} - D_{i,\hat{k}} D_{\hat{j}})$	$k \neq j$
				$\frac{\partial^2 V_i}{\partial Y_j \partial E_j} = \frac{Y_j}{D^2}(\frac{1}{Y_j} D.D_{i,\hat{j}} + D.D_{i,\hat{j}\hat{j}} - D_{i,\hat{j}} D_{\hat{j}})$	$k = j$

cd. tablicy 4.2

1	2	3	4	5	6
6	Y_j	I_k	-	$\frac{\partial^2 V_i}{\partial Y_j \partial I_k} = \frac{1}{D^2}(D \cdot D_{i,\hat{j}\,\hat{k}} - D_{i,\hat{k}}\, D_{\hat{j}})$	
7	Y_j	Y_k	Y_l	$\frac{\partial^3 V_i}{\partial Y_j \partial Y_k \partial Y_l} = \frac{D_{i,\hat{j}\,\hat{k}\,\hat{l}}}{D} - \frac{D_{i,\hat{j}\,\hat{k}} \cdot D_{\hat{l}}}{D^2} - \frac{D_{i,\hat{j}\,\hat{l}} \cdot D_{\hat{k}}}{D^2} - \frac{D_{i,\hat{k}\,\hat{l}} \cdot D_{\hat{j}}}{D^2} - \frac{D_{i,\hat{j}} \cdot D_{\hat{k}\hat{l}}}{D^2} - \frac{D_{i,\hat{k}} \cdot D_{\hat{j}\,\hat{l}}}{D^2} - \frac{D_{i,\hat{l}} \cdot D_{\hat{j}\,\hat{k}}}{D^2} - \frac{D_i \cdot D_{\hat{j}\,\hat{k}\,\hat{l}}}{D^2} + 2\frac{D_{i,\hat{j}}\, D_{\hat{k}} \cdot D_{\hat{l}}}{D^3} + 2\frac{D_{i,\hat{k}} \cdot D_{\hat{j}}\, D_{\hat{l}}}{D^3} + 2\frac{D_{i,\hat{l}} \cdot D_{\hat{j}} \cdot D_{\hat{k}}}{D^3} + 2\frac{D_i D_{\hat{j}\hat{k}}\, D_{\hat{l}}}{D^3} + 2\frac{D_i D_{\hat{j}\hat{l}} \cdot D_{\hat{k}}}{D^3} + 2\frac{D_i \cdot D_{\hat{k}\,\hat{l}} \cdot D_{\hat{j}}}{D^3} - 6\frac{D_i D_{\hat{j}}\, D_{\hat{k}} D_{\hat{l}}}{D^4}$	
8	Y_j	Y_k	E_l	$\frac{\partial^3 V_i}{\partial Y_j \partial Y_k \partial E_l} = Y_l \left(\frac{D_{i,\hat{j}\,\hat{k}\,\hat{l}}}{D} - \frac{D_{i,\hat{j}\,\hat{l}} \cdot D_{\hat{k}}}{D^2} - \frac{D_{i,\hat{k}\,\hat{l}} \cdot D_{\hat{j}}}{D^2} - \frac{D_{i,\hat{l}} \cdot D_{\hat{j}\,\hat{k}}}{D^2} + 2\frac{D_{i,\hat{l}} \cdot D_{\hat{j}} \cdot D_{\hat{k}}}{D^3}\right) = A$	$l \neq k$ $(l \neq j)$
				$\frac{\partial^3 V_i}{\partial Y_j \partial Y_k \partial E_k} = A + \frac{D_{i,\hat{j}\,\hat{k}}}{D} - \frac{D_{i,\hat{k}} \cdot D_{\hat{j}}}{D^2}$	$l = k$ $(l = j)$
				$\frac{\partial^3 V_i}{\partial Y_j^2 \partial E_j} = A + 2\frac{D_{i,\hat{j}\,\hat{j}}}{D} - 2\frac{D_{i,\hat{j}} \cdot D_{\hat{j}}}{D^2}$	$l=k=j$

cd. tablicy 4.2

1	2	3	4	5	6
9	Y_j	Y_k	I_l	$\frac{\partial^3 v_i}{\partial Y_j \partial Y_k \partial I_l} = \frac{D_{i,\hat{j}\,\hat{k}\,\hat{l}}}{D} - \frac{D_{i,\hat{j}\,\hat{l}} \cdot D_{\hat{k}}}{D^2} - \frac{D_{i,\hat{k}\,\hat{l}} \cdot D_{\hat{j}}}{D^2} - \frac{D_{i,\hat{l}} \cdot D_{\hat{j}\,\hat{k}}}{D^2} + 2\,\frac{D_{i,\hat{l}}\, D_{\hat{j}} \cdot D_{\hat{k}}}{D^3}$	

Ad 1)

Łatwo teraz uzyskać pochodne wyższych rzędów bowiem $\underline{Y}'' = \underline{0}$. Druga pochodna po x_i równa się

$$\underline{Z}_i'' = 2\,\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}, \tag{4.16}$$

a podług x_i oraz x_j wynosi

$$\underline{Z}_{ij}'' = \underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_j'\underline{Z} + \underline{Z}\,\underline{Y}_j'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}. \tag{4.17}$$

Podobnie liczy się pochodne trzeciego rzędu (a z nich wrażliwości). Wyniki zebrano w tablicy 4.3.

Tablica 4.3

Lp.	i	j	k	Pochodne impedancji węzłowych $\underline{Z}$ według admitancji macierzy $\underline{Y}$
1	x_i	-	-	$\underline{Z}_i' = -\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}$
2	x_i	x_i	-	$\underline{Z}_i'' = 2\,\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}$
3	x_i	x_j	-	$\underline{Z}_{ij}'' = \underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_j'\,\underline{Z} + \underline{Z}\,\underline{Y}_j'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}$
4	x_i	x_i	x_i	$\underline{Z}_i''' = -6\,\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}$
5	x_i	x_j	x_k	$\underline{Z}_{ijk}''' = -\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_j'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_k'\,\underline{Z} - \underline{Z}\,\underline{Y}_k'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_j'\,\underline{Z} - \underline{Z}\,\underline{Y}_j'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_k'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z} - \underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_k'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_j'\,\underline{Z} - \underline{Z}\,\underline{Y}_j'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_k'\,\underline{Z} - \underline{Z}\,\underline{Y}_k'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_j'\,\underline{Z}\,\underline{Y}_i'\,\underline{Z}$

Ponieważ macierze $\underline{Y}'$ i $\underline{Z}'$ są macierzami rzadkimi, obliczenia mogą być mało efektywne numerycznie. Można, rozkładając odpowiednio macierz $\underline{Y}'$ [101], uczynić tę metodę bardziej efektywną. Zauważmy, że elementy macierzy impedancyjnej $\underline{Z}$ mogą być określone przez odpowiednie ilorazy napięć i prądów obwodu.

Ad 2)

Przyrost $\delta \underline{Z}$ można obliczyć (z (4.14) i (4.15)) ograniczając się do pierwszego członu rozkładu admitancji $\underline{Y}$ w szereg [222], wówczas przyrost pierwszego rzędu będzie równy

$$\delta \underline{Z}^{(1)} = -\underline{Z} \cdot \delta \underline{Y} \cdot \underline{Z}. \tag{4.18}$$

Po uwzględnieniu dwóch członów rozkładu uzyskamy przyrost drugiego rzędu w postaci

$$\delta Z^{(2)} = -\underline{Z} \cdot \delta \underline{Y} \cdot (\underline{Z} - \delta \underline{Z}^{(1)}) = -\underline{Z} \cdot \delta \underline{Y} \cdot Z(\underline{1} - \delta \underline{Y} \cdot \underline{Z}) =$$

$$= \delta \underline{Z}^{(1)} (\underline{1} - \delta \underline{Y} \cdot \underline{Z}), \tag{4.19}$$

który można traktować jako polepszenie (modyfikację) uzyskanego wcześniej metodą wyznacznikową przyrostu rzędu pierwszego.

4.5. Metody obliczania wrażliwości z symbolicznej postaci funkcji układowych

W zależności od tego czy wszystkie, niektóre, czy żadne elementy układu (obwodu) są reprezentowane przez symbole mamy trzy typy funkcji symbolicznych [77]:

Typ 1. Całkowicie symboliczne funkcje układowe,

Typ 2. Częściowo symboliczne funkcje układowe,

Typ 3. Wymierne funkcje zmiennej s o współczynnikach liczbowych.

Dla każdego typu funkcji rozwinęły się właściwe, wykorzystujące informacje uzyskane przy ich tworzeniu, metody obliczania wrażliwości.

Ad 1)

Istnieje szereg metod wyznaczania numerycznego funkcji sieci [7, 77, 197, 309, 355].
Kontynuatorzy prac Bellerta [17] z Instytutu Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej uzyskali efektywne metody dekompozycji funkcji układo-

wych. Umożliwiło to wykorzystanie symbolicznych funkcji układowych do analizy dużych obwodów. Wyniki (i literaturę) zawiera praca Starzyka [309]. Uogólnienie i zastosowanie do obliczenia wrażliwości podano w [323], [324] i [310] oraz w pracach prezentowanych przez tych Autorów na wcześniejszych Krajowych Konferencjach Teorii Obwodów i Układów Elektronicznych.

Ad 2)

Sposób tworzenia funkcji biliniowych i wieloliniowych podał już Fryze [111], ale dopiero w 1965 roku Parker, Peskin i Chirlian [249] zastosowali ją (odkrywając po raz kolejny) do obliczenia wrażliwości małoprzyrostowych pierwszego rzędu. Często znalezienie współczynników funkcji jest bardziej czasochłonne niż obliczenie wrażliwości.

Wzory na wrażliwość wyższych rzędów dla funkcji biliniowej postaci

$$T(x) = \frac{A + B \cdot x}{C + D \cdot x} \tag{4.20}$$

prezentowane są w tablicy 4.4.

Tablica 4.4

Rząd wrażliwości	Wrażliwość biliniowej funkcji układowej $T = \frac{A + B \cdot x}{C + D \cdot x}$ na zmianę parametru x
1	$S_x^T = \frac{x(B \cdot C - A \cdot D)}{(A + B \cdot x)(C + D \cdot x)}$
2	$S_{x^2}^T = -\frac{x^2 D(BC - AD)}{(A + B \cdot x)(C + D \cdot x)^2} = -\frac{x \cdot D}{C + D \cdot x} \cdot S_x^T$
3	$S_{x^3}^T = \frac{x^3 D^2 (BC - AD)}{(A + B \cdot x)(C + D \cdot x)^3} = -\frac{x \cdot D}{C + D \cdot x} \cdot S_{x^2}^T = \frac{x^2 D^2}{(C + D \cdot x)^2} S_x^T$

Analogiczne wyniki uzyskamy, gdy T zależy od dwóch lub trzech parametrów.

Ad 3)

Jak już wspomniano w przeglądzie literatury obliczanie wrażliwości dla funkcji układowej tej postaci rozpoczęto już w 1955 roku [245] i są one ciągle aktualne [184, 183, 262, 315, 336].

4.6. Metoda analityczna dla prostych funkcji układowych

Interesują nas wprawdzie metody przydatne w analizie numerycznej, ale na koniec zajmiemy się obliczeniem wrażliwości prostych funkcji układowych danych w postaci analitycznej. Wyniki uzyskane częściowo w rozdziale 2, podano w tablicy 4.5.

Tablica 4.5

Lp.	T	S_x^T	$S_{x^2}^T$	$S_{x^3}^T$
1	$T=T(y)$; $y=y(x)$	$S_x^T=S_y^T.S_x^y$	$S_{x^2}^T=S_{y^2}^T(S_x^y)^2+S_y^T.S_{x^2}^y$	$S_{x^3}^T=S_{y^3}^T(S_x^y)^3+2S_{y^2}^T.S_x^y.S_{x^2}^y+S_y^T.S_{x^3}^y$
2	$T=\lvert T\rvert e^{j\Theta}$	$S_x^T=S_x^{\lvert T\rvert}+jQ_x^T$	$S_{x^2}^T=S_{x^2}^{\lvert T\rvert}-\frac{1}{2}\cdot(Q_x^T)^2+$ $+j(Q_{x^2}^T+S_x^{\lvert T\rvert}.Q_x^T)$	$S_{x^3}^T=S_{x^3}^{\lvert T\rvert}-\frac{1}{2}S_x^{\lvert T\rvert}(Q_x^T)^2-$ $-Q_{x^2}^T.Q_x^T+j(Q_{x^3}^T+S_{x^2}^{\lvert T\rvert}\cdot Q_x^T+$ $+S_x^{\lvert T\rvert}\cdot Q_{x^2}^T-\frac{1}{6}(Q_x^T)^3)$
3	$T=T_1.T_2$	$S_x^T=S_x^{T_1}+S_x^{T_2}$	$S_{x^2}^T=S_{x^2}^{T_1}+S_x^{T_1}.S_x^{T_2}+S_{x^2}^{T_2}$	$S_{x^3}^T=S_{x^3}^{T_1}+S_{x^2}^{T_1}.S_x^{T_2}+S_x^{T_1}.S_{x^2}^{T_2}+S_{x^3}^{T_2}$
4	$T=\frac{T_1}{T_2}$	$S_x^T=S_x^{T_1}-S_x^{T_2}$	$S_{x^2}^T=S_{x^2}^{T_1}-S_x^{T_1}.S_x^{T_2}+$ $+(S_x^{T_2})^2-S_{x^2}^{T_2}$	$S_{x^3}^T=S_{x^3}^{T_1}-S_{x^2}^{T_1}.S_x^{T_2}-S_x^{T_1}.S_{x^2}^{T_2}+$ $+S_x^{T_1}.(S_x^{T_2})^2-(S_x^{T_2})^3-S_{x^3}^{T_2}+$ $+2S_x^{T_2}.S_{x^2}^{T_2}$
5	$T=(T_1)^n$	$S_x^T=n.S_x^{T_1}$	$S_{x^2}^T=\frac{n(n-1)}{2}(S_x^{T_1})^2+$ $+n.S_{x^2}^{T_1}$	$S_{x^3}^T=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}(S_x^{T_1})^3+$ $+n(n-1)S_{x^2}^{T_1}+n.S_{x^3}^{T_1}$
6	$y=\frac{1}{x}$	$S_y^T=-S_x^T$	$S_{y^2}^T=S_{x^2}^T+S_x^T$	$S_{y^3}^T=-S_{x^3}^T-2S_{x^2}^T-S_x^T$

4.7. Podsumowanie

Przeprowadzony w tym rozdziale przegląd nie wyczerpuje wszystkich metod, ale zawiera metody najistotniejsze dla analizy numerycznej.

Pierwsza z omawianych, metoda obwodów przyrostowych, pozwala na określanie współczynników wpływów dla prostych funkcji układowych. Autor w tablicy 4.1 wprowadził uzupełnienie o wzory określające wrażliwość potencjałów na zmiany wymuszeń. Jeśli pominie się interpretację obwodową, przedstawioną na rys. 4.1, to równania (4.2) - (4.5) nazywa się równaniami wrażliwościowymi [315].

Drugą metodę też przedstawiono, dla zachowania jednolitego podejścia, przy obliczaniu wrażliwości prostej funkcji układowej, ale jest ona bardziej efektywna dla złożonych funkcji układowych [64]. Nie spotkałem w literaturze wzorów (dla wrażliwości wyższych rzędów) przedstawionych w tablicy 4.2.

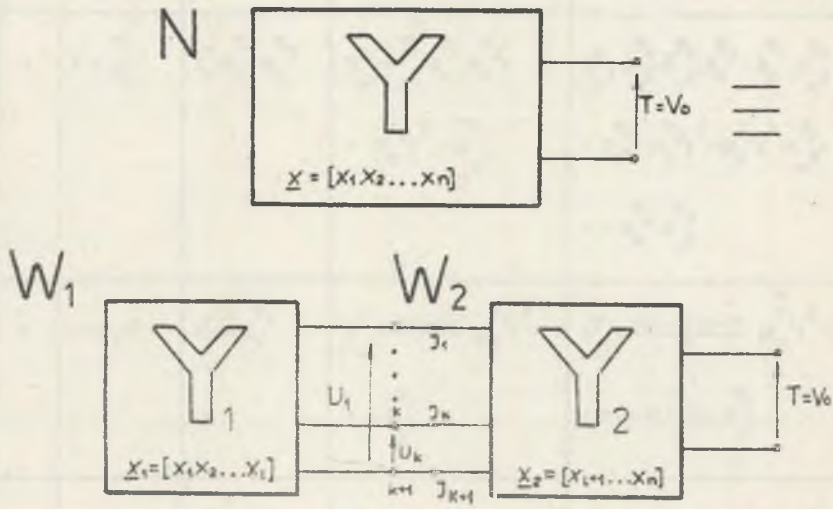
5. OBLICZANIE WRAŻLIWOŚCI OBWODÓW Z WIELOBIEGUNNIKAMI

5.1. Wstęp

Obliczanie wrażliwości metodami analitycznymi sprowadza się, bez względu na zastosowaną metodę, do wielokrotnego rozwiązania układu równań opisujących obwód. Rozsądna dekompozycja, czyli podział obwodu na podobwody, skraca czas rozwiązywania układu równań i wymagana jest do tego mniejsza pamięć operacyjna. Powstało szereg prac poświęconych dekompozycji i jej zastosowaniom [232, 127, 200, 169, 140, 37, 164, 277, 136, 274, 77, 309, 271, 42, 72, 74]. Oszczędności przy obliczaniu wrażliwości zwłaszcza wyższych rzędów mogą być znaczne. Do ich oceny powrócimy w rozdziale 7.

Często fragment (lub fragmenty) obwodu określony jest przez parametry wielobiegunnika lub makromodelu.

Obydwa przypadki, tj. dekompozycję i występowanie wielobiegunników można sprowadzić do analizy obwodu z wielobiegunnikami. W skrajnym przypadku mogą występować tylko wielobiegunniki.



Rys. 5.1. Dekompozycja obwodu N przez podział w (k+1) węzłach, na dwa wielobiegunniki aktywny W_1 i pasywny W_2

Fig. 5.1. The decomposition of the circuit N by the division in (k+1) nodes for two multipoles: active W_1 and passive W_2

Obliczanie wrażliwości obwodów z wielobiegunnikami omówiono na przykładzie obwodu N opisanego przez n niezależnych parametrów $x_1, x_2, \ldots x_n$ [72, 74]. Zapiszemy je w postaci $\underline{x} = [x_1, x_2, \ldots x_n]$. Obwód ten składa się z dwóch wielobiegunników aktywnego W_1 i pasywnego W_2 (rys. 5.1) połączonych w (k+1) węzłach. Z wielobiegunnikiem W_1 związanych jest l pierwszych, z ogólnej liczby n, niezależnych parametrów, oznaczmy je jako elementy macierzy $\underline{x}_1 = [x_1, x_2, \ldots, x_l]$, pozostałe, z wielobiegunnikiem W_2, jako elementy macierzy $\underline{x}_2 = [x_{l+1}, \ldots, x_n]$.

5.2. Wrażliwości pierwszego rzędu

Dla wrażliwości pierwszego rzędu odchyłka funkcji układowej T obliczana jest z zależności

$$t_T = S^T_{\underline{x}} \cdot t_{\underline{x}} \tag{5.1}$$

gdzie:

$S^T_{\underline{x}} = \left[S^T_{x_1}, \ldots, S^T_{x_l}, S^T_{x_{l+1}}, \ldots, S^T_{x_n}\right] = \left[S^T_{\underline{x}_1} \; S^T_{\underline{x}_2}\right]$ - macierz współczynników wrażliwości pierwszego rzędu funkcji układowej na zmiany parametrów x_i,

$t^t_{\underline{x}} = \left[t_{x_1}, \ldots, t_{x_l}, t_{x_{l+1}}, \ldots, t_{x_n}\right] = \left[t^t_{\underline{x}_1} \; t^t_{\underline{x}_2}\right]$ - macierz tolerancji parametrów,

którą można rozpisać w postaci

$$t_T = \left[S^T_{\underline{x}_1} \; S^T_{\underline{x}_2}\right] \cdot \begin{bmatrix} t_{\underline{x}_1} \\ t_{\underline{x}_2} \end{bmatrix} = S^T_{\underline{x}_1} \cdot t_{\underline{x}_1} + S^T_{\underline{x}_2} \cdot t_{\underline{x}_2} \cdot t \tag{5.2}$$

Elementy macierzy wrażliwości $S^T_{\underline{x}_2}$ można obliczyć bezpośrednio, np. metodą obwodów dołączonych po zastąpieniu wielobiegunnika W_1 k równoważnymi SEM $U_1, \ldots, U_k$ włączonymi odpowiednio między zaciski 1 i (k+1), 2 i (k+1) itd. Bezpośrednie obliczanie elementów macierzy $S^T_{\underline{x}_1}$ wymaga analizy całego obwodu. Mniejszą pracochłonność obliczeń zapewnia metoda pośrednia. Można wykazać [164], że

$$S^T_{\underline{x}_1} = S^T_{\underline{U}} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1} \tag{5.3}$$

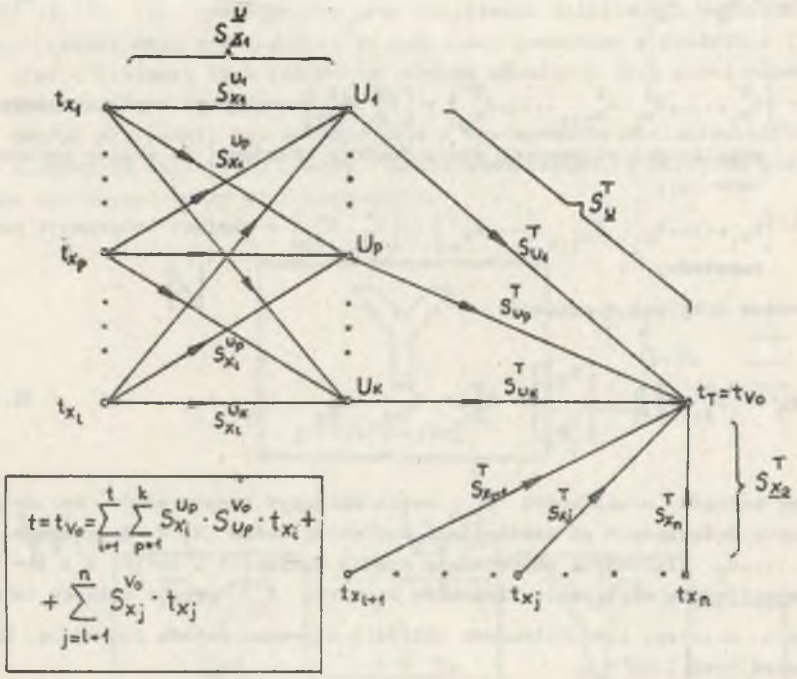
gdzie:

$\underline{U} = [U_1, \ldots, U_k]$ - wektor napięć między zaciskiem (k+1) a zaciskami i (i=1(1)k),

$S^T_{\underline{U}} = \left[S^T_{U_1}\ S^T_{U_2}\ \dots\ S^T_{U_k}\right]$ - macierz współczynników wrażliwości funkcji układowej na zmiany napięć U_i,

$$S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1} = \begin{bmatrix} S^{U_1}_{x_1} & S^{U_1}_{x_2} & \dots & S^{U_1}_{x_l} \\ S^{U_2}_{x_1} & S^{U_2}_{x_2} & \dots & S^{U_2}_{x_l} \\ \vdots & & & \\ S^{U_k}_{x_1} & S^{U_k}_{x_2} & \dots & S^{U_k}_{x_l} \end{bmatrix}$$

- macierz współczynników wrażliwości napięć U_i $(i=1(1)k)$ na zmiany parametrów $x_j (j=1(1)l)$ wielobiegunnika W_1.



Rys. 5.2. Graf, odpowiadający równaniu (5.4), ilustrujący obliczanie wrażliwości pierwszego rzędu obwodu złożonego z dwóch wielobiegunników połączonych w (k+1) węzłach

Fig. 5.2. The graph for equation (5.4), which illustrates the computation of the first order sensitivity for the circuit composed of two multipoles connected in (k+1) nodes

Po podstawieniu (5.3) do (5.2) uzyskamy końcowy wzór na odchyłkę funkcji układowej, obwodu złożonego z dwóch wielobiegunników, dla wrażliwości pierwszego rzędu w postaci (rys. 5.2):

$$t_T^{(1)} = S_{\underline{U}}^T \cdot S_{\underline{x}_1}^{\underline{U}} \cdot t_{\underline{x}_1} + S_{\underline{x}_2}^T \cdot t_{\underline{x}_2} = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{k} S_{U_j}^T \cdot S_{x_i}^{U_j}\right) \cdot t_{x_i} + \sum_{i=l+1}^{n} S_{x_i}^T \cdot t_{x_i} . \tag{5.4}$$

5.3. Wrażliwości drugiego rzędu

Przyrost odchyłki funkcji układowej, po uwzględnieniu wrażliwości drugiego rzędu, obliczymy z zależności

$$t_T^{(2)} = t_T^{(1)} + t_{\underline{x}}^t \cdot S_{\underline{x}^2}^T \cdot t_{\underline{x}} = t_T^{(1)} + \begin{bmatrix} t_{\underline{x}_1}^t & t_{\underline{x}_2}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{\underline{x}_1\underline{x}_1}^T & S_{\underline{x}_2\underline{x}_1}^T \\ S_{\underline{x}_1\underline{x}_2}^T & S_{\underline{x}_2\underline{x}_2}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{\underline{x}_1} \\ t_{\underline{x}_2} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Najpierw jednak trzeba obliczyć elementy macierzy $S_{\underline{x}_1^2}^T$, $S_{\underline{x}_1\underline{x}_2}^T$ i $S_{\underline{x}_2^2}^T$. Elementy ostatniej macierzy można obliczyć, np. metodą obwodów dołączonych. Elementy dwóch pierwszych policzymy w sposób pośredni bez analizy całego obwodu.

Różniczkując podług $\underline{x}_1$ pochodną $\frac{\partial T}{\partial \underline{x}_1}$ uzyskamy

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \underline{x}_1^2} = \frac{\partial}{\partial \underline{x}_1}\left(\frac{\partial T}{\partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}_1}\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial \underline{U}\partial \underline{x}_1} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}_1} + \frac{\partial T}{\partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \underline{x}_1^2} \tag{5.6}$$

a drugą pochodną funkcji układowej podług $\underline{U}$ i $\underline{x}_1$, którą trudno wyznaczyć dla obwodu, można przedstawić w postaci

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \underline{U}\partial \underline{x}_1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \underline{U}^2} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}_1} + \frac{\partial T}{\partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \underline{x}_1 \partial \underline{U}} . \tag{5.7}$$

Po podstawieniu (5.7) do (.5.6) uzyskamy wzór na drugą pochodną funkcji układowej na zmiany parametrów wielobiegunnika W_1 w postaci:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \underline{x}_1^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \underline{U}^2} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}_1} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}_1} + \frac{\partial T}{\partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \underline{x}_1 \partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}_1} + \frac{\partial T}{\partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \underline{x}_1^2}. \tag{5.8}$$

Z zależności tej, po uwzględnieniu dopuszczalnych działań na macierzach, uzyskamy wzór na wrażliwość względną drugiego rzędu funkcji układowej T na jednoczesną zmianę dwóch parametrów związanych z wielobiegunnikiem W_1 w postaci:

$$S^T_{\underline{x}_1^2} = (S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1})^t \cdot (S^T_{\underline{U}^2})^{y-z} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1} + (S^T_{\underline{U}} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1^2})^{y-z} + (S^T_{\underline{U}} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{U}\,\underline{x}_1})^{y-z\,t} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1} \tag{5.9}$$

gdzie:

t - oznacza transpozycję macierzy,

$y-z$ - obrót macierzy o 90° z płaszczyzny y0x do płaszczyzny z0x.

Analogicznie postępując można wykazać, że elementy macierzy wrażliwości $S^T_{\underline{x}_1\underline{x}_2}$, czyli współczynniki wrażliwości (drugiego rzędu) funkcji układowej na jednoczesną zmianę dwóch parametrów: jednego związanego z wielobiegunnikiem W_1 a drugiego z wielobiegunnikiem W_2, można obliczyć z zależności

$$S^T_{\underline{x}_1\underline{x}_2} = (S^T_{\underline{U}\,\underline{x}_2})^{y-z} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1} + (S^T_{\underline{U}} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1\underline{x}_2})^{y-z}. \tag{5.10}$$

Obliczanie elementów macierzy występujących po prawych stronach równań (5.9) i (5.10), omówione zostanie dokładniej na przykładzie w podrozdziale 5.5.

5.4. Wrażliwości trzeciego rzędu

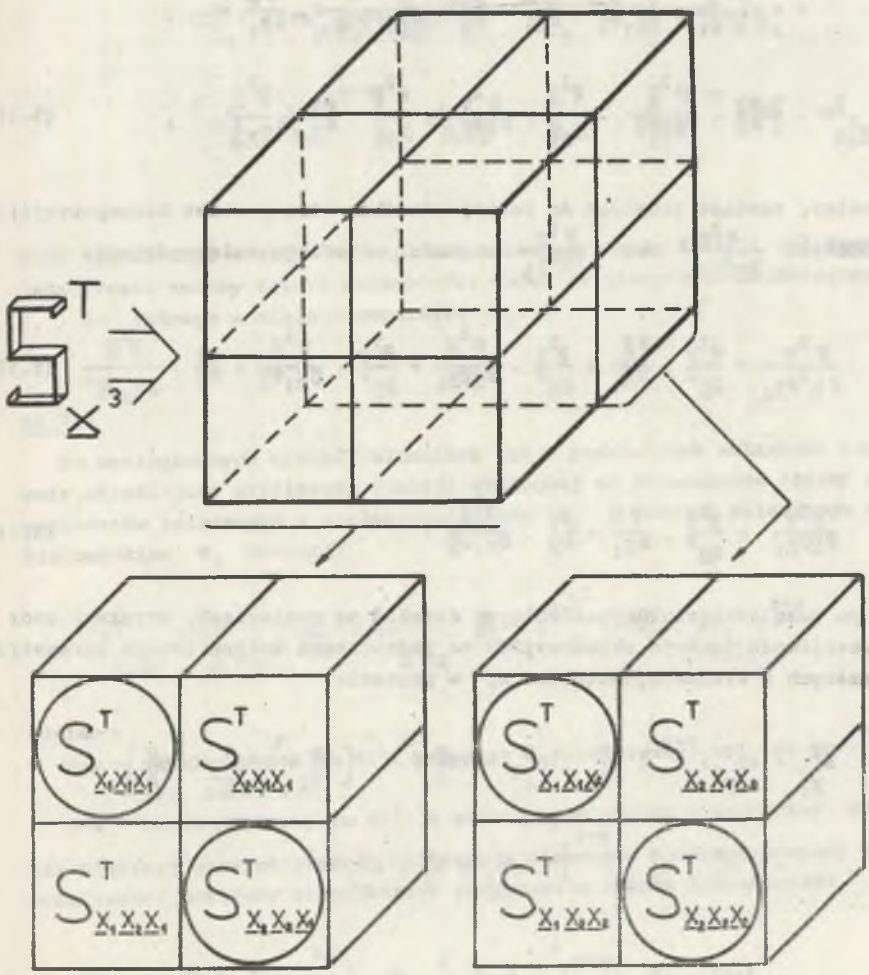
Odchyłka funkcji układowej, po uwzględnieniu wrażliwości rzędu trzeciego, określona jest zależnością

$$t_T^{(3)} = t_T^{(2)} + t^t_{\underline{x}}(t^t_{\underline{x}}\, S^T_{\underline{x}^3}\, t_{\underline{x}})^{y-z} = S^T_{\underline{x}} \cdot t_{\underline{x}} + t^t_{\underline{x}} \cdot S^T_{\underline{x}^2} \cdot t_{\underline{x}} +$$

$$+ t^t_{\underline{x}}(t^t_{\underline{x}}\, S^T_{\underline{x}^3}\, t_{\underline{x}})^{y-z}. \tag{5.11}$$

Jeśli trzeba ją wyznaczyć to należy, w sposób ekonomiczny, obliczyć elementy macierzy $S^T_{\underline{x}^3}$. Po jej rozrysowaniu (rys. 5.3) widać, że istotne jest podanie algorytmu obliczania elementów macierzy 1) $S^T_{\underline{x}_1\underline{x}_1\underline{x}_1}$, 2) $S^T_{\underline{x}_1\underline{x}_1\underline{x}_2}$,

3) $S^T_{\underline{x}_2\underline{x}_2\underline{x}_1}$ oraz 4) $S^T_{\underline{x}_2\underline{x}_2\underline{x}_2}$. Elementy ostatniej macierzy można obliczyć wykorzystując, np. podane wzory dla metody obwodów dołączonych. Zajmijmy się więc obliczeniem elementów pierwszych trzech macierzy. Podobnie, jak przy wyprowadzaniu wzorów na wrażliwości drugiego rzędu wykorzystamy symboliczny uproszczony zapis różniczkowania.



Rys. 5.3. Elementy macierzy wrażliwości trzeciego rzędu

Fig. 5.3. Elements of the third order sensitivity matrix

Ad 1)

Jeśli do wzoru na trzecią pochodną funkcji układowej T na zmianę $\underline{x}_1$, postaci

$$\frac{\partial^3 T}{\partial \underline{x}_1^3} = \frac{\partial^3 T}{\partial \underline{U}^2 \partial \underline{x}_1} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}_1} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}_1} + 2\frac{\partial^2 T}{\partial \underline{U}^2} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}_1} \cdot \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \underline{x}_1^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 T}{\partial \underline{U} \partial \underline{x}_1} \cdot \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \underline{x}_1 \partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}_1} + \frac{\partial T}{\partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial^3 \underline{U}}{\partial \underline{x}_1 \partial \underline{U} \partial \underline{x}_1} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}_1} +$$

$$+ \frac{\partial T}{\partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \underline{x}_1 \partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \underline{x}_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \underline{U} \partial \underline{x}_1} \cdot \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \underline{x}_1^2} + \frac{\partial T}{\partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial^3 \underline{U}}{\partial \underline{x}_1^3} \tag{5.13}$$

wstawimy, zamiast trudnych do policzenia (bez utraty zalet dekompozycji) pochodnych $\frac{\partial^3 T}{\partial \underline{U}^2 \partial \underline{x}_1}$ oraz $\frac{\partial^2 T}{\partial \underline{U} \partial \underline{x}_1}$ wartości określone zależnościami:

$$\frac{\partial^3 T}{\partial \underline{U}^2 \partial \underline{x}_1} = \frac{\partial^3 T}{\partial \underline{U}^3} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}_1} + \frac{\partial^2 T}{\partial \underline{U}^2} \cdot \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \underline{U} \partial \underline{x}_1} + \frac{\partial^2 T}{\partial \underline{U}^2} \cdot \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \underline{x}_1 \partial \underline{U}} + \frac{\partial T}{\partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial^3 \underline{U}}{\partial \underline{x}_2 \partial \underline{U}^2} \tag{5.13}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \underline{U} \partial \underline{x}_1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \underline{U}^2} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}_1} + \frac{\partial T}{\partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \underline{x}_1 \partial \underline{U}} \tag{5.14}$$

to, po uwzględnieniu dopuszczalnych działań na macierzach, uzyskamy wzór na wrażliwość funkcji układowej T na jednoczesną zmianę trzech parametrów związanych z wielobiegunnikiem W_1 w postaci:

$$S^T_{\underline{x}_1^3} = (S^T_{\underline{U}^2})^{y-z} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1^2} + (S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1})^t \cdot \left[(S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1})^t \cdot S^T_{\underline{U}^3} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1}\right]^{y-z} +$$

$$+ \left[(S^T_{\underline{U}} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1 \underline{U}})^{y-z}\right]^t \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1^2} + S^T_{\underline{U}} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1^3} +$$

$$+ \left[(S^T_{\underline{U}} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1 \underline{U}})^{y-z}\right]^t \cdot \left[(S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1})^t \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1 \underline{U}}\right]^{y-z} + S^T_{\underline{U}} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{U}\, \underline{x}_1^2} \cdot S^{\underline{U}}_{\underline{x}_1} \tag{5.15}$$

Ad 2)

Po wstawieniu zależności (5.14) do wzoru na trzecią pochodną podług $\underline{x}_1^2$ i $\underline{x}_2$ i uwzględnieniu dopuszczalnych działań na macierzach otrzymamy wzór postaci:

$$S^T_{\underline{x}_1^2\underline{x}_2} = (S^U_{\underline{x}_1})^t \cdot S^T_{\underline{U}^2\underline{x}_2} \cdot S^U_{\underline{x}_1} + (S^T_{\underline{U}^2} \cdot S^U_{\underline{x}_1})^t \cdot S^U_{\underline{x}_1\underline{x}_2} +$$

$$+ (S^U_{\underline{x}_1})^t \cdot (S^T_{\underline{U}\,\underline{x}_2} \cdot S^U_{\underline{x}_1\underline{U}})^{y-z} + (S^U_{\underline{x}_1})^t \cdot S^T_{\underline{U}} \cdot S^U_{\underline{x}_1\underline{U}\,\underline{x}_2} +$$

$$+ \left[(S^T_{\underline{U}} \cdot S^U_{\underline{x}_1\underline{U}})^{y-z}\right]^t \cdot S^U_{\underline{x}_1\underline{x}_2} + (S^T_{\underline{U}\,\underline{x}_2} \cdot S^U_{\underline{x}_1^2})^{y-z} + S^T_{\underline{U}} \cdot S^U_{\underline{x}_1^2\underline{x}_2} \quad (5.16)$$

Wzór ten określa wrażliwość względną trzeciego rzędu funkcji układowej na jednoczesne zmiany trzech parametrów: dwóch związanych z wielobiegunnikiem W_1 i jednego z wielobiegunnikiem W_2.

Ad 3)

Po analogicznych przekształceniach jak w poprzednich związkach uzyskamy wzór określający wrażliwość funkcji układowej na jednoczesne zmiany dwóch parametrów związanych z wielobiegunnikiem W_2 i jednego związanego z wielobiegunnikiem W_1 postaci:

$$S^T_{\underline{x}_2^2\underline{x}_1} = S^T_{\underline{U}\,\underline{x}_2^2} \cdot S^U_{\underline{x}_1} + (S^T_{\underline{U}\,\underline{x}_2} \cdot S^U_{\underline{x}_1\underline{x}_2})^{x-y} + (S^T_{\underline{U}} \cdot S^U_{\underline{x}_2^2\underline{x}_1})^{z-x} \quad (5.17)$$

gdzie:

x-y - oznacza obrót (o 90°) macierzy z płaszczyzny x0z do płaszczyzny y0z, natomiast

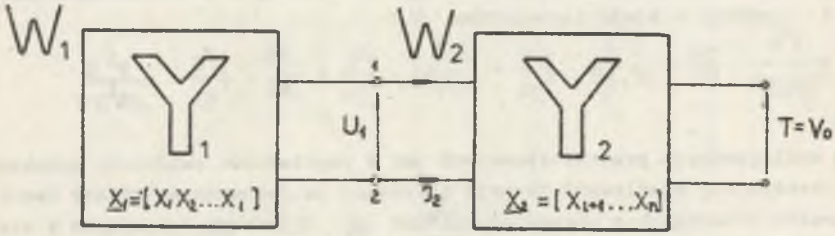
z-x - obrót macierzy (o 90°) z płaszczyzny z0y do płaszczyzny x0y.

Dla większej przejrzystości, obliczanie elementów podanych powyżej macierzy wrażliwości pokażemy na prostszym przykładzie obwodu łańcuchowego.

5.5. Dekompozycja obwodów łańcuchowych

Jeśli przedstawiony na rys. 5.1 obwód można podzielić na dwa wielobiegunniki połączone dwoma przewodami (k=1) a funkcją układową T jest przy zerowej tolerancji parametrów wymuszeń napięcie wyjściowe $V_o (T=V_o)$ (rys. 5.4) to przedstawione w poprzednich podrozdziałach wzory na współczynniki wrażliwości znacznie się uproszczą. Jeśli wielobiegunnik W_2 jest pasywny to wrażliwość $S^{T}_{U_j} = S^{V_o}_{U_1} = 1$, a wzór (5.4) można zapisać w postaci

$$t^{(1)}_{V_o} = \sum_{i=1}^{l} S^{U_1}_{x_i} \cdot t_{x_i} + \sum_{j=l+1}^{n} S^{V_o}_{x_j} \cdot t_{x_j} . \tag{5.18}$$

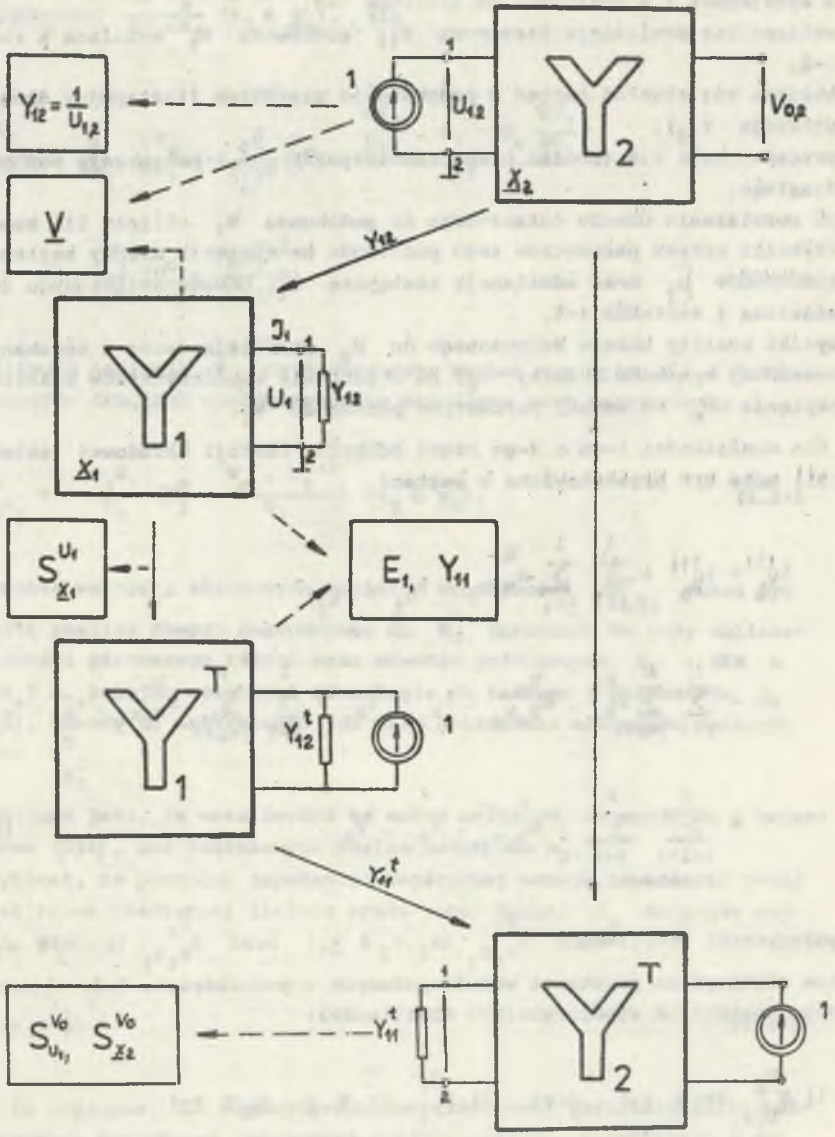


Rys. 5.4. Dekompozycja obwodu łańcuchowego na dwa wielobiegunniki połączone dwoma przewodami

Fig. 5.4. The decomposition of the ladder network into two multipoles conneced by two conductors

Wymagana jest więc znajomość współczynników wrażliwości napięcia wyjściowego na zmiany parametrów wielobiegunnika W_2 oraz wrażliwości napięcia U_1 na zmiany parametrów wielobiegunnika pierwszego W_1.

Postępowanie przy obliczaniu wartości znamionowych potencjałów węzłowych obwodu (macierz $\underline{V}$) i współczynników wrażliwości, metodą obwodów dołączonych, przedstawiono schematycznie na rys. 5.5.



Rys. 5.5. Kolejne etapy obliczania punktów pracy i wrażliwości pierwszego rzędu zdekomponowanego układu łańcuchowego

Fig. 5.5. Subsequent stages of the computation of working points and first order sensitivities of the decomposed ladder system

Po dekompozycji obwodu na dwa wielobiegunniki wykonuje się kolejno następujące czynności:

- oblicza się rozkład napięć w wielobiegunniku W_2 zasilanym przez SPM o wydajności 1 A dołączoną do zacisków 1-2,
- oblicza się admitancję zastępczą Y_{12} podobwodu W_2 widzianą z zacisków 1-2,
- oblicza się rozkład napięć w podobwodzie pierwszym (zastępując drugi admitancją Y_{12}),
- przeskalowuje się (mnożąc przez współczynnik $\frac{U_1}{U_{1,2}}$) potencjały podobwodu drugiego,
- po rozwiązaniu obwodu dołączonego do podobwodu W_1 oblicza się współczynniki wpływu parametrów tego podobwodu na napięcie między zaciskami podobwodów U_1 oraz admitancję zastępczą Y_1^t obwodu dołączonego do W_1 widzianą z zacisków 1-2,
- wyniki analizy obwodu dołączonego do W_2 pozwalają (wraz z uzyskanymi wcześniej wynikami analizy W_2) na obliczenie współczynników wrażliwości napięcia V_o na zmiany parametrów podobwodu W_2.

Dla wrażliwości 1-go i 2-go rzędu odchyłka funkcji układowej (zależności (5.5)) może być przedstawiona w postaci

$$t_{V_o}^{(2)} = t_{V_o}^{(1)} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=i}^{l} S_{x_i x_j}^{U_1} \cdot t_{x_i} \cdot t_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=l+1}^{n} S_{x_i}^{U_1} \cdot S_{U_1 x_j}^{V_o} \cdot t_{x_i} \cdot t_{x_j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=l+1}^{n} S_{x_i x_j}^{U_1} \cdot t_{x_i} \cdot t_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=l+1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \cdot S_{x_i x_j}^{V_o} \cdot t_{x_i} \cdot t_{x_j}. \qquad (5.19)$$

Współczynniki wrażliwości $S_{x_i x_j}^{U_1}$ $(x_i, x_j \in \underline{x}_1)$ oraz $S_{x_i x_j}^{V_o}$ $(x_i, x_j \in \underline{x}_2)$ można obliczyć na podstawie wzorów podanych w podrozdziale 3.3; wyjaśnienia wymaga obliczanie współczynników wrażliwości:

1) $S_{U_1^* x_j}^{V_o}$ $(x_j \in \underline{x}_2)$ oraz 2) $S_{x_i x_j}^{U_1}$ $(x_i \in \underline{x}_1,\ \underline{x}_j \in \underline{x}_2)$.

Dla czytelności wyjaśnień przyjmijmy, że parametrami są admitancje dwójników.

Ad 1)

Nie można bezpośrednio, metodą obwodów dołączonych, obliczyć wartości drugiej pochodnej $\frac{\partial^2 V_o}{\partial U_1 \partial x_j}$ $(x_j \in \underline{x}_2)$, ale

$$\frac{\partial^2 V_o}{\partial U_1 \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial V_o}{\partial U_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{V_o}{U_1}\right) = \frac{\frac{\partial V_o}{\partial x_j} \cdot U_1 - V_o \frac{\partial U_1}{\partial x_j}}{U_1^2} =$$

$$= -\frac{U_j}{U_1}\left(U_j^o - \frac{V_o U_1^{o,j}}{U_1}\right) \tag{5.20}$$

więc wrażliwość napięcia V_o na jednoczesną zmianę napięcia U_1 i jednego z parametrów drugiego wielobiegunnika określona jest zależnością:

$$S_{U_1 x_j}^{V_o} = -\frac{x_j U_j}{V_o}\left(U_j^o - \frac{V_o \cdot U_1^{o,j}}{U_1}\right) \quad (x_j \in \underline{x}_2). \tag{5.21}$$

Do wyznaczenia wartości składowych macierzy wrażliwości $S_{U_1 \underline{x}_2}^{V_o}$ muszą być znane wyniki analizy obwodu dołączonego do W_2 (zrobiono to przy obliczaniu wrażliwości pierwszego rzędu) oraz obwodów podstawowych N_2 z SPM o wydajności 1 A, kolejno dołączoną równolegle do każdego z parametrów $\underline{x}_2$ (rys. 5.6a). Obwody te analizowano już przy obliczaniu elementów macierzy wrażliwości $S_{\underline{x}_2}^T$.

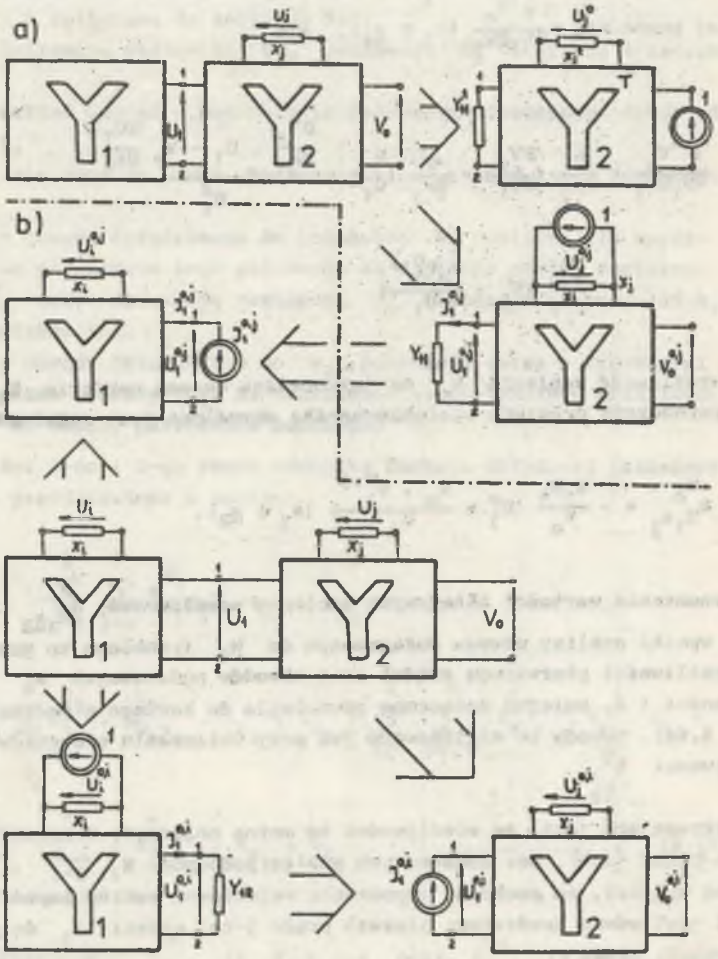
Interesujące jest, że wrażliwości te można obliczyć, korzystając z twierdzenia Cohna [256], bez dodatkowych analiz podobwodu N_2.

Cohn wykazał, że pochodna impedancji wejściowej według impedancji j-tej gałęzi jest równa kwadratowi ilorazu prądu j-tej gałęzi I_j do prądu wejściowego I, czyli

$$\frac{\partial Z}{\partial Z_j} = \left(\frac{I_j}{I}\right)^2. \tag{5.22}$$

Zauważmy, że napięcie U_1 między przewodami łączącymi wielobiegunniki można, na podstawie dotychczas uzyskanych wyników analizy, przedstawić w postaci

$$U_1 = \frac{E_1}{Z_{11} + Z_{12}} Z_{12}$$



Rys. 5.6. Ilustracja do obliczania wrażliwości 2-go rzędu obwodu złożonego z dwu wielobiegunników. Obwody dołączone potrzebne przy obliczaniu wrażliwości $S^{V_o}_{U_1 x_1}$ przedstawiono na rys. a), natomiast na rys. b) przedstawiono schematycznie obwody (i związki między nimi) wykorzystywane przy obliczaniu wrażliwości $S^{U_1}_{x_i x_j}$ (dla $x_i \in \underline{x}_1$, $x_j \in \underline{x}_2$)

Fig. 5.6. Illustration of the second order sensitivity calculation for the circuit composed of two multipoles. The adjoint networks needed for the computation of sensitivity $S^{V_o}_{U_1 x_j}$ are presented in fig a) schematic illustrations of the circuits (and connections among them) used for computation of sensitivity $S^{U_1}_{x_i x_j}$ (for $x_i \in \underline{x}_1$, $x_j \in \underline{x}_2$) are presented in fig. b)

gdzie:

$Z_{12} = \frac{1}{Y_{12}}$ - impedancja wejściowa wielobiegunnika drugiego widziana z zacisków 1-2,

$Z_{11} = \frac{1}{Y_{11}}$ - impedancja zastępcza pierwszego wielobiegunnika widziana z zacisków 1-2,

E_1 - SEM zastępcza wielobiegunnika widziana z zacisków 1-2.

Wykorzystując zależności (5.21), (5.22) i metodę obwodów dołączonych uzyskamy inną postać wzoru na wrażliwość napięcia V_o na zmiany napięcia U_1 i parametru x_j drugiego podobwodu, a mianowicie

$$S^{V_o}_{U_1 x_j} = -\frac{x_j}{V_o} U_j U_j^o + \frac{x_j \cdot U_j^2}{E_1 U_1 Y_{11}}. \tag{5.23}$$

Ad 2)

Druga pochodna napięcia U_1 podług parametru x_i (należącego do pierwszego wielobiegunnika) i parametru x_j (z drugiego wielobiegunnika) określona jest zależnością

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_i \partial x_j} = U_i U_j^{o,i} U_1^{o,j} + U_j U_i^{o,j} U_1^{o,i}$$

więc

$$S^{U_1}_{x_i x_j} = \frac{x_i x_j}{U_1} (U_i U_j^{o,i} U_1^{o,j} + U_j U_i^{o,j} U_1^{o,i}) \tag{5.24}$$

Jeśli wykorzystamy uprzednio policzony prąd $I_1^{o,j}$ (rys. 5.6a) oraz prąd $I_1^{o,i}$ (rys. 5.6b), to wszystkie napięcia występujące w zależności (5.24) można uzyskać z analizy podobwodów. Sposób postępowania przedstawiono schematycznie na rys. 5.6b.

Po prześledzeniu toku obliczeń wszystkich wrażliwości drugiego rzędu dochodzi się do wniosku, że konieczna jest:

1) (l+1)-krotna analiza wielobiegunnika W_1 i jednokrotna obwodu do niego dołączona,
2) (n-l+1)-krotna analiza wielobiegunnika W_2 i jednokrotna obwodu do niego dołączonego.

Do efektywności dekompozycji wrócimy w rozdziale 7.2.

Również wzory na wrażliwości trzeciego rzędu znacznie się uproszczą. Wrażliwość na jednoczesną zmianę trzech parametrów wielobiegunnika W_1 (zależność (5.15)) uprości się do postaci

$$S^{V_o}_{\underline{x}_1^3} = S^{V_o}_{U_1} \cdot S^{U_1}_{\underline{x}_1^3} = 1 \cdot S^{U_1}_{\underline{x}_1^3}, \tag{5.25}$$

zależność (5.16) przyjmie skróconą postać

$$S^{V_o}_{\underline{x}_1^2\underline{x}_2} = S^{V_o}_{U_1} \cdot S^{U_1}_{\underline{x}_1^2\underline{x}_2} + S^{V_o}_{U_1\underline{x}_2} \cdot S^{U_1}_{\underline{x}_1^2} = 1 \cdot S^{U_1}_{\underline{x}_1^2\underline{x}_2} + S^{V_o}_{U_1\underline{x}_2} \cdot S^{U_1}_{\underline{x}_1^2} \tag{5.26}$$

natomiast z zależności (5.17) otrzymamy

$$S^{V_o}_{\underline{x}_2^2\underline{x}_1} = S^{V_o}_{U_1\underline{x}_2^2} \cdot S^{U_1}_{\underline{x}_1} + S^{V_o}_{U_1\underline{x}_2} \cdot S^{U_1}_{\underline{x}_1\underline{x}_2} + S^{V_o}_{U_1} \cdot S^{U_1}_{\underline{x}_2^2\underline{x}_1} . \tag{5.27}$$

Współczynniki wrażliwości: $S^{U_1}_{\underline{x}_1^3}$, $S^{U_1}_{\underline{x}_1^2\underline{x}_2}$, $S^{U_1}_{\underline{x}_2^2\underline{x}_1}$ oraz $S^{V_o}_{\underline{x}_2^3}$ można obliczyć korzystając z zależności podanych w tablicy 3.2. Prześledźmy obliczanie ostatniego współczynnika, tzn. $S^{V_o}_{U_1\underline{x}_2^2}$. Skorzystamy ze wzoru (5.20) na drugą pochodną i po zróżniczkowaniu go podług $x_k (x_k \in \underline{x}_2)$ otrzymamy

$$\frac{\partial^3 V_o}{\partial U_1 \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(- \frac{U_j U_j^o}{U_1} - \frac{V_o \cdot U_j \cdot U_1^{o,j}}{U_1^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{U_1^2}(U_1 . U_k . U_j^{o,k} U_j^o + U_1 . U_j U_k^o U_k^{o,j} - U_j U_j^o U_k U_1^{o,k}) +$$

$$+ \frac{1}{U_1^3} (U_1 U_k U_j^{o,k} V_o U_1^{o,j} + U_1 U_j U_k U_k^o U_1^{o,j} +$$

$$+ U_1 U_j U_k^{o,j} V_o U_1^{o,k} - 2 U_j U_k V_o U_1^{o,j} U_1^{o,k}). \tag{5.28}$$

Wszystkie napięcia występujące w równaniu (5.28) zostały już wcześniej obliczone przy wyznaczaniu wrażliwości pierwszego i drugiego rzędu.

5.6. Podsumowanie

W rozdziale tym wskazano na możliwość efektywnej analizy wrażliwości wyższych rzędów układów z wielobiegunnikami. Przedstawiono ogólne macierzowe wzory na wrażliwości 1, 2 i 3-go rzędu, a dla układu łańcuchowego zapre-

zentowano algorytm ich obliczania. Dokładniejszą ocenę efektywności numerycznej analizy wrażliwości obwodów zdekomponowanych przeprowadzono w rozdziale 7.

Znane były ogólne zależności tylko dla wrażliwości 1-go rzędu układów zawierających wielobiegunniki [164].

6. NIEZMIENNIKI WRAŻLIWOŚCI WYŻSZYCH RZĘDÓW

6.1. Wstęp

Przyjmuje się, że w 1964 roku Belove [18] pierwszy zwrócił uwagę na istnienie niezmienników wrażliwości, ale wzór Eulera [98] który wyraża niezmienniczność wrażliwości funkcji jednorodnych powstał znacznie wcześniej. Dalsze prace Holta [143, 145, 146], Roski [265], Ceyhuna [45], Gehera [115] i El-Turky [96] uogólniają teorię niezmienników na szeroką klasę obwodów liniowych skupionych. Kolejne publikacje wykazują istnienie niezmienników obwodów nieliniowych [319] i obwodów o stałych rozłożonych [320].

Zwrócono też uwagę na istnienie niezmienników dla wrażliwości wyższych rzędów [116, 73, 76].

Inny kierunek badań, ściśle związany z niezmiennikami, poświęcony teorii obwodów równoważnych zapoczątkował Schoeffler [28]. Dalsze prace [231, 35, 290, 47, 84, 48, 168, 229, 128, 117] pozwoliły na jej uściślenie, uogólnienie oraz wykorzystanie do syntezy układów o optymalnych lub założonych wrażliwościach.

Niezmiennikom wrażliwości różnych układów sterowania poświęcono bardzo wiele ciekawych prac [177, 211, 267, 268, 331, 160, 269].

Do określenia niezmienników wrażliwości wyższych rzędów (i wrażliwości na zmiany częstotliwości) w liniowych układach SLS, rozważonych w tej pracy, wykorzystano własności jednorodnych funkcji układowych.

6.2. Niezmienniki wrażliwości pierwszego rzędu

Przy wyprowadzaniu wzorów na niezmienniki wrażliwości często wykorzystuje się własności funkcji jednorodnej stopnia m oraz związany z tą funkcją wzór Eulera [98]; przypomnijmy więc te pojęcia

Definicja: Funkcja $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$, n argumentów, określona w obszarze D nazywa się funkcją jednorodną stopnia m jeśli przy pomnożeniu wszystkich jej argumentów przez czynnik t funkcja ulegnie pomnożeniu przez ten sam czynnik w potędze m, tzn. jeśli będzie tożsamościowo spełniona równość

$$f(t.x_1,t.x_2,\ldots,t.x_n) = t^m \cdot f(x_1,x_2,\ldots,x_n). \tag{6.1}$$

Jeżeli założymy, że funkcja $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ jednorodna stopnia m ma w obszarze otwartym D ciągłe pochodne cząstkowe względem wszystkich argumentów, to dla dowolnego punktu $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ zachodzi równość

$$f_{x_1}\cdot x_1 + f_{x_2}\cdot x_2 + \ldots + f_{x_n}\cdot x_n = m\cdot f(x_1,x_2,\ldots,x_n). \qquad (6.2)$$

Równość ta nosi nazwę wzoru Eulera. Dzieląc ją przez $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $(f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \neq 0)$ uzyskujemy znaną równość

$$S^f_{x_1} + S^f_{x_2} + \ldots + S^f_{x_n} = \sum_{i=1}^{n} S^f_{x_i} = m \qquad (6.3)$$

tzn. suma wrażliwości względnych funkcji względem wszystkich argumentów jest równa stopniowi funkcji m.

Dla przejrzystości rozważań ograniczymy się, podobnie jak w poprzednich rozdziałach, do obwodów liniowych z wymuszeniami sinusoidalnymi złożonych z elementów R,L,C oraz źródeł sterowanych: napięciowych sterowanych napięciem (VVT), napięciowych sterowanych prądem (CVT), prądowych sterowanych prądem (CCT), prądowych sterowanych napięciem (VCT).

Funkcje układowe obwodów opisanych równaniami węzłowymi są jednorodne, gdy ich argumentami x_i $(i=1(1)n)$ są $G_i, L_i^{-1}, C_i, k_{VC_i}$ oraz $k^{-1}_{CV_i}$ a pozostałe parametry układu $y_j (j=1(1)k)$, tzn. k_{VV_j} oraz k_{CC_j} są stałe.

Stopnie tak zbudowanych jednorodnych funkcji układowych podano w tablicy 6.1.

Tablica 6.1

Funkcja układowa T =	K_I	K_U	M	N	Y_i	Z_i
Stopień m	0	0	-1	+1	+1	-1

Równanie Eulera (6.2) dla funkcji układowej T można przedstawić w postaci

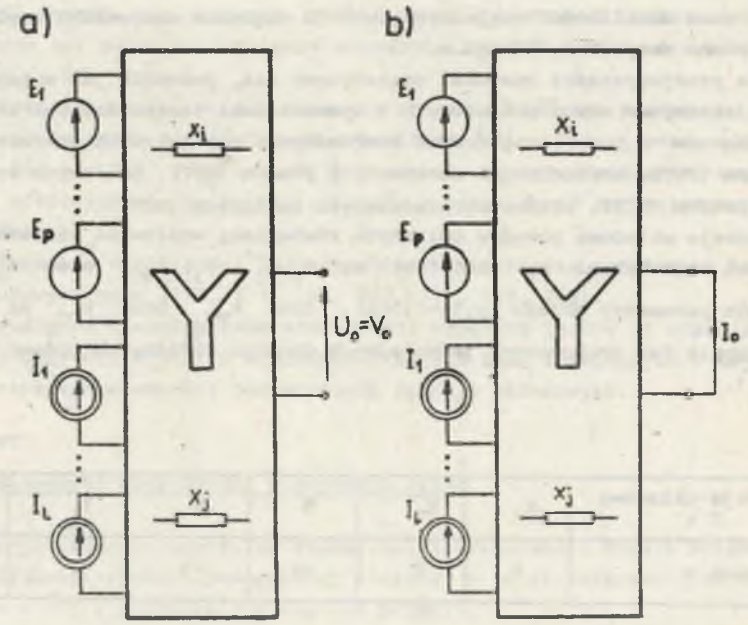
$$\sum_{i\in NG} S^T_{G_i} + \sum_{i\in NC} S^T_{C_i} + \sum_{i\in NL} S^T_{L_i^{-1}} + \sum_{i\in NVC} S^T_{k_{VC_i}} + \sum_{i\in NCV} S^T_{k^{-1}_{CV_i}} = m. \qquad (6.4)$$

Równość ta nosi nazwę niezmiennika wrażliwości względnych pierwszego rzędu.

Jeśli przyjmiemy, że G_i, k_{VC_i} i k_{CV_i} są stałe natomiast t^{-1}-krotna zmiana częstotliwości wymuszeń powoduje t-krotną zmianę wartości wszystkich indukcyjności i pojemności to funkcje układowe są jednorodne stopnia zerowego i spełniona jest równość

$$S_s^T = -\sum_{i \in NL} S_{L_i^{-1}}^T + \sum_{i \in NC} S_{C_i}^T \tag{6.5}$$

określająca wrażliwość funkcji układowych na zmianę częstotliwości ($s = j\omega$).



Rys. 6.1. Obwody liniowe z pobudzeniami prądowymi i napięciowymi z funkcją układową

a) $T = U_o = V_o$, b) $T = I_o$

Fig. 6.1. Linear circuits with current and voltage inputs and and the system function

a) $T = U_o = V_o$, b) $T = I_o$

Powyższe wzory się nieco rozbudowują dla $T = V_o$ lub I_o. Jeśli wielkością wyjściową jest napięcie $U_o = V_o$ (rys. 6.1a) lub prąd I_o (rys. 6.1b), a obwód posiada wymuszenia napięciowe i prądowe wówczas

$$T = V_o = \sum_{i=1}^{p} E_i \cdot K_i + \sum_{j=1}^{l} I_j \cdot M_j \tag{6.6}$$

natomiast

$$T = I_o = \sum_{i=1}^{p} E_i \cdot N_i + \sum_{j=1}^{l} I_j \cdot K_j \tag{6.7}$$

i dla takich obwodów słuszne jest następujące twierdzenie.

<u>Twierdzenie 6.1</u>: Jeśli funkcja układowa $T(x_1, x_2, \ldots, x_n, E_1, \ldots, E_p, I_1, \ldots, I_l)$ jest kombinacją liniową (p+1) funkcji jednorodnych względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i ma w obszarze otwartym D ciągłe pochodne cząstkowe względem wszystkich argumentów, to dla dowolnego punktu $(x_1, x_2, \ldots, x_n, E_1, \ldots, E_p, I_1, \ldots, I_l)$ zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{n} S_{x_i}^{T} = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{l} \frac{I_j \cdot M_j}{V_o} & \text{dla } T = V_o, \\ +\sum_{i=1}^{p} \frac{E_i \cdot N_i}{I_o} & \text{dla } T = I_o. \end{cases} \tag{6.8}$$

<u>Wniosek</u>: Tablicę 6.1 można uzupełnić o dwie kolumny dla $T = V_o$ i I_o (tablica 6.2)

Tablica 6.2

Funkcja układowa T =	V_o	I_o
stopień m	$-\sum_{j=1}^{l} \frac{I_j \cdot M_j}{V_o}$	$\sum_{i=1}^{p} \frac{E_i \cdot N_i}{I_o}$

Wzory na niezmienniki wrażliwości można rozszerzyć na wrażliwości drugiego i wyższych rzędów.

6.3. Niezmienniki wrażliwości drugiego rzędu

Interesujące są nie tylko niezmienniki wrażliwości na zmiany parametrów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ względem których funkcja układowa T jest jednorodna stopnia m, ale również związki między wrażliwościami na zmiany pozostałych parametrów $y_1, \ldots, y_k$.
Odpowiedzią na to stwierdzenie jest:

Twierdzenie 6.2: Jeśli funkcja układowa $T(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_i, \ldots, y_k)$ jednorodna stopnia m względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ma w obszarze otwartym D ciągłe pochodne cząstkowe 2-go rzędu względem wszystkich argumentów to dla dowolnego punktu $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ zachodzą równości:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} S^{T}_{x_i x_j} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (m-1) \tag{6.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} S^{T}_{x_i y_j} = m \sum_{j=1}^{k} S^{T}_{y_j} . \tag{6.10}$$

Dowody twierdzeń przedstawionych w tym rozdziale podano w Raporcie Wewnętrznym Instytutu Elektroniki: "Niezmienniki wrażliwości wyższych rzędów", Jan Chojcan, Gliwice 1986.

Dla obwodów z wymuszeniami napięciowymi i prądowymi zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.3: Dla funkcji układowej $T = U_o, I_o$, gdzie $T = T(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k, E_1, \ldots, E_p, I_1, \ldots, I_l)$ jest kombinacją liniową $(p+l)$ funkcji jednorodnych względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i ma w obszarze otwartym D ciągłe pochodne cząstkowe względem wszystkich argumentów i dodatkowo ciągłe pochodne cząstkowe 2-go rzędu względem argumentów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dla dowolnego punktu $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k, E_1, \ldots, E_p, I_1, \ldots, I_l)$ zachodzą równości:

a) dla $T = V_o$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} S^{V_o}_{x_i x_j} = \sum_{h=1}^{l} I_h \cdot \frac{M_h}{V_o} \tag{6.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} S^{V_o}_{x_i y_j} = -\sum_{k=1}^{l} \frac{I_h \cdot M_h}{V_o} \left(\sum_{j=1}^{k} S^{M_h}_{y_j} \right) \tag{6.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} S^{V_o}_{x_i E_j} = 0 \tag{6.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} S^{V_o}_{x_i I_j} = -\sum_{h=1}^{l} \frac{I_h \cdot M_h}{V_o} \tag{6.14}$$

b) dla $T = I_o$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} S^{I_o}_{x_i x_j} = 0 \tag{6.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} S^{I_o}_{x_i y_j} = \sum_{g=1}^{p} \frac{E_g \cdot N_g}{I_o}\left(\sum_{j=1}^{k} S^{N_g}_{y_j}\right) \tag{6.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} S^{I_o}_{x_i E_j} = \sum_{g=1}^{p} \frac{E_g \cdot N_g}{I_o} \tag{6.17}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} S^{I_o}_{x_i I_j} = 0. \tag{6.18}$$

6.4. Niezmienniki wrażliwości rzędu trzeciego

Podobna analiza dla wrażliwości 3-go rzędu daje związki przedstawione w dwu kolejnych twierdzeniach.

Twierdzenie 6.4: Jeśli funkcja układowa z Twierdzenia 6.2 ma ciągłe pochodne cząstkowa 3 rzędu dla argumentów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i 2 rzędu dla pozostałych, to zachodzą równości:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{g=j}^{n} S^{T}_{x_i x_j x_g} = \frac{1}{6}\, m \,.\, (m-1)(m-2) = \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \tag{6.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{g=1}^{k} S^{T}_{x_i x_j y_g} = \frac{1}{2}\, m \,.\, (m-1) \sum_{g=1}^{k} S^{T}_{y_g} \tag{6.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{g=j}^{k} S^{T}_{x_i y_j y_g} = m\sum_{j=1}^{k}\sum_{g=j}^{k} S^{T}_{y_j y_g}. \tag{6.21}$$

Jeśli funkcja układowa $(T = U_o, I_o)$ jest liniową kombinacją funkcji jednorodnych wówczas słuszne jest następujące:

Twierdzenie 6.5: Jeżeli funkcja układowa z Twierdzenia 6.3 ma ciągłe pochodne cząstkowe 3 rzędu dla argumentów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i 2 rzędu dla pozostałych, to zachodzą równości:

a) dla $T = V_o$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{g=j}^{n} S^{V_o}_{x_i x_j x_g} = -\sum_{h=1}^{l}\frac{I_h \cdot M_h}{V_o} \tag{6.22}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{g=1}^{k} S^{V_o}_{x_i x_j y_g} = \sum_{h=1}^{l}\frac{I_h \cdot M_h}{V_o}\left(\sum_{g=1}^{k} S^{M_h}_{y_g}\right) \tag{6.23}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{g=j}^{k} S^{V_o}_{x_i y_j y_g} = -\sum_{h=1}^{l}\frac{I_h \cdot M_h}{V_o}\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{g=j}^{k} S^{M_h}_{y_j y_g}\right) \tag{6.24}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{g=1}^{p} S^{V_o}_{x_i x_j E_g} = 0 \tag{6.25}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{h=1}^{l} S^{V_o}_{x_i x_j I_h} = \sum_{h=1}^{l}\frac{I_h \cdot M_h}{V_o} \tag{6.26}$$

b) dla $T = I_o$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{g=j}^{n} S^{I_o}_{x_i x_j x_g} = 0 \tag{6.27}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{g=1}^{k} S^{I_o}_{x_i x_j y_g} = 0 \tag{6.28}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{g=j}^{k} S^{I_o}_{x_i y_j y_g} = \sum_{g=1}^{p}\frac{E_g \cdot N_g}{I_o}\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{g=j}^{k} S^{N_g}_{y_j y_g}\right) \tag{6.29}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{g=1}^{p} S^{I_o}_{x_i x_j E_g} = 0 \tag{6.30}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{h=1}^{l} S^{I_o}_{x_i x_j I_h} = 0. \tag{6.31}$$

Analogiczne wzory można udowodnić dla wrażliwości wyższych rzędów.

6.5. Niezmienniki wrażliwości wyższych rzędów

Dla wrażliwości q-tego rzędu można wykazać, że słuszne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.6: Jeżeli funkcja układowa $T(x_1,x_2,\ldots x_n,y_1,\ldots y_k)$ jednorodna stopnia m względem $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ma w obszarze otwartym D ciągłe pochodne cząstkowe 1,2,...,q-tego rzędu względem argumentów $x_1,x_2,\ldots,x_n$ oraz 1,2,...,(q-1)-go rzędu względem argumentów $y_1,\ldots,y_k$, to dla dowolnego punktu $(x_1,x_2,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_k)$ zachodzą równości

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=i_1}^{n}\cdots\sum_{i_q=i_{q-1}}^{n} S^{T}_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_q}} = \frac{1}{q!}\prod_{i=0}^{q-1}(m-i) \tag{6.32}$$

$$\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_r=i_{r-1}}^{n}\sum_{j_1=1}^{k}\cdots\sum_{j_{(q-r)}=j_{(q-r)-1}}^{k} S^{T}_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}y_{j_1}\ldots y_{j_{(q-r)}}} =$$

$$= \left[\frac{1}{r!}\prod_{i=0}^{r-1}(m-1)\right]\cdot\sum_{j_1=1}^{k}\cdots\sum_{j_{(q-r)}=j_{(q-r)-1}}^{k} S^{T}_{y_{j_1}\ldots y_{j_{(q-r)}}} \quad \text{dla} \quad r=1,2,\ldots,q-1 \tag{6.33}$$

Również dla $T = U_o, I_o$ można sformułować twierdzenie będące uogólnieniem Twierdzeń 6.1, 6.3 i 6.5.

6.6. Wrażliwości pierwszego i wyższych rzędów na zmianę częstotliwości

Własności funkcji jednorodnych, które w poprzednich podrozdziałach wykorzystano przy wyprowadzaniu wzorów na niezmienniki wrażliwości, mogą być też wykorzystane podczas wyprowadzania wzorów określających wrażliwości

funkcji układowych na zmiany częstotliwości. Oczywiście inaczej należy wybrać argumenty takich funkcji. Poprzednio argumentami funkcji jednorodnych były G_i, L_i^{-1}, C_i, k_{VC_i} i $k_{CV_i}^{-1}$ oraz w zależności od funkcji układowej różny był ich stopień m.

Jeśli przyjmiemy, że argumentami funkcji jednorodnej będą L_i, C_i oraz f^{-1}, to funkcja będzie stopnia zerowego niezależnie od T, czyli

$$\sum_{i\in NL} S^T_{L_i} + \sum_{i\in NC} S^T_{C_i} + S^T_{\frac{1}{f}} = 0,$$

ale ponieważ

$$S^T_{\frac{1}{f}} = -S^T_f$$

więc wykazaliśmy znane w literaturze (np. [117]) twierdzenie.

Twierdzenie 6.7: Jeżeli funkcja układowa $T(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k)$ - liniowego obwodu, z wymuszeniem sinusoidalnym, złożonego z elementów RLC oraz źródeł sterowanych - której argumentami x_i $(i=1(1)n)$ są L_i, C_i oraz $\frac{1}{f}$, jednorodna stopnia zerowego względem $x_1,x_2,\ldots,x_n$, ma w obszarze otwartym D ciągłe pochodne cząstkowe względem wszystkich argumentów x_i, to dla dowolnego punktu $(x_1,x_2,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_k)$ zachodzi równość

$$S^T_f = \sum_{i\in NC} S^T_{C_i} + \sum_{i\in NL} S^T_{L_i}. \tag{6.34}$$

Dla wrażliwości 2 i 3 rzędu można wykazać kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 6.8: Jeżeli funkcja układowa z Twierdzenia 6.7 ma w obszarze otwartym D ciągłe pochodne cząstkowe a) 2 rzędu, b) 2 i 3 rzędu względem wszystkich argumentów x_i to dla dowolnego punktu $(x_1,x_2,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_k)$ zachodzą równości:

a) $$S^T_{f^2} = \sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=i}^{NL} S^T_{L_iL_j} + \sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=1}^{NC} S^T_{L_iC_j} + \sum_{i=1}^{NC}\sum_{j=i}^{NC} S^T_{C_iC_j}, \tag{6.35}$$

b) $$S^T_{f^3} = \sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=i}^{NL}\sum_{g=i}^{NL} S^T_{L_iL_jL_g} + \sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=i}^{NL}\sum_{g=1}^{NC} S^T_{L_iL_jC_g} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NC} \sum_{g=j}^{NC} S^{T}_{L_i C_j C_g} + \sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=i}^{NC} \sum_{g=j}^{NC} S^{T}_{C_i C_j C_g} . \tag{6.36}$$

Do obliczenia współczynników wpływu (wyższych rzędów) zmian częstotliwości na funkcję układową wykorzystuje się wyniki uzyskane przy obliczaniu wrażliwości na zmiany parametrów, a więc nie jest potrzebna żadna dodatkowa analiza obwodu.

Jeśli współczynniki wrażliwości były liczone metodą obwodów dołączonych, gdzie parametrami są L_i^{-1} i C_i należy za pomocą równań (2.8), (2.22), (2.23), (2.24), (2.38)-(2.43) sprowadzić je do postaci odpowiadającej parametrom L_i, C_i.

Interesujące są też związki między wrażliwościami obliczanymi metodą obwodów przyrostowych.

6.7. Związki między wrażliwościami uzyskanymi metodą obwodów przyrostowych

Metoda ta umożliwia, po analizie obwodu podstawowego i przyrostowego, określenie współczynników wpływu zmian jednego parametru na wszystkie napięcia (potencjały) i prądy. Mamy tu więc wiele funkcji układowych z jednym zmieniającym się argumentem i nie można konstruować z nich, przez odpowiedni dobór parametrów, funkcji jednorodnych. Nie można więc w tym przypadku mówić o istnieniu niezmienników wrażliwości. Można natomiast podać związki łączące wrażliwości uzyskane po jednokrotnej analizie obwodu podstawowego i przyrostowego do, np. oceny poprawności i dokładności obliczeń.

Prostszą postać wzorów uzyska się dla wrażliwości półwzględnych. Przy ich wyprowadzaniu zostały wykorzystane oprócz oznaczeń podanych w podrozdziale 4.2 dodatkowe oznaczenia i definicje:

$\underline{B}$ - macierz cykli,

$\underline{U}_b$ - wektor (kolumnowy) napięć gałęziowych sieci,

$\underline{I}_b$ - wektor (kolumnowy) prądów gałęzi sieci,

$SR^{T}_{x_i^q} \overset{df}{=} \frac{1}{q!} \frac{\partial^q T}{\partial x_i^q} x_i^q$ - wrażliwość półwzględna q-tego rzędu funkcji układowej T na zmianę parametru x_i (6.37)

Z układu równań I i II prawa Kirchhoffa oraz równań potencjałów węzłowych otrzymamy, po zróżniczkowaniu i uporządkowaniu, następujące zależności:

a) dla wrażliwości półwzględnych 1 rzędu

$$\underline{A} \cdot SR^{\underline{I}_b}_{x_i} = \underline{0} \tag{6.38}$$

$$\underline{B} \cdot SR_{x_i}^{\underline{U}_b} = \underline{0} \tag{6.39}$$

$$\underline{Y} \cdot SR_{x_i}^{\underline{V}} = SR_{x_i}^{\underline{I}} - SR_{x_i}^{\underline{Y}} \cdot \underline{V}, \tag{6.40}$$

b) dla wrażliwości półwzględnych 2 rzędu

$$\underline{A}\ SR_{x_i^2}^{\underline{I}_b} = \underline{0} \tag{6.41}$$

$$\underline{B}\ SR_{x_i^2}^{\underline{U}_b} = \underline{0} \tag{6.42}$$

$$\underline{Y}\ SR_{x_i^2}^{\underline{V}} = -2\ SR_{x_i}^{\underline{Y}} \cdot SR_{x_i}^{\underline{V}}, \tag{6.43}$$

c) dla wrażliwości półwzględnych 3 rzędu

$$\underline{A} \cdot SR_{x_i^3}^{\underline{I}_b} = \underline{0} \tag{6.44}$$

$$\underline{B} \cdot SR_{x_i^3}^{\underline{U}_b} = \underline{0} \tag{6.45}$$

$$\underline{Y}\ SR_{x_i^3}^{\underline{V}} = -3\ SR_{x_i}^{\underline{Y}} \cdot SR_{x_i^2}^{\underline{V}}, \tag{6.46}$$

d) ogólnie, dla wrażliwości q-rzędu

$$\underline{A}\ SR_{x_i^q}^{\underline{I}_b} = \underline{0} \tag{6.47}$$

$$\underline{B}\ SR_{x_i^q}^{\underline{U}_b} = \underline{0} \tag{6.48}$$

$$\underline{Y}\ SR_{x_i^q}^{\underline{V}} = -q \cdot SR_{x_i}^{\underline{Y}} \cdot SR_{x_i^{q-1}}^{\underline{V}} \quad (\text{dla } q > 1). \tag{6.49}$$

6.8. Podsumowanie i uwagi

1. Przedstawione w tym rozdziale wzory na:

- niezmienniki wrażliwości wyższych rzędów, na zmiany wszystkich parametrów (nie tylko stanowiących o jednorodności funkcji układowej), układów z wieloma wymuszeniami,
- wrażliwości na zmianę częstotliwości,

mogą być wykorzystane do kontroli poprawności i dokładności obliczeń oraz do obliczania innych wielkości, np. współczynników wrażliwości na zmiany temperatury układów scalonych.

2. Niezmiennikom wrażliwości wyższych rzędów, tylko na parametry "jednorodne", obwodów z pojedynczym wymuszeniem poświęcona jest praca [116]. Przedstawione w niej ogólne zależności nie są ścisłe, końcowe wzory (12), (13) i (14) różnią się od prezentowanych w tym rozdziale zależności (6.9), (6.19) i (6.32). Szczegółową dyskusję podano w cytowanym w podrozdziale 6.3 Raporcie Wewnętrznym Instytutu Elektroniki.

3. Niektóre niezmienniki wrażliwości mają prostą intepretację fizyczną, np. można wykazać, korzystając z twierdzenia Cohna [256], że niezmienniczość wrażliwości pierwszego rzędu impedancji wejściowej obwodu, jest inną postacią zasady zachowania mocy.

4. Nie zamieszczono w pracy wielu innych ciekawych zależności, np.:

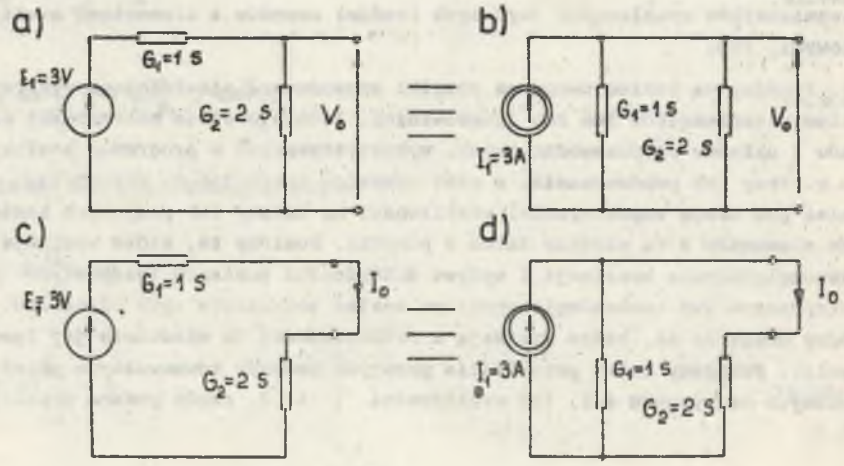
- wrażliwość na jednoczesne zmiany częstotliwości i admitancji $S^T_{fx_i}$,
- niezmienników wrażliwości obwodów z elementami skorelowanymi i wielobiegunnikami,
- niezmienników wrażliwości (wyższych rzędów) obwodów z elementami nieliniowymi, itp.

5. Zwróćmy na koniec uwagę na pomyłki spowodowane niewłaściwym wykorzystaniem niezmienników lub ich ignorowaniem. Istnieje wiele makromodeli elementów i układów półprzewodnikowych, wykorzystywanych w programie analizy na m.c. Przy ich porównywaniu, w celu wybrania optymalnego, bierze się również pod uwagę współczynniki wrażliwości na zmiany ich pasywnych zastępczych elementów i tu właśnie łatwo o pomyłki. Pomińmy te, które wynikają z nieuwzględnienia korelacji i wpływu dokładności pomiarów (parametrów elektrycznych lub technologicznych) na realne tolerancje tych elementów. Zwróćmy uwagę na te, które wynikają z niezmienności (a właściwie jej ignorowania). Pokażemy to na przykładzie prostych obwodów równoważnych przedstawionych na rysunku 6.2. Ich wrażliwości 1 i 2 rzędu podano w tablicy 6.3.

Tablica 6.3

Obwód	$S^T_{G_1}$	$S^T_{G_2}$	$S^T_{G_1^2}$	$S^T_{G_1G_2}$	$S^T_{G_2^2}$	$S^T_{E_1G_1}$	$S^T_{E_1G_2}$	$S^T_{I_1G_1}$	$S^T_{I_1G_2}$
a) $T = V_o$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-	-
b) $T = V_o$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	-	-	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
c) $T = I_o$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-	-
d) $T = I_o$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	-	-	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Dla obwodu z rys. 6.2a suma wrażliwości napięcia V_o na zmiany przewodności G_1 i G_2 jest równa zero (zgodnie z (6.8)), natomiast dla obwodu z rys. 6.2b jest równa -1. Stąd wrażliwość funkcji układowej na zmianę przewodności G_1 zmieni się z $+\frac{2}{3}$ (dla a)) na $-\frac{1}{3}$ (dla b)). Wniosek, że obwód b) jest lepszy, bez uwzględnienia zależności między źródłami E_1 i I_1 może być pochopny. Takie same uwagi odnoszą się do wrażliwości rzędu drugiego równoważnych obwodów c) i d).



Rys. 6.2. Obwody równoważne

Fig. 6.2. Equivalent circuits

7. OCENA EFEKTYWNOŚCI NUMERYCZNEJ OBLICZANIA WRAŻLIWOŚCI

7.1. Wstęp

Dokładna ocena i porównanie efektywności metod obliczania wrażliwości jest kłopotliwe. Każda z nich bowiem jest bardziej efektywna w innych warunkach, dla innych funkcji układowych i innej liczby parametrów. Nie bez znaczenia jest też przyjęta metoda opisu układu. Na przykład metoda obwodów dołączonych, dla układów opisanych układem równań węzłowych jest najefektywniejsza, gdy interesuje nas jedna prosta funkcja układowa (napięcie lub prąd), natomiast metoda wyznacznikowa, gdy funkcja układowa jest funkcją złożoną [62, 64].

Porównanie efektywności tych dwóch metod, dla wrażliwości 1 rzędu, podano w [70], są one porównywalne.

Porównamy ze sobą dokładniej metody obwodów dołączonych i obwodów przyrostowych oraz określimy wpływ dekompozycji na efektywność tej pierwszej.

Przyjmijmy, dla uproszczenia, że porównanie przeprowadzimy dla obwodów prądu stałego oraz rozpatrywać będziemy tylko operacje mnożenia i dzielenia.

7.2. Porównanie efektywności metod obwodów dołączonych i obwodów przyrostowych

Rozważania przeprowadźmy przy założeniu, że obwody opisane są układami równań węzłowych i oznaczmy w rozpatrywanych obwodach przez:

w - liczbę (niezależnych) węzłów,
n - liczbę zmieniających się parametrów,
u - liczbę różnych funkcji układowych których wrażliwość chcemy obliczyć.

7.2.1. Metoda obwodów dołączonych

Rozwiązanie układu w równań opisujących obwód, np. metodą rozkładu LU [155, 344, 259, 167, 110] wymaga

$$N_a^o \cong \frac{1}{3} w^3 + w^2 \tag{7.1}$$

operacji mnożenia i dzielenia. Jeśli rozwiążemy obwód dołączony i pominiemy operacje przy wyznaczeniu wrażliwości, to do obliczenia wrażliwości

1 rzędu dla jednej prostej funkcji układowej należy wykonać, w przybliżeniu [89, 90, 135, 224],

$$N_a^o + w^2 = \frac{1}{3} w^3 + 2 w^2 \tag{7.2}$$

operacji.

Dla u prostych funkcji układowych

$$N_a^1 \cong N_a^o + u \cdot w^2 = \frac{1}{3} w^3 + (1+u) w^2 \tag{7.3}$$

operacji mnożenia i dzielenia pozwala na określenie współczynników wpływu zmian wszystkich parametrów obwodu na te funkcje.

Dla określenia współczynników wrażliwości drugiego rzędu u funkcji układowych na zmiany n parametrów należy dodatkowo przeanalizować n obwodów podstawowych z wymuszeniem prądowym włączonym równolegle ze zmieniającą się admitancją (p. rozdział 3.3 i tablica 3.1), zatem

$$N_a^2 \cong N_a^1 + n.w^2 = \frac{1}{3} w^3 + (1+u+n) w^2. \tag{7.4}$$

Wrażliwości wyższych rzędów nie wymagają dodatkowych analiz. Wyniki zebrano w tablicy 7.1.

Tablica 7.1

Metoda	Rząd wrażliwości	Liczba operacji przy obliczaniu, dla obwodu opisanego układem w równań węzłowych, wrażliwości:		
		u funkcji układowych na 1 parametr	1 funkcji układowej na n parametrów	u funkcji układowych na n parametrów
obwodów dołączonych	1	$\frac{w^3}{3} + (1 + u) w^2$	$\frac{w^3}{3} + 2 w^2$	$\frac{w^3}{3} + (1+u)w^2$
	2	$\frac{w^3}{3} + (2+u) w^2$	$\frac{w^3}{3} + (2+n) w^2$	$\frac{w^3}{3} + (1+u+n) w^2$
obwodów przyrostowych	1	$\frac{w^3}{3} + 2 w^2$	$\frac{w^3}{3} + (1+n) w^2$	$\frac{w^3}{3} + (1+n) w^2$
	2	$\frac{w^3}{3} + 3 w^2$	$\frac{w^3}{3} + \frac{n^2+3n+2}{2} w^2$	$\frac{w^3}{3} + \frac{n^2+3n+2}{2} w^2$
	3	$\frac{w^3}{3} + 4 w^2$	$\frac{w^3}{3} + \frac{n^2+3n+2}{2} w^2 + \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\right] w^2$	$\frac{w^3}{3} + \frac{n^2+3n+2}{2} w^2 + \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\right] . w^2$

7.2.2. Metoda obwodów przyrostowych

Do obliczenia wrażliwości (1 rzędu) wszystkich potencjałów węzłowych na zmianę jednego parametru należy rozwiązać układ równań podstawowy (4.1) i otrzymany z niego układ równań (4.2), zatem należy wykonać

$$\frac{1}{3} w^3 + 2 \cdot w^2$$

operacji mnożenia i dzielenia.
Określenie współczynników wpływu n parametrów wymaga w przybliżeniu

$$N_i^1 \approx \frac{1}{3} w^3 + (1+n) w^2 \tag{7.5}$$

mnożeń i dzieleń.
Określenie współczynników 2 rzędu wymaga dodatkowo (p. (4.4))

$$\frac{(n+1)n}{2} \cdot w^2$$

operacji, a więc

$$N_i^2 \approx \frac{1}{3} w^3 + \frac{n^2+3n+2}{2} w^2. \tag{7.6}$$

Dla wrażliwości 3 rzędu należy dodatkowo rozwiązać a-krotnie, gdzie

$$a = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}, \tag{7.7}$$

obwód o tej samej macierzy admitancyjnej $\underline{Y}$ i różnych wymuszeniach (p.(4.5)), więc

$$N_i^3 \approx \frac{1}{3} w^3 + \frac{n^2+3n+2}{2} w^2 + \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\right] w^2. \tag{7.8}$$

Wyniki zebrano w tablicy 7.1.
Z tablicy tej wynika, że:

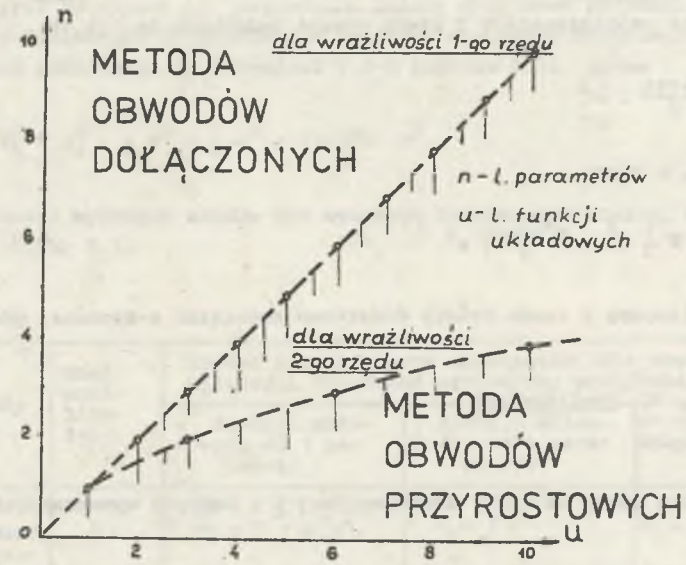
1) przy obliczaniu wrażliwości 1 rzędu metoda obwodów dołączonych jest efektywniejsza, gdy liczba zmieniających się parametrów n jest większa od liczby funkcji układowych u, a tak jest bardzo często,
2) dla wrażliwości 2 rzędu metoda obwodów dołączonych jest jeszcze efektywniejsza, bowiem tylko dla

$$u > \frac{n(n+1)}{2}$$

mniejszego nakładu czasu obliczeń wymaga metoda obwodów przyrostowych,

3) wrażliwości 3 rzędu wymagają w metodzie obwodów przyrostowych dodatkowo wyników a-krotnej analizy obwodu, a metoda obwodów dołączonych nie wymaga żadnych dodatkowych analiz.

Na podstawie powyższych wniosków (i tablicy 7.1) można określić obszary efektywności obydwu metod dla wrażliwości 1 i 2 rzędu. Przedstawiono je na rys. 7.1. Analizę przeprowadzono bez uwzględnienia operacji, potrzebnych do wyznaczania wrażliwości na podstawie wyników obliczeń (rozdział 2), jednakowych dla obydwu metod.



Rys. 7.1. Określenie obszarów efektywności metody obwodów dołączonych i obwodów przyrostowych dla wrażliwości 1 i 2 rzędu w zależności od liczby parametrów n i liczby funkcji układowych u

Fig. 7.1. Determination of the efficiency domains for the methods of adjoint networks and incremental networks for the first order and the second order sensitivities in the function of the number of parameters n and the number of the system functions u

7.3. Wpływ dekompozycji na efektywność obliczania wrażliwości

Prześledźmy wpływ kolejnych dekompozycji obwodu łańcuchowego, z podrozdziału 5.5 (dla k=1), na efektywność obliczania wrażliwości metodą obwodów dołączonych. Przyjmijmy, że dekomponujemy obwód za każdym razem tak, że w każdym podobwodzie występuje ta sama w przybliżeniu liczba węzłów i że jest tylko jedna funkcja układowa $T = V_o$.
Rozpatrzono dekompozycję każdego podobwodu na dwa ponieważ taki podział nie komplikuje wzorów (na wrażliwości) podanych w rozdziale 5.
Wyniki analizy zebrano w tablicach 7.2 i 7.3.

Tablica 7.2

Obwód	Liczba operacji (przybliżona) potrzebna do:		
	rozwiązania obwodu	obliczania wrażliwości 1 rzędu	obliczania wrażliwości 2 rzędu
niezdekomponowany	$N_a^o = \frac{w^3}{3} + w^2 = N_{d1}^o$	$N_a^1 = \frac{w^3}{3} + 2w^2$	$N_a^2 = \frac{w^3}{3} + (2+n)w^2$
zdekomponowany na 2 podobwody	$N_{d2}^o = \frac{1}{4}(\frac{w^3}{3} + 2w^2)$	$N_{d2}^1 = \frac{1}{4}(\frac{w^3}{3} + 4w^2)$	$N_{d2}^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{w^3}{3} + (4+n)w^2\right]$
zdekomponowany na 4 podobwody	$N_{d4}^o = \frac{1}{16}(\frac{w^3}{3} + 4w^2)$	$N_{d4}^1 = \frac{1}{16}(\frac{w^3}{3} + 8w^2)$	$N_{d4}^2 = \frac{1}{16}\left[\frac{w^3}{3} + (8+n)w^2\right]$
zdekomponowany na 8 podobwodów	$N_{d8}^o = \frac{1}{16}(\frac{w^3}{3} + 8w^2)$	$N_{d8}^1 = \frac{1}{64}(\frac{w^3}{3} + 16w^2)$	$N_{d8}^2 = \frac{1}{64}\left[\frac{w^3}{3} + (16+n)w^2\right]$

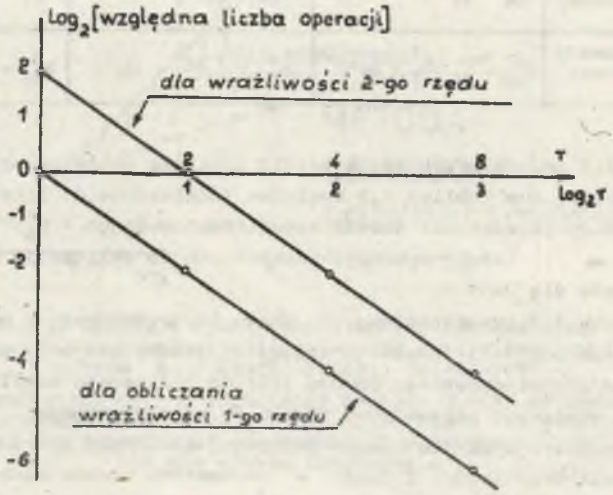
W tablicy 7.2 podano przybliżone wyniki uzyskane po dekompozycji na 2, 4 i 8 podobwodów, a w tablicy 7.3 względne (odniesione do liczby operacji potrzebnych do rozwiązania obwodu niezdekomponowanego - N_a^o) i graniczne (przy $w \to \infty$) liczby operacji niezbędnych do obliczenia wrażliwości 1 lub 2 rzędu dla $n = w$.

Na rysunku 7.2 przedstawiono, (w skali logarytmicznej o podstawie 2) na podstawie tablicy 7.3, zależność względnej liczby operacji potrzebnych do rozwiązania zdekomponowanego obwodu oraz do obliczenia wrażliwości 2 rzędu, gdy liczba węzłów (i parametrów) rośnie do nieskończoności.

Już dekompozycja na dwa obwody powoduje, że liczba operacji potrzebnych do obliczenia wrażliwości 2 rzędu w parametrów obwodu zdekomponowanego jest równa liczbie operacji potrzebnych do rozwiązania obwodu niezdekomponowanego a przy dekompozycji na 8 podobwodów jest 16 razy mniejsza.

Tablica 7.3

Obwód zdekomponowany na r podobwodów r =	Względna liczba operacji (przybliżona) potrzebna do					
	rozwiązania obwodu		obliczania wrażliwości 1 rzędu		obliczania wrażliwości 2 rzędu (n=w)	
	dla w	$w \to \infty$	dla w	$w \to \infty$	dla w i n=w	$w \to \infty$
1	$\frac{N_a^o}{N_a^o} = 1$	1	$\frac{N_a^1}{N_a^o} = \frac{w+6}{w+3}$	1	$\frac{N_a^2}{N_a^o} = \frac{4w+6}{w+3}$	4
2	$\frac{N_{d2}^o}{N_a^o} = \frac{1}{4}\frac{w+6}{w+3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{N_{d2}^1}{N_a^o} = \frac{1}{4}\frac{w+12}{w+3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{N_{d2}^2}{N_a^o} = 1$	1
4	$\frac{N_{d4}^o}{N_a^o} = \frac{1}{16}\frac{w+12}{w+3}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{N_{d4}^1}{N_a^o} = \frac{1}{16}\frac{w+24}{w+3}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{N_{d4}^2}{N_a^o} = \frac{1}{16}\frac{4w+24}{w+3}$	$\frac{1}{4}$
8	$\frac{N_{d8}^o}{N_a^o} = \frac{1}{64}\frac{w+24}{w+3}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{N_{d8}^1}{N_a^o} = \frac{1}{64}\frac{w+48}{w+3}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{N_{d8}^2}{N_a^o} = \frac{1}{64}\frac{4w+48}{w+3}$	$\frac{1}{16}$



Rys. 7.2. Zależność (względnej) liczby operacji od podziału obwodu na r (równych) części, gdy liczba węzłów obwodu (i parametrów) jest bardzo duża

Fig. 7.2. Number of operations as a (relative) function of the division of the circuit into r (equal) parts, when the number of the circuit nodes (and parameter) is very large

7.4. Podsumowanie

1. W pracy nie analizowano metod obliczania wrażliwości z symbolicznej postaci funkcji układowych więc i nie przeprowadzono analizy ich efektywności.

2. Wyniki uzyskane w podrozdziale 7.2 (tablica i rysunek 7.1) wykazują, że metoda obwodów dołączonych jest przy obliczaniu wrażliwości wyższych rzędów numerycznie efektywniejsza od metody obwodów przyrostowych.

3. Dekompozycja obwodów zwłaszcza łańcuchowych, przy obliczaniu wrażliwości wyższych rzędów jest bardzo efektywna numerycznie.

Wróćmy do, omówionych w podrozdziale 3.1, uwag o nieefektywności [225, 208, 315] metody obwodów dołączonych, odnoszą się one do wrażliwości rzędu pierwszego. Prześledźmy tok rozumowania przedstawiony w pracy [208]. Przeciwstawia się w niej metodom obwodów dołączonych i przyrostowych, które są nazywane modelami: dołączonym i przyrostowym, równania dołączone i wrażliwościowe. Równania te uzyskuje się, tak jak to pokazano w podrozdziale 4.2 tej pracy dla obwodów przyrostowych, przez różniczkowanie i operacje na macierzach. Ten sposób postępowania jest oczywisty dla parametrów admitancyjnych. Jeśli jednak rozpatrzymy przypadek obliczania wrażliwości, np. na jednoczesną zmianę admitancji i jednego ze źródeł to stopień komplikacji przy wyprowadzaniu wzorów jest taki sam, jak w metodzie obwodów dołączonych. Mann [208] porównuje też efektywność obliczania wrażliwości metodami obwodowymi z obliczaniem wrażliwości z równań (tablica 1 str. 418[208]). W tablicy tej dla jednej z metod (3 wiersz) nie uwzględnia się obliczania wartości znamionowych, za to dla metody obwodów dołączonych (wiersz 5) czyni się to 2-krotnie. Po uwzględnieniu tych poprawek dochodzimy do oczywistego wniosku, że dla obwodów opisanych macierzą admitancyjną $\underline{Y}$ obie metody obwodów i równań dołączonych są numerycznie równoważne.

8. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono, w jednolitej zwartej postaci, podstawy teoretyczne obliczania wrażliwości wyższych rzędów.

Przedstawiono też niektóre związki zachodzące między wrażliwościami i wykorzystano je do obliczania wrażliwości na zmianę pulsacji.

Zwrócono uwagę na analizę wrażliwości obwodów z wielobiegunnikami, wyprowadzono potrzebne wzory i podano algorytm obliczania współczynników wrażliwości.

Z przeprowadzonego porównania metod obliczania wrażliwości wynika, że wśród metod analitycznych najefektywniejsza jest metoda obwodów dołączonych wykorzystująca dekompozycję, własności macierzy rzadkich i rozkład LU.

Pominięte w pracy przykłady wykorzystania wyprowadzonych zależności i ich zastosowania podano w cytowanych pracach własnych, raportach i w dodatku.

Przedstawione w pracy zależności można wykorzystać w istniejących programach uniwersalnych lub w nowych specjalnie do tego celu tworzonych. Schemat blokowy takiego programu podano w pracy.

Wykazano, że nieliczne zarzuty, o nieefektywności metody obwodów dołączonych, spotykane w literaturze nie są zasadne.

Opracowanie to może stać się inspiracją dla wielu szczegółowych prac i zastosowań, oto niektóre z nich:

- niezmienniki wrażliwości układów dualnych i skoligaconych [353],
- wrażliwości i niezmienniki sieci nieliniowych, np. modele sieci wentylacyjnych [52, 57],
- wrażliwości układów o stałych rozłożonych,
- wrażliwości sieci z uogólnionymi, dyskretnymi modelami indukcyjności i pojemności,
- optymalizacja makromodeli układów scalonych,
- diagnostyka uszkodzeń układów analogowych,
- zastosowanie analizy wrażliwościowej, zamiast czynnikowej, do syntezy układów o zadanej dynamice [241].

D O D A T E K

Przykłady obliczania i zastosowania wrażliwości wyższych rzędów przedstawiono w Raportach Wewnętrznych Instytutu Elektroniki:

1) Obliczanie wrażliwości wyższych rzędów, Gliwice 1983 [D1],
2) Niezmienniki wrażliwości wyższych rzędów, Gliwice 1986 [D2]

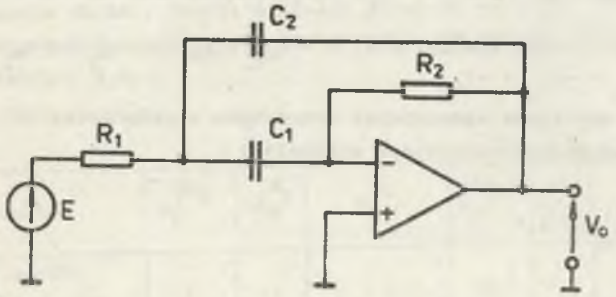
oraz w "Zbiorze zadań z teorii obwodów II, Wydanie II (J. Chojcan i inni), ss. 430-440, Gliwice 1986, [D3].

W przykładach, które zostaną przedstawione zwrócono uwagę na wykorzystanie współczynników wrażliwości wyższych rzędów do zwiększenia:

a) górnego kresu tolerancji małoprzyrostowych,
b) dokładności aproksymacji funkcji układowych.

Przykład 1

Należy obliczyć współczynniki wrażliwości wyższych rzędów wzmocnienia napięciowego na zmiany parametrów obwodu przedstawionego na rysunku D.1 i wykorzystać je do aproksymacji modułu funkcji układowej przy najniekorzystniejszych zmianach wartości parametrów. Wartości znamionowe elementów: $R_1 = R_2 = 1$ Ohm, $C_1 = C_2 = 1$ F, wzmacniacz idealny, pobudzenie sinusoidalne o $|E| = 1$ V, $\omega = s\,\frac{rad}{1}$ i $t_{|E|} = 0$.



Rys. D.1. Pasmowo przepustowy filtr aktywny z idealnym wzmacniaczem
Fig. D.1. Bandpass active filter with the ideal amplifier

Po analizie obwodu podstawowego, dołączonego oraz czterech obwodów z wymuszeniami SPM 1 A dołączonymi równolegle do R_1, R_2, C_1 i C_2 obliczono, korzystając z wzorów przedstawionych w rozdziale 3, współczynniki wrażliwości wzmocnienia napięciowego na zmiany wartości elementów obwodu. Wrażliwości modułu i fazy obliczono z zależności (2.6), (2.7), (2.13), (2.14), (2.18), (2.19), (2.33) i (2.34). Uzyskane wyniki końcowe przedstawiono w tablicy D.1.

Tablica D.1

a	$S_a^{K_U}$	$S_a^{\lvert K_U \rvert}$	$Q_a^{K_U}$	a	$S_a^{K_U}$	$S_a^{\lvert K_U \rvert}$
$x_1=G_1$	1 + j 0,5	1	0,5	$x_1x_1x_4$	0,875 - j 0,125	0,4375
$x_2=G_2$	-1 + j 0,5	-1	0,5	$x_2x_2x_2$	-0,25 + j 1,375	-0,625
$x_3=C_1$	0,5 - j 0,5	0,5	-0,5	$x_2x_2x_1$	1,75 - j 0,875	1,375
$x_4=C_2$	-0,5 - j 0,5	-0,5	-0,5	$x_2x_2x_3$	-0,875 - j 1,125	-0,1875
x_1x_1	-0,25 + j 0,5	0,125	0	$x_2x_2x_4$	-1,625 - j 0,125	-1,0625
x_1x_2	-1,5 + j 0	-1,25	0	$x_3x_3x_3$	0,25 + j 0,25	0,1875
x_1x_3	1 - j 0,5	0,75	-0,25	$x_3x_3x_1$	-0,75 - j 0,5	-0,5
x_1x_4	0 - j 1	-0,25	-0,25	$x_3x_3x_2$	0,75 - j 0,5	0,5
x_2x_2	0,75 - j 1	0,875	-0,5	$x_3x_3x_4$	0,25 + j 0,25	0,1875
x_2x_3	0 + j 1	-0,25	0,25	$x_4x_4x_1$	-0,75 + j 0,5	-0,25
x_2x_4	1 + j 0,5	0,75	0,25	$x_4x_4x_2$	-0,25 - j 1	-0,25
x_3x_3	-0,5 + j 0	-0,375	0,25	$x_4x_4x_3$	0,25 + j 0,25	0,0625
x_3x_4	-0,5 + j 0	-0,25	0	$x_4x_4x_4$	0,25 - j 0,25	0,0625
x_4x_4	0 + j 0,5	0,125	0,25	$x_1x_2x_3$	-0,75 + j 1,75	-0,625
$x_1x_1x_1$	-0,25 - j 0,125	-0,125		$x_1x_2x_4$	0,75 - j 1,75	0,625
$x_1x_1x_2$	-0,25 - j 0,75	-0,125		$x_1x_3x_4$	-1 - j 0,5	-0,5
$x_1x_1x_3$	0,625 + j 0,375	0,3125		$x_2x_3x_4$	1 - j 0,5	0,5

Najgorszy przypadek wystąpi dla $t = t_{G_1} = t_{x_1} = -t_{G_2} = -t_{x_2}$ oraz $2t = t_{C_1} = t_{x_3} = -t_{C_2} = -t_{x_4}$.

Tolerancję amplitudy wzmocnienia wyznaczono z zależności (2.4), (2.11) i (2.32) i uzyskano następujące wielomiany

$$t^{(1)}_{|K_U|} = 4\,t$$

$$t^{(2)}_{|K_U|} = 4t + 6\,t^2$$

$$t^{(3)}_{|K_U|} = 4t + 6t^2 + 5{,}75\,t^3.$$

Zależności te wykorzystano do określenia kresu górnego wrażliwości małoprzyrostowych [104, 315]. Przyjęto, że graniczna wartość błędu aproksymacji wielomianami wynosi 0,02 (2%). Uzyskane wyniki podano w tablicy D.2. Wynika z niej, że uwzględnienie wrażliwości wyższych rzędów w sposób istotny zwiększa kres górny tolerancji małoprzyrostowych.

Tablica D.2

Kres górny tolerancji małoprzyrostowej wartości elementów ($t=t_g$ w %) po uwzględnieniu wrażliwości rzędu		
1	1,2	1,2,3
$t_g = 5$	$t_g = 15$	$t_g = 28$

Współczynniki wrażliwości wyższych rzędów mogą być wykorzystane, przy mniejszych zmianach wartości elementów, do zwiększenia dokładności aproksymacji modułu funkcji układowej. Wyniki uzyskane dla $t = 5\%$ przedstawiono w tablicy D.3.

Tablica D.3

Tolerancja modułu wzmocnienia napięciowego układu spowodowana 5% tolerancją wartości rezystorów i 10% tolerancją wartości pojemności obliczona			
	z uwzględnieniem wrażliwości rzędu		
dokładnie $t_d = +21{,}578\%$	1	1,2	1,2,3
	$t^{(1)} = +20\%$	$t^{(2)} = +21{,}5\%$	$t^{(3)} = +21{,}572\%$
	$t_d - t^{(1)} = 1{,}578\%$	$t_d - t^{(2)} = 0{,}078\%$	$t_d - t^{(3)} = 0{,}006\%$

Po podstawieniu wartości współczynników wrażliwości zebranych w tablicy D.1 do wzorów (6.34), (6.35) i (6.35) uzyskano wartości współczynników wrażliwości modułu wzmocnienia napięciowego na zmianę pulsacji. Wyniki zebrano w tablicy D.4.

Tablica D.4

Wrażliwość	$S_f^{\lvert K_U \rvert}$	$Q_f^{K_U}$	$S_{f^2}^{K_U}$	$S_{f^2}^{\lvert K_U \rvert}$	$Q_{f^2}^{K_U}$	$S_{f^3}^{K_U}$	$S_{f^3}^{\lvert K_U \rvert}$
Wartość współczynnika wrażliwości	0	-1	-1 + j 0,5	-0,5	0,5	1 + j 0,5	+0,5

Zmiana częstotliwości nie wpływa (w pierwszym przybliżeniu) na moduł wzmocnienia napięciowego. Tolerancja amplitudy wzmocnienia aproksymowana jest,

przy nominalnych wartościach elementów i tolerancji t_f pulsacji, dla wrażliwości:

a) 1 rzędu przez $t_{|K_U|} = 0$,

b) 1 i 2 rzędu zależnością $t_{|K_U|} = -0,5 \cdot t_f^2$

c) 1, 2 i 3 rzędu zależnością $t_{|K_U|} = -0,5\, t_f^2 + 0,5\, t_f^3$.

Podobnie jak przy zmianach wartości elementów określono dla t_f kresy górne tolerancji małoprzyrostowych i dokładności aproksymacji. Wyniki zebrano w tablicach D.5 i D.6.

Tablica D.5

Kres górny tolerancji małoprzyrostowej pulsacji ($t_f = t_f^o$ w %) po uwzględnieniu wrażliwości rzędu:		
1	1,2	1,2,3
$t_f^o = 18$	$t_f^o = 32$	$t_f^o = 55$

Tablica D.6

Tolerancja modułu wzmocnienia napięciowego układu spowodowana 18% tolerancją wartości pulsacji obliczona			
	z uwzględnieniem wrażliwości rzędu:		
dokładnie	1	1,2	1,2,3
$t_d = -1,94\%$	$t^{(1)} = 0\%$	$t^{(2)} = -1,62\%$	$t^{(3)} = -1,91\%$
	$\lvert t^{(1)} - t_d \rvert = 1,94\%$	$\lvert t^{(2)} - t_d \rvert = 0,32\%$	$\lvert t^{(3)} - t_d \rvert = 0,03\%$

Przykład 2

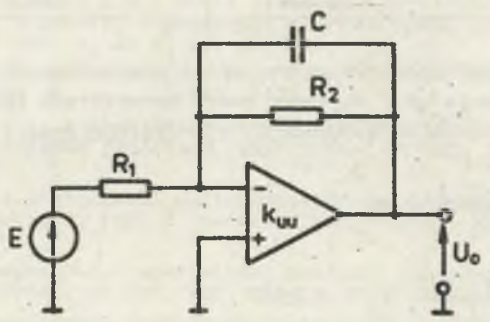
Należy określić, wykorzystując współczynniki wrażliwości, wielomiany aproksymujące (dla najniekorzystniejszych warunków pracy) odchyłkę modułu wzmocnienia napięciowego obwodu przedstawionego na rysunku D.2 przy zmianach: a) wartości elementów, b) częstotliwości pobudzenia. Wartości znamionowe elementów: $R_1 = R_2 = 1$ k, $C = 1\ 10^{-6}$ F, $k_{UU} = 100$ V/V, $|E| = 1$ V, $\omega = 1 \cdot 10^3\ \frac{rad}{s}$, $t_{|E|} = 0$.

Przeprowadzono 6-krotną analizę obwodu i obliczono współczynniki wrażliwości oraz ich moduły [D1]. Umożliwiło to obliczenie współczynników wielomianów aproksymujących, dla $t = t_{G_1} = t_{k_{UU}} = -t_{G_2} = -t_C$, tolerancję amplitudy funkcji układowej. Uzyskano następujące wielomiany:

$$t^{(1)}_{|K_U|} = 2,0049 \cdot t$$

$$t^{(2)}_{|K_U|} = 2{,}0049 \cdot t + 1{,}995 \cdot t^2$$

$$t^{(3)}_{|K_U|} = 2{,}0049 \cdot t + 1{,}995 \cdot t^2 + 2{,}0875 \cdot t^3.$$



Rys. D.2. Obwód z źródłem napięciowym sterowanym napięciem
Fig. D.2. Network with the voltage controlled voltage source

W tablicy D.7 przedstawiono zależność błędu aproksymacji od wielkości tolerancji elementów t i rzędu wielomianu aproksymującego. Przez t_d oznaczono dokładną wartość tolerancji modułu wzmocnienia napięciowego.

Tablica D.7

t %	t_d %	$t^{(1)}$ %	$(t^{(1)}-t_d)$ %	$t^{(2)}$ %	$(t^{(2)}-t_d)$ %	$t^{(3)}$ %	$(t^{(3)}-t_d)$ %
+5	10,55	10,02	-0,53	10,52	-0,03	10,55	0
-5	-9,55	-10,02	-0,47	-9,53	+0,02	-9,55	0
+10	22,26	20,05	-2,21	22,04	-0,22	22,25	-0,01
-10	-18,24	-20,05	-1,81	-18,05	+0,19	-18,26	-0,02
20	50,06	40,09	-9,97	48,08	-1,98	49,75	-0,31
-20	-33,44	-40,09	-6,65	-32,12	+1,32	-33,79	-0,35
30	85,74	60,15	-25,59	78,10	-7,64	83,74	-2,00
-30	-46,32	-60,15	-13,83	-42,19	+4,13	47,83	-1,51
40	133,22	80,19	-53,03	112,11	-21,11	125,47	-7,75
-40	-57,36	-80,19	-22,83	-48,27	+9,09	-61,63	-4,27

Górne kresy tolerancji małoprzyrostowej, dla błędu aproksymacji 2%, podano w tablicy D.8.

Tablica D.8

Uwzględniono współczynniki wrażliwości rzędu:	Kres górny tolerancji małoprzyrostowej t_g %
1	9
1,2	20
1,2,3	30

Po obliczeniu współczynników wpływu zmian częstotliwości na zmianę wzmocnienia i jego modułu [D2] uzyskano wzory określające zależność tolerancji amplitudy wzmocnienia od tolerancji t_f częstotliwości:

$$t^{(1)}_{|K_U|} = -0{,}4951 \cdot t_f$$

$$t^{(2)}_{|K_U|} = -0{,}4951 \cdot t_f + 0{,}1201 \cdot t_f^2$$

$$t^{(3)}_{|K_U|} = -0{,}4951 \cdot t_f + 0{,}1201 \cdot t_f^2 + 0{,}2476 \cdot t_f^3.$$

Wykorzystanie współczynników wrażliwości wyższych rzędów w sposób istotny wpływa na zwiększenie kresu górnego małoprzyrostowych tolerancji wartości elementów i parametrów oraz na zwiększenie dokładności aproksymacji tolerancji funkcji układowych. Powyższe przykłady są tego wymowną ilustracją.

LITERATURA

[1] Alijev R.A.: Princip invariatnosti i jego primenenije, Moskva, Energoatomizdat, 1985.

[2] Abdel-Malek H.K., Bandler J.W.: Yield estimation for efficient design centering assuming arbitrary statistical distributions, Int. J. Circuit Theory Appl., Vol. 6, No 3, ss. 289-303, 1978.

[3] Abdy P.R., Baxter J.R.: Frequency - to - time - domain sensitivity matrix, EL. Vol. 9, No 19, ss. 455-457, 1973.

[4] Abougabal M.S. at all: A low-sensitivity active distributed realization of rational transfer functions, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-21, ss. 391-395, 1974.

[5] Acar C., Ghausi M.: Statistical multiparameter sensitivity measure of gain and phase functions, Int. J. Circuit Theory Appl., Vol. 5, No 1, ss. 13-33, 1977.

[6] Balaban P., Golembeski J.J.: Statistical analysis for practical circuit design, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-22, No 2, ss. 100-109, 1975.

[7] Balik F.: Metoda obliczania pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu dla potrzeb projektowania liniowych układów elektronicznych, Prace Nauk. Inst. Telek. i Akus. (ITA) Pol. Wr., Nr 23, ss. 216-237.

[8] Balik F.: Komputerowa metoda optymalizacji liniowych układów elektronicznych przystosowana do projektowania i identyfikacji, Rozprawa doktorska, K. ITA Pol. Wr. I 28 K-169 77, Wrocław 1977.

[9] Bandler J.W.: Computation of sensitivities for noncommensurate networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, ss. 174-178, 1971.

[10] Bandler J.W., Liu P.C.: Automated network design with optimal tolerances, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-21, No 2, ss. 219-222, 1974.

[11] Bandler J.W., Liu P.C.: Some implications of biquadratic functions in the tolerance problem, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-22, No 5, ss. 385--390, 1975.

[12] Bandler J.W., Liu P.C., Tromp H.: A nonlinear programming approach to optimal design centering, tolerancing and tuning, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-23, No 3, ss. 155-165, 1976.

[13] Bandler J.W., Abdel-Malek H.L.: Optimal centering, tolerancing and yield determination via updated approximations and cuts, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-25, No 10, ss. 853-870, 1978.

[14] Bandler J.W., El-Kady M.A.: A complex Lagrangian approach to with applications to power network sensitivity analysis, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-29, No 1, ss. 1-6, 1982.

[15] Barbini P., Liberatore A., Mazzoni G.: Large-change sensitivity figure, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-25, No 6, ss. 380-381, 1978.

[16] Becker P.W., Jensen F.: Projektirovanije nadieżnych elektronnych schem, Moskva, Sovetskoje radio, 1977.

[17] Bellert S., Woźniacki H.: Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych, Warszawa, WNT, 1968.

[18] Belove C.: Sensitivity sums of homogenous functions. IEEE Trans. on CT, Vol. CT-11, No 2, ss. 171, 1964.

[19] Białko M.: Progress in active RC filters, SSCT 74, ss. 5-20, Praga 1974.

[20] Białko M.: Elementy syntezy liniowych układów scalonych, Warszawa, WKŁ, 1973.

[21] Białko M,. Żurada J.: Filtr aktywny trzeciego rzędu o małej czułości zbudowany ze źródeł uniwersalnych DVCCS DVCVS, Archiwum Elektrotechniki, Z. 4, ss. 857-869, 1972.

[22] Białko M. [Ed.] : Filtry aktywne RC, Warszawa, WNT, 1979.

[23] Belov B.I., Norenkov I.T.: Rašcet èlektronnych schem na ECVM, Moskva, Mašinostrojenie, 1971.

[24] Biernacki R.: Testowanie i lokalizacja uszkodzeń w analogowych układach elektronicznych, Materiały dodatkowe IV i V KK TOiUE, ss. 58-70, Warszawa 1982.

[25] Besekerskij V.A., Nebylov A.V.: Robastnyje sistemy avtomatičeskogo upravlenija, Moskva, Nauka, 1983.

[26] Biswas R.N., Kuh E.S.: A multiparameter sensitivity measure for linear networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, No 6, ss. 718-719, 1971.

[27] Bode H.W.: Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Princeton, N.J., Van Nostrand 1945.

[28] Bordewijk J.L.: Reversal theorems for linear electrical triode-networks, HET PTT-bedrijf. DEEL 3, No 2, ss. 75-81, August 1950.

[29] Bordewijk J.L.: Inter-reciprocity applied to electrical networks,Appl. Sci. Res., Section B, Vol. 6, ss. 1-74, 1956.

[30] Bordewijk J.L.: Comments on automated network design and the interreciprocity concept, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, s. 179, 1971.

[31] Borys A., Wojtyna R.: Zastosowanie sieci dołączonej w programie analizy częstotliwościowej, szumowej i czułościowej na Odrze 1204, I K. Symp. Nauk Radiowych URSI, ss. 285-287, Warszawa 1975.

[32] Branin F.H.: Network sensitivity and noise analysis simplified, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-20, ss. 285-288, 1973.

[33] Brayton R.K., Director S.W.: Computation of delay time sensitivities for use in time domain optimization, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-22, No 12, ss. 910-920, 1975.

[34] Brayton R.K., Spence R.: Sensitivity and optimization, Amsterdam, Elsevier, 1980.

[35] Buda De R.: About sensitivity invariants of equivalent network, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-17, ss. 248-249, 1970.

[36] Bukowski M., Filipkowski A.: A new large-change sensitivity invariant for linear networks and relations between sensitivities, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-27, No 10, ss. 978-980, 1980.

[37] Bunch J.R., Rose D.J.: Partitioning, tearing and modification of sparse linear systems, J. Math. Anal. Appl., Vol. 48, ss. 574-593, Nov. 1974,

[38] Butler W.J., Haykin S.S.: Multiparameter sensitivity problems in network theory, Proc. IEE, Vol. 117, No 12, ss. 2228-2236, 1970.

[39] Butler E.M.: Realistic design using large change sensitivities and performance contours, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, No 1, ss. 58-66, 1971.

[40] Bychovskij M.L.: Osnowy dinamičeskoj točnosti električeskich i mechaničeskich cepej, Izd. AN SSSR, 1958.

[41] Čachamachsazjan E.A., Barmakov Ju.N., Goldenberg A.E.: Mašinnyj analiz integralnych schem, Moskva, Sovetskoje radio, 1974.

[42] Centkowski G.: Numeryczna analiza dużych układów przez dekompozycję, VIII KK TOiUE, ss. 216-220, Poznań 1985.

[43] Cermak I.A., Kirby D.B.: Statistical circuit design: nonlinear circuits and statistical design, BSTJ, Vol. 50, No 4, ss. 1173-1185, 1971.

[44] Ceyhun Y.: Hybrid form of Tellegen's theorem, EL, Vol. 7, ss. 84-85, 1971.

[45] Ceyhun Y.: Sensitivity invariants of certain class of networks, EL, Vol. 7, No 3, ss. 85-86, 1971,

[46] Ceyhun Y.: On the properties of continuants and sensitivity computations, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-20, No 2, ss. 167-169, 1973.

[47] Cheetham B.M.G., Nichols K.G.: Restrictions on equivalent network transformations imposed by the continuous method, EL, Vol. 8, No 4, ss. 101-102, 1972.

[48] Cheetham B.M.G.: A new theory of continuously equivalent networks, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-21, No 1, ss. 17-20, 1974.

[49] Calahan D.A.: Projektowanie układów elektronicznych za pomocą maszyny cyfrowej, Warszawa, WNT, 1978.

[50] Chojcan J.A Analiza liniowych obwodów prądu stałego, Skrypty Uczelniane Nr 385, Gliwice 1972.

[51] Chojcan J., Karwan L.: Program NAPS obliczania najbardziej niekorzystnych warunków pracy obwodu prądu stałego, Materiały I Sympozjum: Problemy projektowania obwodów elektrycznych przy zastosowaniu maszyn cyfrowych, ss. 115-117, Gliwice 1973.

[52] Chojcan J.: Sposób obliczania wpływu zmian wartości elementów sieci wentylacyjnych na natężenie przepływu powietrza w bocznicach z wykorzystaniem tzw. sieci dołączonej. Przegląd Górniczy 1, ss. 17-24, 1975.

[53] Chojcan J., Mikulski J., Plaza R.: Podstawy projektowania nowego elementu progowego, Elektronika, 6, ss. 239-241, 1976.

[54] Chojcan J., Karwan L.: Metoda znajdowania najniekorzystniejszych warunków pracy obwodu: Algorytm i zastosowanie, ZN Pol. Śląskiej, Automatyka Z. 32, ss. 45-53, Gliwice 1976.

[55] Chojcan J., Grabowiecki T., Romanowski H.: Niektóre sposoby wykorzystania programów analizy obwodów liniowych przy pomocy maszyn cyfrowych, ZN Pol. Śląskiej, Automatyka Z. 32, ss. 75-85, Gliwice 1976.

[56] Chojcan J., Mikulski J., Plaza R.: Zastosowanie m.c. do projektowania elementów progowych, Prace Naukowe Inst. Telek. i Akus. Pol. Wr. No 23, Konf. 5, ss. 183-193, Wrocław 1976.

[57] Chojcan J., Rutkowski J.: Metoda obliczania współczynników wrażliwości w dużych jednorodnych sieciach nieliniowych i jej zastosowanie do sieci wentylacyjnej, ZN Pol. Śląskiej, Automatyka, Z. 37, ss. 17-29, Gliwice 1977.

[58] Chojcan J., Karwan L.: Obliczanie optymalnych tolerancji w liniowych obwodach elektrycznych, ZN Pol. Śląskiej, Automatyka, Z. 37, ss. 3-15, Gliwice 1977.

[59] Chojcan J., Karwan L.: Obliczanie wrażliwości i najgorszych warunków pracy obwodu przy dużych zmianach wartości parametrów, I KK TOiUE, Podlesice 1977.

[60] Chojcan J., Karwan L., Kolmer A.: Wykorzystanie kwantyli do optymalizacji tolerancji elementów obwodu, II KK TOiUE, ss. 48-55 (dodatkowe materiały), Trzebieszowice 1978.

[61] Chojcan J., Mikulski J.: Projektowanie logicznych elementów progowych, ZN Pol. Śląskiej, Automatyka, Z. 49, s. 85-99, Gliwice 1979.

[62] Chojcan J., Lasek L.: Wrażliwości bazowe transmitancji obwodów elektronicznych opisanych macierzami admitancyjnymi, III KK TOiUE, ss. 126-132, Stawiska k. Gdańska 1979.

[63] Chojcan J., Karwan L.: Określenie liczb kwantylowych transmitancji obwodów opisanych równaniami węzłowymi, III KK TOiUE, ss. 133-138, Stawiska k. Gdańska, 1979.

[64] Chojcan J., Lasek L.: Metody analizy wrażliwości układów elektronicznych, Skrypty Uczelniane Nr 938, Gliwice 1980.

[65] Chojcan J., Karwan L.: Optymalny dobór tolerancji elementów oraz zastosowanie liczb kwantylowych, W Monografii: Metody statystycznej i wrażliwościowej analizy i optymalizacji układów, ss. 105-145, Warszawa 1981.

[66] Chojcan J., Karwan L.: Efektywność metod kwantylowych, Materiały V Narady Roboczej Problemu Resortowego I. 8, ss. 23-25, Warszawa 1981.

[67] Chojcan J., Lasek L.: Porównanie efektywności numerycznej metody macierzowej i metody obwodów dołączonych, Materiały V Narady Roboczej Problemu Resortowego I. 8, ss. 18-22, Warszawa 1981.

[68] Chojcan J.: Wykorzystanie statystyk pozycyjnych do oceny parametrów pozycyjnych rozkładów wartości funkcji układowych, VI KK TOiUE, ss. 162-166, Gliwice 1983.

[69] Chojcan J.: Analiza wrażliwości wyższych rzędów, VI KK TOiUE, ss. 156--161, Gliwice 1983.

[70] Chojcan J., Lasek L.: Porównanie dwóch efektywnych metod obliczania wrażliwości małoprzyrostowych, AE, T XXXII, Z. 3/4, ss. 327-344, 1983.

[71] Chojcan J.: Obliczanie wrażliwości wyższych rzędów i ich zastosowanie, VII SPETO, ss. 135-144, Gliwice-Ustroń, 1984

[72] Chojcan J., Karwan L.: Wrażliwości wyższych rzędów dla obwodów z wielobiegunnikami, VII KK TOiUE, ss. 495-500, Kazimierz Dolny 1984.

[73] Chojcan J.: Niezmienniki wrażliwości wyższych rzędów, VIII KK TOiUE, ss. 261-265, Poznań 1985.

[74] Chojcan J., Karwan L.: Obliczanie wrażliwości wyższych rzędów obwodów zdekomponowanych, VIII KK TOiUE, ss. 266-270, Poznań 1985.

[75] Chojcan J.: Obliczanie wrażliwości wyższych rzędów i ich zastosowanie, ZN Pol. Śląskiej, Elektryka Z. 95, ss. 67-79, Gliwice 1985.

[76] Chojcan J., Karwan L.: Niezmiennicze własności sumy wrażliwości w obwodach z wieloma wymuszeniami, Materiały IX KK TOiUE, ss. 147-153, Szklarska Poręba 1986.

[77] Chua L.O., Lin P.-M.: Komputerowa Analiza Układów Elektronicznych. Algorytmy i metody obliczeniowe. Warszawa, WNT 1981.

[78] Ho Ch.W.: Time-domain sensitivity computation for networks containing transmission lines, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, No 1, ss. 114-122, 1971.

[79] Dagett K.E., Vlach J.: Sensitivity-compensated active networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-16, ss. 416-423, 1969.

[80] Davis T.W., Palmer R.W.: Computer-Aided Analysis of Electrical Networks, Columbus, Charles E. Merrill Publ. Comp., 1973.

[81] Davis R.D.: A derivation of the switched-capacitor adjoint network based on a modified Tellegen's theorem, IEEE Trans. on CAS, vol. CAS-29, No 4, ss. 215-220, 1982.

[82] Desoer Ch.A.: On the description of the adjoint networks, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-22, No 7, ss. 585-587, 1975 + [83].

[83] Desoer Ch.A.: Correction to "On the... [82]", IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-23, No 1, s. 58, 1976.

[84] Devanathan R.: Continuously equivalent networks in state space, EL, Vol. 9, No 16, ss. 372-373, 1973.

[85] Dickieson A.C., Chernak J.: Statistical circuit design: history and introduction, BSTJ, Vol. 50, No 4, ss. 1099-1103, 1971.

[86] Director S.W., Rohrer R.A.: Automated network design - the frequency domain case, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-16, ss. 330-337, 1969.

[87] Director S.W., Rohrer R.A.: A generalized adjoint network and network sensitivities, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-16, ss. 318-323, 1969.

[88] Director S.W.: Survey of circuit-oriented optimization techniques, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, No 1, ss. 3-9, 1971.

[89] Director S.W.: LU factorization in network sensitivity calculations, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, ss. 184-185, 1971.

[90] Director S.W., Wayne D.A.: Computational efficiency in the determination of Thevenin and Norton equivalents, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-19, ss. 96-98, 1972.

[91] Director S.W. [Ed.] : Computer-Aided Circuit Design: Simulation and Optimization, Benchmark Papers in Electrical Engineering and Computer Science, Stroudsburg, Dowden, Hutchinson Ross, Inc., 1973.

[92] Director S.W.: Circuit Theory. A Computational Approach, N.Y., J. Wiley, 1975.

[93] Director S.W., Hachtel G.D.: The simplicial approximation approach to design centering, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-24, No 7, ss. 363--372, 1977.

[94] Downs T.: A note on the computation of large-change sensitivities, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-20, No 6, ss. 741-742, 1973.

[95] El-Turky F.M., Vlach J.: Generation of equivalent active networks with minimized sensitivities, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-28, No 10, ss. 94-946, 1981.

[96] El-Turky F.M., Khalaf S.K.: Network invariant sensitivity sums, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-29, No 5, ss. 299-305, 1982.

[97] Fettweis A.: Reciprocity, inter-reciprocity and transposition in wave digital filters, Int. J. Circuit Theory Appl., Vol. 1, No 4, ss. 327--337, 1973.

[98] Fichtenholtz G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy, t. I i II, Warszawa, PWN, 1964.

[99] Fidler J.K., Nightingale C.: Differential incremental sensitivity relationships, EL, Vol. 8, No 25, ss. 626-627, 1972.

[100] Fidler J.K.: Network sensitivity calculation, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-23, No 9, ss. 567-571, 1976.

[101] Fidler J.K.: Some topics in network sensitivity, Wrocław Wydawnictwo Pol. Wrocławskiej, Monografia No 14, 1977.

[102] Fidler J.F.: Comment on "Calculating transfer function... [206] ", EL, Vol. 19, ss. 914-915, 1983 + reply 915-916.

[103] Filipowski A.: Analiza i projektowanie scalonych hybrydowych wzmacniaczy tranzystorowych wielkiej częstotliwości z uwzględnieniem wrażliwości na zmiany i rozrzuty parametrów, Prace Naukowe PW, Elektronika Nr 4, Warszawa 1972.

[104] Filipkowski A., Tue L. Wrażliwość wielkoprzyrostowa i dolny kres tolerancji wielkoprzyrostowej, Materiały I KK TOiUE, ss. 134-143, Podlesice 1977.

[105] Filipkowski A.: Projektowanie elektryczne analogowych układów scalonych, Warszawa, WPW, 1978.

[106] Filipkowski A.: Układy elektroniczne analogowe i cyfrowe, Warszawa, WNT, 1978.

[107] Filipkowski A., Tue L.: Optymalizacja układów aktywnych z punktu widzenia wrażliwości wielkoprzyrostowych, II KK TOiUE, ss. 175-181, Trzebieszowice 1978.

[108] Filipkowski A., Tue L., Michalski Z.: Optimization of large change tolerances of linear integrated circuits, Int. J. Circuit Theory Appl., Vol. 8, No 3, ss. 237-244, 1980.

[109] Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, Warszawa, PWN, 1969.

[110] Forsythe G.E. i dr.: Mašinnyje metody matematičeskich wyčislenij, Moskva, Mir, 1980.

[111] Fryze S.: Nowa teoria ogólnego obwodu elektrycznego, Przegląd Elektrotechniczny Nr 11, 12 i 13, 1924.

[112] Gandez R.N., Temes G.C.: Efficient hybrid and state - space analysis of the adjoint network, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-19, ss. 520-521, 1972.

[113] Gandez R.N., Rezai-Fakhr M.G., Temes G.C.: A method for the computation of large tolerance effects, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-20, No 6, ss. 704-708, 1973.

[114] Garwacki K.: Zastosowanie analizy czynnikowej do modelowania statystycznego elementów układów scalonych, VI KK TOiUE, ss. 152-155, Gliwice 1983.

[115] Geher K., Roska T.: Sensitivity invariants in the theory of network tolerances and optimization, Periodica Polytechnica, Vol. 15, No 2, ss. 89-102, 1971.

[116] Geher K., Solymosi J.: Calculation of higher - order sensitivity invariants, Periodica Polytechnica, Vol. 16, No 3, ss. 325-330, 1972.

[117] Geher K.: Teoria tolerancji i wrażliwości układów elektronicznych, Warszawa, WNT, 1976.

[118] Ghaznavi C., Seidman A.M.: Electronic Circuit Analysis. The MacMillan Company, 1972.

[119] Glesner M., Haubrichts K., Linsler H.J.: A quantile arithmetic approach to the problem of tolerance optimization and design centering of electrical networks, Proc. of the 1976, European Conference on Circuit Theory and Design (ECCD), Vol. II, ss. 669-677. Genova 1976.

[120] Glesner M., Haubrichs K.: A new efficient statistical tolerance analysis and design procedure for electrical networks, IEEE Proc. cademics, Hull, England, 1977.

[121] Goddard P.J., Spence R.: Efficient method for the calculation of first - and second - order network sensitivities. EL, Vol. 5, ss. 351-352, 1969.

[122] Goddart P.J., Villalaz P.A., Spence R.: Method for the efficient computation of large - change sensitivity of linear nonreciprocal network, EL, Vol. 7, s. 112-113, 1971.

[123] Goldstein A.J., Kuo F.F.: Multiparametr sensitivity, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-8, ss. 177-178, 1961.

[124] Gordienko V.N.: Ekvivalentnyje preobrazowanija elektriceskich schem, Izv. VUZOV, Radioelektronika, No 7, 1967.

[125] Gordienko V.N., Korolev Ju.V.: Ekvivalentnyje preobrazowanija radioelektronnych schem s neobratimymi elementami, Izw. VUZOV, Radioelektronika, No 7, 1967.

[126] Gorski-Popiel J.: Clasical sensitivity - a collection of formulas, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-10, ss. 300-302, 1963.

[127] Gorski-Popiel J.: Horowitz minimum sensitivity decomposition, EL, Vol. 2, ss. 331-335, 1966.

[128] Grant L.G., Sewell J.I.: A theory of equivalent active networks, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-23, ss. 350-354, 1976.

[129] Grobelny M.: Projektowanie układów elektronicznych za pomocą komputerów, Warszawa, WKŁ, 1973.

[130] Grobelny M.: Zarys liniowej teorii układów elektronicznych, Warszawa, WKŁ, 1976.

[131] Grobleny M. [Red.] : Układy elektroniczne, część I. Materiały do zajęć z komputerowego projektowania, Wrocław, Wyd. PWR, 1980.

[132] Guziński A.: Projektowanie i konstrukcja układów warstwowych, Warszawa, WKŁ, 1973.

[133] Haack G.R.: On the noncompleteness of continuously equivalent networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-17, ss. 619-620, 1970.

[134] Hachwald W., Bastian J.: APC approach for analog fault dictionary determination, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-26, No 7, ss. 523-529, 1979.

[135] Hajj I.N.: Updating method for LU factorization, EL, Vol. 8, ss. 186--188, 1972.

[136] Hajj I.N.: Sparsity Considerations in Network Solution by Tearing, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-27, No 5, ss. 357-366, May 1980.

[137] Hakimi S.L., Cruz J.B.Jr: Measure of sensitivity for linear system with large multiparameter variations. IRE Wescon Convention Record, Part 111, 1967.

[138] Haley S.B.: Large change response sensitivity of linear networks, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-27, No 4, ss. 305-310, 1980.

[139] Hanneman H.W., Linsen H.N.: A relation between sensitivity and variance of network function, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-19, ss. 499--502, 1972.

[140] Happ H.H.: Diakoptics and networks, N.Y., Academic Press, 1971.

[141] Haykin S.S.: Adjoint - network method of calculating network sensitivities, Proc. IEE, Vol. 19, No 8, ss. 1139-1140, 1972.

[142] Ho C.W., Ruehli A.E., Brennan P.A.: The modified nodal approach to network analysis, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-22, No 6, ss. 504-509, 1975.

[143] Holt A.G.J., Fidler J.K.: Summed sensitivity of network functions, EL, Vol. 4, No 5, s. 85, 1968.

[144] Holt A.G.J., Fidler J.K.: Optimally sensitivity network, EL, Vol. 4, No 9, ss. 85-87, 1968.

[145] Holt A.G.J., Lee M.R.: Summed sensitivity of active RC-networks, EL, Vol. 4, No 14, s. 298, 1968.

[146] Holt A.G.J., Fidler J.K.: Summed sensitivity of active networks, EL, Vol. 4, No 18, s. 385, 1968.

[147] Holt A.G.J.: Lee M.R.: General rule for the compensation of the sensitivity of a network to its active devices, EL, Vol. 5, No 14, ss. 324-325, 1969.

[148] Horowitz I.M.: Synthesis of Feddback Systems, New York, Academic Press, 1963.

[149] Horowitz I.: Design of zero sensitivity integrated circuits, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-15, No 4, ss. 440-446, 1968.

[150] Huance J., Spence R.: A statistical approach to fault location in analogue circuits, ISCAS, ss. 1-37, Roma 1982.

[151] Huelsemen L.P.: Theory and design of active RC circuits. N.Y., McGraw-Hill, 1968.

[152] Huelseman L.P.: Active RC filters, N.Y., Mc Graw-Hill, 1970.

[153] Hüseyin O.: A note on equivalent networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-19, May, 1972.

[154] Ilin W.N.: Projektowanie układów elektronicznych przy użyciu maszyn cyfrowych, Warszawa, WNT, 1975.

[155] Isaacson E., Keller H.B.: Analysis of Numerical Methods, N.Y., J. Wiley, 1966.

[156] Jeleniewski T., Sielicki A.: Metodologia i komputerowe wspomaganie projektowania technicznego, Wrocław, skrypty PWr, 1975.

[157] Jeleniewski T., Kołodziej R., Sielecki A.: Metodologia projektowania w laboratorium komputerowym, Skrypty PWr, Wrocław 1980.

[158] Jensen R.W., Lieberman M.D.: IBM Electronic Circuit Analysis Program, Englewood Cliffs, N.Y., Prentice-Hall, Inc., 1968.

[159] Jogodnik J., Wolfson M.: Systematic fault simulation in an analog circuit simulator, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-26, No 7, ss. 549-554, 1979.

[160] Jusupov R.M. [red.] : Voprosy kibernetiki. Teoria čuvstvitelnosti i jego primenenije, Moskva, Svjaz, 1977.

[161] Kaczorek T.: Macierze w automatyce i elektrotechnice, Warszawa WNT, 1984.

[162] Karafin B.J.: Statistical circuit design: the optimum assignment of component tolerances for electrical networks, BSTJ, Vol. 50, No 4, ss. 1225-1242, 1971.

[163] Karwan L., Chojcan J.: Obliczanie optymalnych tolerancji w liniowych obwodach elektrycznych, I Kraj. Symp. Nauk Radiowych URSI, ss. 296--298, Warszawa 1975.

[164] Karwan L.: Analiza wrażliwości układów elektronicznych metodą dekompozycji, Rozprawa doktorska, Gliwice 1976.

[165] Karwan L., Chojcan J.: Analiza wrażliwości i dobór optymalny elementów opisanych przez kilka parametrów, I KK TOiUE, ss. 144-147, Podlesice 1977.

[166] Kaširskij I.S., Trochimenko Ja.K.: Obobščennaja optimizacja elektronnych schem, Kijev, Technika, 1979.

[167] Kassur A., Perkowski P.: Obliczeniowe aspekty projektowania układów elektronicznych, Warszawa, WNT, 1979.

[168] Kazandžan N.N., Kalnibolotskij Ju.M.: Optimizacija elektronnych schem metodom diskretnych ekwivalentnych preobrazovanij w odnorodnom koordinatnom bazise, Awt, proj. w elektr., Wyp. 11, ss. 18-26, Kijev, 1975.

[169] Kernighan B.W., Lin S.: An Efficient Heuristic Procedure for Partitioning Graphs, The BSTJ, ss. 291-307, February 1970.

[170] Kida T., Osumi N.: New time-domain sensitivity formulas and their applications, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-27, No 3, ss. 176-184, 1980.

[171] Kiliński A.: Granice pól rozrzutu parametrów obiektów złożonych, Prace PIT, Nr 47, 48, ss. 27-40, 1965.

[172] Kim H.K., Phan C.S.: Polynomian decomposition for the minimization of quality factor sensitivity, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-19, No 4, ss. 397-398, 1972.

[173] Kishi G., Kida T.: Energy theory of sensitivity in LCR networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-14, No 4, ss. 380-387, 1967.

[174] Krishnan R., Downs T.: A note on the computation of large change multiparameter sensitivities, Int. J. Circuit Theory Appl., Vol. 4, No 3, ss. 307-310, 1976.

[175] Krivoševskij A.V.: Ocenka točnosti rasčotov pri ispolzovanii funkcij čuvstvitelnosti Bode, Izv. VUZOV, Radioelektronika, T XX, No 8, ss. 78-82, 1977.

[176] Krivošejkin A.V.: Točnost parametrov i nastrojka analogowych radioelektronnych cepej, Moskva, Radio i svjaz', 1983.

[177] Kuchtenko A.I.: Problema invariantnosti v avtomatike, Kijev, Gostechizdat, USSR, 1963.

[178] Kudrewicz J., Osiowski J.: Wybrane zagadnienia teorii obwodów, Warszawa, WPW, 1974.

[179] Kuh E.S., Rohrer R.A.: Theory of Linear Active Networks, San Francisko, Calif., Holden-Day, 1967.

[180] Kuh E.S.: State variables and feedback theory, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-16, ss. 23-26, February 1969.

[181] Kuh E.S., Lau C.G.: Sensitivity invariants of continuously equivalent networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-15, No 3, ss. 175-177, 1968.

[182] Kunieda T., Hiramatsu Y., Fukui A.: Frequency dependence of sensitivity in second - order RC active filters, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-27, ss. 77-84, 1980.

[183] Kumpel Z.: Root-sensitivity invariants, EL, Vol. 4. No 26, ss. 587--589, 1968.

[184] Kuo F.F.: Pole-zero sensitivity in network functions. IRE Trans. on CT (Correspondence), Vol. CT-5, ss. 372-373, December 1958.

[185] Lanne A.A. [red.] : Sintez aktivnych RC-cepej. Sovremennoje sostojanije i problemy, Moskva, Svjaz, 1975.

[186] Lasek L., Witkowski J.J.: Uogólniona metoda analizy układów elektronicznych, Gliwice, Skrypty Uczelniane Nr 697, 1977.

[187] Lasek L.: Ogólna zależność na nieliniowość wrażliwości dla dowolnej transmitancji układu elektronicznego, VI KKTOiUE, ss. 167-171, Gliwice 1983.

[188] Lee A.Y.: Signal flow graphs-computer-aided system analysis and sensitivity calculations, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-21, No 2, ss. 209-216, 1974.

[189] Leeds J.V.Jr.: Transient and steady state sensitivity analysis, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-13, ss. 288-289, 1966.

[190] Leeds J.V.Jr, Urgon G.I.: Simplified multiple parameter sensitivity calculation and continuously equivalent networks, IEEE Trans. on CT, Vo. CT-14, ss. 188-191, 1967.

[191] Leja F.: Funkcje zespolone, Warszawa, PWN, 1967.

[192] Leon B.J., Yokomoto C.F.: Generation of a class of equivalent networks and its sensitivities, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-19, ss. 2-8, 1972.

[193] Leung K.H., Spence R.: Efficient statistical circuit analysis, EL, Vol. 10, ss. 360-362, 1974.

[194] Leung K.H., Spence R.: Multiparameter large-change sensitivity analysis and systematic exploration, IEEE Trans. on CAS, Vol, CAS-22, No 10, ss. 796-804, 1975.

[195] Leung K.H., Spence R.: Idealized statistical models for low-cost linear circuit yield analysis, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-24, ss. 62--66, 1977.

[196] Levin H.: Introduction to Computer Analysis. ECAP for Electronics Technicians and Engineers, N.J., Prentice Hall, 1970.

[197] Lin P.M.: A survey of Applications of Symbolic Network Functions, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-20, ss. 732-737, Nov. 1973.

[198] Ling X.T.: Worst-case tolerance design by the interval algebra, ISCAS ss. 127-130, 1981.

[199] Logan J.: Characterization and modeling for statistical design, BSTJ, Vol. 50, No 4, ss. 1105-1147, 1971.

[200] Lueder E.: A decomposition of a transfer function minimizing sensitivity, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-17, ss. 426-427, 1970.

[201] Maciszewski W., Kalisz J., Kazimierski T.: Przegląd programów komputerowej analizy układów elektronicznych, Elektronika, 4, ss. 153-157, 1976.

[202] MacKay R., Sedra A.S.: Sensitivity evaluation and comparisson for higher - order active filters, Int. J. Circuit Theory Appl., Vol. 4, No 4, ss. 345-356, 1976.

[203] Macura A., Chojcan J.: A Method for solving Nonlinear and Linear d.c. Networks, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, vol. XX, No 2, ss. 9-15, 1972.

[204] Macura A.: Performance contours for immitances, ECCTD 80, Warszawa vol. 2, ss. 545-551, 1980.

[205] Macura A., Rutkowski J.: Obszary sprawności przy ograniczeniach mocy elementów układu, VIII KK TOi UE, s. 412.

[206] Mambo di P.H.: Calculating transfer function and its first - and second - order sensitivities using one network analysis, EL, Vol. 19, ss. 421-423, 1983 + comment J.F. Fidler ss. 914-915 [102] + reply ss. 915-916.

[207] Manaktala V.R., Kelly G.A.: Computer-aided worst case sensitivity analysis of electrical networks over a frequency interval, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-19, No 1, ss. 91-93, 1972.

[208] Mann H.: Sensitivities simplified, Proc. 5th SSCT, ss. 413-419, Kladno, 1977.

[209] Mazzoni G., Liberatore A.: Further relationships between several types of multiparametric sensitivity, Int. J, Circuit Theory Appl., Vol. 5, No 3, ss. 245-253, 1977.

[210] Metody statystycznej i wrażliwościowej analizy i optymalizacji układów, [Monografia Problemu 1.8 TOiUE], Warszawa 1981.

[211] Meerov M.V.: Strukturnyje osnovy rešenija problemy čuvstvitelnosti. Čuvstvitelnost' avtomatičeskich sistem, Moskva, Nauka, 1968.

[212] Mitra S.K.: Analiza i synteza układów aktywnych liniowych, Warszawa, WNT, 1974.

[213] Mitrovic D.: Graphical analysis and synthesis of feedback control systems: I-theory and analysis; II - synthesis; III - sampled data feedback control systems, AIEE Trans. (Appl. Ind.), Vol. 77, ss. 476--503, 1958.

[214] Moore R.E.: Interval Analysis, N.J., Prentice-Hall, 1966.

[215] Moschytz G.S.: Second order pole-zero pair selection for minimum sensitivity Nth order networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-17, ss. 527--533, 1970.

[216] Madsen K., Schrajer-Jacobsen H., Voldby J.: Automated minimax design of networks, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-22, No 10, ss. 791-796, 1975.

[217] Musiałowski Z.: Program analizy liniowych układów elektronicznych w stanie ustalonym w dziedzinie częstotliwości, Prace Naukowe Inst. Telekom. i Akus. PWr, Nr 23, ss. 96-101, 1976.

[218] Nagornyj L.Ja.: Modelirovanie elektronnych cepej na CVM, Kijev, Technika, 1974.

[219] Naroušvili V.V.: Invarianty summarnych čuvstvitelnostej wremennych funkcij električeskich cepej, Izv. VUZOV, Radioelektronika, T XXI, No 7, ss. 77-79, 1978.

[220] Narid N., Willson A.: A theory and an algorithm for analog circuits fault diagnosis, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-26, No 7, ss. 440-457, 1979.

[221] Neill T.B.M.: Sensitivity analysis in computer-aided design of linear circuits, EL, 4, ss. 316-317, 1968.

[222] Neill T.B.M.: Second-order sensitivity analysis of linear system, EL, Vol. 5, ss. 211-212, 1969.

[223] Neill T.B.M.: Comment on efficient method for calculation of first- and second-order network sensitivities, EL, 5, 483-484, 1969.

[224] Neill T.B.M., Bond D.J.: Inversion of nodal admittance matrix by the use of state equations, Int. J. Circ, Theory Appl., Vol. 1, No 3, ss. 248-261, 1973.

[225] Neill T.B.M.: The inefficiency of the adjoint network approach to the calculation of first order sensitivity coefficients, Computer Aided Design, Vol. 6, No 1, ss. 32-34, 1974.

[226] Neirynck J., Moinat J.P.: Sensitivity of Image - Parameter Filters, SSSCT74, ss. 85-90, Praga 1974.

[227] Neirynck J., Van Bastelaer P.: Sensitivity of equivalent networks, EL, Vol 10, No 22, ss. 452-453, 1974.

[228] Neirynck J., Van Bastelaer P.: Tables of sensitivity invariants and bounds for lossless two-port, Int. J. Circuit Theory Appl. Vol. 3, No 3, ss. 285-291, 1975.

[229] Neirynck J., Van Bastelaer P.: On sensitivity invariants for continously equivalent networks, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-22, No 6, ss. 563-564, 1975.

[230] Neirynck J., Milic L.J.: Equal ripple tolerance characteristic, Int. J. Circuit Theory Appl., Vol. 4, ss. 99-104, 1976.

[231] Newcomb R.W.: The noncompleteness of continuously equivalent networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-13, No 2, ss. 207-208, 1966.

[232] Newcomb R.W.: Linear multiport synthesis, N.Y., Mc Graw-Hill, 1966.

[233] Niederliński A.: Układy wielowymiarowe automatyki, Warszawa, WNT, 1974.

[234] Obzor po teorii čuvstvitelnosti, Avtomatika i telemechanika, 1965, No 4, 1971, No 5.

[235] Ogrodzki J.: Analiza dokładności małoprzyrostowego przybliżenia rozrzutów funkcji układowych układów liniowych, II KK TOiUE, ss. 182-189, Trzebieszowice, 1978.

[236] Ogrodzki J.T.: Metody komputerowej analizy wrażliwości wielkoprzyrostowej, RE, 26, Z. 3, ss. 797-818, 1980.

[237] Ogrodzki J.: Modified nodal approach to network sensitivity calculation for one - dimensional orthogonal search technique, EL, No 16, ss. 641-642, 1980.

[238] Osiowski J.: Teoria obwodów, t. 2, Warszawa, WNT, 1971.

[239] Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego. Teoria i zastosowania w elektrotechnice, Warszawa, WNT, 1981.

[240] Osowski S.: Analiza wrażliwości układów wielowejściowych, V KKTOiUE, ss. 137-141, Łódź, 1982.

[241] Paluchiewicz B., Chojcan J.: Zastosowanie analizy wrażliwościowej do syntezy konstrukcji dwufazowego silnika wykonawczego, Prace Instytutu Elektrotechniki, Z. 130, ss. 133-144, Warszawa 1984.

[242] Pampuro V.I.: Analiz radiocepej i ich schemnoj nadežnosti Technika, Kijev, 1967.

[243] Pampuro V.I.: Teorija točnosti i nadežnosti kibernetičeskich sistem, Izd. Instituta Kibernetiki AN USSR, Kijev 1968.

[244] Pampuro V.I.: Točnoje uravnienije pogrešnosti pri bolšich priraščenijach parametrov elementov, Matem. modelir. i teoria elektric. cepej, vyp. 9, ss. 120-129, Kijev, Naukova Dumka, 1971.

[245] Papoulis A.: Displacement of the zeros of the impedance Z(s) due to an incremental variation in the network elements, Proc. IRE, vol. 43, ss. 79-82, January 1955.

[246] Proc. IEE, Special Issue on Computer-Aided Design, Vol. 55, No 11, 1967.

[247] Parker S.R.: Sensitivity analysis and models of nonlinear circuits, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-16, ss. 443-447, 1969.

[248] Parker S.R.: Sensitivity: Old questions, some new answers, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, No 1, ss. 27-35, 1971.

[249] Parker S.R., Peskin E., Chirlian P.M.: Application of a bilinear theorem to network sensitivity, IEEE Trans. on CT (Correspondence), Vol. CT-12, ss. 448-450, Sept. 1965.

[250] Petrela D.M., Budak A.: Design of single-voltage amplifier active filters for minimum open-loop gain sensitivity, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, ss. 631-635, 1971.

[251] Porębski J., Budziaszek J.: Pakiety programów ECAP, SCEPTRE. Modelowanie układów elektrycznych i elektronicznych. Wyd. 2. Nr 1006, Skrypty Uczelniane AGH.

[252] Petrenko A.I. i drug.: Analiz elektronnych schem na ECVM, Lvov, Wišča skola, 1975.

[253] Petrenko A.I., Timčenko A.P.: K voprosu ob opredelenii pervych i vtorych proizvodnych celevych funkcjij elektronnych schem, Avtom. projekt. v elektronike, vyp. 13, ss. 44-53, Kijev, Technika, 1976.

[254] Petrenko A.I.: Modelirovanie neispravnostej analogovych elektronnych cepej, Avt. proj. v elektronike, vyp. 27, s. 28, Kijev, Technika, 1983.

[255] Penfield P., Spence R., Duinker S.: A generalized form of Tellegen's theorem, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-17, ss. 302-305, 1970.

[256] Penfield P.Jr., Spence R., Duinker S.: Tellegen's Theorem and Electrical Networks, Cambridge, Mass., MIT Press, 1970.

[257] Polivanov K.M.: Teorija variacji parametrov linejnoj elektriceskoj cepi, Elektricestvo, No 2, 1946.

[258] Puchov G.Je.: Preobrazovanija Tejlora i ich primienienie v elektrotechnike, Kijev, Naukova Dumka, 1978.

[259] Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej, Warszawa, PWN, 1971.

[260] Ramotowski M.: Automatyczne projektowanie układów elektronicznych za pomocą programu NAP-2 w wersji ulepszonej, Elektronika 4, ss. 174-177, 1978.

[261] Ramey R.L., White E.J.: Zastosowanie macierzy w maszynowej analizie układów elektronicznych, Warszawa, PWN, 1974.

[262] Reinschke K.: Pole-Zero-Sensitivities of Linear Networks, SSCT 74, ss. 123-129, Prage 1974.

[263] Rezai-Fakhr M.G., Tames G.C.: Statistical large-tolerance analysis of nonlinear circuits in the time domain, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-22, No 1, ss.15-21, 1975.

[264] Richards G.A.: Second-derivative sensitivity using the concept of the adjoint network, EL 5, ss. 398-399, 1969.

[265] Roska T.: Summed sensitivity invariants and their generation, EL, Vol. 4, No 14, ss. 281-282, 1968.

[266] Rosenblum A.L., Ghausi M.S.: Multiparameter sensitivity in active RC networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, ss. 592-599, 1971.

[267] Rozenvasser E.N., Jusupov R.M.: Čuvstwitelnost' sistem avtomatičeskogo upravlenija, Leningrad, Energia, 1969.

[268] Rozenvasser E.N., Jusupov R.M. [pod red.] : Metody teorii čuvstvitelnosti v avtomatičeskom upravlenie, Moskva, Energia, 1971.

[269] Rozenvasser E.N., Jusupov R.M.: Čuvstvitelnost' sistem upravlenija, Moskva, Nauka, 1981.

[270] Rutkowski J., Chojcan J.: Metoda obliczania rozpływów i współczynników wrażliwości w sieciach nieliniowych na przykładzie sieci wentylacyjnej, I K. Symp. Nauk Radiowych URSI, ss. 273-278, Warszawa 1975.

[271] Rutkowski J.: Heuristic network partitioning algorithm using the concept of loop index, IEE Proceddings, Vol. 31, Pt. 6, No 5, ss. 203--208, October 1984.

[272] Rutman R.S.: Statističeskij sintez sistem upravlenija optimalnych po niečuvstwitelnosti k izmienieniu parametrov, Izv. AN SSSR, Techniče skaja Kibernetika, No 2, 1965.

[273] Saito M., Ikeda K.: Gain and sensitivity in resistance networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-13, ss. 447-449, 1966.

[274] Šakirov M.A.: Preobrazovanija i diakoptika električeskich cepej, Leningrad, Izd. Leningradskogo Uniwersiteta, 1980.

[275] Sandberg I.W.: Linear multiloop feedback systems, BSTJ, Vol. 42, ss. 355-382, 1963.

[276] Schrajer-Jacobsen H., Madsen K.: Algorithms for worst-case tolerance optimization, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-26, No 9, ss. 775-783, 1979.

[277] Sangiovanni-Vincentelli A., Chen L.-K., Chua L.O.: An Efficient Heuristic Cluster Algorithm for Tearing Large-Scale Networks, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-24, No 12, ss. 709-717, December 1977.

[278] Saraga W.: Sensitivity of 2-nd-order Sallen-Key-type active RC filters, EL, Vol. 3, ss. 442-444, 1967.

[279] Schmidt G., Kasper R.: On minimum sensitivity networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-14, ss. 438-440, 1967.

[280] Schoeffler J.D.: The synthesis of minimum sensitivity networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-11, ss. 271-276, June 1964.

[281] Schwarz A.F.: Large-change and differential network sensitivity, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-24, No 11, ss. 662-663, 1977.

[282] Schwartz L.: Analiz, t. I, Moskva, Mir, 1972.

[283] Scultety L.: High Frequency Performance of Active RC Filters, SSCT 74, ss. 130-135, Praga 1974.

[284] Sebesta V.: Relations between tolerance fields in the frequency and time domain by random method, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, ss. 199--201, 1971.

[285] Semmelmen C.L., Walsh E.D., Daryanami G.T.: Linear circuits and statistical design, BSTJ, Vol. 50, No 4, ss. 1149-1171, 1971.

[286] Seth A.K., Roe D.H.: Computer analysis for the various order sensitivity coefficients in frequency domain, EL, Vol. 7, No 16, ss. 477-478, 1971.

[287] Seth A.K., Roe P.H.: Method for the computation of higher - order sensitivity coefficients for a linear networks: frequency - domain case, EL, Vol. 7, No 16, ss. 478-479, 1971.

[288] Seth A.K., Director S.W., Rohrer R.A.: Comments on time - domain network sensitivity using the adjoint network concept, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-19, ss. 367-370, 1972.

[289] Seth A.K., Roe P.H.: Higher derivative network sensitivities using adjoint network, Int. J. Cir. Theory Appl,, Vol. 1, No 3, ss. 215-226, 1973.

[290] Seth A.K., Roe P.H.: Hybrid formulation of explicit formulae for higher order network sensitivities, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-22, No 5, ss. 475-478, 1975.

[291] Shirakowa I., Temma T., Tzaki H.: Synthesis of minimum - sensitivity network through some classes of equivalent transformations, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-17, No 1, ss. 2-8, 1970.

[292] Sigorski W.P.: Analiza układów elektronicznych, Warszawa, WNT, 1965.

[293] Sigorskij V.P., Petrenko A.I.: Osnovy teorii elektronnych schem, Kijev, Technika, 1967.

[294] Sigorskij V.P., Petrenko A.I.: Algoritmy analiza elektronnych schem, Kijev, Technika, 1970.

[295] Siljak D.: Nonlinear systems. The Parameter Plane Analysis, New York, Wiley, 1969.

[296] Singhal K., Vlach J., Bryant P.R.: Efficient computation of large multiparameter - sensitivity, Int. J. Circuit Theory Appl., Vol. 1, No 3, ss. 237-247, 1973.

[297] Skalboe S.: A universal formula for network functions, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-22, No 1, ss. 58-60, 1975.

[298] Skalboe S.: True worst-case analysis of linear electrical circuits by interval arithmetic, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-26, ss. 874-879, 1979.

[299] Slipčenko V.G., Tabarnyj V.G.: Mašinnyje algoritmy i programmy modelirovanija elektronnych schem, Kijev, Technika, 1976.

[300] Smith W.E.: Element sensitivity and energy storage of passive impedance, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, No 3, ss. 337-342, 1971.

[301] Sobby M.I., Deif A.S.: The state-space approach to first-order perturbations in electrical networks, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-22, No 10, ss. 776-780, 1975.

[302] Soderstrand M.A., Mitra S.K.: Gain and sensitivity limitations of active RC filters, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-18, ss. 600-609, 1971.

[303] Soderstrand M.A., Mitra S.K.: Design of active filters with zero passive Q-sensitivity, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-20, ss. 289-293, 1973.

[304] Solymosi J., Tron T.: General interpretation of sensitivity functions, Int. J. Circuit Theory Appl., Vol. 4, No 1, ss. 75-80, 1976.

[305] Sorensen E.V.: General relations governing the exact sensitivity of linear networks, Proc. IEE, Vol. 114, ss. 1209-1212, September 1967.

[306] Special Issue on Automatic Fault Diagnosis, IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-26, July 1979.

[307] Stabilność, wrażliwość i pasywność, Praca zbiorowa, Warszawa, Wydawnictwa PW, Elektronika Nr 18, 1975.

[308] Stanclik J.: Metoda modelowania tranzystora bipolarnego w liniowym obszarze pracy, AE, T XXIV, Z. 2, ss. 313-324, 1974.

[309] Starzyk J.: Analiza topologiczna dużych układów elektronicznych, Warszawa Wyd. PW, Elektronika Z. 55, 1981.

[310] Stefański Cz.: Podejście symboliczne w analizie wrażliwości układów SLS, VIII KK TOiUE, ss. 255-260, Poznań 1985.

[311] Strycula E.C., Bose N.K.: Theory and applications of simultaneous realization of transfer and sensitivity functions, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-21, No 3, ss. 382-387, 1974.

[312] Styblíński M.A.: An extention of Rosenblum-Ghausi sensitivity measure to complex parameters, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-23, No 6, ss. 343-349, 1976.

[313] Styblíński M., Ogrodzki J.: Niektóre właściwości mało- i wielkoprzyrostowe funkcji biliniowych, Materiały I KK TOiUE, ss. 156-170, Podlesice 1977.

[314] Styblíński M.: Metody analizy i optymalizacji statystycznej układów elektronicznych, Prace Naukowe Pol. Warszawskiej Elektronika Z. 53, Warszawa, WPW, 1981.

[315] Styblíński M.: Metody analizy i optymalizacji tolerancji parametrów układów elektronicznych. Warszawa, WNT, 1981.

[316] Sud D.: Differential sensitivity after large changes in network elements, Int. J. Circuit Theory Appl., Vol. 3, No 2, ss. 211-216, 1975.

[317] Šumkov Ju.M., Eidel'nant V.M.: Programnoje obespecenije avtomatizirovannogo projektirovanija radioelektronnych schem, Kijev, Technika, 1984.

[318] Swamy M.N.S., Bhushan C., Thulasiraman K.: Simple sensitivity formulas in terms of immitance parameters, EL, Vol. 8, No 6, ss. 153-155, 1972.

[319] Swamy M.N.S., Bhushan C., Thulasiraman K.: Sensitivity invariants for nonlinear networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-19, No 6, s. 599, 1972.

[320] Swamy M.N.S., Bhushan C., Thulasiraman K.: Sensitivity invariants for active lumped distributed networks, EL, Vol. 8, No 2, ss. 26-27, 1972.

[321] Szynowski J.: Analiza tolerancji współczynnika CMRR wzmacniaczy pomiarowych, V KK TOiUE, ss. 172-176, Łódź 1982.

[322] Śliwa E.: Programy analizy tolerancji układów liniowych wykorzystujące metody topologiczne i dyskretyzację zmiennych losowych, V KK TOiUE ss, 167-171, Łódź, 1982.

[323] Śliwa E.: Hierarchiczna analiza topologiczna i jej zastosowanie do analizy i projektowania układów elektronicznych, Praca doktorska, Warszawa 1982.

[324] Śliwa E.: Efektywność analizy tolerancji dużych układów metodą dyskretyzacji zmiennych losowych, VII KK TOiUE, ss. 490-494, Kazimierz Dolny, 1984.

[325] Tadeusiewicz M., Kuczyński A.: Obliczanie wrażliwości w dziedzinie czasu obwodów nieliniowych, VIII KK TOiUE, ss. 387-391, Poznań 1985.

[326] Tatara I.: Czułości 2-go rzędu i wykorzystanie ich do analizy zmian parametrów filtrów aktywnych, Rozprawa doktorska, Gdańsk 1975.

[327] Tellegen B.D.H.: A general network theorem with applications, Philips Res. Rep, 7, ss. 259-269, 1952 oraz w [91].

[328] Temes G.C., Ebers R.M., Gadenz R.N.: Some applications of the adjoint network concept in frequency domain analysis and optimization, Comput. Aided Des., Vol. 4, No 3, ss. 129-134, 1972.

[329] Thorbjornsen A.R., Director S.W.: Computer - aided tolerance assignment for linear circuits with correlated elements, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-20, No 5, ss. 518-524, 1973.

[330] Tomovic R.: Sensitivity Analysis of Dynamic Systems, New York, McGraw Hill, 1964.

[331] Tomovic R., Vukobratowic M.: General Sensitivity Theory, New York, Elsevier, 1972.

[332] Tong K.Y.: Single fault location in linear analogue systems with variable sensitivity matrix, EL, Vol. 16, ss. 221-222, 1980.

[333] Trick T., Meyeda W.: Calculation of parameter values from node voltage measurements, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-26, No 7, ss. 464-474, 1979.

[334] Trochimenko Ja.K., Kaširskij I.S., Lovkij V.K.: Projektirovanie radiotechničeskich schem na inženernych ECVM, Kijev, Technika, 1976.

[335] Troop W.J., Peskin E.: The transfer function and sensitivity of a network with n variable elements IEEE Trans. on CT (Correspondence), Vol. CT-16, ss. 242-244, May 1969.

[336] Urbaś A., Osiowski J.: Związki między wrażliwościami parametrów biegunów układów aktywnych opisujących się wielomianami rzędu czwartego i piątego, VII KK TOiUE, ss. 327-332, Kazimierz Dolny 1984.

[337] Urbaś A.: Porównanie wrażliwości różnych układów syntezy sekcji bikwadratowych filtrów aktywnych, I Krajowe Symp. Nauk Radiowych URSI, ss. 150-153, Warszawa 1975.

[338] Vahldick H.: Aktive RC - Filter. Filter funktionen und deren Realisierung, München, R. Oldenburg, 1972.

[339] Vaidynathan P.P., Mitra S.K.: Low Passband sensitivity Digital Filters: A Generalized viewpoint and Synthesis procedures, Proc. IEEE, Vol. 72, No 4, ss. 404-423, April 1984.

[340] Vallese L.M.: Incremental versus adjoint models for network sensitivity analysis, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-21, No 1, ss. 46-49, 1974.

[341] Valtonen P.: Multiparameter sensitivity via a regression model, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-24, No 5, ss. 269-270, 1977.

[342] Veršin V.E., Dobroliubov L.V.: Statičeskij analiz eletričeskich cepej, Moskva, Energia, 1970.

[343] Vladimirov V.S.: Metody teorii funkcij mnogich kompleksnych peremennych, Moskva, Nauka, 1964.

[344] Westlake J.R.: A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations, N.Y., J. Wiley, 1968.

[345] Weyten L.: A useful sensitivity measure for second-order RC active filter design, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-23, ss. 506-508, 1976.

[346] Weyten L.: Lower bounds of the summed absolute and squared voltage transfer sensitivities in RLC networks, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-25, No 2, ss. 70-73, 1978.

[347] Wierzbicki A.: Modele i wrażliwości układów sterowania, Warszawa, WNT, 1977.

[348] Wing O.: Circuit Theory with Computer Methods, N.Y., Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1972.

[349] Wing O., Behar J.V.: Circuit design by minimization using the Hessian matrix, IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-21, ss. 643-649, 1974.

[350] Wolszczak B.: Komputerowe projektowanie układów elektronicznych, Elektronika, 11, ss. 499-501, 1973.

[351] Wolszczak B.: Analiza czułości układów elektronicznych za pomocą EMC, AE, t. XXIII, Z 1, ss. 191-199, 1974.

[352] Zabrodzki J.: Podstawy metodyczne i teoretyczne projektowania układów elektronicznych z uwzględnieniem rozrzutów wartości parametrów, Prace Naukowe Pol. Warszawskiej, Elektronika Z. 37, Warszawa, WPW, 1978.

[353] Zagajewski T.: Some applications of the general principle of similarity of electric networks, Bull. Acad. Pol. Sc. Ser. Tech., Vol. 20, Nr 6, ss. 499-504, 1972.

[354] Zeneb E.: Sensitivity relationships in linear networks and some observations on hybrid networks, IEEE Trans. on CT, Vol. CT-17, No 3, ss. 430-431, 1970.

[355] Zobrist G.W. [Ed.] : Network Computer Analysis, London, MacDonald Technical Scientific, 1969.

[356] Zubrzycki S.: Wykład z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, Warszawa, PWN, 1966.

[357] Żurada J.: Koncepcja sieci dołączonej w kompleksowej komputerowej analizie zmiennoprądowej aktywnych układów liniowych, I K. Symp. Nauk Radiowych URSI, ss. 282-284, Warszawa 1975.

NIEKTÓRE PROBLEMY WRAŻLIWOŚCI WYŻSZYCH RZĘDÓW UKŁADÓW ELEKTRONICZNYCH

S t r e s z c z e n i e

Praca jest poświęcona metodom analizy wrażliwości wyższych rzędów układów elektronicznych dla wymuszeń stałych i sinusoidalnych. Przedstawiono stan wiedzy w tej dziedzinie oraz podano nowe algorytmy i twierdzenia.

W rozdziale 2 przedstawiono definicje wrażliwości wyższych rzędów. Wyprowadzono związki między wrażliwościami na zmiany impedancji i admitancji. Wykazano, że nie jest ekonomiczne obliczanie wrażliwości 4 i wyższych rzędów.

Rozdział 3 jest poświęcony obliczaniu wrażliwości metodą obwodów dołączonych. Podano jakie obwody dołączone należy analizować. Wyprowadzono związki między współczynnikami wrażliwości i potencjałami węzłowymi tych obwodów oraz zaproponowano optymalny algorytm ich obliczania.

Inne metody obliczania wrażliwości przedstawiono w rozdziale 4. Wyprowadzone wzory na współczynniki wrażliwości podano w tablicach.

Analizie wrażliwości układów z wielobiegunnikami i układów zdekomponowanych poświęcony jest rozdział 5. Szczegółowo rozpatrzono układ łańcuchowy.

W rozdziale 6 przedstawiono twierdzenia o istnieniu niezmienników wrażliwości wyższych rzędów oraz wyprowadzono wzory określające wrażliwości funkcji układowych na zmianę pulsacji.

Porównanie efektywności numerycznej metod analitycznych obliczania wrażliwości przeprowadzono w rozdziale 7. Wykazano, że najefektywniejsza jest metoda obwodów dołączonych oraz zwrócono uwagę na efektywność dekompozycji.

Na niektóre zastosowania analizy wrażliwości wyższych rzędów wskazano w rozdziale 8 i w dodatku.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

Настоящая работа посвящена методом анализа чувствительности высшего порядка электронных систем для постоянных и синусоидальных возмущений. Представлено состояние науки в этой отрасли а также даны новые алгоритмы и теоремы.

Во 2-ой главе дано определение чувствительности высшего порядка. Выведены зависимости между чувствительностями для изменений импеданса и адмитанса. Показано, что нецелесообразно вести расчёты чувствительности 4-го и высших порядков.

Глава 3 посвящена расчётам чувствительности методом присоединённых контуров. Показано какие присоединённые контуры необходимо анализировать. Выведены зависимости между коэффициентами чувствительности и узловыми потенциалами этих контуров а также предложен оптимальный алгоритм их расчётов. Другие методы расчёта чувствительности представлены в 4 главе. Выведенные формулы для коэффициентов чувствительности представлены в таблицах.

Анализу чувствительности систем с многополюсниками и декомпонированных систем посвящена 5 глава. Подробно расмотрена цепная система.

В 6 главе даны теоремы о существовании инвариантов чувствительности высшего порядка а также выведены формулы, определяющие чувствительность системных функций на изменения пульсации.

В 7 главе дано сравнение машинной эффективности для аналитических методов расчёта чувствительности. Показано, что самым эффективным является метод присоединённых контуров. Обращено внимание на эфективность декомпозиции.

Прикладные проблемы анализа чувствительности высших порядков даны в главе 8 и в Дополнении.

SOME PROBLEMS OF HIGHER ORDER SENSITIVITY OF ELECTRONIC SYSTEMS

S u m m a r y

This work deals with methods of higher order sensitivity analysis for electronic systems with constant and sinusoidal inputs. The survey of state--of-art is presented and some new algorithm and theorems are given.

In the chapter 2 definitions of higher order sensitivities are presented. Sensitivities for changes of impedancies and admitancies are found. It has been proved that the computation of the forth and higher order sensitivities is not economic.

The chapter 3 is connected with the computation of the sensitivities by the use of the adjoint networks methods. The adjoint networks which should be analysed are proposed. Connections between sensitivity coefficients and node potentials of these circuits are found and an optimal algorithm of their computation.

Other method of sensitivity calculation are presented in the chapter 4. Formulaes for the sensitivity coefficients are found and placed in the tables.

Sensitivity analysis of systems with multipoles and decomposed systems is presented in the chapter 5. The ladder system is considered in details.

In the chapter 6 the existence theorem for higher order sensitivity invariants is presented and formulae defining sensitivities of the system functions for the pulsation changes are found.

Comparisons of numerical efficiency of analitycal methods of sensitivity computation are presented in the chapter 7. The method of the adjoint networks has been proved to be the most efficient. Attention has been paid to the efficiency of the decomposition. Some applications of the higher order sensitivity are indicated in the chapter 8 and Appendix.

WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:

44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN — Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.