ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992

Seria: MECHANIKA z. 107 Nr kol. 1154

Andrzej Antoni Czajkowski, Krzysztof Wierzcholski
Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego,
Katedra Techniki Cieplnej Politechniki Szczecińskiej

ANALIZA NUMERYCZNA ROZKŁADU WARTOŚCI FUNKCJI PRĘDKOŚCI CIECZY NEWTONOWSKIEJ O NIEMONOTONICZNIE ZMIENNEJ LEPKOŚCI DYNAMICZNEJ W PRZEPŁYWACH WYSTĘPUJĄCYCH W MIESZALNIKACH WALCOWYCH

Streszczenie. Praca przedstawia analizę numeryczną ustalonego rozkładu prędkości cieczy newtonowskiej w mieszalniku walcowym dla różnych konfiguracji niemonotonicznie zmiennej lepkości w obszarze mieszania.

Резюме. В настоящей работе представлен численный анализ определённого распределения скорости ньютоновской жидкости в цилиндрическом смесителе для различных моделей немонотонных функций вязкости в пространстве смешания.

Summary. In the paper the numerical analysis of the steady flow for the Newtonian fluid of the non-monotone variable dynamic viscosity in the cylindrical mixer is presented.

1. WSTĘP

Przedmiotem badań jest stacjonarny przepływ newtonowskiej izotermicznej cieczy wywołany ruchem obrotowym cylindrycznego mieszadła w mieszalniku walcowym. Przyjmuje się laminarny przepływ cieczy nieściśliwej o stałej gęstości ρ z pominięciem sił masowych. Rozpatruje się niemonotonicznie zmienną lepkość dynamiczną mieszanej cieczy zależną od jej składu chemicznego. Nie uwzględnia się wpływu temperatury na zmiany wartości współczynnika lepkości dynamicznej cieczy.

Rozkład prędkości cieczy ma zasadniczy wpływ na parametry procesu mieszania cieczy w mieszalniku. Dlatego też celem badań jest ustalenie wpływu niemonotonicznie zmiennej lepkości dynamicznej cieczy na rozkład jej wartości prędkości w procesie mieszania w mieszalniku walcowym.

2. RÓWNANIA RUCHU

Przepływ opisany jest równaniem pędu:

$$\rho \frac{d\,\mathbf{v}}{d\,t} = \mathrm{Div}\,\mathbf{S}\,, \tag{1}$$

przy czym ρ oznacza gęstość płynu, t - czas, d - pochodną substancjalną oraz **S** - diadę o współrzędnych naprężeń T_{ij}.

Związki konstytutywne są określone wzorem:

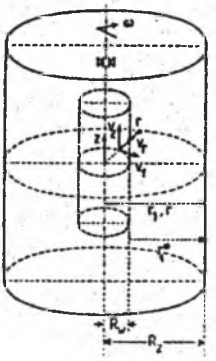
$$T_{ij} = -\,p\delta_{ij} + 2\mu\theta_{ij}\,, \tag{2}$$

gdzie i,j=1,2,3 oraz symbol p oznacza wartość ciśnienia, μ - współczynnik lepkości dynamicznej cieczy , δ_{ij} - symbol L.Kroneckera, θ_{ij} - współrzędne tensora prędkości deformacji natomiast wektor prędkości v ma składowe v_1, v_2, v_3 , które w układzie współrzędnych walcowych przyjmują postaci $v_1=v_\varphi$, $v_2=v_r$, $v_3=v_z$.

Równanie ciągłości ma następującą postać:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\,. \tag{3}$$

Rozpatruje się mieszalnik z walcowym wałkiem mieszającym jak na rys.1.



Rys.1. Mieszalnik walcowy z cylindrycznym wałkiem mieszającym

Fig.1. The cylindrical mixer with the cylindrical shaft

Przepływ mieszaniny wywołany jest ruchem obrotowym wałka, stąd

$$v_\varphi = v_\varphi(r), \qquad v_r(r) \equiv 0, \qquad v_z(r) \equiv 0, \tag{4}$$

a ponadto mamy $\mu=\mu(r)$, ciśnienie p=const. i ρ=const.

Podstawiając równania (2) i (3) do równania (1), uwzględniając znane związki geometryczne, pomijając pochodne lokalne i konwekcyjne wektora prędkości, a także przyjmując zmienną lepkość cieczy $\mu(r)$ uzyskuje się następujące równanie [1]:

$$\frac{d}{dr}\left(\mu\frac{d\,v_\varphi}{dr}\right) + \frac{1}{r}\mu\frac{d\,v_\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2}\mu\,v_\varphi - \frac{1}{r}\frac{d\,\mu}{dr}v_\varphi = 0, \tag{5}$$

w którym niewiadomą jest funkcja prędkości $v_\varphi = v_\varphi(r)$, dla $R_w \le r \le R_z$, gdzie R_w oznacza długość promienia wałka, a R_z - długość promienia mieszalnika.

W celu dokonania analizy numerycznej funkcji v_φ przyjmuje się następujące wielkości bezwymiarowe: $r_1 = r/R_w$ - współrzędna promieniowa, $\mu_1 = \mu/\mu_o$ - lepkość dynamiczna cieczy, $v_{\varphi_1} = v_\varphi/\omega R_w$ - współrzędna obwodowa wektora prędkości cieczy, gdzie symbol ω oznacza prędkość kątową wałka mieszającego, oraz $D = R_z/R_w$. Po wprowadzeniu tych bezwymiarowych wielkości do równania (5) i po dokonaniu przekształceń, uzyskuje się równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu w postaci bezwymiarowej o niewiadomej funkcji $v_{\varphi_1} = v_{\varphi_1}(r_1)$. Lepkość cieczy zmienia się niemonotonicznie w kierunku promieniowym, stąd $\mu_1 = \mu_1(r_1)$ dla $1 \le r_1 \le D$ oraz $1 < D < +\infty$.

Ciecz przylegająca do wałka ma prędkość ωR_w jego powierzchni, natomiast na ściankach naczynia prędkość cieczy zanika. Stąd warunki brzegowe dla prędkości w kierunkach promieniowych są następujące:

$$v_{\varphi_1}(r_1 = 1) = 1 \quad \text{oraz} \quad v_{\varphi_1}(r_1 = D) = 0\,. \tag{6}$$

Po nałożeniu warunków brzegowych (6) na rozwiązanie ogólne równania (5) otrzymuje się jego następujące rozwiązanie szczególne [2]:

$$v_{\varphi_1} = \left[r_1\int_{r_1}^{D}\frac{d\,r_2}{r_2^3\,\mu_1(r_2)}\right]\left[\int_{1}^{D}\frac{d\,r_2}{r_2^3\,\mu_1(r_2)}\right]^{-1}. \tag{7}$$

Gdy lepkość jest stała, tzn. gdy $\mu_1 = 1$, to rozwiązanie (7) otrzymuje znaną z literatury postać {[3], str.888} :

$$v_{\varphi_1}(r_1) = \frac{D}{D^2 - 1}\left(\frac{D}{r_1} - \frac{r_1}{D}\right). \tag{8}$$

3. ANALIZA NUMERYCZNA

W trakcie mieszania w mieszalniku walcowym dwóch lub większej ilości cieczy o różnych lepkościach, zwykle obserwuje się dwa przypadki zmian ekstremalnych wartości lepkości cieczy. Pierwszy dotyczy dyslokacji ekstremalnej wartości lepkości cieczy mieszanej od powierzchni wałka mieszającego w głąb cieczy, natomiast drugi dotyczy zmian (wzrostu lub spadku) ekstremalnej wartości cieczy mieszanej w ustalonej odległości od powierzchni wałka mieszającego. Do opisu tych zmian przyjmuje się następującą klasę funkcji lepkości dynamicznej:

$$\mu_1(r_1^*) = \frac{a\, r_1^*}{(r^*)^2 + b} + 1, \qquad r_1^* = \frac{r_1 - D}{D - 1}, \tag{9}$$

gdzie $0 \le r_1^* \le 1$, stałe rzeczywiste zmieniają wartości w przedziałach $-2\sqrt{b} < a < +\infty$, $0 < b < +\infty$ oraz $a = s\sqrt{b}$ dla dowolnego s. Symbol r_1^* określa nową bezwymiarową zmienną. Funkcje klasy (9) przyjmują przesuwające się ekstrema lokalne pokazane na rys.2A oraz wzrastające ekstrema jak na rys.3A. Po wprowadzeniu funkcji lepkości (9) do rozwiązania szczególnego (7) otrzymuje się dogodną do analizy numerycznej, następującą postać bezwymiarowej funkcji prędkości:

$$v_{\varphi_1}(r_1^*) = \left[(D-1)r_1^* + 1\right]\left\{1 - \left[\int_0^{r_1^*} W(r_1^*)\, dr_1^*\right]\left[\int_0^1 W(r_1^*)\, dr_1^*\right]^{-1}\right\}, \tag{10}$$

gdzie

$$W(r_1^*) = \left[(r_1^*)^2 + b\right]\left[(r_1^*)^2 + a r_1^* + b\right]^{-1}\left[(D-1)r_1^* + 1\right]^{-3}. \tag{10a}$$

Korzystając ze wzoru (9), przeprowadzono analizę numeryczną wartości funkcji lepkości przy zmiennej odległości ekstremum wartości lepkości od wałka dla a=3/4; 6/4; 9/4, przy b=1/64; 4/64; 9/64 oraz przy ustalonej odległości ekstremum wartości lepkości od wałka dla a=1; 3/2; 2, przy b=1/16. Dla stałej lepkości przyjęto a=0. Na podstawie wzoru (10) przeprowadzono analizę numeryczną wartości funkcji prędkości dla wymienionych zakresów wartości a oraz b. Uzyskane wyniki pokazano na rys.2A,B,C oraz na rys.3A,B,C. Obliczenia wykonano na komputerze IBM PC/AT 20+ w TP v.3.01.

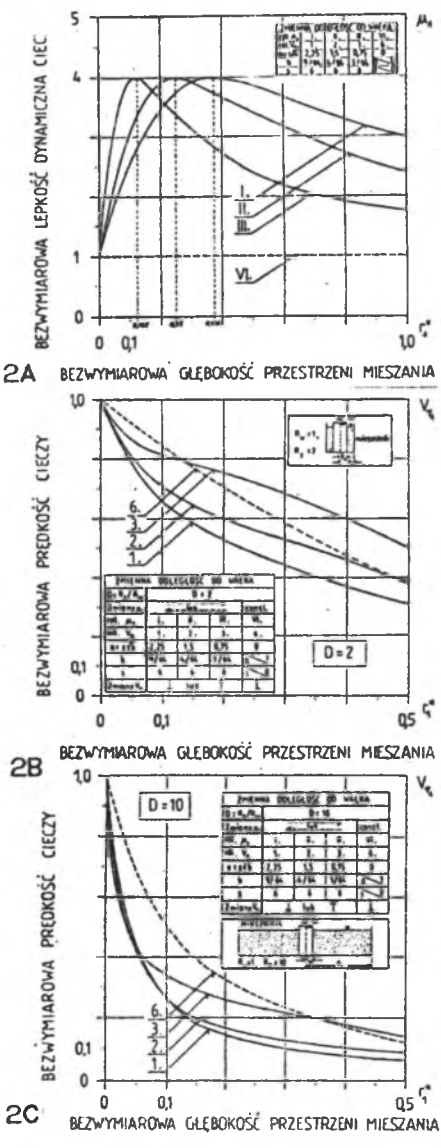
4. ZASTOSOWANIE I WNIOSKI

Przeprowadzone rozważania teoretyczne znajdują zastosowanie w mieszalnictwie w przypadku mieszania cieczy o zmiennych lepkościach. Mamy tu na uwadze mieszanie farb, lakierów z pokostem, olejów o różnych konsystencjach, mleka z płynnymi tłuszczami itp. W problemach mieszalnictwa wyznaczanie wartości prędkości cieczy nie jest celem ostatecznym, ale pozwala oszacować inne parametry pracy mieszalnika, takie jak naprężenia ścinające w cieczy lub jego sprawność. Należy rozumieć, że przedstawiona teoria nie jest doskonała, ponieważ zbliżanie się do rzeczywistości wymaga rozpatrywania cieczy o własnościach nienewtonowskich.

Wniosek 1. Zmiany rozkładów wartości prędkości cieczy newtonowskiej o zmiennej lepkości dynamicznej w mieszalniku walcowym w porównaniu z rozkładem wartości prędkości cieczy o stałej lepkości są widoczne w przypadku mieszalników o dużych promieniach (rys.2C i rys.3C). Dla mieszalników o małych promieniach niemonotoniczne zmiany wartości lepkości cieczy mieszanych wpływają niejednokrotnie na oscylacyjny lub mało istotny charakter zmian rozkładów wartości prędkości cieczy w otoczeniu wartości prędkości, jakie można by uzyskać dla cieczy o stałej lepkości (rys.2B i rys.3B).

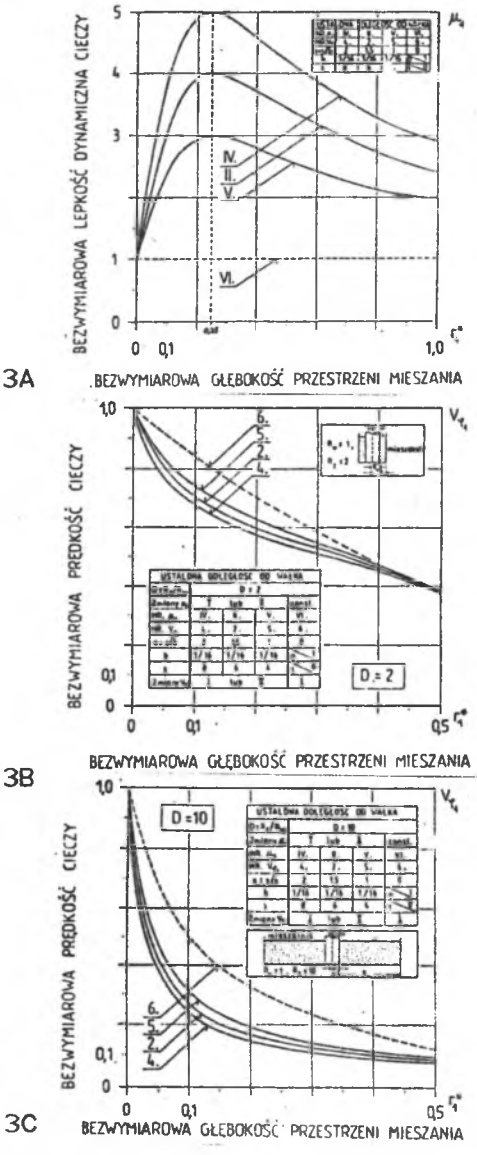
Wniosek 2. Oddalanie (przybliżanie) ekstremalnych wartości lepkości dynamicznej cieczy newtonowskiej od (do) wałka mieszającego powoduje szybszy (wolniejszy) spadek wartości prędkości tej cieczy w porównaniu ze spadkiem wartości jej prędkości, jaki uzyskuje się dla mieszania cieczy o stałej lepkości (krzywe III, II, I na rys.2A oraz krzywe 3, 2, 1 na rys.2B, C).

Wniosek 3. Wzrastanie ekstremalnej wartości lepkości dynamicznej cieczy newtonowskiej w ustalonej odległości od wałka mieszającego powoduje zmniejszanie spadku rozkładu wartości prędkości cieczy mieszanej w porównaniu z przypadkami rozkładów wartości prędkości cieczy, jakie uzyskuje się podczas mieszania cieczy o stałej lepkości (krzywe V, II, IV na rys.3A oraz krzywe 5, 2, 4 na rys.3B, C).



Rys. 2. Zmiany odległości ekstremum wartości lepkości od wałka (A), oraz odpowiadające im rozkłady prędkości cieczy (B, C)

Fig. 2. The changes of the distances of the extremal viscosity values from the shaft (A) and the correspondent distributions on the fluid velocities (B, C)



Rys. 3. Wzrosty ekstremalnych wartości lepkości w ustalonej odległości od wałka (A), oraz odpowiadające im rozkłady prędkości cieczy (B, C)

Fig. 3. The increases of the extremal viscosity values in the constant distance from the shaft (A) and the correspondent distributions on the fluid velocities (B, C)

LITERATURA

[1] Gryboś R.: Podstawy mechaniki płynów. PWN, Warszawa 1989.

[2] Kącki E.: Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki. WNT, Warszawa 1989.

[3] Brauer H.: Grundlagen der Einphasen und Mehrphasenströmungen. Verlag Sauerländer, Aarau 1971.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE VALUES OF A VELOCITY FUNCTION FOR THE NEWTONIAN FLUID WITH NON-MONOTONE VARIABLE DYNAMIC VISCOSITY IN FLOWS OCCURRING IN THE CYLINDRICAL MIXERS

The mixing process in a mixer means a dislocation of extreme values of a fluid viscosity during its mixing. There are two models of non-monotone dislocations and variables of the fluid dynamic viscosity in the present paper which you can see on the Fig.2A & 3A and also on the formula (9). The influence of those variables on the distributions of the fluid velocities has been shown on the Fig.2B,C & 3B,C, respectively, using the formula (10). The Newtonian fluid and steady laminar flow are considered in the paper. The problem of a fluid mixing is described by the equations of motion which reduced to the ordinary differential linear equation of the second order with a variable coefficients.