

Andrzej Buchacz, Maciej Pasek, Józef Wojnarowski
Katedra Mechaniki, Robotów i Maszyn Roboczych Ciężkich
Politechnika Śląska

WYZNACZANIE PODATNOŚCI DYNAMICZNYCH UKŁADÓW PRĘTOWYCH W UJĘCIU GRAFÓW I WYZNACZNIKÓW LICZB STRUKTURALNYCH

Streszczenie. Przedstawiono metodę wyznaczania charakterystyk dynamicznych układów prętowych drgających wzdłużnie w funkcji wyznaczników podukładów. Jako modele przyjęto obciążone hipergrafy. Do algebraizacji procesu modelowania zastosowano liczby strukturalne i ich wyznaczniki.

Резюме. Представлен метод определения динамических характеристик продольно колеблющихся стержневых систем как функции определителей подсистем. В качестве моделей были приняты нагруженные гиперграфы. Для алгебраизации процесса моделирования используются структурные числа и их определители.

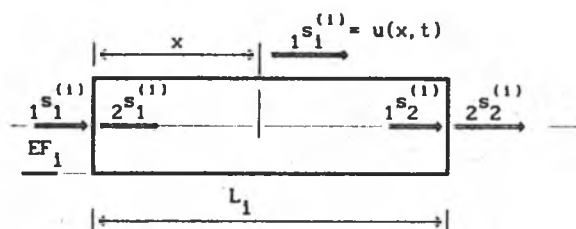
Summary. The method of determining system dynamic characteristic of lengthwisely vibrating bar systems in the function of subsystem determinants has been presented here. The loaded hypergraphs are used to build models.

1. WSTĘP

W pracy zaproponowano zmodyfikowaną metodę wyznaczania charakterystyk dynamicznych drgających układów wielocłonowych. Zastosowano sposób modelowania drgających prętów i układów prętowych o parametrach rozłożonych w sposób ciągły za pomocą obciążonych hipergrafów (por. np. [1, 2, 3, 4]). Uproszczono natomiast stosowany dotychczas algorytm wyznaczania podatności układu pomijając etap wyznaczania iloczynów wyznaczników układu w funkcji podatności podukładów. Ograniczyło to ilość wymaganych informacji o podukładach do znajomości wyznaczników podukładów o różnych warunkach brzegowych oraz skróciło czas obliczeń.

2. MODEL PRĘTA DRGAJĄCEGO WZDŁUŻNIE

Model pręta o stałym przekroju drgającego wzdlużnie pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Model pręta drgającego wzdlużnie

Fig. 1. The model of lengthwisely vibrating bar

$1s_1, 1s_2$ - przemieszczenia uogólnione końców pręta

$2s_1, 2s_2$ - siły uogólnione działające na końce pręta

L - długość pręta

F - pole przekroju poprzecznego pręta

E - moduł Younga tworzywa pręta

ρ - gęstość tworzywa pręta

Rozwiązanie równania drgań wzdlużnych pręta przyjęto w postaci:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad (1)$$

gdzie: C_1, C_2 - dowolne stałe,

$$\lambda^2 = \omega^2 \rho / E.$$

Związki pomiędzy siłami działającymi na końce pręta a przemieszczeniami końca pręta zapisano w postaci:

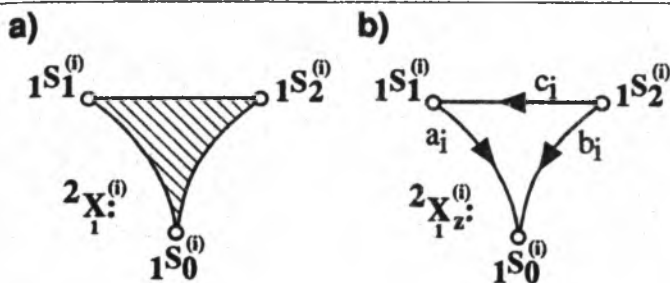
$$\begin{bmatrix} 1s_1^{(1)} \\ 1s_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^{(1)} & y_{12}^{(1)} \\ y_{21}^{(1)} & y_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2s_1^{(1)} \\ 2s_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdzie: $y_{11}^{(1)}, \dots, y_{22}^{(1)}$ podatności dynamiczne pręta drgającego wzdlużnie.

Pręt drgający wzdlużnie w dalszym ciągu modelowano hipergrafem (rys. 2a), natomiast graf zupełny hipergrafu przedstawiono na rys. 2b.

Do opisu krawędzi szkieletu zastosowano odpowiednie oznaczenia literowe:

$$a_1 \leftrightarrow Y_{11}^{(1)} \quad b_1 \leftrightarrow Y_{22}^{(1)} \quad c_1 \leftrightarrow Y_{12}^{(1)} = Y_{21}^{(1)}$$

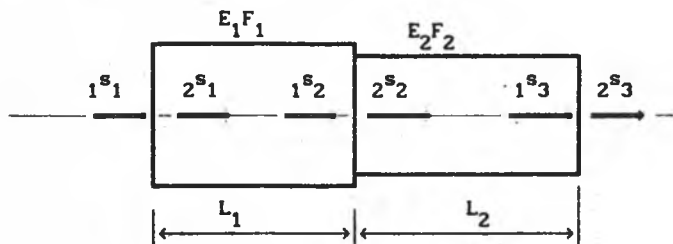


Rys.2. Hipergraf (a) i graf zupełny hipergrafu (b) modelu pręta drgającego wzdłużnie

Fig.2. Hypergraph (a) and completed graph of hypergraph (b) of the model of lengthwisely vibrating bar

2. WYZNACZENIE LICZBY STRUKTURALNEJ I WYZNACZNIKA HIPERGRAFU UKŁADU DWUPRĘTOWEGO

Hipergraf układu prętowego z rys.3. pokazano na rys.4a, jeden ze szkieletów hipergrafu na rys.4b.



Rys.3. Układ prętowy drgający wzdłużnie

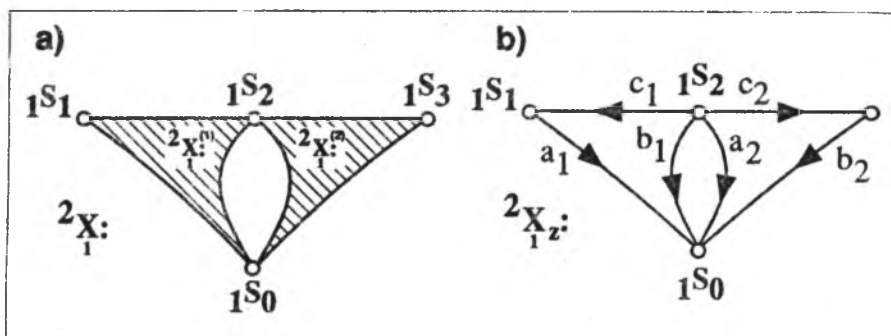
Fig.3. Lengthwisely vibrating bar system

Liczba dopełniająca szkieletu z rys. 4b jest następująca:

$$A_o^d = [b_1 \ a_2], \quad (3)$$

liczba strukturalna 2A hipergrafu 2X wynosi zatem:

$${}^2A = [A_o^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = [b_1 \ a_2] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1b} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix}. \quad (4)$$



Rys. 4. Hipergraf (a) i szkielet hipergrafu (b) modelu układu dwuprętowego drgającego wzdłużnie

Fig. 4. Hypergraph (a) and the skeleton of hypergraph (b) of the model of lengthwisely vibrating two - bar system

W tabelicy rzędów pochodnych [1] nie ma kolumn identycznych, a więc liczba strukturalna zupełna swobodnego układu dwuprętowego ma postać:

$$d = d_{1b} d_2 + d_1 d_{2a} \quad (5)$$

gdzie:

d_1 - liczba strukturalna zupełna podgrafu ${}^2X_1^{(1)}$,

d_2 - liczba strukturalna zupełna podgrafu ${}^2X_1^{(2)}$,

d - liczba strukturalna zupełna podgrafu ${}^2X_1^{(1)}$ ze zwartą krawędzią 1b,

d_{2a} - liczba strukturalna zupełna podgrafu ${}^2X_1^{(1)}$ ze zwartą krawędzią 2a.

Wyznacznik układu jest zatem równy:

$$D = D_{1b} D_2 + D_1 D_{2a} \quad (6)$$

gdzie:

D_1, D_2 - wyznaczniki podukładów 1 i 2,

D_{1b} - wyznacznik podgrafu $2_X^{(1)}$ ze zwartą krawędzią 1b,






D_{2a} - wyznacznik podgrafu $2_X^{(2)}$ ze zwartą krawędzią 2a.

3. WYZNACZNIKI PODUKŁADÓW

TABLICA 1

Wyliczono wyznaczniki podukładów, którymi są pręty drgające wzdłużnie, dla różnych warunków brzegowych i zestawiono je w tabelicy 1.

Znaki wyznaczników przyjęto zgodnie ze znakami odpowiednich podatności.

PODUKŁAD	WYZNACZNIK
 swobodny	$D_i = EF_1^2 \lambda_1^2 \sin \lambda_1 l_1$
 utwierdzony lewo- lub prawostronnie	$D_{ia} = D_{ib} = EF_1 \lambda_1 \cos \lambda_1 l_1$
 utwierdzony obustronnie	$D_{iab} = \sin \lambda_1 l_1$
 o zerowej długości	$D_{ic} = -EF_1 \lambda_1$
 utwierdzony o zerowej długości	$D_{iac} = D_{iabc} = 0$
$i=1, \dots, n$ - liczba prętów ukł. prętowego	

4. WYZNACZENIE RÓWNANIA CHARAKTERYSTYCZNEGO UKŁADU DWUPRĘTOWEGO

Równanie charakterystyczne układu otrzymano przyrównując wyznacznik (6) do zera:

$$D = D_{1b}D_2 + D_1D_{2a} = 0. \quad (7)$$

Podstawiając odpowiednie wyrażenia z tabelicy 2 otrzymano:

$$D = E_1\lambda_1 \cos\lambda_1 l_1 \times E_2\lambda_2 \sin\lambda_2 l_2 + E_2\lambda_2 \cos\lambda_2 l_2 \times E_1\lambda_1 \sin\lambda_1 l_1 = 0. \quad (8)$$

5. WYZNACZENIE PODATNOŚCI UKŁADU DWUPRĘTOWEGO

Aby wyznaczyć podatność $Y_{33} = S_3/2S_3$ układu wyznaczono liczbę strukturalną i wyznacznik grafu z rys. 1.4a ze zwartą krawędzią b_2 :

$$d_{b_2} = d_{1b}d_{2b} + d_1d_{2ab}. \quad (9)$$

$$D_{b_2} = D_{1b}D_{2b} + D_1D_{2ab}. \quad (10)$$

$$Y_{33} = \frac{D}{D_{b_2}} = \frac{D_{1b}D_2 + D_1D_{2a}}{D_{1b}D_{2b} + D_1D_{2ab}}. \quad (11)$$

W celu sprawdzenia poprawności wyrażenia (12) po założeniu: $EF_1 = EF_2 = EF$, $L_1 = L_2 = L$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, oraz przyjęciu odpowiednich wyznaczników z tabelicy 1 otrzymano:

$$Y_{33} = \frac{(-EF\lambda \cos\lambda L)^2 + (EF^2\lambda^2 \sin\lambda L)(-\sin\lambda L)}{-2EF^3\lambda^3 \cos\lambda L \sin\lambda L} = -\frac{\cos 2\lambda L}{EF\lambda \sin 2\lambda L} \quad (12)$$

Jest to podatność Y_{33} dynamiczna pręta swobodnego o długości $2L$.

6. WYZNACZANIE PODATNOŚCI PODUKŁADÓW ZA POMOCĄ WYZNACZNIKÓW

Podatności różnych podukładów prętowych można wyznaczyć korzystając z odpowiednich ilorazów wyznaczników zamieszczonych w tabelicy 1.

Przykładowo:

$$Y_a = \frac{D_a}{D} = \frac{-EF\lambda \cos\lambda L}{EF^2\lambda^2 \sin\lambda L} = -\frac{\cos\lambda L}{EF\lambda \sin\lambda L} \quad (13)$$

$$Y_c = \frac{D_c}{D} = \frac{-EF\lambda}{EF^2\lambda^2 \sin\lambda L} = -\frac{1}{EF\lambda \sin\lambda L} \quad (14)$$

$$Y_{ab} = \frac{D_{ab}}{D_a} = \frac{-\sin\lambda l}{-EF\lambda\sin\lambda l} = \frac{\sin\lambda l}{EF\lambda\cos\lambda l} \quad (15)$$

$$Y_{ca} = \frac{D_{ca}}{D_a} = 0. \quad (16)$$

LITERATURA

- [1] S. Bellert, H. Woźniacki: Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. Warszawa 1968.
- [2] J. Wojnarowski, A. Buchacz: Use of Hypergraphs and Complete Structural Numbers in the Analysis of Vibrating Beam Systems with Non-linearly Changing Cross Sections, VIBRATION ENGINEERING, Vol. 3, Numb. 4, Hemisphere Publishing Corp., (1989), p. 593-598
- [3] J. Wojnarowski: Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych, Gliwice 1977.
- [4] A. Buchacz, M. Pasek, J. Wojnarowski: Modelowanie systemów ogniwo manipulatorów robotów jako drgających układów ciągłych metodą hipergrafów. ZN Pol. Śląskiej, ser. Mechanika z. 103, Gliwice 1990, s. 43-46.

DETERMINING OF FLEXIBILITY DYNAMIC BAR SYSTEMS
WITH THE AID OF GRAPHS AND STRUCTURAL NUMBER DETERMINANT

In this paper is presented the modified method of determining dynamic characteristics for vibrating multiple-link systems. Vibrating bars and bar systems with continuously dispersed parameters are modelled with the aid of loaded hypergraphs (compare e.g. [1, 2, ..., 4]). Algorithm of determining the flexibility of the system is much simplified here since the stage of determining the products of determinants of the subsystems in different edge conditions has been omitted. Therefore the necessary amount of informations could be reduced as much as knowing only the determinants of subsystems which have different edge conditions and time needed to perform calculations could be shortened.

The model of lengthwisely vibrating bar is shown on Fig.1. The solution of the equation of the bar vibrations is expressed in the form (1). Next the lengthwisely vibrating bar is modelled by a hypergraph (Fig.2a). The completed graph of the hypergraph is shown on the Fig.2b. Hypergraph of the bar system shown on the Fig.3 is shown on the Fig.4a, and one of skeletons of the hypergraphs is shown on the Fig.4b.

The complementary number of the skeleton shown on the Fig.4b is represented by formula (3), the structural number 2A of the hypergraph 2X is represented by formula (4). In the table of ranks of derivatives there are no identical columns, so the completed structural number for free two-bar system is represented by formula (5). The determinants of subsystems (formed by lengthwisely vibrating bars) are assigned for different edge conditions and set together in the form of a table 2. Signs of the determinants are appointed respectively to appropriate flexibilities.

The characteristic equation of system (7) is obtained by equating the determinant (6) to zero. By substituting appropriate expressions from the table 2, the formula (9) is obtained.

The structural number (10) and determinant (11) of the graph shown on the Fig.4a with the compact rank b_2 is determined in order to determine flexibility $Y_{33} = S_3 / S_2$ of the system.

Flexibilities of different bar subsystems can be determined with the aid of appropriate quotiens of determinants inserted in the table 1 (formulas 14+17).